LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
(Graph Theory)

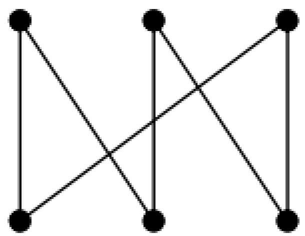
CHƯƠNG 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Định nghĩa đồ thị
2. Các thuật ngữ cơ bản
3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

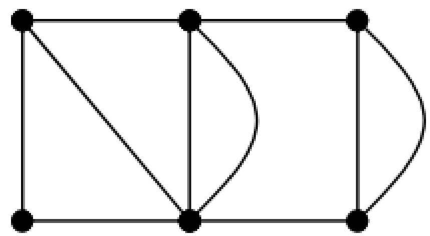
1. Định nghĩa đồ thị

- **Định nghĩa 1:** *Đơn đồ thị vô hướng G=(V,E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.*

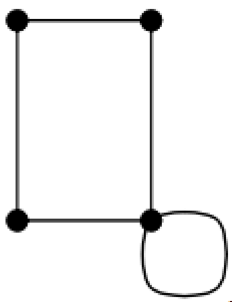
Ví dụ:



a. Đơn đồ thị vô hướng



b. Không phải đơn đồ thị vô hướng do có các cặp cạnh nối cùng một cặp đỉnh



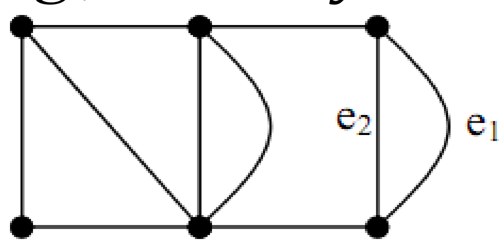
c. Không phải đơn đồ thị vô hướng do có cạnh nối một đỉnh với chính nó.

1. Định nghĩa đồ thị

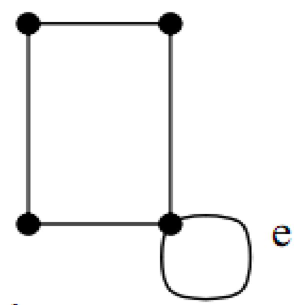
- **Định nghĩa 2:** *Đa đồ thị vô hướng G= (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là* ***bộ*** *các cặp không có thứ tự của V gọi là các cạnh.*

  (một bộ có thể chứa nhiều phần tử trùng nhau)

  - *Các cạnh nối cùng một cặp đỉnh được gọi là các cạnh song song.*
  - *Các cạnh nối từ một đỉnh tới chính nó được gọi là khuyên.*



a. Đa đồ thị vô hướng. e_1 và e_2 là các cạnh song song.

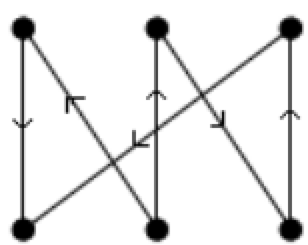


b. Đa đồ thị vô hướng. e là khuyên

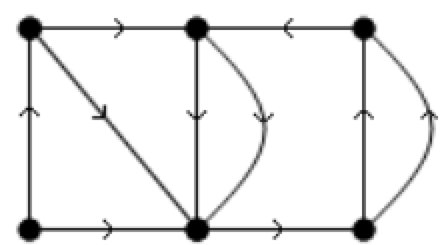
1. Định nghĩa đồ thị

- **Định nghĩa 3:** *Đơn đồ thị có hướng G= (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.*

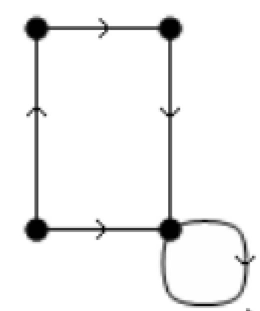
Ví dụ:



a. Đơn đồ thị có hướng



b. Không phải là đơn đồ thị có hướng do có các cặp cung nối cùng một cặp đỉnh

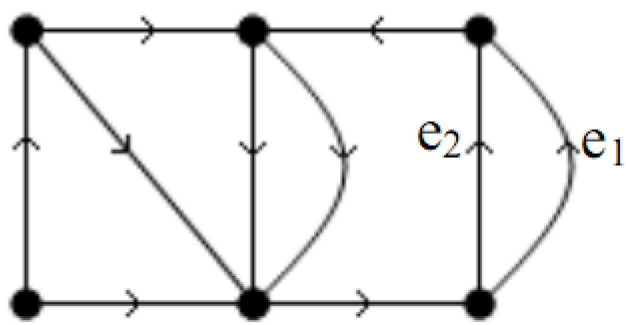


c. Không phải là đơn đồ thị có hướng do có cung nối 1 đỉnh với chính nó.

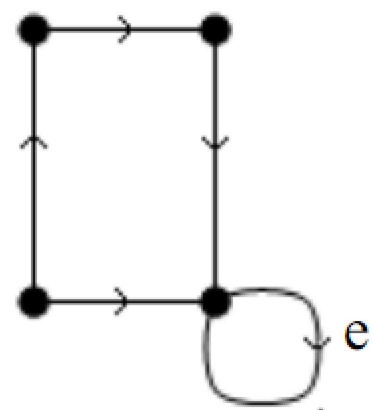
1. Định nghĩa đồ thị

- **Định nghĩa 4:** *Đa đồ thị có hướng G= (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là bộ các cặp có thứ tự của V gọi là các cung.*
  - *Các cung nối cùng một cặp đỉnh được gọi là các cung song song.*
  - *Các cung nối từ một đỉnh tới chính nó được gọi là khuyên.*

Ví dụ:



a. Đa đồ thị có hướng. e_1 và e_2 là các cung song song.

