PHẦN I

CÁC BÀI TOÁN

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ BABILON

1. Thời xa xưa, người Babilon coi chu vi đường tròn là chu vi của lục giác đều nội tiếp đường tròn đó. Hãy tính giá trị gần đúng của số π theo cách này của người Babilon.

2. Hãy chia một góc vuông ra 3 phần bằng nhau.

3. Để tính diện tích một tứ giác, người Babilon lấy nửa tổng các cặp cạnh đối diện nhân với nhau. Bạn hãy cho biết công thức này xác định đúng diện tích của những tứ giác nào ?

Còn để tính diện tích của một tam giác cân, người Babilon đôi lúc lấy tích của cạnh bên với nửa cạnh đáy. Hãy chỉ rõ với giả thiết nào thì công thức tính diện tích tam giác cân là trường hợp đặc biệt của công thức tính diện tích tứ giác nêu trên ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ AI CẬP

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT[1] RAINDA

4. Hãy tìm một số biết rằng nếu thêm vào số đó $\frac{2}{3}$ của nó rồi trừ đi $\frac{1}{3}$ tổng vừa nhận được thì ta được 10.

---

(1) Papirut (di thảo, di bản) : văn bản ghi trên gỗ ngày xưa còn để lại.

5. Bảy gia đình nuôi 7 con mèo, mỗi con mèo ăn thịt 7 con chuột, còn mỗi con chuột ăn 7 cây lúa, mỗi cây lúa có thể cho được 7 hạt. Những số hạng của dãy số này lớn đến đâu và tổng của chúng bằng bao nhiêu ?

6. Người Ai Cập xa xưa tính diện tích hình tròn bằng cách lấy diện tích hình vuông có cạnh bằng $\frac{8}{9}$ đường kính của hình tròn. Hãy xác định giá trị gần đúng của số π theo cách này.

7. Để tính diện tích tam giác cân, người Ai Cập lấy nửa đáy nhân với chiều dài cạnh bên. Hãy tính sai số theo tỉ lệ phần trăm nếu đáy của tam giác cân bằng 4, còn cạnh bên bằng 10.

8. Để tính diện tích hình thang cân, người Ai Cập lấy nửa tổng đáy trên và đáy dưới rồi nhân với cạnh bên. Hãy tính sai số theo tỉ lệ phần trăm nếu đáy trên bằng 4, đáy dưới bằng 6, còn cạnh bên bằng 20.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT MOSKVA

9. Tính thể tích của hình chóp cụt tứ giác đều nếu chiều cao bằng 6, cạnh đáy dưới bằng 4, còn cạnh đáy trên bằng 2.

10. Hãy xác định độ dài các cạnh của một hình chữ nhật cho biết tỉ số giữa các cạnh và diện tích của hình chữ nhật đó.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT AKHMINSKI

11. Một người lấy đi $\frac{1}{13}$ báu vật trong kho, một người khác lấy đi $\frac{1}{17}$ báu vật còn lại và như vậy kho báu còn lại 150 báu vật. Hỏi lúc đầu kho báu có bao nhiêu báu vật ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ HI LẠP

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PITAGO (PYTHAGORE)

12. Chứng minh rằng diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền của một tam giác vuông bằng tổng diện tích các hình vuông dựng trên các cạnh góc vuông của tam giác này.

13. Hãy tìm các số Pitago, tức là tìm tất cả các bộ ba các số nguyên x, y, z sao cho thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

14. Chứng tỏ rằng tổng của n số lẻ đầu tiên, bắt đầu từ số 1 bằng n bình phương.

15. Chứng tỏ rằng, mọi số lẻ bất kì, trừ số 1, là hiệu của hai bình phương.

Trong trường phái Pitago, khẳng định này được chứng minh bằng hình học đối với một số trường hợp riêng. Hãy thử xem bằng cách nào ?

Hãy khẳng định tính đúng đắn của mệnh đề trên mà không cần tới sự minh họa bằng hình học.

BÀI TOÁN CỦA HIPPOCRATE

16. Chứng minh rằng tổng diện tích các hình lưỡi liềm (hình bán nguyệt Hippocrate) nằm giữa nửa đường tròn với đường kính là cạnh huyền của tam giác vuông và các nửa đường tròn dựng trên các cạnh góc vuông của tam giác vuông ấy đúng bằng diện tích của tam giác vuông ấy.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ƠCLIT *(Trích từ cuốn "Nguyên lí")*

17. Hãy dựng một tam giác đều trên đoạn thẳng AB cho trước.

18. Hãy chia góc cho trước ra hai phần bằng nhau.

19. Hãy dựng một hình bình hành có cạnh bên nghiêng với đáy một góc cho trước sao cho diện tích của nó bằng diện tích của một tam giác cho trước.

20. Trong một hình tròn cho trước, hãy dựng một tam giác nột tiếp đồng dạng với một tam giác cho trước.

21. Chia một đoạn thẳng cho trước thành hai phần sao cho diện tích hình chữ nhật có hai cạnh là đoạn thẳng ấy và đoạn nhỏ vừa chia đúng bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng đoạn thẳng lớn. (Bài toán điểm chia vàng).

22. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

BÀI TOÁN APOLLONIUS

23. Dựng đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ACSIMET (Archimède)

24. Chứng minh rằng hình tròn ngoại tiếp hình vuông có diện tích gấp đôi hình tròn nội tiếp hình vuông ấy.

25. Acsimet đã chứng minh rằng :

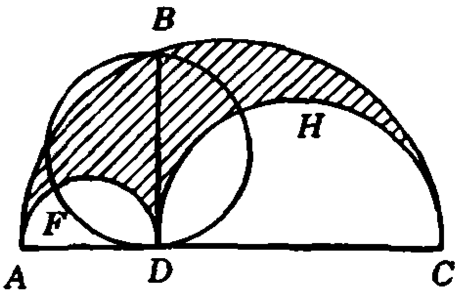
1) Diện tích mỗi hình tròn sẽ bằng diện tích của một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng bán kính hình tròn, còn cạnh góc vuông kia bằng độ dài đường tròn.

2) Diện tích hình tròn tỉ lệ với bình phương đường kính theo tỉ số $\frac{11}{14}$.

Hãy chứng tỏ rằng cả hai mệnh đề của ACSIMET tương đương với quy tắc tính diện tích hình tròn hiện nay là $\frac{22}{7}r^2$

26. Từ điểm B trên nửa đường tròn $\overset{\frown}{ABC}$, hạ đường vuông góc BD xuống đường AC, trên các đoạn AD và DC dựng các nửa đường tròn $\overset{\frown}{AFD}$ và $\overset{\frown}{DHC}$ với đường kính là các đoạn thẳng tương ứng đó (hình 1).

Chứng minh rằng diện tích hình AFDHCBA (hình gạch chéo) bằng diện tích hình tròn đường kính BD.



Hình 1

27. Diện tích của chỏm cầu bằng diện tích hình tròn có bán kính là đoạn thẳng nối từ đỉnh chỏm cầu tới đường tròn đáy của chỏm cầu.

28. Hãy tìm một hình cầu có thể tích bằng thể tích một hình nón hay một hình trụ cho trước.

29. Chứng tỏ rằng hình trụ có đáy là đường tròn lớn của một hình cầu và chiều cao bằng đường kính hình cầu đó có thể tích bằng $\frac{3}{2}$ thể tích hình cầu và diện tích xung quanh bằng $\frac{3}{2}$ diện tích mặt cầu.

30. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau :

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

31. Tìm tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

32. Hãy nêu ra các con số thể hiện số hạt cát chứa trong một cái bình to bằng Trái Đất, hơn thế nữa số hạt cát chứa trong một cái bình to bằng vũ trụ, nếu ta coi vũ trụ là hình cầu có tâm nằm ở tâm Trái Đất còn bán kính bằng khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời.

33. Hãy dựng gần đúng một đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa.

34. *Bài toán về những con bò.*

Hỡi người bạn thông minh
Hãy chỉ cho tôi biết
Có bao nhiêu chú bò
Đực, cái và màu sắc
Đang ăn cỏ đồng xa ?
Biết có bốn đàn bò
Trắng, xám, nâu và đốm
Với tỉ lệ như sau :
Đối với lũ bò đực :
trắng bằng nửa bò xám
thêm phần ba của xám
cộng cả lũ bò nâu;
xám bằng phần tư đốm
thêm phần năm đốm nữa
cộng với lũ bò nâu;
số bò có lông đốm
bằng phần sáu bò trắng
cộng thêm lũ bò nâu
và một phần bảy trắng.
Với các chú bò đực
Thì chỉ biết vậy thôi.

*

* *

Số bò cái màu trắng
bằng phần ba của xám
(cả xám đực và cái)
cộng với một phần tư
tất cả lũ bò xám.
Nhưng riêng bò cái xám
bao gồm một phần tư
của lũ bò lông đốm
cộng thêm một phần năm
đốm đực cái cộng lại.

Tổng số bò cái đốm
bằng phần năm bò nâu
(cả nâu đực, nâu cái)
cộng thêm một phần sáu
của cả đực cái nâu.
Cuối cùng, số cái nâu
bằng phần sáu bò trắng
cộng với một phần bảy
của tất cả bò trắng.

*

* *

Ấy vậy mà chưa đủ
Bò đực trắng, đực xám
Khi xếp hàng đều nhau
Thì có hình vuông đấy !
Còn đực nâu, đực đốm
Xếp dần theo bậc thang
Bắt đầu từ một chú
Thì có hình tam giác.
Bạn ơi, nào ... nghĩ xem ?

NHỮNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC CỔ NỔI TIẾNG

Bài toán gấp đôi hình lập phương

35. Hãy dựng một hình lập phương sao cho thể tích của nó gấp đôi thể tích của một hình lập phương cho trước. Hãy thực hiện phép dựng nhờ thước đặc biệt "lồng ghép" (xem chỉ dẫn).

Bài toán chia ba một góc

36. Hãy chia một góc bất kì thành ba phần bằng nhau. Hãy thực hiện việc dựng hình bằng phương pháp của Acsimet – dùng compa và thước chuyển dịch có hai điểm đánh dấu (xem chỉ dẫn).

Bài toán cầu phương hình tròn

37. Hãy dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước. Hãy giải bài toán một cách gần đúng nhờ tam giác Bing (xem chỉ dẫn).

BÀI TOÁN GIPXIKL *(ở xứ Alexandrie)*

38. Chứng minh rằng trong một cấp số cộng có số số hạng chẵn thì hiệu của tổng nửa cuối của các số hạng và tổng nửa đầu của các số hạng là một số tỉ lệ thuận với bình phương của nửa số số hạng của dãy số.

Bài toán Hêrông (HÉRON)

39. Xác định diện tích tam giác biết ba cạnh của nó lần lượt là $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

40. Hãy tìm những tam giác có diện tích nguyên dương (được gọi là tam giác Hêrông) mà độ dài các cạnh của nó là những số nguyên liên tiếp.

Bài toán NIKOMAKH

41. Chứng tỏ rằng nếu chia dãy số lẻ thành các nhóm với số số hạng của mỗi nhóm tăng dần theo dãy số tự nhiên thì tổng của mỗi nhóm đúng bằng lập phương của số số hạng của nhóm.

Bài toán PTOLÉMÉE

42. Chứng tỏ rằng trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng các tích của các cạnh đối bằng tích hai đường chéo.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA DIOPHANTE
(Từ luận đề "Số học")

43. Tìm ba số sao cho số lớn nhất hơn số lớn thứ hai đúng bằng $\frac{1}{3}$ số bé nhất, số lớn thứ hai hơn số bé nhất đúng bằng $\frac{1}{3}$ số lớn nhất và số bé nhất hơn $\frac{1}{3}$ số lớn thứ hai đúng bằng 10.

44. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

45. Cạnh góc vuông của tam giác vuông có số đo là lập phương của một số x nào đó, cạnh góc vuông kia là hiệu của số lập phương này với số x đó, còn cạnh huyền bằng tổng của số lập phương này với số x đó. Hãy tìm các cạnh của tam giác vuông.

46. Hãy chia số 100 ra 2 phần bằng 2 lần chia sao cho phần lớn ở lần chia thứ nhất gấp đôi phần nhỏ ở lần chia thứ hai và phần lớn ở lần chia thứ 2 gấp 3 lần phần nhỏ ở lần chia thứ nhất.

47. Tìm hai số sao cho tổng của nó bằng 20 còn tích của nó là 96.

48. Tìm hai số biết rằng tỉ số của chúng bằng 3 và tỉ số giữa tổng bình phương và tổng của chúng bằng 5.

49. Tìm ba số biết rằng tích của tổng của hai số đầu tiên với số thứ ba bằng 35, còn tích của tổng của số thứ nhất và số thứ ba với số thứ hai là 27 và tích của tổng của số thứ hai và số thứ ba với số đầu tiên là 32.

50. Tìm hai số biết rằng tích của chúng đem cộng với mỗi số là lập phương của một số nào đó.

51. Tìm ba số sao cho tổng của cả ba số lẫn tổng của từng cặp đều là những số chính phương.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PAPPUS Ở XỨ ALEXANDRIE

(Từ tác phẩm "Tuyển tập toán học")

52. Hãy dựng một đường thẳng đi qua một điểm D cho trước nằm trên phân giác của một góc sao cho đoạn thẳng bị chắn bởi hai cạnh của góc bằng một đoạn cho trước.

53. Chứng minh rằng trong các hình tròn thì diện tích của các viên phân đồng dạng tỉ lệ với bình phương của dây cung đáy.

54. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác thì diện tích của hình bình hành có cạnh là cạnh của tam giác với hai đỉnh nằm ngoài tam giác thì bằng tổng diện tích của hai hình bình hành lấy hai cạnh kia làm cạnh sao cho các cạnh song song với cạnh của tam giác đi qua hai đỉnh của hình bình hành ban đầu.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ *"TUYỂN TẬP HI LẠP"*

55. Có một người hỏi Pitago có bao nhiêu học trò, Pitago trả lời : "Một nửa số học trò của tôi học toán, một phần tư học nhạc, một phần bảy đăm chiêu, ngoài ra có ba cô gái". Hỏi số học trò của Pitago là bao nhiêu ?

56. Khi thấy Erôt (Éros) khóc, Kiprit (Cypris) hỏi tại sao, Erôt trả lời : Em có lấy một số trái táo ở vườn Hêlicôn (Hélicon), ngay sau đó bị Eptêpa lấy mất 1 phần 12, Kliô lấy mất 1 phần 5, Talia lấy mất 1 phần 8, Menpomena lấy mất 1 phần 20, lại còn bị Terpcikhopa lấy mất 1 phần 4, Eratô lấy mất 1 phần 7, Pôlimnhia lấy 30 trái, Uranhi lấy 120 trái, Kanniopa lấy của em 300 trái, vì vậy hiện giờ em chỉ còn có 5 chục trái thôi.

Hỏi Erôt đã hái bao nhiêu trái táo ?

57. Ba cô gái có cùng một số trái cây, gặp 9 chàng trai. Họ tặng cho mỗi chàng trai cùng một số trái cây. Sau đó thì mỗi chàng trai và mỗi cô gái có cùng một số trái cây. Hỏi mỗi cô gái lúc đầu có bao nhiêu trái cây ?

58. Chuyện kể rằng Polyphème được đúc thành một tượng đồng khổng lồ một mắt. Sau đó cho nước chảy ra qua ống tay, qua mắt và qua miệng của tượng khổng lồ một mắt đó. Biết rằng vòi nước chảy ra từ ống tay sau 3 ngày thì đầy bể nước, vòi nước chảy ra từ mắt sau 2 ngày thì đầy bể nước, còn vòi nước chảy ra từ miệng thì chỉ sau $\frac{2}{5}$ ngày là đầy bể nước. Hỏi cả 3 vòi nước cùng chảy một lúc thì bao lâu đầy bể nước ?

59. Hai con vật La và Lừa chở nặng đi bên nhau. Lừa kêu ca vì phải mang nặng. La thấy vậy bèn nói : "Cậu kêu ca nỗi gì, nếu tớ mang hộ cậu một bao thì hàng của tớ nặng gấp đôi của cậu đấy. Còn nếu cậu mang hộ tớ một bao thì hai đứa mình mới mang nặng bằng nhau".

Hỏi mỗi con Lừa và La chở nặng bao nhiêu ?

60. Một người hỏi thần thời gian Khronos rằng : Bao nhiêu giờ của một ngày đã trôi qua rồi ? Thần trả lời rằng : Bây giờ chỉ còn lại 2 lần $\frac{2}{3}$ của số giờ đã trôi qua. Vậy bao nhiêu giờ đã trôi qua, biết rằng người Hi Lạp cổ tính một ngày chỉ có 12 giờ ?

BÀI TOÁN CỦA MÊTRÔ ĐO *(ĐOÁN TUỔI)*

61. Diophante là nhà toán học cổ Hi Lạp. Ông sinh năm 325, chết năm 410 trước Công nguyên. Trên mộ ông, người ta khắc một tấm bia đá ghi tóm tắt cuộc đời ông như sau :

"Hỡi người qua đường nơi đây nhà toán học Diophante yên nghỉ. Những con số sau cho biết cuộc đời ông :

– một phần sáu cuộc đời là thời niên thiếu

– một phần 12 nữa trôi qua, râu trên cằm đã mọc

– Diophante lấy vợ, một phần bảy cuộc đời trong cảnh hiếm hoi

– năm năm trôi qua : ông sung sướng sinh con trai đầu lòng

– nhưng cậu con trai chỉ sống được một nửa cuộc đời của cha

– cuối cùng với nỗi buồn thương sâu sắc, ông cam chịu số phận sống thêm 4 năm nữa sau khi con ông lìa đời".

Bạn thử tính xem, Diophante thọ bao nhiêu tuổi ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ TRUNG HOA

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN "*CỬU CHƯƠNG THUẬT TOÁN*".

62. 5 con bò và 2 con cừu giá 11 lượng, còn hai con bò và 8 con cừu giá 8 lượng. Hỏi mỗi con giá bao nhiêu ?

63. Ba thùng thóc đầy như nhau trong kho bị 3 tên trộm lấy. Sau đó, người ta thấy rằng thùng thứ nhất còn lại 1 lượng thóc, thùng thứ 2 còn 1 cân 4 lượng thóc, thùng thứ 3 còn 1 lượng thóc. Bọn trộm bị bắt khai rằng, tên thứ nhất dùng xẻng xúc thóc từ thùng thứ nhất, tên thứ hai dùng đấu gỗ xúc thóc từ thùng thứ hai, còn tên thứ ba dùng bát xúc thóc từ thùng thứ ba. Mỗi xẻng xúc được 1 cân 9 lượng, đấu gỗ xúc được 1 cân 7 lượng, còn bát xúc được 1 cân 2 lượng.

Hãy tính xem mỗi tên trộm lấy bao nhiêu thóc, biết rằng 10 lượng bằng 1 cân, 10 cân bằng 1 yến, 10 yến bằng 1 tạ.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ "*NHẬP MÔN THUẬT TOÁN*".

