Ćwiczenia 6 – Rachunek predykatów - wskazówki rozwiązania

1. Rozważmy język, w którym dane są dwie stałe: a, b; dwa predykaty: p - jednoargumentowy i q - dwuargumentowy oraz żaden symbol funkcyjny. Poniżej przedstawiono interpretację:

$$I(p(a)) = 1,\ I(p(b)) = 0,\ I(q(a,a)) = 0,\ I(q(a,b)) = 1,\ I(q(b,a)) = 1,\ I(q(b,b)) = 0$$

określ, czy poniższe zdania są spełnione przez interpretację.

Aby sprawdzić spełnialność zdania przez daną interpretację, musimy sprawdzić prawdziwość zdania przy podstawionych za zmiennych stałych. Gdy sprawdzamy wartość dla predykatu $\forall$, to sprawdzamy, czy zdanie jest prawdziwe dla wszystkich podstawień stałej pod zmienną. Gdy sprawdzamy wartość dla predykatu $\exists$, to sprawdzamy, czy zdanie jest prawdziwe dla przynajmniej jednego podstawienia.

   (a) $\forall_X(p(X) \Rightarrow q(X,X))$ Sprawdzamy podstawienia: dla $X := a$ zdanie ma postać $p(a) \Rightarrow q(a,a)$, czyli $1 \Rightarrow 0$ fałsz, w związku z tym całe zdanie jest niespełnione;

   (b) $\forall_X p(X) \Rightarrow \forall_X q(X,X)$;

   (c) $\exists_X q(X,a) \wedge \exists_X q(X,b)$;

   (d) $\exists_X(q(X,a) \wedge q(X,b))$;

   (e) $\forall_X \exists_Y(q(X,Y))$;

   (f) $\exists_Y \forall_X(q(X,Y))$;

   (g) $\forall_X(p(X) \Rightarrow \exists_Y q(X,Y))$;

   (h) $\forall_X p(X) \Rightarrow \exists_Y q(Y,Y))$;

2. Które z następujących formuł rachunku predykatów są tautologiami:

   (a) $\forall_X p(X) \Rightarrow \exists_X p(X)$

   (b) $\exists p(X) \Rightarrow \forall_X p(X)$

   (c) $\forall_X p(X) \Rightarrow p(X)$

   (d) $\exists_X p(X) \Rightarrow p(X)$

   (e) $p(X) \Rightarrow \forall_X p(X)$

   (f) $p(X) \Rightarrow \exists_X p(X)$

   (g) $\forall_X \exists_Y p(X,Y) \Rightarrow \exists_Y \forall_X p(X,Y)$

   (h) $\forall_X(p(X) \Rightarrow q(X)) \Rightarrow \exists_X(p(X) \wedge q(X))$

   (i) $\forall_X(p(X) \Rightarrow q(X)) \wedge \exists_X(p(X) \wedge \neg q(X))$

   (j) $(\exists_X p(X) \Rightarrow \forall_X q(X)) \vee (\forall_X q(X) \Rightarrow \exists_X r(X))$

Postać normalna formuł Formuła jest w preneksowej koniunkcyjnej postaci normalnej wtw., gdy jest postaci:

$$Q_1X_1 \dots Q_nX_nM$$

gdzie Q_i są kwantyfikatorami, a M jest formułą w koniunkcyjnej postaci normalnej.

Przykład 1:
Następująca formuła jest w postaci normalnej:

$$\forall_Y \forall_Z([p(f(Y)) \vee \neg p(g(Z)) \vee q(Z)] \wedge [\neg q(Z) \vee \neg p(g(Z)) \vee q(Y)])$$

3. Rozważmy język z wykorzystanymi już dwoma stałymi a i b oraz funkcją stałą f. Wskaż poprawną postać klauzulową dla poniższych formuł:

   i $\exists_Y \forall_X p(X,Y)$:
   (a) $\{p(a,Y)\}$, (b) $\{p(c,Y)\}$, (c) $\{p(X,b)\}$, (d) $\{p(X,c)\}$, (e) $\{p(X,f(X))\}$, (f) $\{p(X,g(X))\}$.

   ii $\forall_X.\exists_Y p(X,Y)$:
   (a) $\{p(a,Y)\}$, (b) $\{p(c,Y)\}$, (c) $\{p(X,b)\}$, (d) $\{p(X,c)\}$, (e) $\{p(X,f(X))\}$, (f) $\{p(X,g(X))\}$.