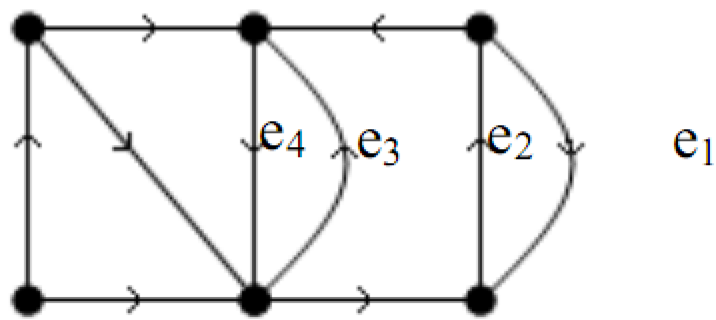


b. Đa đồ thị có hướng. e là khuyên

1. Định nghĩa đồ thị

Chú ý:

- Đồ thị sau vẫn được coi là đơn đồ thị có hướng vì e1 và e2, e3 và e4 không phải là 2 cung song song (do khác hướng).



1. Định nghĩa đồ thị

Chú ý:

- Một số tài liệu tách đa đồ thị thành 2 loại: đa đồ thị (chỉ có cạnh/cung song song mà không có khuyên) và giả đồ thị (có cạnh/cung song song và có cả khuyên). Tuy nhiên, để bớt phức tạp, chúng ta gộp cả hai loại này thành một và gọi tên chung là đa đồ thị.
- Đa đồ thị là dạng tổng quát hơn đơn đồ thị, nghĩa là một đơn đồ thị vẫn có thể được coi là đa đồ thị, nhưng ngược lại thì không đúng.
- Các nội dung giới thiệu trong học phần này chủ yếu là trên đơn đồ thị. Để đơn giản, chúng ta sẽ gọi là "đồ thị" thay cho "đơn đồ thị".

2. Các thuật ngữ cơ bản

- **Định nghĩa 1.**

Cho đồ thị vô hướng G=<V,E>.

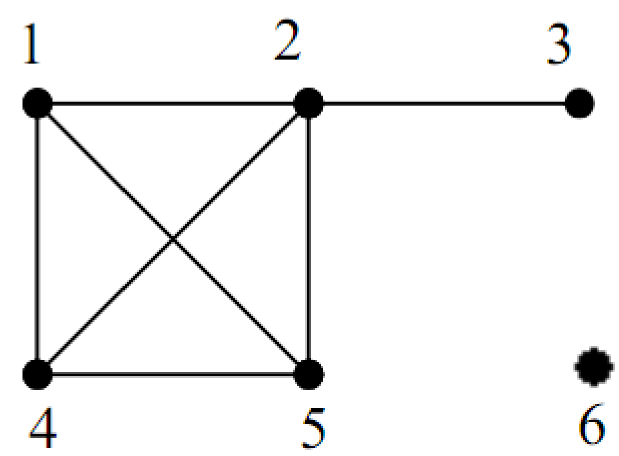
- *Hai đỉnh u và v của đồ thị được gọi là* ***kề nhau*** *nếu (u,v) là một cạnh của đồ thị.*
- *Nếu e=(u,v) là cạnh của đồ thị thì ta nói cạnh này là* ***liên thuộc*** *với hai đỉnh u và v. Cạnh được nói là* ***nối*** *đỉnh u và v. Đỉnh u và v được gọi là* ***đỉnh đầu*** *của cạnh e.*

2. Các thuật ngữ cơ bản

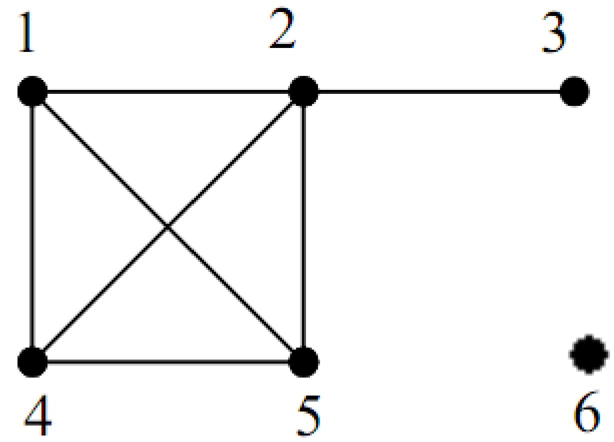
- **Định nghĩa 2.**

*Cho đồ thị vô hướng G=<V,E>. Bậc của đỉnh v trong đồ thị, ký hiệu là **deg(v)**, là số cạnh liên thuộc với nó. Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập, đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo.*

Ví dụ: Cho đồ thị vô hướng G = <V,E> sau:



2. Các thuật ngữ cơ bản



- V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- E = {(1,2), (2,3), (1,4), (1,5), (2,5), (4,5), (2,4)}
- Bậc của các đỉnh:
  - deg(1) = 3 deg(2) = 4 deg(3) = 1
  - deg(4) = 3 deg(5) = 3 deg(6) = 0
- Đỉnh 3 là đỉnh treo
- Đỉnh 6 là đỉnh cô lập

2. Các thuật ngữ cơ bản

- **Định lý 1.** *Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh. Nói cách khác, ta có:* $$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$
  - **Thí dụ:** Đồ thị với n đỉnh có bậc là 6 có bao nhiêu cạnh?
  - **Giải**: Theo định lý 1 ta có *2m = 6n*. Từ đó suy ra tổng các cạnh của đồ thị là 3n.