64. Hãy xác định các cạnh của tam giác vuông biết diện tích và chu vi của nó.

BÀI TOÁN ĐỒNG DƯ

65. Tìm một số biết rằng nếu chia số đó cho 3 thì dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 7 dư 2.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ TÁC PHẨM "*TOÁN HỌC TRONG CHÍN CUỐN*"

66. Một vựa thóc có chiều rộng 3 trượng, chiều dài 4 trượng. Khi vựa chứa đầy thì được 10.000 bách. Hỏi chiều cao vựa là bao nhiêu ? (Biết rằng 1 bách = 51,775 lít; 1 trượng = 3,2 mét).

67. Một cây tre có 9 đốt. Thể tích của 3 đốt dưới là 4 bát, của 4 đốt trên cùng là 3 bát. Hỏi thể tích của mỗi đốt ở giữa là bao nhiêu, biết rằng thể tích mỗi đốt khác đốt bên cạnh một lượng bằng nhau.

68. Khối lượng của một đống vàng có 9 thỏi và một đống bạc có 11 thỏi là bằng nhau, nếu chuyển 1 thỏi vàng sang đống bạc và 1 thỏi bạc sang đống vàng thì đống vàng nhẹ đi 13 lượng. Hỏi khối lượng mỗi thỏi vàng, mỗi thỏi bạc là bao nhiêu ?

69. Hai con ngựa cùng chạy từ A đến B, cách nhau 3000 dặm. Ngày đầu ngựa thứ nhất chạy được 193 dặm và mỗi ngày tiếp sau chạy thêm được 13 dặm nữa. Ngựa thứ hai, ngày đầu chạy được 97 dặm, những ngày sau chạy chậm lại nửa dặm. Ngựa thứ nhất đến B rồi quay trở lại A, gặp ngựa thứ hai ở giữa đường. Hỏi sau bao ngày thì chúng gặp nhau và khi đó mỗi con đã chạy được bao nhiêu dặm ?

70. 5 con trâu và 2 con cừu giá 10 lượng vàng; 2 con trâu và 5 con cừu giá 8 lượng vàng. Hỏi mỗi con giá bao nhiệu ?

71. Từ 3 bó lúa năng suất cao, 2 bó lúa năng suất trung bình và 1 bó lúa năng suất thấp thu được 39 hộc thóc. Từ 2 bó lúa năng suất cao, 3 bó lúa năng suất trung bình và 1 bó lúa năng suất thấp thu được 34 hộc thóc, còn 1 bó lúa năng suất cao, 2 bó năng suất trung bình và 3 bó lúa năng suất thấp thu được 26 hộc thóc. Hỏi mỗi bó lúa của mỗi loại thu được bao nhiêu hộc thóc ?

72. Hai bó lúa năng suất cao, 3 bó năng suất trung bình và 4 bó năng suất thấp đều thu được chưa đầy 1 hộc thóc. Để được đủ 1 hộc thóc thì cần thêm vào ở hai bó lúa năng suất cao 1 bó lúa năng suất trung bình; thêm vào ở 3 bó lúa năng suất trung bình 1 bó lúa năng suất thấp và thêm vào ở 4 bó lúa năng suất thấp 1 bó lúa năng suất cao. Hỏi mỗi bó của mỗi loại thu được bao nhiêu ?

73. Hai bó lúa loại A, 3 bó loại B và 4 bó loại C đều thu được hơn 1 yến thóc. Số thóc thu được từ 2 bó loại A hơn 1 yến đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại B; số thóc thu được từ 3 bó loại B nhiều hơn 1 tạ đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại C và số thóc thu được từ 4 bó loại C nhiều hơn 1 tạ đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại A. Hỏi mỗi bó của mỗi loại A, B, C thu được bao nhiêu ?

74. Người ta bán 2 con trâu, 5 con cừu để mua 13 con lợn thì còn thừa 1000 "đồng". Đem bán 3 con trâu, 3 con lợn rồi mua 9 con cừu thì vừa đủ; còn nếu bán 6 con cừu, 8 con lợn để mua 5 con trâu thì thiếu 600 "đồng".

Hỏi mỗi con trâu, cừu, lợn giá bao nhiêu ?

75. 5 nhà dùng chung 1 giếng nước. Để gầu múc chạm đến được mặt nước thì với 2 dây thừng của nhà A thiếu đúng bằng 1 dây thừng của nhà B, với 3 dây thừng của nhà B thiếu đúng 1 dây của nhà C, 4 dây thừng của nhà C thiếu đúng 1 dây của nhà D, với 5 dây của nhà D thì cần thêm 1 dây của nhà E, còn với 6 dây của nhà E thì thiếu 1 dây của nhà A nữa.

Hỏi giếng sâu bao nhiêu và độ dài của mỗi loại dây thừng ?

76. Một bể nước có cạnh 1 trượng. Giữa bể có mọc 1 cây sậy nhô cao $\frac{1}{10}$ trượng. Nếu kéo cây sậy vào bờ thì ngọn cây vừa chạm bờ. Hỏi bể nước sâu bao nhiêu và cây sậy cao bao nhiêu ?

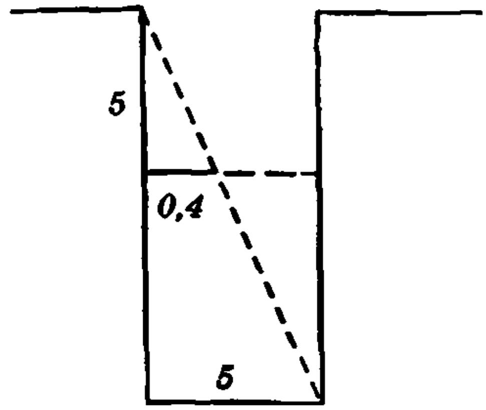
77. Hai người đi bộ A và B cùng xuất phát từ một điểm, biết vận tốc của A là 7 còn của B là 3. B đi về hướng đông; còn A đi về phía nam, sau khi được 10 dặm thì đổi hướng chéo (đông – bắc) và gặp B. Hỏi mỗi người A và B đi được bao nhiêu dặm đường ?

78. Một cánh cửa có chiều cao hơn chiều rộng 6 tấc 8 phân, đường chéo của cửa sổ dài đúng 1 trượng. Hỏi kích thước của cửa sổ ?

Lưu ý : 10 phân = 1 tấc; 1 phân = 32mm; 1 trượng = 3,2 met)

79. Một tòa thánh hình vuông, chưa biết độ dài cạnh. Tại trung điểm mỗi cạnh là cửa thành. Cách cửa Bắc 20 bộ có 1 cột cờ. Nếu đi dọc từ cửa phía Nam 14 bộ rồi chuyển sang hướng tây, đi thêm 1775 bộ nữa thì có thể nhìn thấy cột cờ. Hỏi cạnh của tòa thánh dài bao nhiêu bộ ?

80. Đường kính của một cái giếng là 5 tấc, chiều sâu chưa rõ. Từ miệng giếng đặt một cây sào 5 tấc áp sát thành giếng thì đầu kia chạm mặt nước. Từ đỉnh sào nhìn chiếu thẳng xuống đáy giếng theo mặt kính (theo đường chấm chấm trên hình 2) thì điểm "chạm" mặt nước cách thành giếng 4 phân. Hỏi giếng sâu bao nhiêu ? (1 tấc = 10 phân).



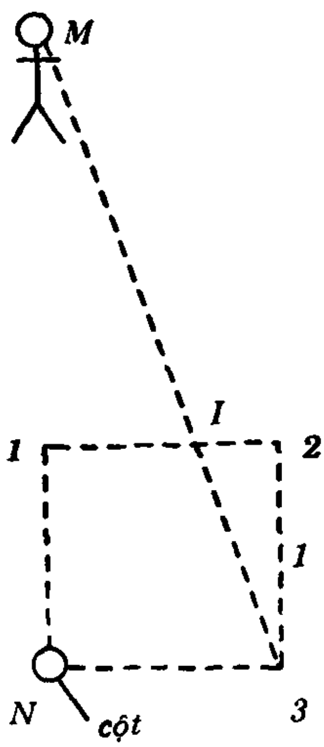
Hình 2

81. Hãy tính thể tích một hình nón biết rằng chu vi đáy là 3 trượng 5 tấc, chiều cao là 5 trượng 1 tấc.

82. Tính thể tích hình nón cụt có chu vi đáy dưới là 3 trượng, chu vi đáy trên là 2 trượng và chiều cao bằng 1 trượng.

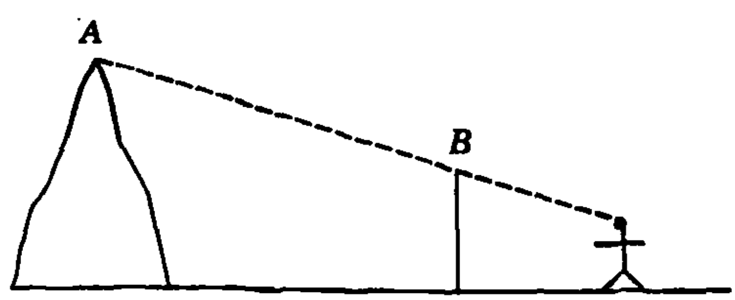
83. Hãy tính cạnh của một hình vuông nội tiếp trong một tam giác vuông với hai cạnh góc vuông có số đo là 12 bộ và 5 bộ (1 bộ = 1,6 met).

84. Để tính khoảng cách đến một cái cột ở xa người ta làm như sau : trồng thêm 3 cột nữa, mỗi cột cách nhau 1 trượng sao cho cùng với cột có sẵn tạo thành một hình vuông nằm về phía bên trái người quan sát (hình 3). Biết rằng khoảng cách từ cột thứ hai đến điểm I là 3 tấc. Từ đó sẽ tìm ra được khoảng cách từ M đến N. Giải thích tại sao ?



Hình 3

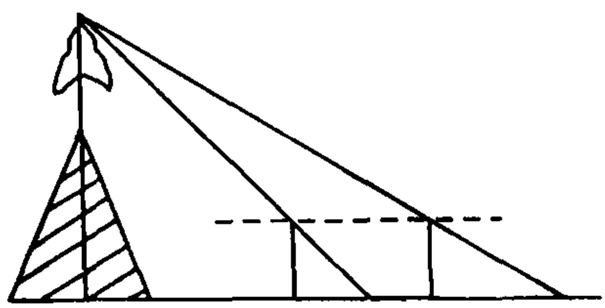
85. Đỉnh núi (A) ở phía tây của cây cột (B) (hình 4). Cột cao 9 trượng 5 tấc và cách núi về phía tây 53 dặm. Một người đứng cách cột 3 dặm về phía đông nhìn thấy đỉnh cột và đỉnh núi trùng nhau. Biết mức nhìn của người đó ở chiều cao 7 tấc, hỏi núi cao bao nhiêu ?



Hình 4

BÀI TOÁN CỦA LƯU HOA *(LIUHUE)*

86. Để xác định chiều cao của một cây thông mọc trên đỉnh đồi, người ta làm như sau : Đặt hai cây sào mỗi cây dài 20 trượng trên cánh đồng cách nhau 50 trượng, sao cho hai cây sào ấy và cây thông thẳng hàng. Đứng cách sào thứ nhất 7 trượng 4 thước thì thấy ngọn sào thứ nhất và đỉnh cây thông trùng nhau. Đứng cách sào thứ hai 8 trượng 5 thước cũng thấy ngọn sào thứ hai và đỉnh cây thông trùng nhau (hình 5).



Hình 5

Từ đó tính ra được chiều cao của cây thông và khoảng cách từ cây sào thứ nhất đến ngọn đồi ? Tại sao ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ ẤN ĐỘ

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ BẢN THẢO BAKHƠSALI

87. Có 4 người đi chùa cúng lễ. Người thứ hai cúng lễ gấp đôi người đầu tiên, người thứ ba cúng lễ gấp 3 lần người thứ hai, còn người thứ tư lại cúng lễ gấp 4 lần người thứ ba. Biết rằng cả bốn người cúng 123 nén vàng. Hỏi người thứ nhất cúng lễ bao nhiêu ?

88. Hãy tìm một số sao cho nếu thêm vào 5 hay bớt đi 11 thì đều được số chính phương.

BÀI TOÁN CỦA SRITĐƠKHARA

89. Một phần năm đàn ong đậu trên hoa TÁO, một phần ba đậu trên hoa CÚC, số ong đậu trên hoa HỒNG bằng hiệu của số ong đậu trên hoa TÁO và hoa CÚC; còn lại 1 con ong đậu trên hoa MAI. Hỏi đàn ong có bao nhiêu con ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ARIAPKHATA

90. Hai thiên thạch cách nhau một khoảng d cùng bay lại phía nhau với vận tốc v_1 và v_2. Hãy tính điểm chúng gặp nhau.

91. Hãy tính tổng các số hạng của dãy số tam giác (chú thích: dãy số tam giác là dãy số mà số hạng tổng quát của nó có dạng $\frac{n(n+1)}{2}$).

92. Hai người có một số vốn như nhau bao gồm một số đồ vật có giá trị bằng nhau và một số tiền nào đó, nhưng biết rằng số lượng đồ vật của hai người khác nhau. Hỏi mỗi đồ vật có giá trị bao nhiêu ?

93. Để tính diện tích hình tròn, người Ấn Độ cổ đưa ra một quy tắc : chia đường kính hình tròn thành 15 phần bằng nhau, lấy 13 phần của nó làm cạnh một hình vuông thì diện tích của hình tròn sẽ bằng (xấp xỉ) diện tích của hình vuông. Hãy xác định gần đúng số π trong trường hợp này và đánh giá sai số đến một phần nghìn.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BRAMAGUPTA

94. Xác định chiều cao của ngọn Bạch Lạp biết độ dài của bóng của một cây gậy đặt ở hai vị trí khác nhau (thẳng hàng với cây đèn) và biết khoảng cách giữa hai vị trí của cây gậy đó.

95. Chứng minh rằng đường kính của vòng tròn ngoại tiếp một tam giác bằng tích của hai cạnh chia cho đường cao hạ xuống cạnh thứ ba.

96. Chứng tỏ rằng bình phương của một dây cung vuông góc với đường kính của hình tròn, chia cho bốn lần một trong hai đoạn của đường kính đã được chia rồi cộng với chính đoạn đó thì bằng đường kính hình tròn.

97. Cũng từ bài toán 96, chứng tỏ rằng đoạn nhỏ bị chia ra trên đường kính bởi một dây cung vuông góc với đường kính bằng một nửa hiệu giữa đường kính và căn bậc hai của hiệu bình phương giữa đường kính và độ dài dây cung.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BKHASCARA

98. Đem nhân một số với 5 rồi trừ đi $\frac{1}{3}$ số đó, được bao nhiêu chia cho 10 rồi cộng thêm vào $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ số đó thì ta có kết quả là 68. Hỏi số đó là số nào ?

99. Chứng tỏ rằng :

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

100. Hãy xác định một tam giác vuông nếu biết rằng độ dài cạnh huyền và diện tích tam giác được biểu thị bởi cùng một số.

101. Biết hai cây tre trồng thẳng xuống đất có độ dài là m và n, cách nhau một khoảng bằng d. Hãy tính độ dài đường vuông góc hạ từ giao điểm của hai đường thẳng nối đỉnh cây tre này với gốc cây tre kia xuống mặt đất và tính các khoảng cách từ chân đường vuông góc ấy đến hai chân cây tre.

102. Một người nói với bạn "Nếu anh cho tôi 100 rupi thì tôi sẽ giàu gấp đôi anh !". Người kia trả lời : "Nếu anh đưa cho tôi chỉ 10 rupi thôi thì tôi sẽ giàu gấp 6 lần anh". Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền ?

103. Giải phương trình bậc hai tổng quát :

$$ax^2 + bx = c$$

104. Căn bậc hai nửa đàn ong bay tới bụi hoa nhài, tám phần chín đàn ong vẫn còn trong tổ, một đôi ong đực cái bị mắc trong bông sen. Vậy hỏi rằng đàn ong có bao nhiêu con ?

105. Tìm một số biết nếu nhân số đó với 12 rồi thêm vào lập phương của số đó thì kết quả bằng 6 lần bình phương số đó cộng với 35.

106. Giải phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

107. Tìm chiều cao của một hình viên phân nếu biết đường kính của cung tròn và dây cung đáy.

108. Tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình :

$$ax + by + c = xy$$

109. Hãy cho biết số nào mà khi đem nhân với 3 rồi cộng thêm vào $\frac{3}{4}$ tích vừa tìm được, được bao nhiêu đem chia cho 7, rồi lại giảm đi $\frac{1}{3}$ số tìm được, được bao nhiêu đem nhân với chính nó rồi giảm đi 52, sau đó lấy căn bậc hai, thêm vào 8 rồi chia cho 10 thì sẽ được 2?

110. Một bầy khỉ chia làm hai nhóm.

Nếu nhóm đầu có số khỉ bằng số bình phương của $\frac{1}{8}$ số khỉ thì nhóm sau có 12 chú khỉ.

Hỏi bầy khỉ có bao nhiêu con ?

111. Bầy khỉ có bao nhiêu con nếu lấy $\frac{1}{5}$ bầy khỉ bớt đi 3 con rồi bình phương lên thì còn dư 1 ?

112. Con trai của Prikhi mang một bó tên đi giết giặc. Nửa số tên anh dùng để bảo vệ mình, 4 lần căn bậc hai số tên dùng để bắn ngựa, 6 mũi tên bắn trúng người đánh xe của giặc, 3 mũi tên phá hỏng rào che của giặc và chỉ còn 1 mũi tên cuối cùng xuyên qua đầu giặc. Hỏi con trai của Prikhi có bao nhiêu mũi tên ?

113. Mười lần căn bậc hai số sếu của một đàn sếu bay về phía hồ; $\frac{1}{8}$ đàn trốn vào bụi cây, còn lại 6 con bay loạn xạ trên hồ. Hỏi đàn sếu có bao nhiêu con ?

114. Trên mặt hồ có một bông sen nhô cao lên nửa "thước", bỗng có một ngọn gió thổi làm bông sen ngả về một phía, chạm mặt nước, cách xa chỗ cũ 2 "thước". Hỏi hồ sâu bao nhiêu ?

115. Có một cây dương mọc đơn độc giữa đồng, bỗng nhiên gió thổi mạnh làm nó gẫy gập xuống, ngọn cây chạm đất cách gốc 4 "thước", từ gốc lên đến chỗ gẫy 3 "thước". Hỏi cây dương cao bao nhiêu ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PARAMADISVARA

116. Tìm một số, biết rằng nếu nhân nó với 3 rồi đem chia cho 5 rồi tăng lên 6 đơn vị, được bao nhiêu lấy căn bậc hai rồi bớt đi 1, bình phương kết quả lên thì được 4.

