Dr Bogdan Ćmiel, A3-A4 p.311a

cmielbog@mat.agh.edu.pl

http://home.agh.edu.pl/~cmielbog/

Podręczniki:

- **Gewert M, Skoczylas Z. Analiza matematyczna 1 i 2. Ofic.wyd. GIS (dla studentów Pol.Wrocł.) Definicje twierdzenia i wzory**
- **Gewert M, Skoczylas Z. Elementy analizy wektorowej. Ofic.wyd. GIS**
- Rudin W. Podstawy analizy matematycznej
- Leja F. Rachunek różniczkowy i całkowy

Zbiory zadań:

- **Gewert M, Skoczylas Z. Analiza matematyczna 1 i 2. Ofic.wyd. GIS (dla studentów Pol.Wrocł.) Przykłady i zadania, Kolokwia i egzaminy**
- Banaś J., Wędrychowicz S. Zbiór zadań z analizy matematycznej
- Krysicki W. Analiza matematyczna w zadaniach cz. I i II
- Stankiewicz W. Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych cz. I (a i b) i II

WYBRANE PORZĄDKOWE WŁASNOŚCI ZBIORÓW LICZBOWYCH

$(N, \leq)$ jest dobrze uporządkowany $\Leftrightarrow \forall_{A\subset N} \exists_{nmA}$

(tzn .w każdym podzbiorze zbioru N istnieje element najmniejszy)

$(Q, \leq)$ jest gęsto uporządkowany $\Leftrightarrow \forall_{\substack{x,y\in Q \\ x<y}} \exists_{z\in Q} : x < z < y$ (uwaga $a<b \Leftrightarrow a \leq b$ i $a\neq b$)

(tzn. pomiędzy dwoma liczbami wymiernymi zawsze można znaleźć trzecią liczbę wymierną)

$(R, \leq)$ jest uporządkowany w sposób ciągły :

Zasada ciągłości zbioru liczb rzeczywistych

- każdy ograniczony od góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kres górny
- każdy ograniczony od dołu podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kres dolny.

Definicje kresów podzbiorów zbioru R

$$a = supA \Leftrightarrow \begin{cases} \forall_{x\in A} : x \leq a \\ \forall_{\varepsilon>0} \exists_{y\in A} \; a - \varepsilon \leq y \end{cases} \qquad a = infA \Leftrightarrow \begin{cases} \forall_{x\in A} : x \geq a \\ \forall_{\varepsilon>0} \exists_{y\in A} \; a + \varepsilon \geq y \end{cases}$$

Zastosowanie zasady ciągłości do zdefiniowania potęgi o dowolnym wykładniku $a\in R_+$.

- potęga o wykładniku całkowitym $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n-razy}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$
- potęga o wykładniku wymiernym $a^{\frac{1}{n}} = \inf\{x \in Q : x > 0 \wedge x^n \geq a\}$; $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$
- potęga o wykładniku rzeczywistym $t \in R$

  dla $a>1$ $a^t = \inf\{a^x : x \in Q \wedge x \geq t\}$; dla $0<a<1$ $a^t = (\frac{1}{a})^{-t}$

Uwagi o zasadzie indukcji matematycznej $\{T(n_0) \wedge (\forall_{n\geq n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1))\} \Rightarrow \forall_{n\geq n_0} T(n)$

Zasada indukcji matematycznej jest konsekwencją dobrego uporządkowaniu zbioru *N* liczb naturalnych, czyli w każdym zbiorze dobrze uporządkowanym prawdziwa jest zasada indukcji matematycznej.