2. Các thuật ngữ cơ bản

- **Hệ quả.** *Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.*

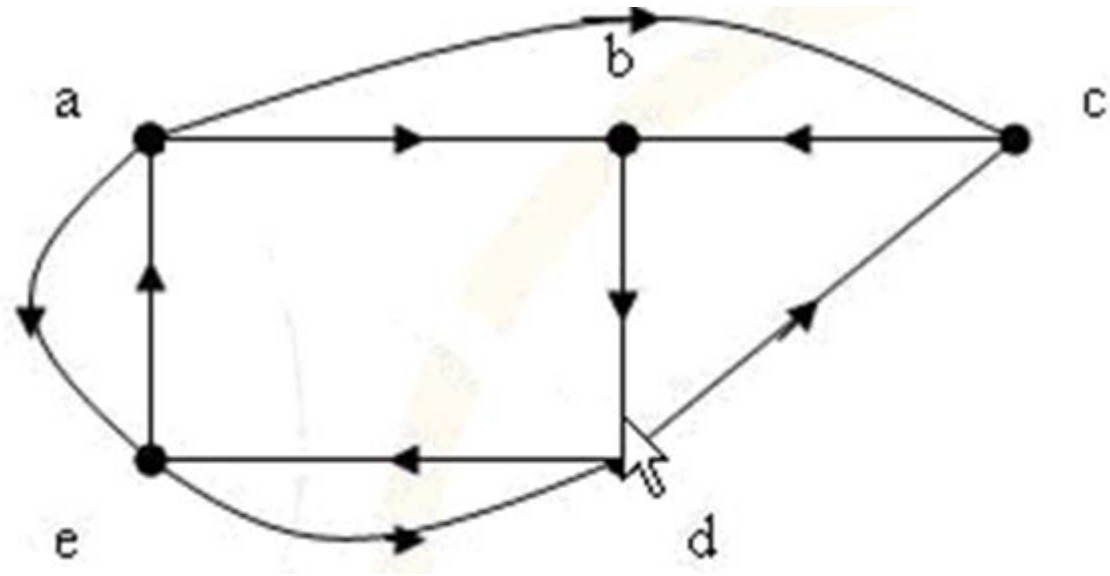
Chứng minh:

Theo định lý trên, tổng bậc của tất cả các đỉnh là một số chẵn (2|E|), do đó tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ cũng là một số chẵn. Và do vậy, số đỉnh bậc lẻ phải là một số chẵn.

2. Các thuật ngữ cơ bản

- **Định nghĩa 3.** *Nếu e = (u, v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và vào đỉnh v. Đỉnh u(v) sẽ được gọi là đỉnh đầu (cuối) của cung (u,v).*
- **Định nghĩa 4.** *Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là $deg^+(v)$ ($deg^-(v)$)*

2. Các thuật ngữ cơ bản



Ví dụ. Xét đồ thị cho trong hình. Ta có:

$deg^{-}(a)=1$, $deg^{-}(b)=2$, $deg^{-}(c)=2$, $deg^{-}(d)=2$, $deg^{-}(e)= 2$.

$deg^{+}(a)=3$, $deg^{+}(b)=1$, $deg^{+}(c)=1$, $deg^{+}(d)=2$, $deg^{+}(e)=2$.

2. Các thuật ngữ cơ bản

→Do mỗi cung (u, v) sẽ được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u nên ta có:

- **Định lý 2.** *Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó tổng tất cả các bán bậc ra của các đỉnh bằng tổng tất cả các bán bậc vào của các đỉnh và bằng số cung của đồ thị*

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 1.** *Cho đồ thị G = <V,E>. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v (n là số nguyên dương) là dãy:* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$

trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể được biểu diễn bằng dãy các cạnh/cung:

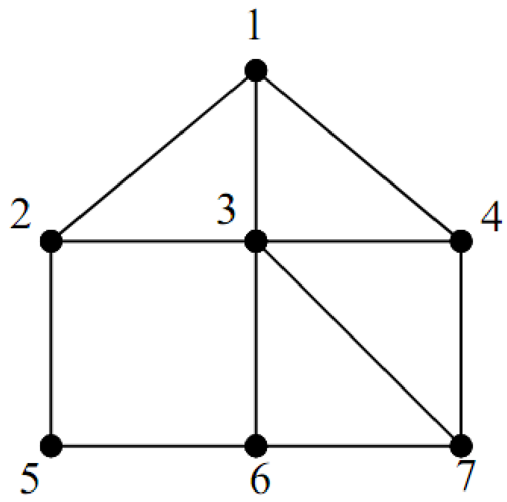
$$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu của đường đi, đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi.

Đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau (u=v) gọi là chu trình.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ: Cho đồ thị vô hướng



Một số đường đi từ đỉnh 2 đến đỉnh 7:

- Đường đi d_1: 2 3 4 7 (đường đi độ dài 3)
- Đường đi d_2: 2 3 4 1 3 6 7 (đường đi độ dài 6)
- Đường đi d_3: 2 3 4 1 3 4 7 (đường đi độ dài 6)

Một số chu trình trên đồ thị trên:

- Chu trình C_1: 1 2 3 1 (chu trình có độ dài 3)
- Chu trình C_2: 1 2 3 7 6 3 4 1 (chu trình có độ dài 7)
- Chu trình C_3: 1 3 4 7 3 4 1 (chu trình có độ dài 6)

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 2.**

Cho đồ thị G = <V,E>.