117. Giải phương trình

$$y^2 = ax^2 + 1$$

(sau này ở châu Âu người ta gọi là phương trình Pell).

118. Chứng minh rằng trong tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì căn bậc hai của tổng bình phương của hai cạnh đối bằng đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ Ả RẬP

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA AN KHÔRÊDOMI

119. Giải các phương trình bậc hai :

1) $5x^2 = 40x$

2) $\frac{25}{9}x^2 = 100$

3) $10x = x^2 + 21$

4) $x^2 = 12x + 288$

5) $x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x$

6) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$

120. Hãy dựng một hình vuông nội tiếp một tam giác cân có cạnh bên bằng 10 và cạnh đáy bằng 12.

121. Tìm một số sao cho bớt đi $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ số đó thì còn dư lại 8.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA AVISENNA

122. Chứng tỏ rằng nếu một số chia cho 9 dư 1 hoặc dư 8 thì bình phương của nó chia cho 9 dư 1.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ANCAROKHI

123. Tìm một số để khi nhân với $3 + \sqrt{5}$ thì được 1.

124. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases}$$

125. Tìm diện tích hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và số đo của diện tích và chu vi bằng nhau.

BÀI TOÁN CỦA ÔMA KHAIAM

126. Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BEGA ETĐIN

127. Chia số 10 thành hai phần sao cho hiệu của chúng bằng 5.

128. Daiđa được hứa thưởng phần lớn trong hai phần thưởng có tổng giá trị bằng 20. Tích của hai phần này là 96. Vậy phần thưởng của Daiđa sẽ là bao nhiêu ?

129. Biết chiều cao h, các bán kính r, R của hai đáy một hình nón cụt. Hãy xác định chiều cao của hình nón tương ứng.

130. Tìm một số biết rằng sau khi nhân với chính nó rồi cộng thêm 2, sau đó gấp đôi lên rồi cộng thêm 3, được bao nhiêu chia cho 5, cuối cùng nhân với 10 ta được 50.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA AN CASI

131. Một ngọn giáo cắm xuống nước còn nhô lên khoảng 3 khuỷu tay. Khi gió thổi, nó nghiêng đi trong nước và đỉnh ngọn giáo chạm mặt nước, cách chỗ cũ 5 khuỷu tay. Vậy ngọn giáo dài bao nhiêu ?

132. Chứng minh rằng đối với một số tự nhiên n bất kì thì:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}.(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

(còn gọi là đẳng thức AN CASI)

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA AN CANXAĐI

133. Tìm một số biết rằng khi nhân nó với 7 rồi cộng với nó nhân với 6 thì được 25.

134. Tìm một số sao cho tổng $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$ của nó bằng 21.

NHỮNG BÀI TOÁN NGA

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ BẢN THẢO THẾ KỈ 17

135. Bốn thợ mộc được thuê làm nhà. Người thứ nhất nói "Nếu chỉ mình tôi làm thì mất 1 năm mới xong". Người thứ hai nói : "Nếu mình tôi làm thì phải mất 2 năm"; người thứ ba nói: "Riêng tôi phải mất 3 năm"; còn người thứ tư thì nói: "Tôi phải mất 4 năm mới làm xong !". Hỏi cả bốn người cùng làm thì bao lâu mới xong ngôi nhà ?

136. Sư tử ăn thịt 1 con cừu hết 1 giờ, sói ăn 1 con cừu hết 2 giờ còn chó ăn 1 con cừu hết 3 giờ. Nếu cả ba con sư tử, sói và chó cùng ăn thì bao lâu hết 1 con cừu ?

137. Một người đem giỏ trứng đi bán. Người mua hỏi : "Anh có bao nhiêu trứng ?". Anh ta trả lời : "Tôi không nhớ rõ là có bao nhiêu, chỉ biết rằng khi xếp vào giỏ từng đôi một thì thừa ra 1 quả, nếu xếp vào giỏ 3 quả một thì vẫn thừa ra 1 quả và xếp 4 quả một vẫn thừa ra 1 quả, nếu xếp vào giỏ 6 quả một thì vẫn thừa 1, còn nếu xếp 7 quả một thì vừa đủ, không thừa quả nào". Hỏi trong giỏ có bao nhiêu trứng ?

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN "SỐ HỌC" CỦA MATNHITXKI

138. Một người mua 112 con cừu cả già lẫn non hết 49 rup 20 antưn(1), giá một cừu già là 15 antưn 2 đenghi, còn giá một cừu non là 10 antưn. Hỏi anh ta mua bao nhiêu cừu già, cừu non?

139. Một người hỏi thầy giáo : "Lớp của thầy có bao nhiêu học trò ?", thầy đáp : "Nếu thêm vào cả số học trò tôi có, rồi lại thêm một nửa số học trò của tôi, rồi thêm $\frac{1}{4}$ số học trò và cả con trai của ông nữa thì sẽ là 100". Hỏi lớp thầy có bao nhiêu trò ?

---

(1) 1 antưn = 3 côpêc, 1 rup = 100 côpêc; 1 đenghi = $\frac{1}{2}$ côpêc.

140. Một người làm cái vòng dây thừng có đường kính là 5 asin(*), vòng này cột được 100 ngọn giáo vào trong. Hỏi nếu làm vòng dây có đường kính $7\frac{1}{2}$ asin thì vòng dây đó cột được bao nhiêu ngọn giáo ? (Luôn giả thiết rằng giáo được cột lại thành bó hình tròn).

141. Một hình vành khuyên có chu vi ngoài 440 asin, khoảng cách từ bờ ngoài vào bờ trong là 14 asin. Hỏi chu vi đường tròn ở trong là bao nhiêu ?

142. Một người leo lên tường cao 117 bộ bằng thang. Nếu anh ta lấy thang dài 125 bộ thì phải đặt thang cách tường bao nhiêu để leo lên vừa hết bức tường thì hết thang ?

143. Một nhà kho có nền nhà hình vuông. Mỗi cạnh của hình vuông dài 9 bộ. Người ta đặt một cái thang dài 41 bộ từ chân một bức tường gối lên bờ tường đối diện thì vừa vặn.

Hỏi nhà kho cao bao nhiêu ?

144. Một người muốn dát vàng vào quả táo có đường kính 9 phut (1 phut = 0,305m). Mỗi lá vàng dài 4 sôn, rộng 2 sôn (1 sôn = 3,54cm). Hỏi cần phải dùng bao nhiêu lá vàng ?

145 Một người đi từ Maxcơva đến Vôlôga, mỗi ngày anh ta đi được 40 vextơ. Sau đúng một ngày một người khác cũng đi từ Maxcơva đến Vôlôga, mỗi ngày người ấy đi được 45 vextơ. Hỏi sau bao lâu hai người gặp nhau ?

146. Một người rao bán con ngựa của mình 156 rup. Lái buôn nói giá cao quá. Người bán đề nghị bán cách khác và nói : "Nếu ông thấy giá cao quá thì mua đinh ở móng ngựa vậy, còn ngựa thì cho ông. Mỗi móng ngựa có 6 chiếc đinh, tôi bán chiếc đầu tiên $\frac{1}{4}$ côpêc, chiếc thứ hai $\frac{1}{2}$ côpêc, chiếc thứ ba 1 côpêc, ông cứ thế mua, chiếc sau giá

(*) 10 asin = 0,711m

gấp đôi chiếc trước". Lái buôn nhẩm tính như thế chưa đến 10 rup và đồng ý mua. Hãy tính xem lái buôn lỗ bao nhiêu ? (1 rup = 100 côpêc).

147. Có ba cối xay gió, trong một ngày cối thứ nhất xay được 60 bao, cối thứ hai xay được 54 bao, còn cối thứ ba xay được 48 bao. Một người mang 81 bao đến xay, muốn nhanh đã đổ vào cả 3 cối xay. Hỏi cần bao lâu thì xay xong và mỗi cối xay được bao nhiêu bao ?

148. Một quý ông sai thợ lợp mái nhà hình nón với chu vi đáy 120 bộ, chiều dài từ đỉnh hình nón tới đáy là 32 bộ. Dùng loại nỉ để lợp với giá 2 rúp / 1 asin, mỗi tấm nỉ có chiều rộng $2\frac{1}{2}$ asin. Hỏi phải cần bao nhiêu asin nỉ và giá phải trả là bao nhiêu ? (1 bộ = $\frac{1}{2}$ asin).

149. Hãy tìm một số biết số đó khi chia cho 2 dư 1, chia cho 3 dư 2, chia cho 4 dư 3 và chia cho 5 dư 4.

150. Bài toán vui : Hãy đánh số các ngày trong tuần từ chủ nhật bằng các số : 1, 2, 3, ..., 7 (thứ 7).

Một người nghĩ đến một ngày nào đó trong tuần. Hãy đoán xem anh ta nghĩ đến thứ mấy nếu ta yêu cầu anh ta làm các phép tính đơn giản sau :

1) Nhân số thứ tự của ngày đó với 2
2) Thêm 5 vào tích đó
3) Nhân tổng vừa tìm được với 5
4) Nhân tích với 10

Sau đó nói kết quả.

151. Một người đi bộ từ thành phố về quê mất 17 ngày. Một người khác đi bộ từ quê lên thành phố hết 20 ngày. Cả hai cùng xuất phát một giờ từ nơi mình đi. Hỏi sau bao lâu họ gặp nhau ?

152. Một người đi sắm đồ chơi cho con. Đồ chơi đầu tiên phải trả mất $\frac{1}{5}$ số tiền mang đi, cái thứ hai phải trả $\frac{3}{7}$ số tiền còn lại, đồ chơi thứ ba phải trả $\frac{3}{5}$ số tiền còn lại sau khi mua đồ chơi thứ hai. Về đến nhà trong túi còn 1 rup 92 côpêc.

Hỏi lúc đầu người đó đem theo bao nhiêu tiền và đã mua đồ chơi hết bao nhiêu ?

153. Tìm một số biết rằng sau khi cộng bình phương của nó với 108 ta được một số gấp số phải tìm 24 lần.

154. Một người dùng một thùng nước hết 14 ngày, còn nếu cùng dùng với vợ anh ta thì hết 10 ngày. Hỏi chỉ riêng người vợ dùng một thùng nước hết bao nhiêu ngày ?

155. Một người thuê thợ làm việc trong vòng 1 năm với tiền công là 12 rup và 1 chiếc áo khoác. Nhưng mới làm được 7 tháng người thợ phải về quê. Người chủ trả công cho anh 5 rup và chiếc áo khoác. Hỏi chiếc áo khoác giá bao nhiêu ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA GÔNBACH

156. Chứng minh rằng mọi số dạng $4n^4 + 1$ (n là số tự nhiên) chỉ có thể là số nguyên tố với $n = 1$.

157. Tìm tổng của những phân số dạng :

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}}$$

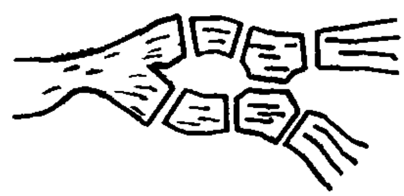
trong đó n, m là những số tự nhiên.

158. Mọi số lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố. Hãy kiểm tra mệnh đề này với một vài số có hai chữ số !

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ƠLE *(EULER)*

159. Mỗi số chẵn lớn hơn hay bằng 4 có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố. Hãy kiểm tra mệnh đề này bằng một vài số có hai chữ số.

160. Có thể đi qua lần lượt cả 7 cái cầu bắc trên sông Prêge ở Kenixbecgơ (nay là Kaliningrat) nối các hòn đảo sao cho mỗi cầu chỉ đi qua có một lần không? (Xem hình 6).



Hình 6

161. Hai người nông dân đem 100 quả trứng ra chợ bán, số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng cả hai đều bán được một số tiền như nhau. Một người nói với người kia : "Nếu tất cả trứng của anh là trứng của tôi thì tôi bán được 15 đồng". Người kia cũng nói lại là : "Nếu tất cả trứng của anh là của tôi thì tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng thôi". Hỏi mỗi người có bao nhiêu quả trứng?

162. Biến đổi : $\dfrac{8 - 5\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$.

163. Chứng minh rằng trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp thẳng hàng (đường thẳng Ơle).

164. Tìm một số nếu lũy thừa 4 nó lên rồi đem chia cho một nửa của nó rồi cộng với $14\frac{1}{4}$ thì được 100.

165. Chứng minh rằng tích của hai số mà mỗi số là tổng của bốn số chính phương cũng là một số bằng tổng của bốn số chính phương.

166. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương các đường chéo cộng với bốn lần bình phương đoạn nối trung điểm hai đường chéo.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN "*TOÁN HỌC THUẦN TÚY*" CỦA VÔICHIAKHOVSKI

167. Một thuyền trưởng trả lời câu hỏi về số quân trên tàu của ông ta là : "$\frac{2}{5}$ đang gác, $\frac{1}{4}$ đang làm việc, 27 người nằm ở trạm quân y". Hỏi tàu của ông có bao nhiêu người ?

168. Một con chó đuổi theo một con thỏ ở cách xa mình 150 xagiên[1]. Thỏ chạy 2 phút được 500 xagiên, chó chạy trong 5 phút được 1300 xagiên. Hỏi trong bao lâu chó đuổi kịp thỏ ?

169. Một người mua một phần rưỡi của hai phần rưỡi tấm nỉ phải trả ba phần rưỡi của bốn phần rưỡi rup. Hỏi nếu người đó mua sáu phần rưỡi của tám phần rưỡi tấm nỉ thì phải trả bao nhiêu ?

170. Một người nông dân đổi thỏ lấy gà. 2 thỏ đổi lấy 3 gà, mỗi con gà đẻ ra số trứng bằng $\frac{1}{3}$ tổng số gà. Sau đó người nông dân bán trứng, cứ 9 quả thì thu được một số tiền (tính bằng côpêc) đúng bằng số trứng mỗi con gà đẻ. Số gà này bán được 24 antưn[2]. Hỏi có bao nhiêu gà và thỏ ?

171. Một người Pháp vui tính bước vào quán rượu với một số tiền trong túi, anh ta vay chủ quán một số tiền bằng số tiền mình có và khi ra về anh ta phải trả tiền rượu 1 rup. Với số tiền còn lại anh ta lại vào quán rượu thứ hai, lại vay một số tiền đúng bằng số tiền trong túi và lại phải trả 1 rup tiền rượu khi đi ra. Cứ như vậy anh ta vào quán thứ ba, thứ tư. Biết rằng ra khỏi quán thứ tư thì anh ta hết sạch tiền. Hỏi lúc đầu anh ta có bao nhiêu tiền ?

172. Bốn du khách : Lái buôn và con gái, người nông dân và vợ nhặt được 9 antưn thiếu $\frac{1}{4}$ côpêc và một đôi giầy nhỏ. Họ chia nhau như sau : bà vợ người nông dân được đôi giầy và 2 côpêc thiếu

---

(1) 1 xagiên = 2,134 met

(2) 1 antưn = 3 côpêc.

$\frac{1}{4}$ côpêc, còn lại thì con gái người lái buôn lấy số tiền gấp rưỡi số tiền của người nông dân, còn người lái buôn lấy số tiền gấp 2,5 lần số tiền của người nông dân. Hỏi mỗi người được bao nhiêu ?

173. Người ta đánh giá tài sản của một vị khách mới đến như sau : Áo ghilê mốt và chiếc áo đuôi tôm đáng giá 3 antưn trừ $\frac{1}{4}$ côpêc, áo đuôi tôm đắt gấp 5 lần áo ghilê. Hỏi giá mỗi thứ bao nhiêu ?

174. Một người đàn bà Pháp sang nước Nga du lịch có mang theo trong vali của mình chiếc áo dài Phurô và áo lễ Phigarô. Một người Nga đã đánh giá tài sản trong chiếc vali của người đàn bà Pháp như sau : "Số tài sản của bà : chiếc áo dài Phurô giá đắt gấp 3,5 lần giá chiếc Phigarô và tổng giá trị của chúng bằng một nửa của 4,5 antưn. Hỏi giá mỗi thứ là bao nhiêu ?

175. Một người lính nhận tiền bồi thường thương tật như sau: 1 côpêc cho vết thương thứ nhất, 2 côpêc cho vết thương thứ hai, 4 côpêc cho vết thương thứ ba v.v... Biết rằng tổng số tiền bồi thường anh ta nhận được là 655 rup 35 côpêc. Hỏi anh ta bị bao nhiêu vết thương ?

176. Với câu hỏi "mấy giờ rồi ?" thì được trả lời "$\frac{2}{5}$ số giờ từ nửa đêm đến lúc này bằng $\frac{2}{3}$ số giờ từ lúc này đến nửa ngày". Hỏi lúc đó là mấy giờ ?

BÀI TOÁN VUI CỦA M.I LECMÔNTÔP

177. Một trong những người cùng thời M.I.Lecmôntôp biết rõ ông, đã kể lại rằng : "Đầu năm 1841, trung đoàn Tengin đóng ở Anap. Các sĩ quan rỗi việc họp nhau lại, trong đó có Lecmôntôp, tán chuyện. Câu chuyện đang đề cập đến một giáo chủ thông thái có thể giải nhẩm được những bài toán rất phức tạp. Một sĩ quan từ tiểu đoàn nghỉ lễ – một ông già với huân chương thánh Joocgiơ chợt nói với Lecmôntôp : "Ông nghĩ sao, khi mọi người nói ông cũng là một nhà toán học". – Chẳng có gì lạ cả – nhà thơ trả lời – tôi có thể biểu diễn, thể hiện một thử nghiệm tính toán tuyệt diệu, nếu các bạn muốn.

– Vâng, hãy thử xem !

– Vậy thì, bạn hãy nghĩ một số bất kì, tôi sẽ dùng các phép tính số học đơn giản để xác định số đó.

Người bạn già cười hoài nghi, nhưng vẫn muốn "thử" tài, nên hỏi thêm "Số tôi nghĩ ra có cần phải lớn lắm không ?"

– Bất kì số nào, nhưng để tính nhanh, bạn hãy tự hạn chế ở một số có hai chữ số.

– Rồi, tôi đã nghĩ xong – ông già nói, nháy mắt với các sĩ quan xung quanh và nói số đó cho một bà ngồi cạnh mình.

– Làm ơn hãy thêm vào số đó – Lecmôntôp nói – số 25 nhẩm hay viết ra cũng được !

Ông già lấy cây bút và viết ra giấy.

– Bây giờ xin thêm vào 125 nữa.

Ông già thêm vào.

– Xin trừ đi 37.

Ông già trừ đi.

– Xin trừ đi tiếp số mà ông nghĩ ra.

Ông già làm tiếp.

– Bây giờ lấy kết quả nhân với 5.

Ông già cắm cúi nhân.

– Xin ông chia cho 2.

Ông già chia.

– Bây giờ xem ông có kết quả gì. Nếu như tôi không nhầm thì đó là $282\frac{1}{2}$?

Người sĩ quan già bật dậy, ông kinh ngạc bởi tính chính xác của phép tính Lecmôntôp làm.