Dowód. Załóżmy, że $\{T(n_0) \wedge (\forall_{n\geq n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1))\}$, czyli że prawdziwy jest poprzednik implikacji w zasadzie indukcji matematycznej. Niech $Z=\{n\geq n_0$: $T(n)$ nie jest prawdziwa$\}$. Jeżeli $Z=\emptyset$, to zachodzi zasada indukcji matematycznej. Jeżeli $Z\neq\emptyset$, to w Z istnieje element najmniejszy (dobre uporządkowanie Z) powiedzmy $m_0\in Z$. **Uwaga**.: $m_0>n_0$ bo $T(n_0)$ jest prawdziwe. Ponieważ $m_0-1\notin Z$ więc prawdziwe jest $T(m_0-1)$ a z założenia otrzymujemy, że prawdziwe jest $T(m_0)$, czyli $m_0\notin Z$ – **sprzeczność !**

RODZINY ZBIORÓW I DZIAŁANIA UOGÓLNIONE

X – ustalony zbiór (przestrzeń), $T\neq\phi$ niepusty zbiór indeksów. Funkcja $T\ni t\to A_t \subset X$ określa rodzinę zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ indeksowaną indeksami t ze zbioru indeksów T.

Suma (unia) **zbiorów rodziny** $\{A_t\}_{t\in T}$:

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{x \in X : \exists_{t\in T} x \in A_t\}$$

to zbiór wszystkich elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru A_t z rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$

Iloczyn (przekrój-część wspólna) **zbiorów rodziny** $\{A_t\}_{t\in T}$:

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{x \in X : \forall_{t\in T} x \in A_t\}$$

to zbiór wszystkich elementów, które należą do wszystkich zbiorów rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$

Def. Granicą górną $\limsup_{n\to\infty} A_n$ ciągu zbiorów $(A_n)_{n\in N}$ nazywamy zbiór $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

Granicą dolna $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ciągu zbiorów $(A_n)_{n\in N}$ nazywamy zbiór $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

Łatwo zauważyć, że

$$x\in \limsup_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \forall\, n\in N \;\; \exists\, m\geq n \;\; x\in A_m ,$$

co oznacza, że granica górna ciągu zbiorów jest zbiorem składającym się z elementów, które należą do nieskończenie wielu zbiorów ciągu $(A_n)_{n\in N}$.

Podobnie

$$x\in \liminf_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists\, n\in N \;\; \forall\, m\geq n \;\; x\in A_m ,$$

co oznacza, że granica dolna ciągu zbiorów jest zbiorem składającym się z elementów, które należą do prawie wszystkich zbiorów ciągu $(A_n)_{n\in N}$.

Bezpośrednio z definicji widać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Jeżeli $\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \lim_{n\to\infty}\sup A_n$, to mówimy, że ciąg zbiorów $(A_n)_{n\in IN}$ jest zbieżny do granicy $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\inf A_n = \lim_{n\to\infty}\sup A_n$.

Przykład. $A_n=(\frac{-1}{n}, 1+\frac{(-1)^n}{n})$, $\lim_{n\to\infty}\inf A_n=[0,1)$, $\lim_{n\to\infty}\sup A_n=[0,1]$.

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Intuicja Para uporządkowana (x,y) to zbiór dwuelementowy w którym określono kolejność elementów- formalna definicja- później.

Niech A i B będą dwoma niepustymi zbiorami

Def: Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A\neq\phi$, $B\neq\phi$; nazywamy zbiór

$$A\times B=\{(x,y): x\in A \wedge y\in B\}$$

czyli zbiór par uporządkowanych, takich, że pierwszy element pary należy do pierwszego zbioru, a drugi element do drugiego zbioru.

Przykład. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{\bullet,*\}$, $A\times B=\{(1,\bullet),(2,\bullet),(3,\bullet),(1,*),(2,*),(3,*)\}$

FUNKCJE

Wiadomo, że liczbę rzeczywistą można identyfikować z punktem na osi liczbowej a parę liczb z punktem na płaszczyźnie. Podobnie funkcję można identyfikować z jej wykresem. Prowadzi to do następującej definicji:

Def. Przez funkcję, której argumenty pochodzą ze zbioru X, a wartości z Y rozumiemy podzbiór $f\subset X\times Y$ iloczynu kartezjańskiego spełniający warunek

$$\forall_{x\in X}\forall_{y_1,y_2\in Y}\ \{(x,y_1)\in f \wedge (x,y_2)\in f\} \Rightarrow y_1=y_2,$$

czyli każdemu elementowi zbioru X odpowiada co najwyżej jeden element zbioru Y (warunek prawostronnej jednoznaczności)

Różne zapisy: $(x,y)\in f \Leftrightarrow xfy \Leftrightarrow y=f(x)$

Uwagi o mnogościowej definicji pary (a,b)

Para to ciąg 2-elementowy $\rightarrow$ ciąg to funkcja na zbiorze $N \rightarrow$ funkcja to relacja prawostronnie jednoznaczna $\rightarrow$ relacja to podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\rightarrow$ iloczyn kartezjański to zbiór par (błędne koło !- potrzebna formalna „zewnętrzna" definicja).

Definicja Kuratowskiego pary uporządkowanej (a,b) : $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

Zdefiniowana powyżej para spełnia podstawowy warunek : $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

Pojęcia związane z funkcjami

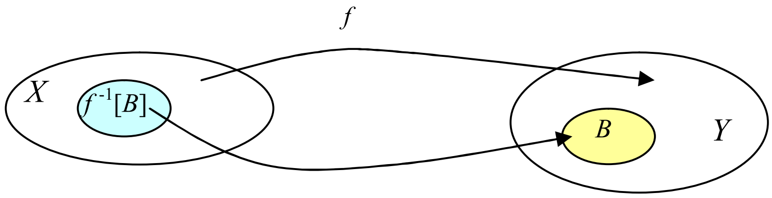
Dziedzina $D_f=\{x\in X: \exists_{y\in Y}\ \ y=f(x)\}$

Przeciwdziedzina $R_f = \{y \in Y : \exists_{x \in X} \quad y = f(x)\}$

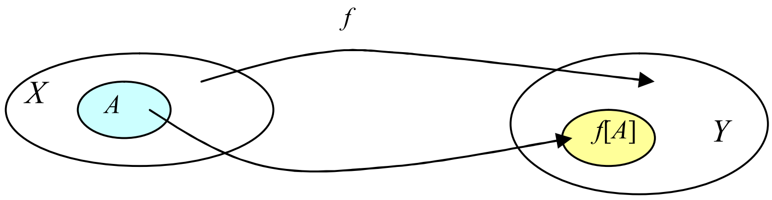
Niech $f : X \to Y$ i $D_f = X$. Wówczas funkcję nazywamy **odwzorowaniem** zbioru X

Def. (**obcięcie funkcji**) Jeżeli $f : X \to Y$, $A \subset X$, $A \neq \phi$ to obcięciem funkcji f do zbioru A nazywamy funkcję $f_{|A} : A \to Y$, taką że $\forall x \in A \; f_{|A}(x) = f(x)$ (zawężenie dziedziny)

Def. Przeciwobrazem zbioru $B \subset Y$ (poprzez funkcję f) nazywamy zbiór $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$



Def. Obrazem zbioru $A \subset X$ (poprzez funkcję f) nazywamy zbiór $f[A] = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\} \subset Y$



Przeciwobraz zachowuje wszystkie operacje mnogościowe, a obraz tylko niektóre.

Przeciwobraz	Obraz
$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$	$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2]$
$f^{-1}[\bigcup_{t \in T} B_t] = \bigcup_{t \in T} f^{-1}[B_t]$	$f[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f[A_t]$
$f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$	$f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subset \bigcap_{t \in T} f[A_t]$

Np: $f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$, bo $x \in f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$. Rzeczywiście

$$x \in f^{-1}[\bigcap_{t \in T} B_t] \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{t \in T} B_t \Leftrightarrow \forall t \in T : f(x) \in B_t \Leftrightarrow$$
$$\forall t \in T : x \in f^{-1}[B_t] \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}[B_t]$$