- *Đường đi hay chu trình trên G được gọi là* ***đơn*** *nếu như không có cạnh nào bị lặp lại trên đường đi.*
- *Đường đi hay chu trình trên G được gọi là* ***sơ cấp*** *nếu như không có đỉnh nào bị lặp lại trên đường đi.*

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ: Xét các đường đi và chu trình ở ví dụ của định nghĩa 1, ta thấy:

- Đường đi d1(2347) là đường đi sơ cấp (cũng là đường đi đơn).
- Đường đi d2(2341367) là đường đi đơn (chỉ bị lặp đỉnh 3, nhưng không lặp cạnh).
- Đường đi d3(2341347) không là đường đi đơn (cũng không là đường đi sơ cấp) do có lặp lại cạnh (3,4).

- Chu trình C1(1231) là chu trình sơ cấp (cũng là chu trình đơn).
- Chu trình C2(12376341) là chu trình đơn (chỉ bị lặp lại đỉnh 3, nhưng không lặp cạnh).
- Chu trình C3(1347341) không là chu trình đơn (cũng không là chu trình sơ cấp) do có lặp lại cạnh (3,4).

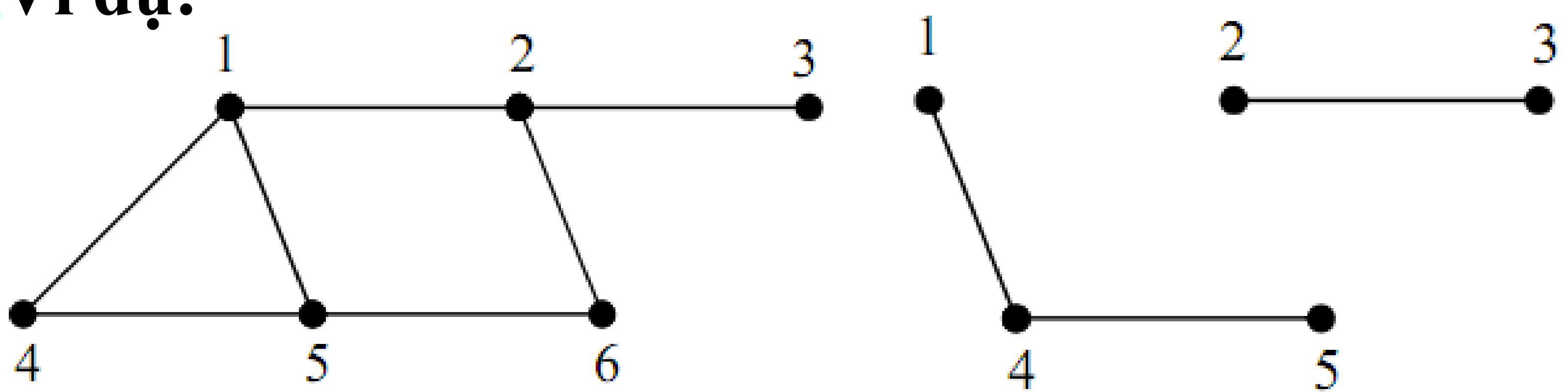
3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 3.**

  Đồ thị vô hướng G = <V,E> được gọi là **liên thông** *nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ:



Đồ thị G_1 Đồ thị G_2

Trong 2 đồ thị trên thì G1 là đồ thị liên thông, còn G2 không phải là đồ thị liên thông vì giữa hai đỉnh 1 và 2 không tồn tại một đường đi nào.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