– Vâng, hoàn toàn đúng là $282\frac{1}{2}$. Tôi nghĩ số 50, và rồi ông kiểm tra lại các phép tính, đúng vậy, đúng bằng $282\frac{1}{2}$. Hừ, ông không là phù thủy đấy chứ ?

– Phù thủy hay không thì không biết, nhưng quả là tôi đã học toán – Lecmôntôp mỉm cười.

– Nhưng, xin ... – Ông già có lẽ nghi ngờ, không lẽ Lecmôntôp nhìn trộm số của ông ta khi ông đang mải tính – liệu có thể làm lại được không ?

– Được – Lecmôntôp trả lời.

Ông già ghi số vào mảnh giấy, không cho ai xem, đặt dưới ngọn nến và tự mình tính nhẩm những số mà nhà thơ vừa nói. Lần này kết quả vẫn đoán được.

Mọi người trở nên quan tâm hơn, ông già chỉ còn cách phẩy tay. Bà ngồi cạnh yêu cầu lặp lại cuộc thử nghiệm và lần nữa, nó lại thành công".

Hỏi bí mật đoán số ở đâu ?

BÀI TOÁN V.G. BÊNHEĐIKTÔP

178. Một bà lái buôn đem 9 chục quả trứng giao cho 3 cô con gái mang ra chợ bán. Bà giao cho cô chị cả 1 chục, cô hai 3 chục và cô út 5 chục. Sau đó bà dặn thêm : Các con cần thỏa thuận trước giá với nhau và khi đã thống nhất rồi thì không được thay đổi. Mẹ hi vọng rằng tổng số tiền chị cả bán được bằng số tiền cô thứ hai bán 30 quả, bằng số tiền cô út bán 50 quả, đồng thời các con đều bán được trứng với giá không ít hơn 10 côpêc một chục và tổng số tiền bán được của các con không ít hơn 90 côpêc hoặc 30 antưn.

Hỏi các cô gái thực hiện lời mẹ dặn như thế nào ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA L.N. TÔNXTÔI

179. Trong truyện ngắn của L.N. Tônxtôi : "Cần nhiều đất hay không", kể rằng : Người nông dân sẽ nhận được mảnh đất mà anh ta chạy quanh mảnh đất ấy thì vừa hết một ngày ! Vậy cần chạy theo hình nào thì có lợi nhất : hình tròn, hình vuông, hình lục giác đều v.v... (Chỉ dẫn : trong các hình có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn nhất ?)

180. Một đội cắt cỏ phải cắt cỏ trên hai mảnh ruộng, mảnh này lớn gấp đôi mảnh kia. Nửa ngày đầu cả đội cắt ở mảnh lớn, sau đó họ chia đôi, một nửa ở lại ruộng lớn cắt tiếp đến chiều thì xong, còn một nửa sang cắt ở mảnh nhỏ, đến chiều thì còn lại một ít mà ngày hôm sau một người phải cắt hết một ngày mới xong. Hỏi có bao nhiêu thợ cắt cỏ ở trong đội ?

181. Một con nhện và một con ruồi đậu trên hai bức tường đối diện của một căn phòng, ruồi cách sàn nhà 1,5 asin, nhện cách trần nhà 1,5 asin. Nhện bò theo con đường nào để bắt được ruồi một cách nhanh nhất ?

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN *"VỠ LÒNG"* CỦA L.N. TÔNXTÔI

182. Năm anh em chia tài sản sau khi cha mất. Gia tài gồm có 3 ngôi nhà. Do nhà không chia ra được nên 3 anh lớn lấy nhà và trả tiền cho 2 em. Mỗi anh lớn trả cho các em 800 rup. Hai người em chia nhau, mỗi người một phần như nhau. Vậy giá mỗi ngôi nhà là bao nhiêu ?

183. Một người nông dân đi bộ, khởi hành từ TuLa đến Maxcơva, lúc 5 giờ sáng. Đến 12 giờ trưa, một bá tước đi xe từ TuLa đến Maxcơva. Hỏi bá tước đuổi kịp người nông dân ở đâu, biết rằng người nông dân đi với vận tốc 5 dặm / giờ, còn bá tước đi xe với vận tốc 11 dặm / giờ.

184. Một nông dân mướn 70 mẫu đất để trồng lúa mạch, giá thuê là 8 rup một mẫu. Cứ 1 put hạt giống giá 1 rup 30 côpêc, mỗi mẫu gieo hết 9 put. Lúa mạch mỗi năm thu được 13 vựa một mẫu. Mỗi vựa xay được 6 put lúa mạch. Tiền xay lúa là 7 côpêc cho 1 put. Chi phí vận chuyển hết 11 côpêc cho 1 put. Giá bán lúa mạch là 1 rup 40 côpêc / 1 put.

Liệu người nông dân lỗ hay lãi ?

185. Một người nghĩ ra trò chơi đánh cờ, chế ra bàn cờ (64ô) dâng lên vua. Vua chơi thử thấy thích lắm bèn phán thưởng. Người này tâu : "Xin bệ hạ cho đặt vào ô đầu tiên của bàn cờ 1 hạt thóc, ô tiếp theo 2 hạt, ô thứ ba 4 hạt, ô sau gấp đôi số hạt thóc ô trước..., và sau đó thần xin nhận toàn bộ số hạt thóc đó !" Vua cười và nghĩ rằng ông ta xin thưởng ít. Nhưng tính kĩ ra thì nhà Vua không đủ thóc mà thưởng. Vậy số thóc ấy là bao nhiêu ?

186. Có hai vòi nước chảy vào một cái thùng. Vòi thứ nhất chảy đầy thùng hết 24 phút, vòi thứ hai chảy đầy thùng hết 15 phút. Thùng có một lỗ rò, nước chảy hết qua lỗ rò mất 2 giờ. Hỏi trong bao lâu thì nước sẽ đầy thùng nếu cùng mở hai vòi nước chảy một lúc ?

BÀI TOÁN RA CHO IVAN PÊTRÔP

187. Hãy nhẩm tính xem có bao nhiêu cách trả 78 rup bằng tiền 3 rup và 5 rup ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA RACHINXKI

188. Tính nhẩm nhanh kết quả của biểu thức :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

189. Tính nhanh : bình phương của 84 là bao nhiêu ?

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ "*GIÁO TRÌNH ĐẠI SỐ*" CỦA A.N. XTRANNÔLIUBXKI

190. Một thương gia đang nợ 753 rup, xin chủ nợ cho vay thêm 303 rup. Chủ nợ đồng ý với điều kiện là khoản nợ phải được trả hết trong 8 tháng, đồng thời cuối tháng đầu tiên phải trả ngay một khoản, sau đó cuối mỗi tháng tiếp theo nâng khoản trả nợ lên một nửa, nghĩa là tháng thứ hai trả 1,5 khoản, tháng thứ ba trả 2 khoản...

Thương gia đồng ý. Vậy tháng đầu tiên ông ta phải trả một khoản bao nhiêu và hằng tháng sau đó phải trả bao nhiêu ?

191. Hai người cùng làm thuê cho một ông chủ trong cùng một thời gian. Một người được trả công 15 rup / 1 tuần, còn người kia là 10 rup / 1 tuần. Xong việc thì thấy rằng người thứ nhất nhận được số tiền nhiều hơn người thứ hai đúng bằng tổng số tiền anh ta nhận được trong thời gian làm thuê. Anh này đầu tiên nhận được $4\frac{1}{2}$ rup, sau đó là $3\frac{1}{2}$ rup và cuối cùng là 7 rup.

Hỏi hai người làm thuê trong bao lâu ?

192. Một người chết đi để lại di chúc như sau : $\frac{1}{3}$ tài sản cho con trai, $\frac{2}{5}$ cho con gái. Phần còn lại trả nợ 2500 rup, để cho vợ góa 3000 rup. Vậy tài sản của người đó là bao nhiêu và mỗi người con được hưởng bao nhiêu ?

193. Để trả lời câu hỏi về tuổi của các con, một người nói: "Tuổi con đầu của tôi gấp 3 lần tuổi của con thứ hai, tuổi của hai đứa cộng lại bằng tuổi tôi cách đây 29 năm. Bây giờ tôi 45 tuổi".

Vậy tuổi của các con ông ta như thế nào ?

194. Một nhà buôn mua vào hai loại rượu. Ông ta trả giá cho mỗi thùng rượu 5 xô loại 1 là 150 rup, mỗi thùng 7 xô loại 2 là 140 rup. Ông ta muốn có 50 xô rượu pha hai loại để bán với giá

30 rup / 1 xô, với lãi là 3 rup / 1 xô. Hỏi nhà buôn phải lấy bao nhiêu xô rượu mỗi loại để có được rượu pha như trên ?

195. Người thợ bạc có các thỏi bạc loại 3 bảng và 4 bảng. Mỗi thỏi loại 3 bảng giá 288 rup, loại 4 bảng giá 328 rup. Ông ta phải đúc 1 bình bạc nặng 20 bảng từ 2 loại bạc trên có tỉ lệ sao cho khi bán thì mỗi bảng được 93 rup, trong đó có cả 3 rup tiền công.

Hỏi ông ta phải dùng bao nhiêu bảng bạc mỗi loại để làm được việc này ?

BÀI TOÁN TỪ TRUYỆN NGẮN CỦA A.P. SÊKHÔP

196. Một lái buôn muốn mua 138 thước vải đen và vải xanh với số tiền 540 rup. Hỏi cần phải mua bao nhiêu thước mỗi loại nếu vải xanh giá 5 rup / 1 thước, còn vải đen là 3 rup / 1 thước.

BÀI TOÁN DÂN GIAN

197. Bảy tu sĩ đi trên đường
Mỗi người có 7 cái nạng
Mỗi nạng có 7 cái móc
Mỗi móc treo 7 túi
Mỗi túi có 7 bánh gatô
Mỗi bánh có 7 chú chim sẻ.
Hỏi có bao nhiêu tất cả ?

NHỮNG BÀI TOÁN TÂY ÂU

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA LÊÔNAĐƠ PIZANXKI

198. Một người nói với bạn : "Nếu anh đưa tôi 5 đina thì tôi sẽ giàu gấp anh 5 lần", người bạn trả lời : "Nếu anh cho tôi 5 đina thì tôi sẽ giàu gấp anh 7 lần !". Hỏi mỗi người có bao nhiêu đina ?

199. Một người mua 30 con chim hết 30 đồng, trong đó cứ 3 chim sẻ giá 1 đồng, cứ 2 chim ngói giá cũng 1 đồng, còn mỗi con bồ câu giá 2 đồng. Hỏi mỗi loại chim có mấy con ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA REGIÔMÔNTĂNG

200. Giải phương trình :

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = 25 .$$

201. Chứng minh rằng các đường cao của tam giác đồng quy.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA LÊÔNA ĐƠ VANHXI

202. Chứng minh rằng nếu hai đường tròn bằng nhau mà cắt nhau thì đường thẳng qua hai giao điểm cách đều hai tâm của chúng.

BÀI TOÁN CỦA AĐAM RIE

203. Một con ngựa giá 12 phlorin. Mỗi người trong ba người đi mua ngựa không đủ tiền để mua. Người thứ nhất nói với hai người kia : "Mỗi người hãy đưa cho tôi nửa số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua ngựa !". Người thứ hai lại nói với hai người bạn kia là : "Mỗi người đưa cho tôi $\frac{1}{3}$ số tiền của mình, tôi sẽ lấy được ngựa !". Cuối cùng người thứ ba nói : "Chỉ cần các anh đưa cho tôi $\frac{1}{4}$ số tiền của mình thì con ngựa sẽ là của tôi !". Hãy cho biết mỗi người có bao nhiêu tiền ?

BÀI TOÁN TACTALIA

204. Bằng thước và compa đã mở cố định sẵn hãy dựng một tam giác đều trên đoạn AB cho trước (khẩu độ compa khác độ dài đoạn AB).

NHỮNG BÀI TOÁN CACĐANÔ

205. Bằng cách dựng hình, tìm nghiệm dương của phương trình: $x^2 + 6x = 91$.

206. Tách 10 thành hai số hạng sao cho tích của chúng bằng 40.

207. Dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn cho trước.

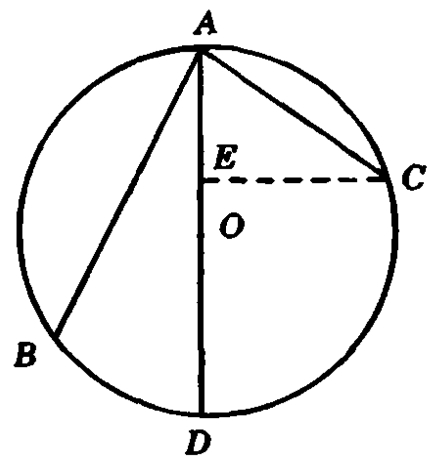
BÀI TOÁN CỦA VIET

208. Giải phương trình $x^2 + px + q = 0$ bằng phép thế $x = y + z$.

BÀI TOÁN GALILÊ

209. Vẽ một vòng tròn trên tường (hình 7).

Từ đỉnh A cao nhất, dọc theo hai dây cung AB và AC đặt hai máng. Từ A, cùng một lúc thả 3 viên bi : 1 rơi tự do, còn 2 viên khác trượt không ma sát trên các máng AB và AC. Hỏi viên bi nào đến đường tròn trước ?



Hình 7

BÀI TOÁN KEPLE

210. Cho ba đường thẳng song song l, m, n. Chùm đường thẳng SA, SB, SC cắt l tương ứng ở A, B, C cắt m tương ứng tại E, F, H. Từ E, F, H kẻ các đường thẳng song song với tia SP, tương ứng cắt n tại các điểm L, M, N. Chứng minh rằng các đường thẳng LA, MB, NC, SP đồng quy.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ĐÊGIAC

211. Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau σ, σ_1, sao cho những đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy (điểm Đêgiac) thì các cặp cạnh tương ứng AB và A_1B_1, BC và B_1C_1, AC và A_1C_1 (với điều kiện không song song với nhau) sẽ cắt nhau tại ba điểm cùng thuộc một đường thẳng (còn gọi là đường thẳng Đêgiac).

Ngược lại, nếu giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng thì các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy.

212. Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đồng phẳng sao cho những đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy (điểm Đêgiac) thì giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng (còn gọi là đường thẳng Đêgiac). Ngược lại nếu giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng thì các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy.

BÀI TOÁN CỦA ĐÊCAC

213. Giải phương trình

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PHECMA

214. Chứng minh rằng nếu S là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn $\div\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots$ thì $\dfrac{S}{S - a_1} = \dfrac{a_1}{a_2}$.

215. Trên đường kính AB của nửa đường tròn đường kính AB dựng một hình vuông có cạnh AC bằng cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn. Nếu nối các đỉnh C và D với một điểm M tùy ý nằm trên nửa đường tròn thì các đường thẳng CM và DM sẽ cắt đường kính AB tại E và F.

Hãy chứng minh rằng $AF^2 + BE^2 = AB^2$.

216. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^4 + y^4 = z^4$$

không có nghiệm nguyên.

BÀI TOÁN CỦA FUNGABEC

217. Cho ba đường thẳng OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và A, B, C là ba điểm tương ứng trên ba đường thẳng đó; kí hiệu $S_{\Delta ABC}$ là diện tích của ΔABC ... Hãy chứng minh rằng :

$$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC}.$$

BÀI TOÁN CỦA VANLIT

218. Hãy chứng minh rằng trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất (chứng minh bằng phương pháp đại số).

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PATXCAN

219. Chứng minh rằng nếu các cạnh đối diện của một lục giác nội tiếp trong một đường tròn không song song thì giao điểm của các cặp cạnh này thẳng hàng (còn gọi là đường thẳng Patxcan).

220. Hãy phát biểu những trường hợp giới hạn của bài toán Patxcan được nêu ở bài 219, những trường hợp đó sẽ cho những kết quả thú vị đối với những ngũ giác, tứ giác và tam giác nội tiếp đường tròn (xem chỉ dẫn).

221. Tìm dấu hiệu chia hết cho một số bất kì.

BÀI TOÁN ÔDANAM

222. Ba người muốn mua một ngôi nhà giá 26000 Livơrơ. Họ thoả thuận với nhau là người thứ nhất góp một nửa, người thứ hai góp $\frac{1}{3}$, còn người thứ ba góp $\frac{1}{4}$. Hỏi mỗi người góp bao nhiêu ?

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN "*TOÁN HỌC PHỔ CẬP*" CỦA NIUTƠN

223. Hãy chia $y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^2y - \frac{1}{2}a^4$

cho $y^2 - 2ay + a^2$.

224. Cho đoạn thẳng BC. Tại hai đầu mút B và C dựng hai đường thẳng BA và CA tạo với BC những góc cho trước. Tính khoảng cách từ A đến BC.

225. 12 con bò ăn hết $3\frac{1}{3}$ mẫu cỏ trong vòng 4 tuần; 21 con bò ăn hết 10 mẫu cỏ trong 9 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết 24 mẫu cỏ trong 18 tuần ?

226. Một thương gia hằng năm tăng tài sản lên $\frac{1}{3}$ và giảm tài sản do chi phí 100 bảng. Sau 3 năm ông nhận thấy gia tài tăng gấp đôi. Hỏi ban đầu ông ta có bao nhiêu tiền ?

BÀI TOÁN LEPNIT

227. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA XÊVA

228. L, M, N là ba điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các đường thẳng AL, BM, CN đồng quy là :

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 .$$

229. Dùng kết quả của định lí XÊVA ở trên, chứng minh các mệnh đề sau :

1) Các đường trung tuyến trong tam giác đồng quy.

2) Các đường cao của tam giác đồng quy.

3) Các đường phân giác của tam giác đồng quy.

BÀI TOÁN CỦA I.BECNULI

230. Chứng minh rằng nếu hai số hạng đầu của một cấp số cộng dương trùng với hai số hạng đầu của một cấp số nhân thì mọi số hạng của cấp số cộng kể từ số hạng thứ ba trở đi đều bé hơn các số hạng tương ứng của cấp số nhân.

BÀI TOÁN CỦA BƠZU

231. Một người mua ngựa, sau đó một thời gian bán lại với giá 24 pixton. Khi bán anh ta bị lỗ số phần trăm đúng bằng giá của chú ngựa. Hỏi khi mua, con ngựa giá bao nhiêu ?

232. Chứng minh rằng đa thức bậc n :

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

khi chia cho x − b thì sẽ có số dư là :

$$f_n(b) = a_0b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_{n-1}b + a_n .$$

(Định lí Bơzu)

BÀI TOÁN CỦA LƠGIANGĐRƠ

233. Chứng minh rằng tổng các góc trong một tam giác không thể lớn hơn hai vuông, hơn nữa trong khi chứng minh không được phép sử dụng tiên đề về những đường thẳng song song (tiên đề Ơclit) và các hệ quả của nó.