Podobnie $f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subset \bigcap_{t \in T} f[A_t]$, bo

$$y \in f[\bigcap_{t \in T} A_t] \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{t \in T} A_t : y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in X \;\; \forall t \in T : x \in A_t \wedge y = f(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t \in T \;\; \exists x \in X \; : x \in A_t \wedge y = f(x) \Leftrightarrow \forall t \in T \;\; \exists x \in A_t : y = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall t \in T \;\; y \in f[A_t] \Leftrightarrow y \in \bigcap_{t \in T} f[A_t]$$

Uwaga. Implikacji w powyższym rozumowaniu nie można zastąpić równoważnością, gdyż

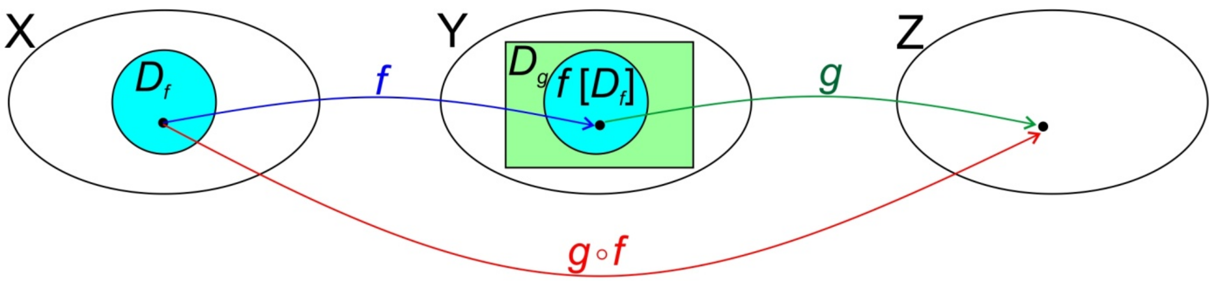
$$\exists t \in T \;\; \forall x \in X \;\; \varphi(x,t) \Rightarrow \forall x \in X \;\; \exists t \in T \;\; \varphi(x,t)$$ (por. wykład z algebry).

Ważne typy funkcji (odwzorowań): ($f: X \to Y$, $D_f = X$)

- f jest różnowartościowa (injekcja) $\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2 \in X} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f jest funkcją „na" (surjekcją) $\Leftrightarrow f[X] = Y$ (każde wartości z zbioru Y jest funkcyjnie osiągalna)
- f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną (bijekcją) $\Leftrightarrow$ jest injekcją i surjekcją jednocześnie

Złożenie funkcji:

$$f: X \supset D_f \to Y, \quad g: Y \supset D_g \to Z \quad , \quad R_f = f[D_f] \subset D_g$$
$$(g \circ f): X \ni x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Funkcja odwrotna

Jeśli funkcja $f: X \to Y$ jest bijekcją, to można zdefiniować funkcję odwrotną $f^{-1}: Y \to X$ do funkcji $f: X \to Y$ wzorem $f^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in f\}$. Innymi słowy

$$f^{-1}(y) \stackrel{df}{=} x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ gdzie } x \in X, \ y \in Y .$$

FUNKCJE RZECZYWISTE to funkcje o wartościach w R

Niech f: $X \to R$ i g: $X \to R$ będą funkcjami rzeczywistymi określonym na tym samym zbiorze X.

Def. (Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji rzeczywistych)

$$(f+g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{df}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \qquad \text{zał. } \forall x \in X \ g(x) \neq 0$$

Def. Funkcja f jest **ograniczona z góry** gdy $\exists M \in R : \forall x \in X \quad f(x) \le M$

Funkcja f jest **ograniczona z dołu** gdy $\exists m \in R : \forall x \in X \quad f(x) \ge m$

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej.