   iii $\exists_X \exists_Y (p(X,Y) \wedge q(X,Y))$:
   (a) $\{p(a,b),q(a,b)\}$, (b) $\{p(a,b)\}$ i $\{q(a,b)\}$, (c) $\{p(c,d),q(c,d)\}$, (d) $\{p(c,d)\}$ i $\{q(c,d)\}$, (e) $\{p(X,Y),q(X,Y)\}$, (f) $\{p(X,Y)\}$ i $\{q(X,Y)\}$.

   iv $\forall_X \forall_Y (p(X,Y) \Rightarrow q(X))$:
   (a) $\{\neg p(a,b),q(a)\}$, (b) $\{\neg p(c,d),q(c)\}$, (c) $\{\neg p(X,b),q(X)\}$, (d) $\{\neg p(X,d),q(X)\}$, (e) $\{\neg p(X,Y),q(X)\}$, (f) $\{\neg p(X,g(X)),q(X)\}$.

   v $\forall_X (\exists_Y p(X,Y) \Rightarrow q(X))$:
   (a) $\{\neg p(a,b),q(a)\}$, (b) $\{\neg p(c,d),q(c)\}$, (c) $\{\neg p(X,b),q(X)\}$, (d) $\{\neg p(X,d),q(X)\}$, (e) $\{\neg p(X,Y),q(X)\}$, (f) $\{\neg p(X,g(X)),q(X)\}$.

4. Sprowadź do postaci klauzulowej:

   (a) $\forall_X p(X) \vee \forall_X q(X)$;

   (b) $\exists_X p(X) \wedge \exists_X q(X)$;

   (c) $\forall_X p(X) \Rightarrow \exists_X q(X)$;

   (d) $\forall_X (p(X) \Rightarrow \exists_Y q(Y))$;

   (e) $\neg\exists_X [p(X) \wedge \exists_Y q(X,Y)]$;

   (f) $\forall_X (p(X) \Rightarrow q(X)) \Rightarrow (\forall_Y p(Y) \Rightarrow \forall_Z q(Z))$;

   (g) $\exists_X \forall_Y r(X,Y) \Rightarrow \forall_Y \exists_X r(X,Y)$;

5. Wskaż rezolwentę poniższych klauzul:

   i $\{p(X,f(X)),q(X)\}$ i $\{\neg p(a,Y),r(Y)\}$:
   (a) $\{q(X),r(Y)\}$, (b) $\{q(a),r(f(X))\}$, (c) $\{q(a),r(f(a))\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

   ii $\{p(X,b),q(X)\}$ i $\{\neg p(a,X),r(X)\}$:
   (a) $\{q(X),r(Y)\}$, (b) $\{q(b),r(a)\}$, (c) $\{q(a),r(b)\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

iii $\{p(X), p(a), q(X)\}$ i $\{\neg p(Y), r(Y)\}$:
(a) $\{p(X), q(X), r(X)\}$, (b) $\{p(a), q(X), r(X)\}$, (c) $\{p(a), q(a), r(a)\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

iv $\{p(X), p(a), q(X)\}$ i $\{\neg p(Y), r(Y)\}$:
(a) $\{q(X), r(X)\}$, (b) $\{q(X), r(a)\}$, (c) $\{q(a), r(a)\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

v $\{p(a), q(Y)\}$ i $\{\neg p(X), \neg q(b)\}$ -
(a) $\{q(b), \neg q(b)\}$, (b) $\{q(Y), \neg q(b)\}$, (c) $\{\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

vi $\{p(X), q(X, X)\}$ i $\{\neg q(a, f(a))\}$:
(a) $\{p(a)\}$, (b) $\{p(f(a))\}$, (c) $\{p(a), p(f(a))\}$, (d) nie istnieje rezolwenta.

6. Pokaż, że podany poniżej w punktach zbiór klauzul jest niespełnialny

(a) $\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X, f(X))$,

(b) $\neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X))$,

(c) $t(a)$,

(d) $p(a)$

(e) $\neg r(a, Y) \vee t(Y)$,

(f) $\neg t(X) \vee \neg q(X)$,

(g) $\neg t(X) \vee \neg s(X)$;

ŹRÓDŁA

1. Igor A. Ławrow, Łarisa L. Maksimowa: Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów, PWN 2004.
2. Zbigniew Huzar: Elementy logiki i teorii mnogości dla informatyków, Poznań 2007.
3. Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz: Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, PWN 2000.
4. Michael Genesereth, Eric Kao: Introduction to Logic. http://arrogant.stanford.edu/intrologic/chapters/cover.html.