BÀI TOÁN CỦA NAPÔLÊÔNG

234. Hãy chia một đường tròn có tâm cho trước ra bốn phần bằng nhau chỉ bằng compa !

BÀI TOÁN CỦA X.GIECMEN

235. Chứng minh rằng mỗi số dạng $a^4 + 4$ là một hợp số $(a > 1)$.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA GAUXƠ

236. Chứng minh rằng tích của hai số nguyên dương nhỏ hơn một số nguyên tố p, là một số không chia hết cho p.

237. Bằng thước và compa hãy dựng đa giác đều 17 cạnh.

BÀI TOÁN CỦA POATXÔNG

238. Một người có 12 lit rượu và muốn tặng bạn một nửa số rượu đó, nhưng lại không có bình 6 lit. Anh ta chỉ có 2 chiếc bình, 1 chiếc 8 lit và 1 chiếc 5 lit. Làm thế nào để rót được 6 lit rượu vào bình 8 lit ?

BÀI TOÁN CỦA CÔSI (CAUCHY)

239. Chứng minh rằng, đối với một số tự nhiên n bất kì thì luôn có bất đẳng thức :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là những số dương, dấu "=" chỉ đạt được khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BRIĂNGXÔNG

240. Chứng minh rằng trong các lục giác ngoại tiếp hình tròn thì những đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng quy (còn gọi là điểm Briăngxông).

241. Chứng minh rằng :

1) Trong ngũ giác ngoại tiếp đường tròn, những đường thẳng nối hai cặp đỉnh không liên tiếp và đường thẳng nối đỉnh thứ năm với tiếp điểm của cạnh đối diện đồng quy.

2) Trong tứ giác ngoại tiếp đường tròn, hai đường chéo và hai đường thẳng nối các tiếp điểm của hai cặp cạnh đối diện đồng quy.

3) Trong tam giác ngoại tiếp đường tròn, những đường thẳng nối đỉnh tam giác với tiếp điểm của cạnh đối diện đồng quy.

BÀI TOÁN CỦA STAINƠ

242. Chứng minh rằng đường thẳng nối giao điểm của hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên của một hình thang thì chia đôi đáy lớn của hình thang.

243. Chỉ bằng thước kẻ hãy dựng đường vuông góc từ một điểm M cho trước đến đường kính AB của một đường tròn cho trước.

244. Chứng minh rằng diện tích của một tam giác không cân bất kì luôn nhỏ hơn diện tích của một tam giác cân, có chung đáy và có tổng hai cạnh bên bằng tổng hai cạnh bên của tam giác đã cho.

BÀI TOÁN CỦA XTUÔCM (STURM)

245. Một người đi bộ từ thành phố A. Ngày đầu anh ta đi được 10 dặm, mỗi ngày sau đi hơn ngày trước $\frac{1}{4}$ dặm. Ba ngày sau, một người khác ra đi từ thành phố B, so với đích đến xa hơn thành phố A 40 dặm, đi cùng chiều với người kia. Ngày đầu đi được 7 dặm, những ngày sau hơn ngày trước $\frac{2}{3}$ dặm. Hỏi sau bao lâu hai người này gặp nhau ?

BÀI TOÁN KATALAN

246. Từ điểm M ngoài đường tròn hãy dựng một cát tuyến sao cho đường tròn chia cát tuyến này thành hai phần bằng nhau.

BÀI TOÁN DO MÔNĐƠ đặt ra :

247. Hãy tính nhẩm xem hai số nào có hiệu bình phương bằng 133 ?

BÀI TOÁN CỦA STIUƠT

248. Chứng minh rằng nếu trên cạnh của một tam giác (xem là đáy) lấy một điểm và nối nó với đỉnh đối diện (đoạn này gọi là đoạn trong) thì tổng các tích của bình phương mỗi cạnh bên của tam giác với đoạn đáy không kề với nó, trừ đi tích của bình phương đoạn trong với đáy bằng tích của đáy với các đoạn đáy do đoạn trong chia ra (Định lí Stiuơt).

PHẦN II

NHỮNG CUỘC THAM QUAN LỊCH SỬ, LỜI GIẢI VÀ CHỈ DẪN

BABILON

Dưới thời cổ đại ở Babilon, toán học đã nảy sinh từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên. Những cổ vật Babilon dưới dạng các phiếu đất sét với các chữ tượng hình được cất giữ ở nhiều viện bảo tàng trên thế giới, trong đó có viện bảo tàng Ermitage ở Saint – Pétersbourg (Nga), viện bảo tàng nghệ thuật tạo hình ở Moskva (Nga). Người ta đã tìm thấy 44 phiếu đất sét, là một kiểu bách khoa toàn thư đặc biệt của người Babilon cổ đại. Những phiếu đất sét này đã ghi lại những phương pháp khá thuận tiện để giải hàng loạt các bài toán thực tế về chia đất, xây dựng và thương mại.

Thành tựu khoa học của người Babilon cổ đại gồm :

a) Họ đã sáng tạo ra thiên văn học và đã có những số liệu về độ dài chu kì cơ bản của hệ Mặt Trời với độ chính xác khá cao. Ví dụ một tháng Mặt Trăng của Babilon sai khác với tháng được thiên văn hiện đại thừa nhận chỉ có 0,4 giây.

b) Họ đã hình thành hệ thống đếm với cơ số 60, chứ không phải cơ số 10, đã lập ra các hệ thống thước đo và cân mà số đo sau lớn hơn số đo trước 60 lần. Đó là cơ sở chia thước đo thời gian của chúng ta thành giờ, phút, giây ..., vòng tròn thành 360^{o}.

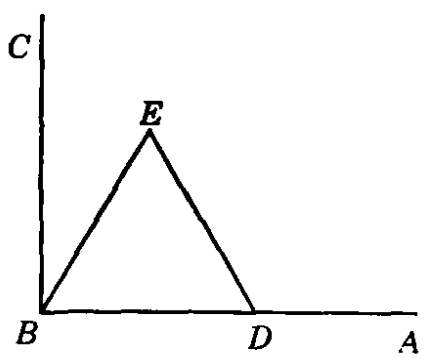
c) Họ đã giải được phương trình bậc hai và giải một số dạng phương trình bậc ba bằng các bảng đặc biệt.

Có căn cứ để khẳng định rằng, toán học cổ Babilon đã ảnh hưởng đến nền toán học của các dân tộc ngoại CAPCADƠ. Đặc biệt ở Acmêni nó giúp thúc đẩy sớm sự phát triển của toán học.

1. Cạnh của lục giác đều nội tiếp trong hình tròn đúng bằng bán kính, do đó $2\pi R = 6R$.

Từ đó suy ra $\pi = \dfrac{6R}{2R} = 3$.

2. Người Babilon cổ biết cách dựng tam giác đều, nhờ đó biết cách chia một góc vuông thành 3 phần bằng nhau, (hình 8).



Hình 8

3. Theo điều kiện của bài toán, diện tích tứ giác là $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{c+d}{2}$, trong đó a, b và c, d là những cặp cạnh đối diện. Công thức này sẽ chính xác khi tứ giác là hình chữ nhật. Lúc đó : $a = b$; $c = d$; $S = ac$.

AI CẬP

Sau Babilon, Ai Cập là trung tâm văn hóa thứ hai của thời cổ đại. Ở đất nước "Kim tự tháp" này, trước Công nguyên hàng ngàn năm đã có các công trình vĩ đại dưới dạng đền đài và kim tự tháp, các công trình xây dựng khác nhau mà trong đó có một số công trình còn tồn tại đến ngày nay, sự phát triển nông nghiệp dựa trên sự tưới tiêu nhân tạo đã sớm tạo ra nhu cầu về tri thức toán học, nhất là hình học.

Các quy tắc toán học cần cho trồng trọt, thiên văn học và xây dựng được ghi trên các bức tường các đền đài hay trong các cuộn giấy bằng thảo mộc.

Ở viện bảo tàng Anh quốc còn lưu trữ các bản viết có tên là phiên bản Rainda, mà giáo sư AÂyzenlor đã giải mã năm 1877. Bản viết thuộc những năm 2000 – 1700 trước Công nguyên, chứa 84 bài toán, phần lớn mang màu sắc số học.

Bản thảo Moskva thuộc năm 1850 trước CN, được nhà sưu tầm Nga Gôlennhisep tìm ra năm 1893, từ năm 1912 nó là sở hữu của viện bảo tàng nghệ thuật tạo hình Moskva. Đây là một di vật hiếm, vô giá đã được các viện sĩ V.A. Turaiep và Stơrup nghiên cứu. Trong bản thảo này có lời giải bài toán tính thể tích kim tự tháp hình chóp cụt với các đáy là hình vuông.

Việc giải mã các bản viết này cho thấy người Ai Cập cách đây hơn 4000 năm đã biết giải hàng loạt bài toán thực tế về số học, đại số và hình học, trong đó phép tính số học đã sử dụng không chỉ số nguyên mà còn cả phân số.

4. Lời giải của bài toán dẫn đến việc giải phương trình sau :

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$$

Từ đó suy ra x = 9.

5. Đây là một cấp số nhân có 5 số hạng với công bội bằng 7 : 7 ; 49 ; 343 ; 4021 ; 16807 ; tổng của chúng là :

$$S_5 = \frac{a_5q - a_1}{q - 1} = \frac{16807 . 7 - 7}{7 - 1} = 19607 .$$

6. Theo điều kiện của đầu bài thì :

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

do vậy $\pi = \dfrac{8^2 . d^2 . 4}{9^2 . d^2} = \dfrac{64 . 4}{81} = 3{,}16$.

7. Theo phương pháp Ai Cập thì :

$S_1 = \frac{a . b}{2}$, trong đó a : đáy ; b : cạnh bên. Ta kí hiệu đường cao của tam giác cân là h, thế thì $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$

Diện tích đúng của tam giác biểu thị qua công thức :

$$S_2 = \frac{ab}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = S_1\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} ,$$

do đó $\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{2 . 10}\right)^2} = 0{,}98$,

tức là sai số không lớn hơn 2%.

8. Theo phương pháp Ai Cập :

$$S_1 = \frac{a + b}{2} . c ,$$

trong đó a và b tương ứng là đáy dưới và đáy trên của hình thang, c là cạnh bên. Gọi h là đường cao hình thang, thế thì :

$$h = c\sqrt{1 - \left(\frac{a - b}{2c}\right)^2} .$$

Diện tích đúng của hình thang là :

$$S_2 = S_1\sqrt{1 - \left(\frac{a - b}{2c}\right)^2} ,$$

Do vậy $\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{a - b}{2c}\right)^2}$.

Thay số vào, ta tìm được sai số.

9. Người Ai Cập giải bài toán này theo công thức sau :

$$V_{\text{chóp cụt tứ giác đều}} = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

trong đó h : chiều cao, a và b là các cạnh đáy dưới và trên của hình chóp cụt tứ giác đều.

10. Kí hiệu x, y là chiều dài các cạnh phải tìm, ta có :

$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ (1) ; xy = S (2). Nhân vế với vế của (1) và (2),

Suy ra : $x^2 = \frac{m}{n} . S$

$$x = \sqrt{\frac{m}{n} . S} \; ; \; y = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n} . S}$$

11. Bài toán này có thể giải bằng cách lập phương trình.

Đáp số : 6630 báu vật.

HI LẠP

Người thầy đầu tiên của người Hi Lạp cổ là người Ai Cập. Vào thế kỉ thứ VII, trước CN, du khách nước ngoài được tự do đến Ai Cập. Do vậy những nhà khoa học cổ Hi Lạp có thể du hành đến "đất nước Kim tự tháp". Khoảng từ thế kỉ IV trước CN, người Hi Lạp cổ đã có những tìm tòi độc lập về toán học và đạt được nhiều thành tựu đáng kể, nhất là về hình học. Vào thế kỉ thứ III trước CN, hình học cổ Hi Lạp đạt đến đỉnh cao như các công trình của Ơclit, ông đã viết 12 cuốn sách hình học dưới dạng tiên đề có tên là "Nguyên lí".

Trong các công trình của Ơclit, tính lôgic đạt đến trình độ rất cao, mà mãi đến các thế kỉ XIX và XX toán học mới vượt qua được với các công trình của nhà toán học Đức Hilbert và trường phái của ông

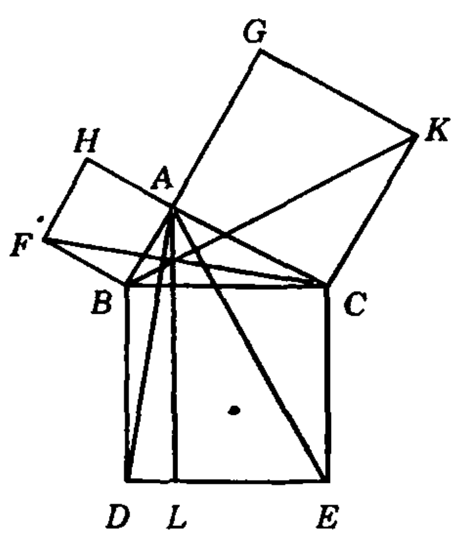
Người Hi Lạp cổ không chỉ quan tâm đến hình học sơ cấp (khi đó thuật ngữ này chưa có) mà còn đặt nền móng vững chắc cho môn hình học cao cấp qua các công trình của Apollonius và Acsimet.

Pitago và các môn đệ đạt được những thành tựu đáng kể trong lí thuyết số.

Trong lĩnh vực đại số, đặc biệt trong việc giải phương trình vô định, thì Diophante, người sống ở xứ Alecxandrie vào thế kỉ II, III, đã làm được nhiều việc và vì thế người ta gọi ông là Diophante ở xứ Alecxandrie. Ông đã hoàn thiện các phương pháp đại số bằng cách đưa vào các kí hiệu đại số và mô tả phương trình đại số bằng chữ. Tác phẩm giá trị nhất của Diophante là cuốn "Số học", phản ánh trình độ đại số của người Hi Lạp cổ đại.

12. Bài toán này được biết dưới tên gọi "định lí Pitago", được đưa vào các giáo trình hình học sơ cấp như một trong những định lí cơ bản. Có nhiều cách chứng minh định lí này, từ cách "chứng minh suy diễn" của Ơclit cực kì đơn giản, đến những cách chứng minh chặt chẽ sau này. Sau đây là cách chứng minh định lí Pitago (giả thuyết 47 của Ơclit : trong cuốn "Nguyên lí" theo xác nhận của Proclus (nhà triết học theo trường phái Platon) (410 – 485) thì cách chứng minh này của chính Ơclit).

"*Giả sử tam giác vuông ABC, có góc* $\widehat{A}$ *vuông, tôi khẳng định diện tích hình vuông dựng trên cạnh BC bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên các cạnh BA và AC*" (hình 9).



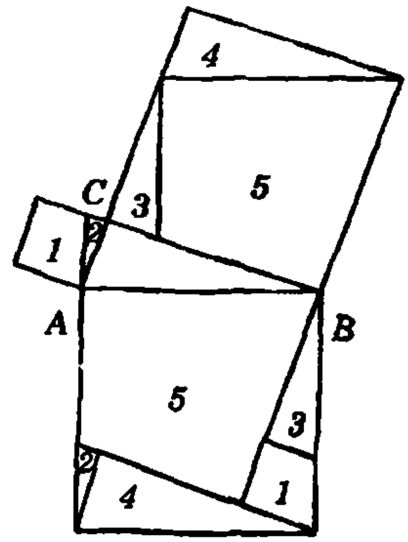
Hình 9

Dựng AL song song với BD và CE. Nối AD và CF; vì các góc BAC, BAH vuông nên C, A, H thẳng hàng.

Tương tự B, A, G thẳng hàng. Do $\widehat{DBC} = \widehat{FBA} = 1v$ (*), nên nếu cùng thêm (*) vào góc $\widehat{ABC}$ thì $\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$, lại có BC = BD và BF = BA nên $\Delta BAD = \Delta BFC$ (c.g.c). Nếu gấp đôi diện tích tam giác BAD thì ta được diện tích hình chữ nhật BDLO vì có chung đáy BD. Còn nếu gấp đôi diện tích tam giác FBC thì ta được diện tích hình vuông BFHA vì cùng chung đáy FB, nghĩa là diện tích hình bình hành BDLO bằng diện tích hình vuông BFHA. Tương tự như vậy khi nối AE và BK thì diện tích hình bình hành CELO sẽ bằng diện tích hình vuông ACKG. Nghĩa là diện tích hình vuông BDEC bằng tổng diện tích của hai hình vuông BFHA và ACKG. Đó chính là điều phải chứng minh.

Cách chứng minh này đặc biệt ở chỗ nó được Ơclit đưa ra cách đây hơn 2000 năm nhưng không khác cách chứng minh hiện nay bao nhiêu.

Trong các sách giáo khoa, phổ biến là các cách chứng minh dựa trên sự bằng nhau của các hình được chia, khác với cách chứng minh của Ơclit là có tính minh họa cao hơn nhưng lại phức tạp hơn. Ví dụ ở thế kỉ thứ IX Ana-ri-shi chứng minh dựa trên cơ sở hình vẽ bên (hình 10).



Hình 10

Định lí Pitago có một lịch sử phong phú. Thực ra trước Pitago rất lâu nó được người Ai Cập, Babilon, Trung Hoa và Ấn Độ biết đến. Cách 8 thế kỉ trước CN, định lí Pitago được người Ấn Độ biết dưới tên "quy tắc sợi dây thừng" và được sử dụng để dựng các đền thờ theo quy định thánh thần phải có hình thể hình học vuông vức quay bốn phía.

Cách chứng minh của Pitago không tồn tại đến ngày nay. Hiện nay có hơn 100 cách chứng minh khác nhau. Có thể một trong những cách đó thuộc về Pitago hoặc môn đệ của ông (theo thông lệ thời đó, những gì học sinh tìm ra đều dành cho thầy, người đứng đầu trường phái).

Về Pitago (khoảng 580 – 500 trước CN) là nhà toán học, triết học cổ Hi Lạp. Ông sinh ra ở đảo Samos. Thời trẻ, ông đã du lịch ở Ai Cập, sống ở Babilon để nghiên cứu các ngành khoa học. Ông đã ở đó 12 năm để nghiên cứu thần học và thiên văn học. Sau khi ở Babilon ông sang Nam Italia, ở Xi xin (Sicile) ở đây ông thành lập trường phái Pitago, đem lại nhiều cống hiến cho toán học và thiên văn học. Ông đã đem lại tính khoa học cho môn hình học. Ngoài định lí nổi tiếng với tên tuổi của ông, người ta cho rằng ông có cách chứng minh định lí về tổng các góc trong tam giác; bài toán phủ (tức là chia mặt phẳng thành những đa giác đều); các phương pháp hình học để giải phương trình bậc hai; cách giải bài toán : cho trước một hình, dựng một hình thứ ba bằng một hình cho trước và đồng dạng với hình kia.