Niech $f: R \supset D \to R$ będzie funkcją rzeczywista zmiennej rzeczywistej

Def:. f jest **rosnąca** w D $\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f jest **niemalejąca** w D $\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2\in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

f jest **malejąca** w D $\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2\in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f jest **nierosnąca** w D $\Leftrightarrow \forall_{x_1,x_2\in D} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

Powyższe funkcje nazywamy funkcjami **monotonicznymi**

Funkcje okresowe

Def. f jest **okresowa** $\Leftrightarrow \exists_{t>0}\forall_{x\in D} \ (x \pm t) \in D \wedge f(x \pm t) = f(x)$

Dodatnią liczbę $T = nm\{t > 0 : \forall_{t\in D} (x \pm t) \in D \wedge f(x \pm t) = f(x)\}$ }>0 (o ile istnieje) nazywamy **okresem podstawowym**.

Uwaga. Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in Q \\ 0 \text{ dla } x \notin Q \end{cases}$ jest okresowa, a nie ma okresu podstawowego (jest **mikrookresowa**).

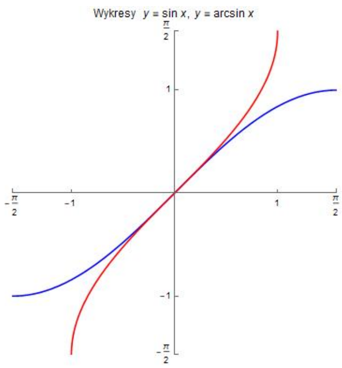
Def: f jest **parzysta** $\Leftrightarrow \forall_{x\in D} \ -x \in D \wedge f(-x) = f(x)$

f jest **nieparzysta** $\Leftrightarrow \forall_{x\in D} \ -x \in D \wedge f(-x) = -f(x)$

Funkcje cyklometryczne

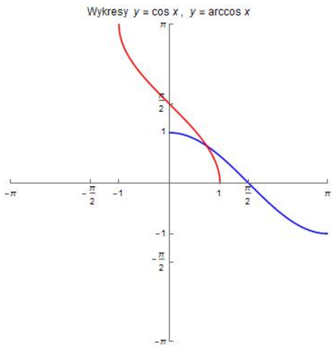
Rozważmy funkcję $y = \sin x$ obciętą do przedziału $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji sin, to funkcja arcsin. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \\ x \in [-1,1] \ , \ y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



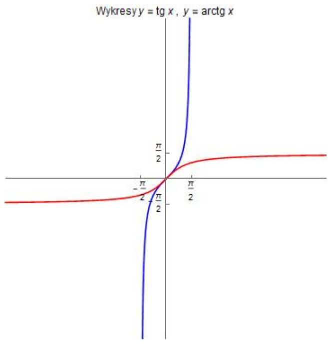
Rozważmy funkcję $y = \cos x$ obciętą do przedziału $[0, \pi]$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji cos, to funkcja arccos. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \\ x \in [-1,1] \ , \ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



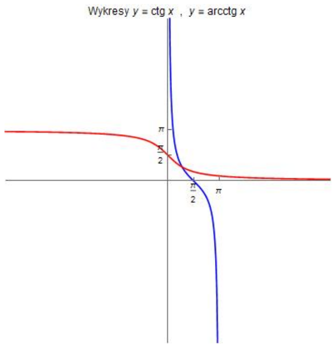
Rozważmy funkcję $y = \operatorname{tg} x$ obciętą do przedziału $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji cos, to funkcja arctg. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \\ \quad y \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



Rozważmy funkcję $y = \operatorname{ctg} x$ obciętą do przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$. Funkcja odwrotna do tej obciętej funkcji ctg, to funkcja arcctg. Dokładniej

$$\begin{cases} y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \\ \quad y \in (0, \pi) \end{cases}$$



Funkcje elementarne to funkcje stałe, potęgowe, wykładnicze, trygonometryczne, odwrotne do nich logarytmiczne, cyklometryczne, oraz takie funkcje, które można otrzymać z powyższych przez skończoną ilość działań arytmetycznych oraz złożeń.

Funkcjami elementarnymi są więc wielomiany i funkcje wymierne.