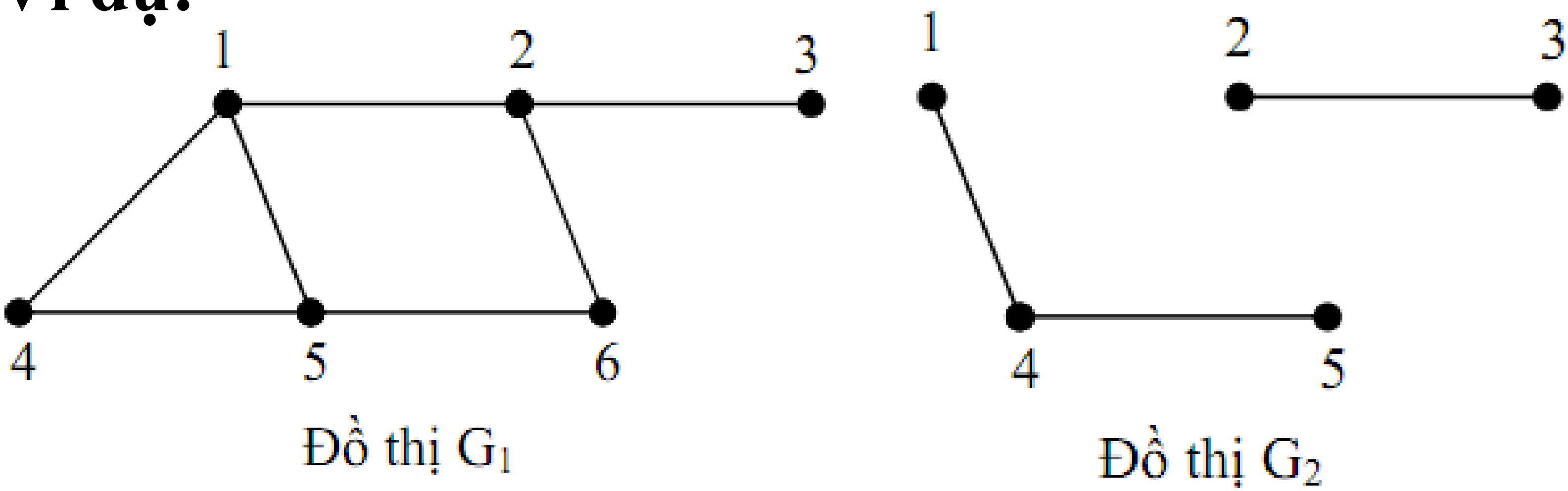
- **Định nghĩa 4.**

  Cho đồ thị G = (V,E). Đồ thị H = (W,F) được gọi là đồ thị con của G nếu và chỉ nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.

- Trong trường hợp một đồ thị vô hướng G không liên thông, nó sẽ được phân thành các đồ thị con độc lập nhau và chúng đều liên thông. Mỗi đồ thị con như vậy được gọi là một **thành phần liên thông** của G.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ:



Đồ thị G2 trong ví dụ trên là đồ thị có 2 thành phần liên thông. Thành phần liên thông thứ nhất gồm 3 đỉnh: 1, 4, và 5. Thành phần liên thông thứ hai gồm hai đỉnh: 2 và 3.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 5.**

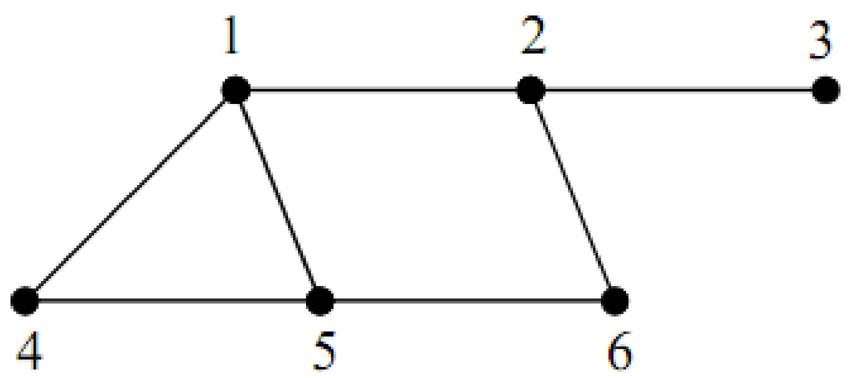
  Cho đồ thị vô hướng G = <V,E>.

  *- Đỉnh v được gọi là **đỉnh rẽ nhánh** nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số* thành *phần liên thông của đồ thị.*

  *- Cạnh e được gọi là **cầu** nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.*

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ: Xét đồ thị sau:



Đồ thị G_1

Trong đồ thị trên, đỉnh 2 là đỉnh rẽ nhánh vì việc loại đỉnh này cùng với các cạnh (2,3), (2,1), (2,6) sẽ làm đồ thị có 2 thành phần liên thông. Cạnh (2,3) là cầu. Các cạnh còn lại đều không phải là cầu.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 6.**

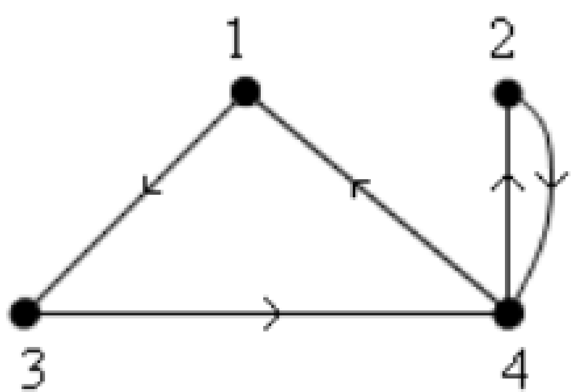
Cho G = <V,E> là đồ thị có hướng.

a. *G được gọi là* ***liên thông mạnh*** *nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

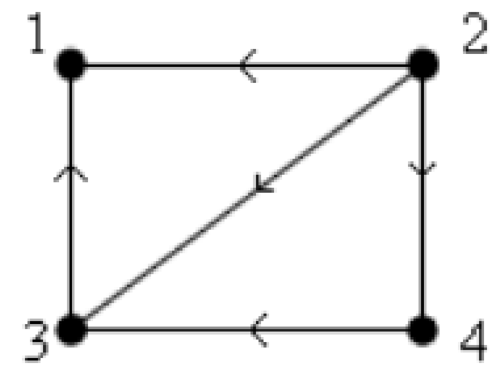
b. *G được gọi là* ***liên thông yếu*** *nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó (đồ thị vô hướng có được bằng cách biến các cung một chiều thành các cạnh) là đồ thị vô hướng liên thông.*

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

Ví dụ: Xét các đồ thị có hướng sau:



Đồ thị G_1



Đồ thị G_2

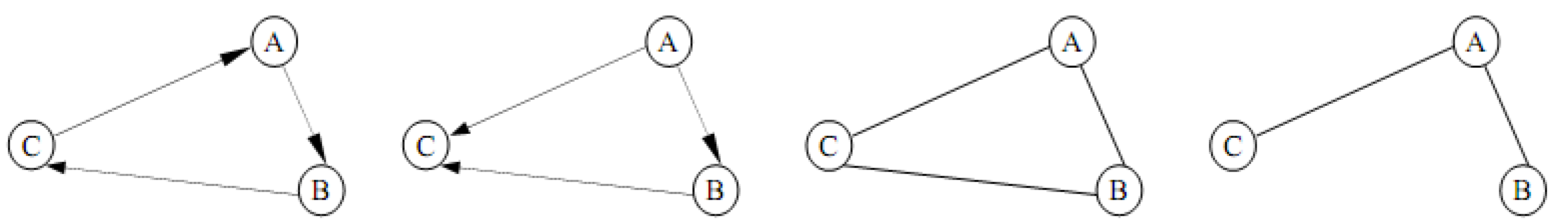
- Đồ thị G1 là đồ thị liên thông mạnh.
- Đồ thị G2 không là đồ thị liên thông mạnh và từ đỉnh 1 đến đỉnh 2 không tồn tại đường đi nào. G2 là đồ thị liên thông yếu vì nếu biến các cung có hướng thành các cạnh vô hướng thì nó là đồ thị liên thông.

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

- **Định nghĩa 7.**

Đồ thị vô hướng liên thông gọi là định hướng được *nếu có thể định hướng các cạnh để thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh.*

Ví dụ:



Có hướng lthông (lthông mạnh) | Có hướng kg lthông nhưng lthông yếu | Vô hướng lthông định hướng được | Vô hướng lthông Kg định hướng được

3. Đường đi, chu trình và đồ thị liên thông

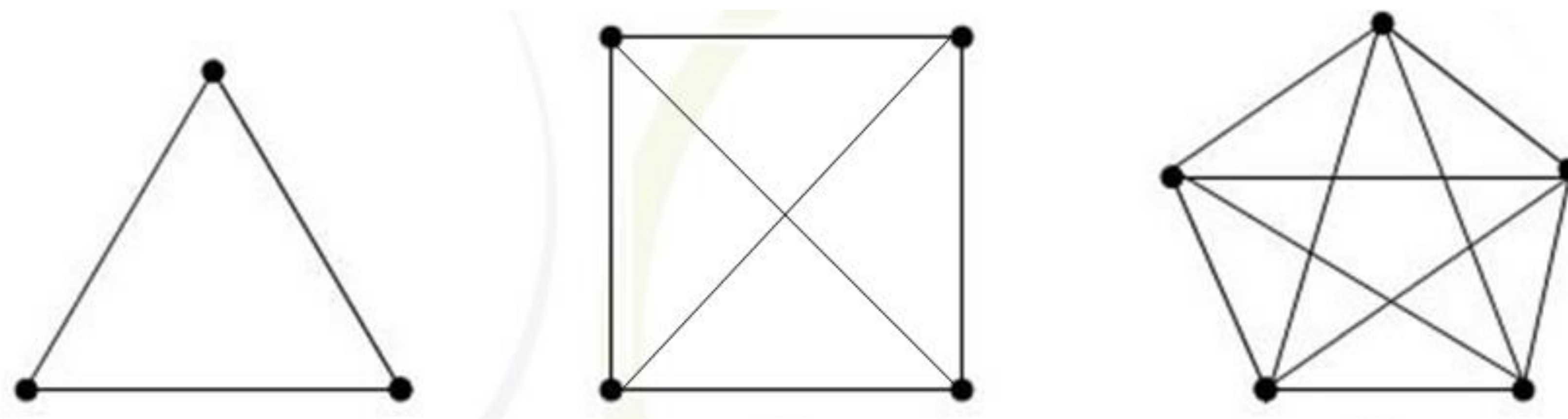
- **Định lí 1:**

  Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và *chỉ* khi *mỗi cạnh của* nó *nằm* trên *ít nhất một* chu trình.

CM: (trang 155)

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

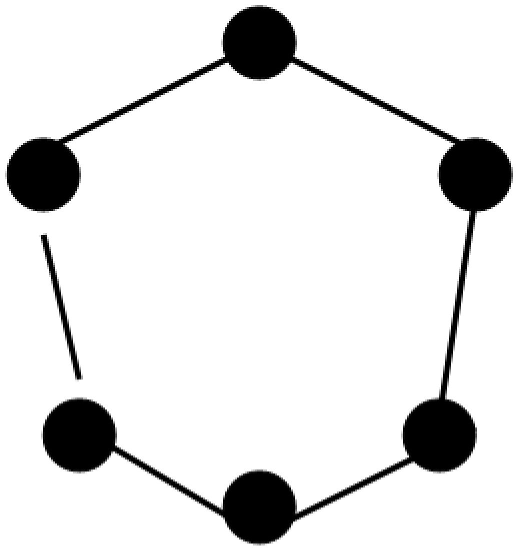
a.Đồ thị đầy đủ: *Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu bởi K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó luôn có cạnh nối.*



Đồ thị đầy đủ K_n có tất cả n(n-1)/2 cạnh, nó là đơn đồ thị có nhiều cạnh nhất.