Trường phái Pitago đã phổ biến sự thần thánh hóa con số, coi quan hệ số lượng là bản chất của mọi sự vật, tách rời chúng khỏi hiện thực vật chất theo chủ nghĩa duy tâm.

Pitago cho rằng thước đo tất cả vật chất, không vật chất là con số và quan hệ của chúng. Theo ý Pitago, cả những khái niệm xa vời với toán học như "tình bạn", "chính nghĩa", "vui mừng"... cũng tìm được sự lí giải về mặt quan hệ số. Các con số được gán cho những tính chất thần bí : có số mang lại điều tốt lành, số khác – sự bất hạnh, số nữa – sự thành công ... Pitago cho rằng linh hồn cũng là một con số, nó bất tử, truyền từ người này sang người khác. Số học thần bí này gây khó khăn cho sự phát triển toán học.

13. Trước tiên, ta thấy nếu bộ ba số x_1 , y_1 , z_1 tạo thành bộ ba số Pitago thì x_1k , y_1k , z_1k với $k > 0$ bất kì cũng tạo thành bộ ba số Pitago. Thật vậy :

Từ $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, sau khi nhân hai vế với k^2 ta có :

$$(x_1k)^2 + (y_1k)^2 = (z_1k)^2 .$$

Do vậy nếu biết một bộ số Pitago thì ta có thể, bằng cách trên, chỉ ra vô hạn các bộ ba số Pitago. Nhưng điều đó, không có nghĩa là tìm được tất cả các bộ ba số Pitago.

Bộ ba số Pitago x, y, z được gọi là bộ ba nguyên tố nếu x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau. Trường hợp ngược lại, ta sẽ gọi là bộ ba dẫn xuất. Do vậy để biết được tất cả các bộ ba số Pitago, chỉ cần biết các bộ ba nguyên tố, từ đó bằng cách nhân với 2, 3, ... ta tìm được các bộ ba dẫn xuất. Hơn nữa ta nhận thấy, nếu bộ ba x, y, z là bộ ba số Pitago, trong đó có một cặp là nguyên tố cùng nhau thì bộ ba đó sẽ là bộ ba nguyên tố. Ta chứng minh điều này.

Giả sử x, y nguyên tố cùng nhau, ta sẽ chứng minh x, y, z sẽ từng đôi một nguyên tố cùng nhau. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử x, z không là cặp số nguyên tố cùng nhau (đối với cặp y, z ta lập luận tương tự), khi đó :

$$x = x_1 d \,;\, z = z_1 d$$

trong đó $d \neq 1$ và d là ƯSCLN của x và z, nó phải thỏa

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

$\Rightarrow (x_1 d)^2 + y^2 = (z_1 d)^2 \Rightarrow y^2 = (z_1^2 - x_1^2)d^2$

$\Rightarrow$ d là ước số của y $\Rightarrow$ (x, y) không nguyên tố cùng nhau

$\Rightarrow$ trái giả thiết $\Rightarrow$ (x, z) nguyên tố cùng nhau.

Do vậy bộ ba x, y, z là nguyên tố. Vì x, y nguyên tố cùng nhau nên không thể cùng là số chẵn, đồng thời cũng không cùng là số lẻ. Thật vậy, nếu chúng cùng lẻ, tức là $x = 2p + 1$ ($p \in N^+$) và $y = 2q + 1$ ($q \in N^+$), thay vào phương trình (1) ta có :

$$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = z^2$$

$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 \quad (*)$$

$\Rightarrow z^2$ là số chẵn $\Rightarrow$ z chẵn $\Rightarrow z^2$ chia hết cho 4.

Mặt khác theo đẳng thức (*) thì z^2 chia cho 4 lại dư 2, dẫn đến mâu thuẫn.

Như vậy ta có thể giả thiết x lẻ, y chẵn, và như thế z là số lẻ. Phương trình (1) viết lại là :

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

Giả sử $z + y = m$ và $z - y = n$,

Từ đó $z = \dfrac{m + n}{2}$; $y = \dfrac{m - n}{2}$; $x^2 = m \cdot n$ $(m > n)$

Do x lẻ và $x^2 = m.n$ nên m, n sẽ cùng lẻ, ta chứng minh được (m, n) là một cặp số nguyên tố cùng nhau. Giả sử d là ước chung của m và n, $d \neq 1$, khi đó :

$$m = m_1 d \,;\, n = n_1 d$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1 + n_1}{2} d \,;\, y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1 - n_1}{2} d$$

Vậy y và z không nguyên tố cùng nhau. Mâu thuẫn ! Do đó (m, n) là cặp số nguyên tố cùng nhau.

Vì $x^2 = mn$ và (m, n) nguyên tố cùng nhau nên $m = u^2$ và $n = v^2$ với (u, v) nguyên tố cùng nhau.

$$\text{Vậy } x = u.v,\ y = \frac{u^2 - v^2}{2},\ z = \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (**)$$

Đây chính là công thức tìm bộ ba số (x, y, z) là bộ ba số Pitago. Sau đây, vài bộ ba số Pitago tính theo công thức (**).

u	v	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

Lưu ý 1 : Bộ ba số Pitago 3, 4, 5 được biết đến ở Ai Cập từ lâu, trước Pitago, là các cạnh của tam giác vuông Ai Cập.

Lưu ý 2 : Nhờ các bộ ba số Pitago có thể thu được vô số các tam giác Hêrông, tức là các tam giác có cạnh và diện tích là những số nguyên dương. Thật vậy cứ ứng với một tam giác Pitago sẽ có các cạnh góc vuông và cạnh huyền là số nguyên dương. Nếu lấy hai tam giác Pitago có một cạnh góc vuông bằng nhau đặt chúng lên nhau sao cho hai cạnh đó trùng nhau còn hai cạnh góc vuông của hai tam giác nối dài nhau thì ta có một tam giác Hêrông. Ví dụ từ hai tam giác Pitago : 5, 12, 13 và 35, 12, 37 ta sẽ có tam giác Hêrông là 40, 12, 37 với chiều cao 12, diện tích $S = \frac{40 \cdot 12}{2} = 240$ (đ.v. diện tích).

Lưu ý 3 : Tập hợp vô hạn các số Pitago cho phép lập hàng loạt bài toán rất thú vị, đặc biệt là ba bài toán sau rất hấp dẫn các nhà toán học.

BÀI TOÁN 1. Tìm tất cả các bộ ba số Pitago trong đó hai trong ba số là hai số liên tiếp (ví dụ 20, 21, 29).

BÀI TOÁN 2. Tìm tất cả các bộ ba số Pitago trong đó có một số là số chính phương (ví dụ 3, 4, 5; 7, 24, 25).

BÀI TOÁN 3. Bài toán Phéc ma (Fermat). Tìm các bộ ba số Pitago (x, y, z) sao cho x + y và z là số chính phương.

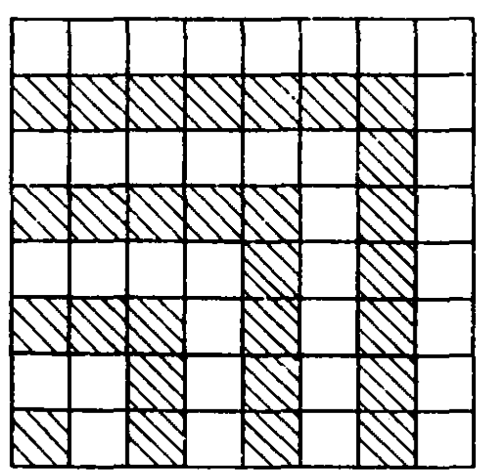
Có một tập hợp vô hạn các bộ ba những số như thế, nhưng tất cả chúng là các số rất lớn.

14. Bài toán này được giải bằng phương pháp hình học. Đơn vị được biểu diễn là một hình vuông, còn những số tiếp sau là những hình vuông xếp theo hình thước thợ (hình 11a).

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \text{ v.v...}$$

Có thể giải bài toán này một cách đơn giản bằng phương pháp đại số : số lẻ đầu tiên là 1, còn số lẻ thứ n bằng 2n − 1, xét cấp số cộng : 1, 3,..., 2n − 1. Tổng của các số đó là :

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

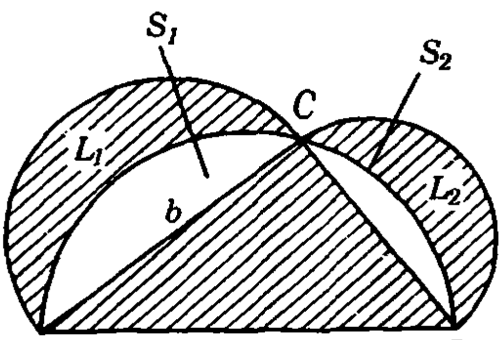


Hình 11a

15. Lời giải bằng phương pháp hình học của trường phái Pitago:

Nếu lấy đi từ hình vuông (hình 9) một hình thước thợ ⅂ tức là trừ đi một số lẻ, ta được một hình vuông khác, nhỏ hơn, tức là được một số chính phương. Hay là $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$ hay $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$.

16. Cho tam giác vuông ABC; a, b là cạnh góc vuông, c là cạnh huyền. Dựng các nửa đường tròn đường kính lần lượt là a, b, c trên CB, CA, AB (hình 11b).



Hình 11b

Các hình bán nguyệt L_1 , L_2 và tam giác ABC được gạch chéo. Ta phải chứng minh :

diện tích L_1 + diện tích L_2 =

= diện tích ΔABC .

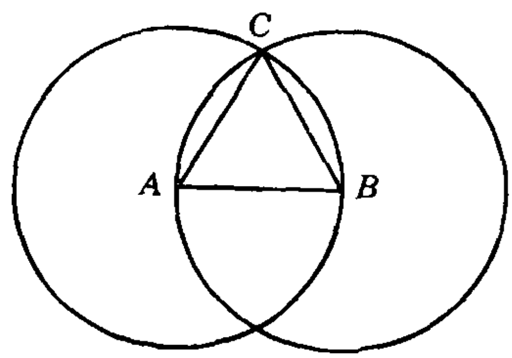
Kí hiệu S_1 , S_2 là diện tích hai hình viên phân của hình tròn lớn có cạnh đáy là a, b.

Theo định lí Pitago thì :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

từ đó $$\frac{1}{2}.\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (*)$$

tức là tổng diện tích hai nửa hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích nửa đường tròn dựng trên cạnh huyền. Bớt đi hai vế của đẳng thức (*) $S_1 + S_2$ ta suy ra điều phải chứng minh.

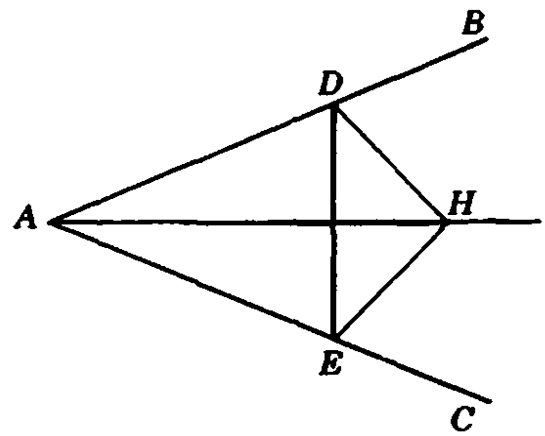


Hình 12

17. Dựng đường tròn tâm A, bán kính bằng đoạn thẳng AB cho trước (hình 12). Lại lấy B làm tâm dựng đường tròn cùng bán kính. Kí hiệu C là một giao điểm của hai đường tròn. Nối C với A, B. Dễ dàng chứng minh ABC là tam giác đều.

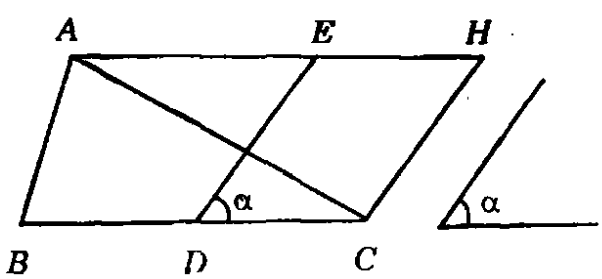
18. Giả sử BAC là một góc cho trước. Lấy điểm D bất kì trên AB (hình 13), dựng điểm E trên AC sao cho AE = AD. Nối DE. Lấy DE làm cạnh, dựng tam giác đều DEH (bài 17). Nối AH. Thế thì đường thẳng AH sẽ chia đôi góc BAC vì

$$\Delta ADH = \Delta AEH .$$



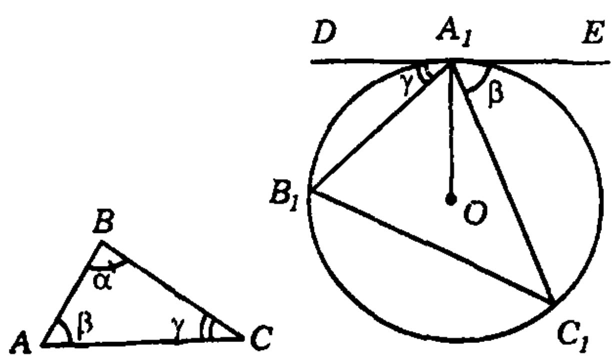
Hình 13

19. Giả sử ABC là tam giác cho trước, α là góc cho trước. Chia đôi cạnh BC bằng điểm D và tại D dựng góc $\widehat{CDE} = \alpha$ (hình 14). Sau đó dựng CH//DE (lưu ý AH//BC). Như vậy hình bình hành DEHC chính là hình bình hành phải dựng.



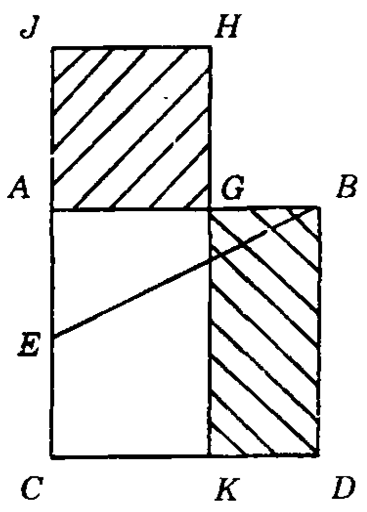
Hình 14

20. Lấy điểm A_1 tùy ý trên đường tròn đã cho, tại đó dựng tiếp tuyến DE với đường tròn (hình 15). Dựng góc $\widehat{EA_1C_1}$ bằng β và góc $\widehat{DA_1B_1}$ bằng γ. Thế thì tam giác $A_1B_1C_1$ chính là tam giác phải dựng.



Hình 15

21. Lập luận của Ơclit :



Hình 16

"Cho trước đoạn thẳng AB (hình 16), cần chia AB thành hai phần bởi điểm G, sao cho diện tích hình chữ nhật GBDK bằng diện tích hình vuông AJHG, (BD = AB).

Trước tiên, dựng hình vuông ABDC, lấy trung điểm E của AC, kéo dài EA đến J sao cho EJ = BE, rồi dựng hình vuông AJHG. HG kéo dài cắt CD tại K. Điểm G chính là điểm chia AB phải dựng".

Lập luận trên nằm trong cuốn "Nguyên lí" của Ơclit. Bài toán của Ơclit về "điểm chia vàng" trong các sách giáo khoa ngày nay được phát biểu như sau : "Hãy chia một đoạn thẳng thành hai phần sao cho đoạn lớn là trung bình nhân giữa đoạn nhỏ và đoạn thẳng đã cho".

Ta kí hiệu độ dài đoạn thẳng đã cho là a; độ dài đoạn lớn là x, đoạn nhỏ sẽ là a − x. Khi đó x sẽ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 = a(a - x)$$

$$\text{hay} \quad x^2 + ax - a^2 = 0 .$$

Giải ra ta có $x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} . a$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} . a < 0$.

Đương nhiên chỉ lấy nghiệm x_1 .

Vì $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}61804 \ldots$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn, nên $x \approx 0{,}62a$.

Nhiều tượng đài, công trình kiến trúc đã áp dụng có ý thức bài toán "điểm chia vàng", nhất là trong các kiến trúc vĩ đại của người Hi Lạp cổ.

22. Trước tiên ta chứng minh mệnh đề : "*Mỗi số nguyên dương bất kì thì hoặc bằng 1, hoặc là một số nguyên tố, hoặc có thể biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố* ".

Thật vậy, với số 1, khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng với những số nguyên dương đầu tiên nhỏ hơn n, ta chứng minh khẳng định cũng đúng với n + 1 : nếu n + 1 là số nguyên tố thì khẳng định là đúng. Còn nếu n + 1 không phải là số nguyên tố thì nó sẽ là hợp số, tức là $n + 1 = n_1 . n_2$, (hiển nhiên các số n_1 , n_2 nhỏ hơn n + 1). Hơn nữa dễ thấy n_1 , n_2 đều nhỏ hơn n, nên theo giả thiết quy nạp chúng có thể phân tích thành tích các số nguyên tố và do vậy n + 1 cũng phân tích được thành tích của các số nguyên tố. Mệnh đề đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh sự vô hạn của tập hợp các số nguyên tố. Giả sử tập hợp các số nguyên tố là hữu hạn, chẳng hạn chỉ có n số : $p_1, p_2, \dots, p_n$. Xét số $p_1p_2 \dots p_n + 1$, nó lớn hơn p_i (i = 1, ..., n) và phải là hợp số. Theo mệnh đề trên thì số này sẽ được phân tích thành tích các số nguyên tố :

$$p_1p_2 \dots p_n + 1 = q_1 . q_2 \dots q_m \quad (*)$$

Với $q_1, q_2, \dots, q_m$ là các số nguyên tố và không có thừa số q_i (i = 1, ..., m) nào có thể trùng với các số p_i (i = 1, ..., n), vì giả sử $q_i = p_n$ chẳng hạn thì từ (*) ta suy ra :

$p_1p_2 \dots p_n - q_1q_2 \dots q_m = 1$ (**) mà vế trái của (**) chia hết cho q_i , do vậy 1 chia hết cho q_i . Vô lí !

Như vậy các số nguyên tố $q_1, q_2, \dots, q_n$ không thể trùng với các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$, nghĩa là ngoài các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$ còn có các số nguyên tố khác là $q_1, q_2, \dots, q_m$. Hay nói cách khác, tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Ơle (Euler) cũng đưa ra một lời giải độc đáo bài toán này của Ơclit. Ông dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử tập hợp các số nguyên tố là hữu hạn, chẳng hạn là các số $p_1, p_2, \dots, p_n$. Lập tổng của cấp số nhân :

$$1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots+\frac{1}{p_1^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}$$

$$1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_2^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}$$

$$1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

Rồi nhân các chuỗi số đó với nhau ta được :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}}$$

Từ đó suy ra $\displaystyle\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}}=\sum\frac{1}{m}$

hay $\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_n}{p_n-1}$

Tích ở vế phải là hữu hạn, do đó chuỗi ở vế trái là hội tụ. Điều này là mâu thuẫn vì chuỗi ở vế trái như đã biết là một chuỗi điều hòa, nó phân kì. Do đó, tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

23. Tác giả của bài toán là nhà toán học cổ Hi Lạp nổi tiếng Apollonius thế kỉ thứ ba, trước Công nguyên. Để giải bài toán trong trường hợp tổng quát, ông xét những trường hợp riêng và trường hợp giới hạn sau :

1) Dựng một đường tròn qua ba điểm cho trước.

