Algebra Liniowa i Geometria Analityczna
zestaw 6

ZADANIE 1 Dla podanej macierzy A wyznacz wartości własne, wektory własne, wektory główne, macierz Jordana J oraz macierz przejścia (macierz P, taką że $A = PJP^{-1}$):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Zwróć szczególną uwagę na przypadki f), g), i), j).

ZADANIE 2 Znajdź wartości i wektory własne:

a) odbicia symetrycznego względem prostej l przechodzącej przez 0 w $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$,

b) przeskalowania o a i b wzdłuż nierównoległych prostych odpowiednio l_1 i l_2 przechodzących przez 0 w $\mathbb{R}^2$,

c) obrotu o kąt φ wokół 0 w $\mathbb{R}^2$,

d) obrotu o kąt φ wokół prostej l przechodzącej przez 0 w $\mathbb{R}^3$,

e) $F : \Pi_3 \ni p(x) \mapsto p'(x)x \in \Pi_3$.

ZADANIE 3∘ Mówimy, że macierze $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ są podobne, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, taka że $A = PBP^{-1}$. Udowodnij, że macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne.

ZADANIE 4 Dane są macierze $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wiedząc, że $A = PBP^{-1}$, udowodnij, że $A^k = PB^kP^{-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$.

ZADANIE 5 Dana jest przestrzeń wektorowa V nad ciałem K, odwzorowanie liniowe $F : V \to V$, skalar $\lambda \in K$ oraz zbiór $V_\lambda = \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$. Udowodnij, że V_λ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V oraz $\forall v \in V_\lambda :\ F(v) \in V_\lambda$.

ZADANIE 6 Dana jest macierz A, skalar λ oraz wektor v spełniające: $Av = \lambda v$. Oblicz $A^k v$.

ZADANIE 7∘ Wiedząc, że wielomian charakterystyczny macierzy A równy jest $\varphi_A(s) = s^9 - \frac{2}{9}s^8 - s^5 - \frac{2}{9}s^4 + s - \frac{2}{9}$, oblicz wymiar, rząd, wyznacznik i ślad macierzy A.

ZADANIE 8∘ Wiedząc, że s jest wartością własną macierzy A, a v - odpowiadającym jej wektorem własnym, znajdź wartość własną i wektor własny macierzy:

a) αA, dla $\alpha \in \mathbb{C}$,

b) A^k, dla $k \in \mathbb{N}$,

c) $A + tI$, dla $t \in \mathbb{C}$,

d) $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i$, dla $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$

e) A^{-k}, dla $k \in \mathbb{N}$ oraz A - nieosobliwej,

ZADANIE 9∘ Dane są macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, przy czym przynajmniej jedna z nich jest nieosobliwa. Udowodnij, że s jest wartością własną macierzy AB wtedy i tylko wtedy, gdy s jest wartością własną macierzy BA.

ZADANIE 10 Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz:

a)$\circ$ A^{2017}

b)* $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} A^i$, wiedząc, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi: $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} t^i = e^t$

ZADANIE 11* Dana jest macierz A. Wiedząc, że jej jedyną wartością własną jest 0, udowodnij, że A jest nilpotenta (tj. $\exists k \in \mathbb{N}: \ A^k = 0$).

ZADANIE 12* Dana jest macierz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mająca n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Niech λ_1 będzie wartością własną o największym module, tj. $\forall j \neq 1 : \ |\lambda_1| > |\lambda_j|$. Udowodnij, że dla każdego $v \in \mathbb{C}^n$ ciąg $\lambda_1^{-k} A^k v$ jest zbieżny i jego granica u spełnia: $Au = \lambda_1 u$.