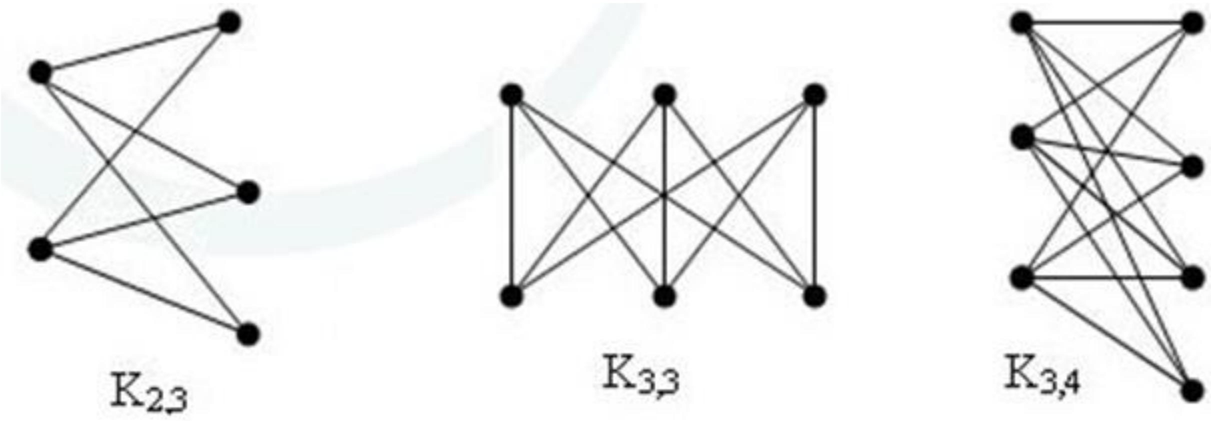
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

b. Đồ thị vòng: *Đồ thị vòng* C_n *(n ≥3) gồm n đỉnh* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *và các cạnh* (v_1,v_2), $(v_2,v_3), \ldots, (v_{n-1},v_n), (v_n,v_1)$



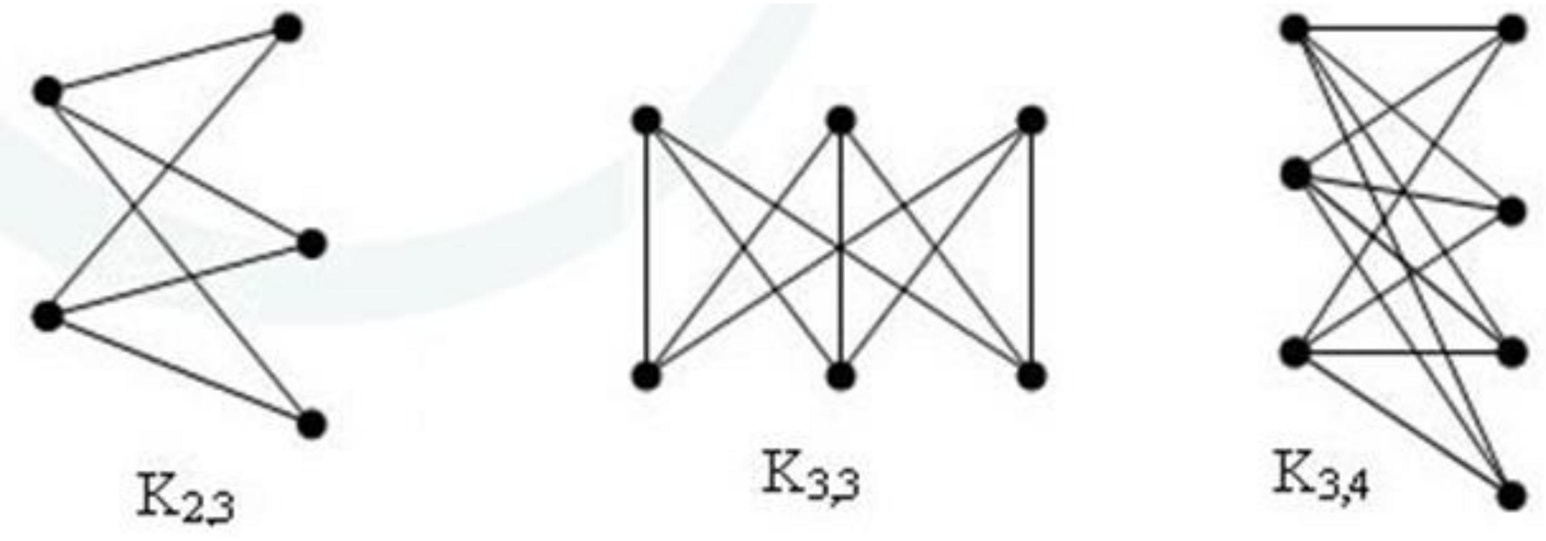
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

c. Đồ thị hai phía: *Đơn đồ thị G=(V,E) được gọi là hai phía nếu như tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ nối một đỉnh nào đó trong X với một đỉnh nào đó trong Y. Khi đó ta sẽ sử dụng ký hiệu G=(X ∪ Y, E) để chỉ đồ thị hai phía với tập đỉnh X∪ Y.*



4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Định lý 1**. *Đơn đồ thị là đồ thị hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.*



4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Thuật toán kiểm tra đồ thị liên thông là hai phía**:

- **B0:** *Chọn v là 1 đỉnh bất kì của đồ thị. Đặt X={v}*

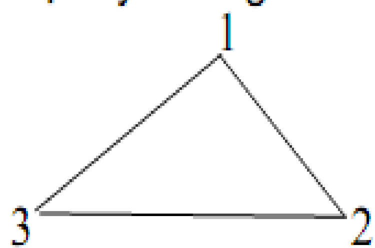
- **B1:** *Tìm Y là tập các đỉnh kề của các đỉnh trong X. Nếu* $X \cap Y \neq \phi$ *thì đồ thị không phải là hai phía, kết thúc. Ngược lại xuống B2.*