2) Dựng một đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng cho trước.

3) Dựng một đường tròn qua một điểm và tiếp xúc với hai đường thẳng song song cho trước.

4) Dựng một đường tròn qua một điểm và tiếp xúc với hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

5) Dựng một đường tròn qua hai điểm và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước.

6) Dựng đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho và qua hai điểm cho trước.

7) Dựng một đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cùng đi qua một điểm cho trước.

Điều này cũng chứng tỏ nếu bài toán Apollonius có số nghiệm hữu hạn thì chúng không lớn hơn 8.

24. $S_{\text{ngoạitiếp}} = \pi R^2, S_{\text{nộitiếp}} = \pi r^2$,

$r = \frac{a}{2}; R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, trong đó a là cạnh hình vuông.

Khi đó $S_{\text{ngoạitiếp}} = \frac{\pi a^2}{2}; S_{\text{nộitiếp}} = \frac{\pi a^2}{4}$

Do vậy : $S_{\text{ngoạitiếp}} = 2S_{\text{nộitiếp}}$

25. 1) $\frac{1}{2} . 2\pi r . r = \pi r^2$

2) $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{11}{14}$

Do đó $\frac{\pi}{4} = \frac{11}{14}; \pi = \frac{44}{14}; \pi = \frac{22}{7}$

Như vậy diện tích hình tròn, theo Acsimet, là $\frac{22}{7}r^2$.

26. Sử dụng hình vẽ 1, ta tìm được :

$$\text{dt AFDHCB} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8}[(AD + CD)^2 - AD^2 - DC^2] =$$

$$= \frac{\pi}{8} . 2AD . DC = \frac{\pi}{4}BD^2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2 .$$

27. Diện tích bề mặt chỏm cầu được tính theo công thức :

$S = 2\pi Rh$, trong đó R là bán kính hình cầu, h là chiều cao của chỏm cầu.

Nếu l là đường thẳng nối từ đỉnh chỏm cầu với đường tròn đáy, thì $l^2 = 2Rh$. Khi đó :

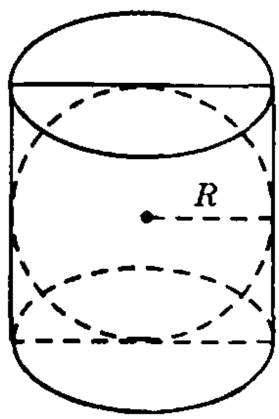
$$S = \pi l^2$$

28. $V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$;

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ; } R = \sqrt[3]{\frac{r^2h}{4}} .$$

Do đó $V_{trụ} = \pi r^2 h$; $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h$; $R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2 h}$.

29. Theo điều kiện của bài toán ta nhận được thể tích của hình trụ (hình 17) là :



Hình 17

$$V_{trụ} = \pi R^2 . 2R = 2\pi R^3$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{2}V_{cầu} .$$

Cũng từ chính điều kiện bài toán ta có diện tích toàn phần của hình trụ :

$$S_{trụ} = 2\pi R . 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$
$$= \frac{3}{2}(4\pi R^2) = \frac{3}{2}S_{cầu} .$$

30. Bài toán được thiết lập tổng quát như sau : Tìm tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn a + b + c + d + ... , với công bội bằng $\frac{1}{4}$. Theo định nghĩa của cấp số nhân thì khi $q = \frac{1}{4}$ suy ra :

$$b = \frac{a}{4}, c = \frac{b}{4}, d = \frac{c}{4}, ...$$

hay $\qquad a = 4b,\ b = 4c,\ c = 4d,\ \ldots$

Hơn nữa : $b + c + d + \ldots + \frac{1}{3}(b + c + d + \ldots) =$

$$= \left(b + \frac{b}{3}\right) + \left(c + \frac{c}{3}\right) + \left(d + \frac{d}{3}\right) + \ldots = \frac{4}{3}b + \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}d + \ldots$$

$$= \frac{1}{3}(4b + 4c + 4d + \ldots) = \frac{1}{3}(a + b + c + \ldots)$$

Do đó $\ b + c + d + \ldots = \frac{1}{3}a$

Suy ra $a + b + c + d + \ldots = \frac{4}{3}a$

Từ đó tìm được kết quả phải tìm.

31. Lời giải của Acsimet được viết theo công thức toán học ngày nay như sau :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Công thức này nhận được từ đồng nhất thức :

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Với $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, thay vào công thức ta có :

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Cộng từng vế ta được :

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + \ldots + n) + n\ ;$$

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3 \cdot \frac{(n+1)n}{2} + n\ ;$$

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = n^3 + \frac{3(n+1)n}{2} - n$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

32. *Lời giải của Acsimet* (tóm tắt)

Giả sử rằng những hạt cát nhỏ đến mức 10000 hạt mới lấp đầy một hạt anh túc (hình cầu). (Đường kính một hạt anh túc bằng $\frac{1}{40}$ tấc). Ở Hi Lạp chỉ có số đếm đến vạn (1 vạn = 10^4), và 1 vạn vạn, tức là $10^4 . 10^4 = 10^8$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 .$$

Từ đó suy ra quả cầu có đường kính 1 tấc chứa 64000 hạt anh túc hay 64.000 vạn hạt cát, hay $64 . 10^7$ hạt cát, hay vào khoảng $10 . 10^8$ hạt cát (làm tròn vì : $10 > 6,4$). Quả cầu đường kính 100 tấc chứa không nhiều hơn $10^6 . 10 . 10^8$ hạt cát. Quả cầu đường kính 10000 tấc chứa không nhiều hơn $10^{21} = 10 . 10^4 . 10^{16}$ hạt cát. Vì 1 dặm nhỏ hơn 10000 tấc nên rõ ràng là quả cầu đường kính 1 dặm chứa ít hơn 10^{21} hạt cát.

Lập luận tương tự như vậy ta tính được quả cầu :

đường kính 10^2 dặm chứa ít hơn $1000 . 10^{8 \cdot 3}$ hạt cát

đường kính 10^4 dặm chứa ít hơn $10 . 10^{8 \cdot 4}$ hạt cát

đường kính 10^6 dặm chứa ít hơn $10^6 . 10 . 10^{8 \cdot 4}$ hạt cát

đường kính 10^8 dặm chứa ít hơn $10 . 10^4 . 10^{8 \cdot 5}$ hạt cát

đường kính 10^{10} dặm chứa ít hơn $1000 . 10^{8 \cdot 6}$ hạt cát

Lưu ý rằng 10^{10} dặm là 10000 triệu dặm. Đường kính của Thái Dương Hệ nhỏ hơn 10000 triệu dặm, do vậy quả cầu Thái Dương Hệ chứa ít hơn 1000 . $10^{8 \cdot 6}$ hạt cát. Còn đường kính của Trái Đất khoảng 1 triệu dặm (10^6 dặm), theo kết quả trên thì quả cầu có đường kính bằng Trái Đất chứa $10^6 . 10 . 10^{8 \cdot 4}$ hạt cát hay 10^{39} hạt cát.

33. Bài toán dựng đa giác đều 7 cạnh này của Acsimet được gọi là bài toán cổ nổi tiếng thứ 4. Ngoài nó ra ba bài toán cổ nổi tiếng khác là gấp đôi hình lập phương (35), chia ba một góc (36) và cầu phương đường tròn (37).

Acsimet đã biết rằng bài toán này không thể giải được bằng thước và compa vì số đo cạnh của đa giác này là nghiệm của một phương trình bậc ba, không thể biểu diễn dưới dạng căn bậc hai.

Bằng tiêu chuẩn Gausơ, ta cũng có thể khẳng định được không thể dựng được đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa. Tiêu chuẩn Gausơ nói rằng : *Nếu n là một số nguyên tố thì điều kiện cần và đủ để dựng được một đa giác đều n cạnh bằng thước và compa là n có dạng* $2^{2k} + 1$.

Tuy vậy có thể dựng được đa giác đều 7 cạnh gần chính xác nhờ phương pháp bậc thang, bằng thước và compa, hoặc dựng được hoàn toàn chính xác nếu ngoài việc dùng thước và compa còn dùng thêm những dụng cụ khác (chẳng hạn hai êke).

Cách dựng gần đúng, dựa vào nhận xét sau : Nếu gọi a_n là số đo của cạnh đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn bán kính đơn vị thì :

$$a_7 = 2\sin\frac{360^o}{14} \approx 0,868$$

còn $$\frac{a_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,867$$

Nên nếu lấy $a_7 \approx \frac{a_3}{2}$ thì sai số không vượt quá 0,3%.

Trong cách dựng đúng, bài toán đưa về việc giải phương trình $x^7 - 1 = 0$, nghiệm của nó không thể biểu diễn được dưới dạng căn bậc hai.

Nghiệm khác 1 của căn bậc 7 của đơn vị thỏa phương trình :

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon^1 + 1 = 0 \qquad (1)$$

trong đó $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, lưu ý $\varepsilon^{7-k} = \varepsilon^{-k}$, nên phương trình (1) được viết lại là :

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = -1 \qquad (2)$$

Đặt $\quad \varepsilon + \varepsilon^{-1} = y \qquad (3)$

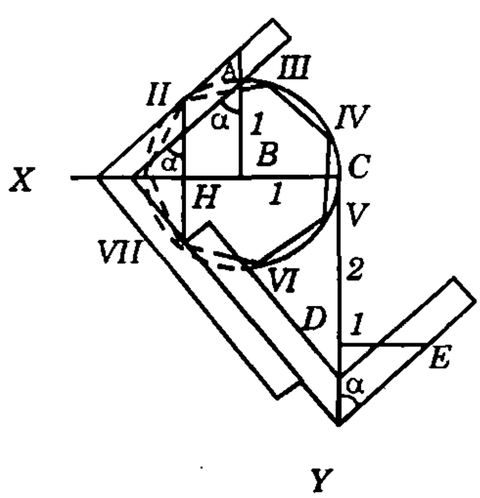
Dẫn tới $\quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2 \qquad (4)$

và $\quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y \qquad (5)$

Do vậy $\quad y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \qquad (6)$

Bài toán dẫn tới giải một phương trình bậc ba, như đã biết, không thể có nghiệm biểu diễn qua các căn bậc hai. Do vậy mà không thể dựng được đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa. Tuy nhiên, nhờ hai êke thì phương trình (6) giải được, có nghĩa là dựng được đa giác đều 7 cạnh. Ta nhận thấy rằng :

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) + $$
$$+ \left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$



Hình 18

Do vậy nếu nối hai đỉnh cách nhau một đỉnh bằng một dây cung thì khoảng cách từ dây cung đến tâm là $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{y}{2}$.

Trước hết dựng đường gấp khúc ABCDE (hình 18) trong đó $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ và $CD \perp DE$ và $AB = 1$, $BC = 1$, $CD = 2$, $DE = 1$, trong đó 1; 1; 2; 1 là giá trị tuyệt đối của các hệ số của phương trình (6). Đặt hai êke như hình vẽ, dựng đường gấp khúc AXYE. Qua tính toán ta khẳng định được XB = y (là nghiệm phải tìm). Ta kiểm tra điều này : kí hiệu góc XAB là α , suy ra XB = tgα .

$$\begin{aligned} CY = XC\text{tg}\alpha &= (XB + 1)\text{tg}\alpha \\ &= (\text{tg}\alpha + 1)\text{tg}\alpha = \text{tg}^2\alpha + \text{tg}\alpha . \end{aligned}$$

$$CY = 2 + DY = 2 + \text{cotg}\alpha = 2 + \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{2\text{tg}\alpha + 1}{\text{tg}\alpha} ;$$

do vậy $$\frac{2\text{tg}\alpha + 1}{\text{tg}\alpha} = \text{tg}^2\alpha + \text{tg}\alpha$$

$$\text{tg}^3\alpha + \text{tg}^2\alpha - 2\text{tg}\alpha - 1 = 0$$

Từ đó thấy rằng tgα = XB thỏa phương trình (6) và do vậy có thể lấy y = XB. Lưu ý rằng $\frac{y}{2} = \frac{XB}{2}$ là khoảng cách từ tâm B đến dây cung như đã nói ở trên, qua H là trung điểm của XB, dựng đường vuông góc với đoạn thẳng này cắt đường tròn tại các điểm II và VII, chúng chính là các đỉnh của đa giác đều 7 cạnh, từ đó ta suy ra các đỉnh khác một cách dễ dàng.

34. Kí hiệu X, Y, Z, T lần lượt là số bò đực mầu trắng, xám, nâu, đốm, còn x, y, z, t là số bò cái tương ứng. Theo bài ra ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Y + Z \\ Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)T + Z \\ T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)X + Z \\ x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Y + y) \\ y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T + t) \\ t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z) \\ z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(X + x) \end{cases}$$

và $X + Y$ là số chính phương (tức là $X + Y = p^2$)

$T + Z$ là số tam giác (tức là $T + Z = \frac{q(q+1)}{2}$)

Acsimet đã đưa ra lời giải cụ thể bài toán này với kết quả số bò đực trắng X là :

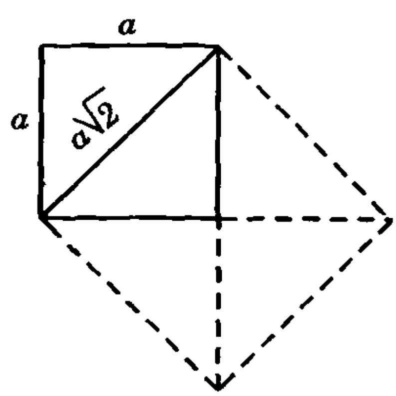
$$X = 1598 \cdot 10^{206541}$$

và tổng số bò là $7766 \cdot 10^{206541}$ con.

Cũng nên biết rằng để viết trọn vẹn lời giải bài toán này cần 660 trang giấy, ngay cả khi mỗi trang giấy giảm đi 2500 chữ số.

35. Trước tiên, xét bài toán gấp đôi hình vuông, có nghĩa là dựng một hình vuông có diện tích gấp đôi hình vuông đã cho. Người Hi Lạp cổ đại đã giải được bài toán này một cách dễ dàng. Chỉ cần dùng thước và compa dựng đoạn $\sqrt{2}$.

Cạnh của hình vuông cho trước là a, còn cạnh của hình vuông phải dựng là $a\sqrt{2}$ (hình 19).



Hình 19

Bây giờ ta xét bài toán tổng quát hơn là bài toán gấp đôi khối lập phương. Người Hi Lạp cổ cũng đã xem xét tới bài toán này và cố gắng giải nó bằng thước và compa. Nếu số đo của cạnh của khối lập phương đã cho là a, ta gọi x là số đo cạnh khối lập phương phải dựng thì x sẽ là nghiệm của phương trình :

$$x^3 = 2a^3$$

dẫn tới $x = a\sqrt[3]{2}$

hay dẫn tới dựng đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa. Mọi cố gắng của người Hi Lạp cổ để dựng đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa là vô ích và khó có thể nói các cố gắng này kéo dài bao lâu nữa nếu như vào nửa đầu thế kỉ XIX người ta chưa chứng minh được rằng không thể dựng được đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa.

Để có khái niệm về khả năng giải được hoặc không giải được của bài toán dựng hình, ta lưu ý những điểm dưới đây. Với thước và compa có thể dễ dàng dựng được các biểu thức :

$$a + b \; ; \; a - b \; ; \; \frac{ab}{c} \; ; \sqrt{ab} \; ; \sqrt{a^2 + b^2} \; ; \sqrt{a^2 - b^2} \; ,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước hay những đoạn thẳng cho trước. Nếu như lời giải của một bài toán dẫn đến việc áp dụng liên tiếp một số lần hữu hạn các phép dựng hình trên thì nó giải được bằng thước và compa. Còn nếu không thì coi là không giải được bằng thước và compa. Bài toán gấp đôi khối lập phương là một ví dụ về sự không giải được của một bài toán bằng thước và compa.

Toán học hiện đại đã chứng minh được rằng : Một phương trình bậc ba với hệ số hữu tỉ nếu không có nghiệm hữu tỉ thì không thể giải được bằng căn bậc hai, tức là không nghiệm nào của phương trình có thể dựng được bằng thước và compa.

Như trên đã nói, bài toán gấp đôi khối lập phương dẫn tới giải phương trình bậc ba :

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

với a là cạnh của khối lập phương cho trước.

Còn x là cạnh của khối lập phương gấp đôi phải tìm. Để đơn giản, ta cho a = 1, khi đó $x^3 - 2 = 0$. Đây là phương trình với hệ số hữu tỉ và dễ thấy nó không có nghiệm hữu tỉ, do vậy mà theo định lí trên, bài toán gấp đôi khối lập phương này không thể giải được bằng thước và compa.

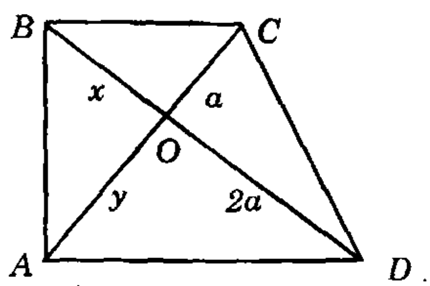
Đêcac (René Descartes) là nhà toán học đầu tiên công khai nêu ý kiến về việc không thể dựng được bằng thước và compa đoạn thẳng $\sqrt[3]{2}$. Năm 1637 ông đã đưa ra mệnh đề : căn bậc ba của một số hữu tỉ không phải số lập phương, nói chung là một số vô tỉ không thể đưa được về một số hữu hạn phép tính lấy căn bậc hai. Năm 1837, nhà toán học Pháp Bessel đã chứng minh chặt chẽ về tính không giải được bằng thước và compa bài toán gấp đôi khối lập phương.

Một trong những nhà hình học cổ đại Hi Lạp đầu tiên tiến tới việc giải bài toán gấp đôi khối lập phương bằng thước và compa với sự hỗ trợ của công cụ khác đó là Hippocrate (thế kỉ thứ V trước CN). Hippocrate đã chuyển việc giải bài toán không gian gấp đôi khối lập phương về bài toán phẳng bao gồm việc tìm hai số x, y nằm giữa a và 2a, sao cho a, x, y, 2a hợp thành một cấp số nhân, tức là :

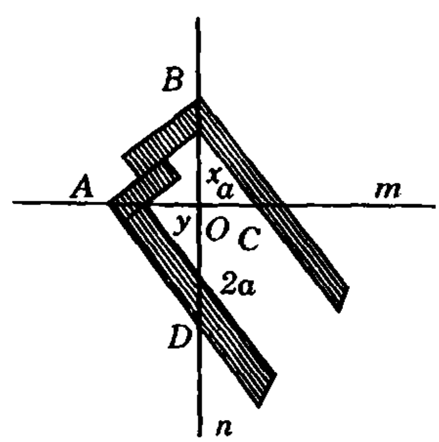
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Từ đó $x^2 = ay$ và $y^2 = 2ax$, do vậy $x^4 = a^2y^2 = 2a^3x$, hay là $x^3 = 2a^3$. Tức là x sẽ là cạnh của khối lập phương gấp đôi khối lập phương cạnh a phải tìm.