- **B2:** *Tìm T là tập các đỉnh kề của các đỉnh trong Y. Nếu* $T \cap Y \neq \phi$ *thì đồ thị không phải là hai phía, kết thúc. Nếu* $T = X$ *thì đồ thị là hai phía, kết thúc. Ngược lại, gán X=T và lặp lại B1.*

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

Ví dụ:

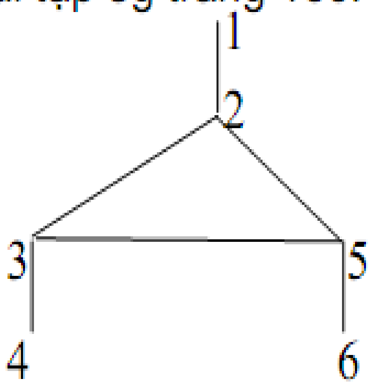
Đồ thị này không là hai phía vì chứa chu trình độ dài lẻ (=3).



X	Y (Các đỉnh kề X)	T (Các đỉnh kề Y)
1	2,3	1,2,3

$T \cap Y \neq \phi$: đồ thị không phải là hai phía

Bài tập 3g trang 160: Đồ thị này không là hai phía vì chứa chu trình độ dài lẻ (=3).



X	Y (Các đỉnh kề X)	T (Các đỉnh kề Y)
1	2	1,3,5
1,3,5	2,3,4,5,6	

$X \cap Y \neq \phi$: đồ thị không phải là hai phía

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

d. Đồ thị hai phía đầy đủ: *(trang 157)*

e. Đồ thị chính quy bậc k: *(trang 161)*

f. Đồ thị bù: *(trang 161)*

g. Hai đồ thị đẳng cấu: *(trang 162)*

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

h. Đồ thị phẳng: *Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh.*

Cách vẽ như vậy sẽ được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.

K_4

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Để nhận biết xem một đồ thị có phải là đồ thị phẳng có thể sử dụng định lý Kuratovski, mà để phát biểu nó ta cần một số khái niệm sau: Ta gọi một phép chia cạnh (u,v) của đồ thị là việc loại bỏ cạnh này khỏi đồ thị và thêm vào đồ thị một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u,w), (w,v) . Hai đồ thị G(V,E) và H=(W,F) được gọi là đồng cấu nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ phép chia cạnh.
- **Định lý 2 (Kuratovski).** *Đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa đồ thị con đồng cấu với* $K_{3,3}$ *hoặc* K_5.

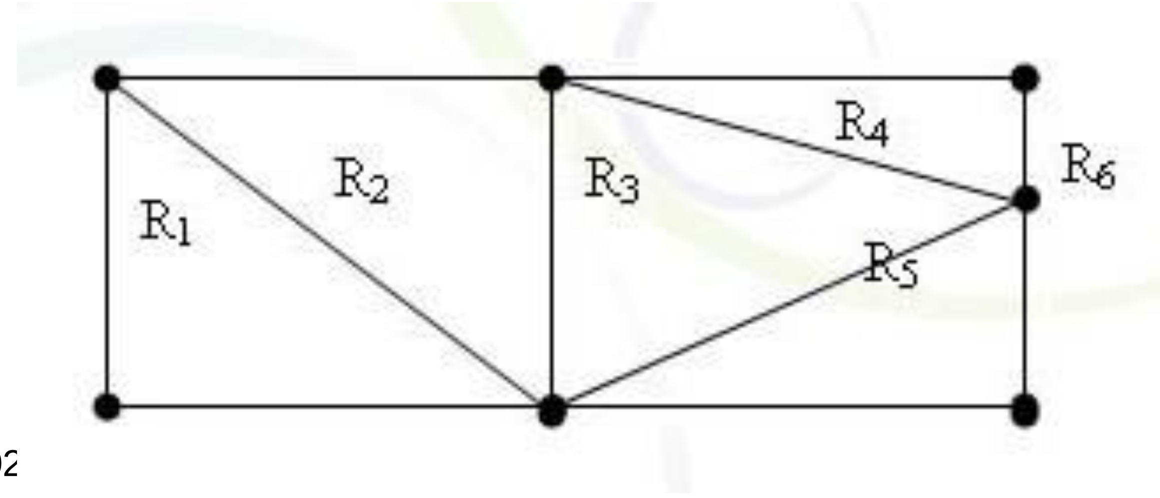
4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Định lý 4**: *Đồ thị hai phía $K_{3,3}$ là một đồ thị không phẳng.*

- **Định lý 5**: *Đồ thị đầy đủ K_5 là một đồ thị không phẳng.*

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng ra thành các miền, trong đó có thể có cả miền không bị chặn.
- Thí dụ, biểu diễn phẳng của đồ thị cho trong hình sau chia mặt phẳng ra thành 6 miền R1, R2,. . . , R6.



4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Định lý 3 (Công thức Euler)**: *Giả sử G là đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh. Gọi r là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Khi đó* ***r = m-n + 2***
- **Thí dụ**: Cho G là đồ thị phẳng liên thông với 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Hỏi mặt phẳng bị chia làm bao nhiêu phần bởi biểu diễn phẳng của đồ thị G?

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Giải:**

  Do mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3, nên tổng bậc của các đỉnh là 3x20=60. Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị m=60/2=30.

  Vì vậy, theo công thức Euler, số miền cần tìm là r=30-20+2=12.