Rõ ràng với thước và compa thì các "đoạn đặt" x, y không thể dựng được vì nếu được sẽ đưa tới mâu thuẫn với việc không dựng được của đoạn $x = \sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa. Tuy vậy các "đoạn đặt" này lại có thể dựng được nhờ các công cụ phụ trợ khác. Platon và Ơratôsten (Eratosthène) đã đưa ra hai công cụ đặc biệt để tìm hai "đoạn đặt" x, y nằm giữa hai đoạn a và 2a cho trước. Công cụ của Platon gồm hai thước thợ vuông góc thông thường, còn phép dựng dựa vào bổ đề : *Trong mỗi hình thang vuông (hình 20) có hai đường chéo vuông góc thì các đoạn thẳng do các đường chéo cắt nhau tạo thành lập nên một cấp số nhân* (Các bạn thử chứng minh).



Hình 20



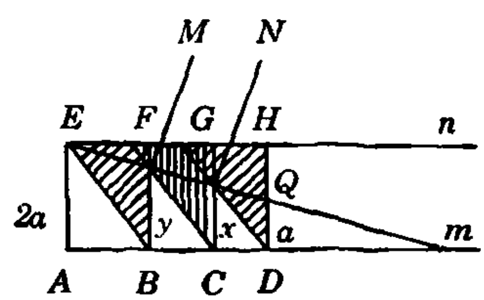
Hình 21

Hình vẽ 21 nói lên cách dùng hai thước thợ vuông góc để dựng hai "đoạn đặt" x, y : Lấy hai đường thẳng m và n vuông góc với nhau tại O. Lấy OC = a, lấy OD = 2a, bây giờ lấy hai thước vuông góc (trên hình vẽ gạch chéo) đặt chúng sao cho một cạnh của thước thợ thứ nhất đi qua C, còn đỉnh thước nằm trên đường thẳng n, cạnh của thước thợ thứ hai đi qua D và đỉnh thước nằm trên đường thẳng m, các cạnh còn lại của hai thước trùng nhau.

Với cách đặt như vậy thì OB = x và OA = y. Theo bổ đề trên thì x = OB là cạnh của khối lập phương phải dựng.

Công cụ của Ơratôsten mang tên "Mêzôliabi", có nghĩa là "thước bắt", nghĩa là "bắt" ra hai "đoạn đặt", trong đó một đoạn là cạnh của khối lập phương phải tìm. Công cụ này gồm hai thanh gỗ đặt song song cách nhau một khoảng bằng 2a. Trên hai thanh gỗ đó đặt ba tam giác vuông bằng nhau trong đó tam giác đầu tiên cố định ở bên trái, còn hai tam giác kia chuyển dịch được dọc theo các thanh gỗ sao cho các cạnh góc vuông bằng nhau nằm ở thanh phía trên còn các đỉnh của chúng nằm ở thanh dưới (hình 22).

Trên cạnh HD của tam giác bên phải cuối cùng ta lấy DQ = a. Sau đó chuyển dịch các tam giác sao cho điểm cắt của cạnh góc vuông của tam giác trước với cạnh huyền của tam giác sau (trên hình vẽ 22 là hai điểm M và N) nằm trên cùng một đường thẳng với E, Q. Khi đó từ các tam giác đồng dạng, ta có :



Hình 22

$$\frac{a}{NC} = \frac{NC}{MB} = \frac{MB}{2a}, \ NC = x, \ MB = y$$

$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Như vậy NC = x chính là độ dài cạnh hình vuông phải tìm.

36. Những nhà bác học cổ Hi Lạp đã không khó khăn gì lắm để chia ba một góc bất kì thành ba phần bằng nhau nhờ những dụng cụ có tính cơ khí. Nhưng với họ vẫn luôn tồn tại một câu hỏi là liệu chỉ dùng thước và compa thôi thì có thể chia ba một góc bất kì thành ba phần bằng nhau được không ?

Để trả lời câu hỏi này, ta lập luận như sau : Giả sử góc phải chia thành ba phần bằng nhau là 3α. Dễ thấy rằng

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

do vậy $2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$

Bây giờ giả sử $2\cos 3\alpha = a$ và $2\cos\alpha = x$, khi đó

$$a = x^3 - 3x$$

hay là $$x^3 - 3x - a = 0 \qquad (1)$$

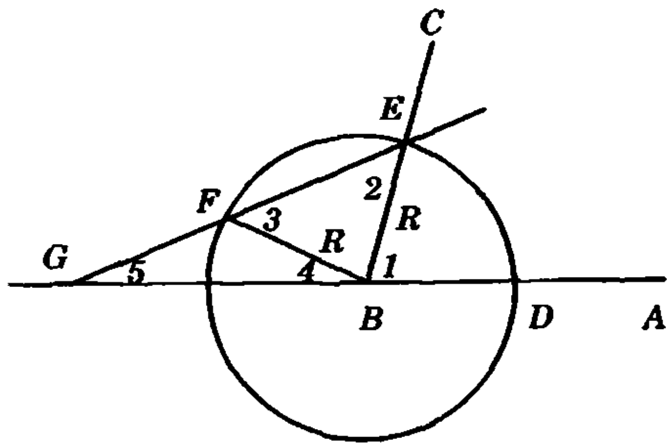
Để chứng minh rằng bài toán "chia ba một góc" không thể giải được bằng thước và compa chỉ cần chỉ ra một góc không thể "chia ba" được bằng thước và compa. Chẳng hạn góc $3\alpha = 60^{\circ}$, ta có $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, phương trình (1) sẽ trở thành $x^3 - 3x - 1 = 0$ (2)

Ta biết rằng nghiệm hữu tỉ của phương trình (2) chỉ có thể là ± 1, nhưng không số nào trong hai số ± 1 thỏa mãn phương trình (2). Do vậy mà phương trình (2) không có nghiệm hữu tỉ, vì thế không nghiệm nào của nó có thể dựng được bằng thước và compa. Lưu ý rằng do góc 60° không thể chia ba được bằng thước và compa nên góc 20° và 40° cũng không thể dựng được bằng thước và compa. Từ đó rút ra là các đa giác đều 9 cạnh, 18 cạnh ... không thể dựng được bằng thước và compa.

Hơn nữa, ta có thể chỉ ra một tập hợp vô hạn các giá trị của góc α mà nghiệm của (1) không thể đưa về căn bậc hai, tức là có một tập hợp vô hạn các góc không thể "chia ba" được bằng thước và compa. Do vậy mà bài toán chia một góc thành ba phần bằng nhau bằng thước và compa nói chung là không giải được. Nhưng nếu $3\alpha = 90^{\circ}$, thay vào phương trình (1) ta sẽ có $x^3 - 3x = 0$ (3).

Phương trình (3) này sẽ có nghiệm 0; $\pm\sqrt{3}$ biểu diễn được dưới dạng căn bậc hai, do đó góc 90^o có thể được chia thành ba phần bằng nhau chỉ bằng thước và compa. Suy luận tương tự thì góc 45^o có thể "chia ba" được bằng thước và compa ... và như vậy có một tập hợp vô hạn các góc có thể "chia ba" được bằng thước và compa, chẳng hạn những góc có dạng $\frac{\pi}{2^n}$, n nguyên dương (bạn nên tự chứng minh điều này).

Acsimet đã có một cách giải đặc biệt và rất đơn giản bài toán chia ba một góc với một cái "thước" rất đặc biệt, gọi là "thước đánh dấu hai điểm". Cụ thể là, giả sử cần chia góc nhọn $\widehat{ABC}$ thành ba phần bằng nhau (hình 23), lấy B làm tâm, dựng đường tròn bán kính R, cắt các cạnh của góc tại D và E. Bây giờ dùng "thước đánh dấu" của Acsimet, đánh dấu hai điểm là F và G sao cho FG = R.



Hình 23

Đặt cạnh "thước" tại điểm E sao cho F thì nằm trên đường tròn còn G thì nằm trên cạnh AB kéo dài. Khi đó góc $\widehat{EGD}$ sẽ là góc có số đo bằng một phần ba góc $\widehat{ABC}$. Thật vậy, theo hình vẽ 23, ta kí hiệu các góc là 1, 2, 3, 4, 5, cần chứng minh góc 5 bằng một phần ba góc 1, rõ ràng là :

$$\hat{1} = \hat{5} + \hat{2}\,;\ \hat{4} = \hat{5} \text{ và } \hat{2} = \hat{3}$$

$$\hat{3} = \hat{4} + \hat{5} \rightarrow \hat{3} = 2\,.\,\hat{5}$$

do đó $\hat{1} = \hat{5} + \hat{3} = \hat{5} + 2\,.\,\hat{5} = 3\,.\,\hat{5}$. Bài toán được chứng minh.

Việc tìm kiếm những phương pháp mới giải bài toán chia ba một góc cho thấy bài toán này liên quan tới các bài toán đại số và lượng giác. Chẳng hạn vào thế kỉ XV, nhà bác học Alcashi đã áp dụng phép chia ba một góc để lập các bảng số lượng giác rất chính xác, cần cho thiên văn và tính toán. Cụ thể sau khi áp dụng các phương pháp tính gần đúng nghiệm của phương trình bậc ba, ông đã tính ra được $\sin 1^{\circ}$ nhờ giá trị đã biết của $\sin 3^{\circ}$. Sau đó, vào thế kỉ XVI, nhà toán học Pháp, Viet trên cơ sở bài toán chia ba một góc đã tìm được cách giải lượng giác phương trình bậc ba trong trường hợp được gọi là "không biến đổi để hạ bậc được". Các nhà toán học khác như Đêcac, Niutơn, Clerô (Clairaut) ... cũng đã đưa ra những lời giải rất hay, nhưng khá phức tạp bài toán chia ba một góc. Đến nay người ta cũng vẫn đang tìm những lời giải mới của bài toán này.

37. Bài toán cầu phương đường tròn đã được các nhà bác học cổ Hi Lạp cố gắng giải, nhưng không thành công. Vấn đề là ở chỗ bài toán cầu phương đường tròn cũng như bài toán gấp đôi khối lập phương và bài toán chia ba một góc không thể giải được bằng thước và compa.

Sau những cố gắng bất thành của các nhà toán học, kể cả những nhà toán học "nghiệp dư" để giải bài toán cầu phương đường tròn, từ năm 1755, Viện hàn lâm Pari đã quyết định không xem xét các công trình có liên quan đến các bài toán cầu phương đường tròn, chia ba một góc và gấp đôi khối lập phương nữa. Điều này ít nhiều đã làm "nguội lạnh" nhiệt tình của các "nhà cầu phương".

Chỉ mãi đến nửa sau thế kỉ XIX, nhà toán học Đức F.Linđơman đã chứng minh được bài toán trên không thể giải được nhờ thước và compa. Cách chứng minh của F.Linđơman rất khó và nằm ngoài giới hạn của giáo trình toán sơ cấp. Xin tóm tắt ý tưởng như sau :

Giả sử cho trước đường tròn bán kính R. Yêu cầu dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn này. Ta kí hiệu cạnh hình vuông là x, khi đó $x^2 = \pi R^2$, suy ra $x = R\sqrt{\pi}$.

Như vậy dẫn đến việc dựng tích đoạn R cho trước với $\sqrt{\pi}$, với yêu cầu là chỉ dùng thước và compa.

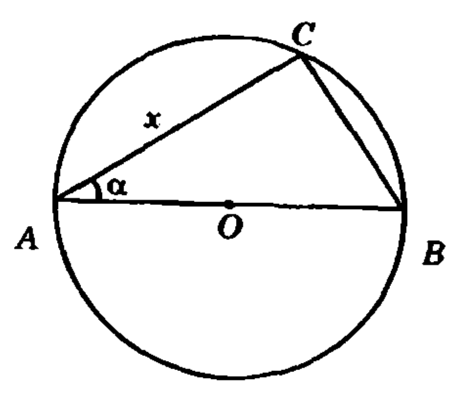
Bằng thước và compa luôn dựng được tích của đoạn R với một số hữu tỉ nhưng không phải lúc nào cũng có thể dựng được tích của đoạn R với một số vô tỉ. Điều này có thể làm được trong một vài trường hợp, ví dụ đối với số vô tỉ $\sqrt{2}$ hoặc $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; khi đó $R\sqrt{2}$ là cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R, còn $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ là cạnh của đa giác đều 12 cạnh nội tiếp đường tròn bán kính R, mà đa giác đều 12 cạnh rất dễ dựng, sau khi dựng được lục giác đều.

Lí thuyết dựng hình đã xác định rằng chỉ có thể dựng được tích của đoạn R cho trước với một số thực bằng thước và compa trong trường hợp số thực đó là nghiệm của phương trình đại số với các hệ số nguyên có nghiệm được biểu diễn bằng căn bậc hai. Một số không thể là nghiệm của một phương trình đại số. Với các hệ số nguyên được gọi là số siêu việt. Vậy thì để chứng minh sự vô nghiệm của bài toán cầu phương đường tròn bằng thước và compa chỉ cần nêu rõ π hoặc $\sqrt{\pi}$ là số siêu việt là đủ.

Công lao của F.Linđơman chính là ở chỗ lần đầu tiên trong khoa học đã chứng minh chặt chẽ được π là số siêu việt. Do vậy đã hoàn thành việc xác định tính không giải được của bài toán cầu phương đường tròn. Vì thế người ta gọi F.Linđơman là "người đánh bại số π ".

Tuy vậy bài toán này có thể giải được nếu ngoài thước và compa còn dùng thêm dụng cụ khác, hay vài đường cong đặc biệt (như đường cong bậc hai). Bằng thước và compa chỉ cho lời giải gần đúng mà thôi.

Dưới đây là một trong những lời giải gần đúng bằng cách sử dụng tam giác Bing. Lời giải này do kĩ sư người Nga Bing đưa ra năm 1836, rất thuận tiện cho các mục tiêu ứng dụng.



Hình 24

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (hình 24) sao cho cạnh lớn nhất là đường kính đường tròn. Ta kí hiệu góc $\widehat{CAB}$ là α , dây cung AC là x. Cần chọn cho α một giá trị để x là cạnh của hình vuông cầu phương. Do diện tích hình vuông cạnh x phải bằng diện tích hình tròn nên :

$$x^2 = \pi R^2 \text{ hay } 4R^2\cos^2\alpha = \pi R^2$$

từ đó $\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886$. Tra bảng số ta nhận được $\alpha = 27^\circ 36'$. Như vậy sau khi dựng một dây cung chứa góc $27^\circ 36'$ trong đường tròn thì ta có ngay cạnh hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn. Dễ đoán ra rằng tam giác ABC được xét đến chính là tam giác Bing.

Một cấp số cộng với số số hạng chẵn có thể viết :

$$\div\ a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$$

Gọi S_1 và S_2 lần lượt là tổng nửa đầu và tổng nửa cuối của cấp số cộng đó thì :

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2}n \text{ và } S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2}n$$

Giả sử d là công sai của cấp số cộng, ta có :

$a_n = a_1 + (n-1)d$; $a_{n+1} = a_1 + nd$; $a_{2n} = a_1 + (2n-1)d$

do đó $S_2 - S_1 = d \cdot n^2$. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài toán này của nhà bác học cổ Hi Lạp Gipsic sống vào khoảng thế kỉ II, trước CN. Ông cũng là tác giả của nhiều bài toán thú vị khác.

39. Hêrông giải bài toán này theo công thức do ông tìm ra :

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$; a, b, c là số đo của các cạnh của tam giác. Vì thế công thức này còn được gọi là công thức Hêrông. Đáp số : $S_\Delta = 84$ (đơn vị diện tích).

Nhà bác học cổ Hi Lạp Hêrông sống vào thế kỉ thứ I. Ông được xem như là nhà bác học tài năng nghiên cứu về trắc địa. Trong tác phẩm "Đo", ông đã đưa ra các quy tắc giải phương trình bậc hai, cách tính gần đúng căn bậc hai, căn bậc ba, công thức tính gần đúng diện tích, thể tích vật thể hình học, trong đó nổi tiếng nhất là công thức tính diện tích tam giác theo ba cạnh của nó.

40. Kí hiệu $x - 1$, x, $x + 1$ lần lượt là các cạnh của tam giác phải tìm. Khi đó, theo công thức Hêrông, diện tích tam giác là :

$$S = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)}$$

Do đó : $S = \frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)}$; trong đó $\frac{x}{2} = m$ là số nguyên.

Khi đó thì $S = m\sqrt{3(m^2 - 1)}$, vì S nguyên nên $m^2 - 1 = 3n^2$ hay $S = 3mn$.

Từ điều kiện $m^2 - 1 = 3n^2$ suy ra $m^2 - 3n^2 = 1$
hay $(m + n\sqrt{3})(m - n\sqrt{3}) = 1$ (1)
(1) đúng với $m = 2$ và $n = 1$:

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

Suy ra $(2 + \sqrt{3})^p(2 - \sqrt{3})^p = 1$ với $p = 1, 2, 3 \ldots$ (2)
Từ (1) và (2) rút ra :

$$m_p + n_p\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^p$$
$$m_p - n_p\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^p$$

Kết quả cho theo bảng dưới đây :

p	x	S
1	4	6
2	14	84
3	52	1170
4	194	16296
.	.	.
.	.	.
.	.	.

41. Theo điều kiện đầu bài, chia dãy số lẻ thành các nhóm, tức là :

$$1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + \ldots$$

Ta thấy trực tiếp : $S_1 = 1 \qquad\qquad = 1^3$

$S_2 = 3 + 5 \qquad\qquad = 8 = 2^3$

$S_3 = 7 + 9 + 11 \qquad = 27 = 3^3$

$S_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$ v.v...

Nhận thấy nhóm thứ n có n số hạng, do vậy số số hạng của $n - 1$ nhóm đầu là $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Từ đó rút ra số hạng cuối cùng của nhóm thứ $n - 1$ là $2 . \dfrac{n(n-1)}{2} - 1 =$ $= n(n - 1) - 1$, suy ra số hạng tiếp theo của dãy số lẻ, tức là số hạng đầu tiên của nhóm thứ n là : $n(n - 1) - 1 + 2 = n^2 - n + 1$ và số hạng cuối cùng của nhóm thứ n là $n^2 - n + 1 + 2(n - 1) =$ $= n^2 + n - 1$. Từ đây suy ra tổng của nhóm thứ n :

$$S_n = \frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} . n = n^3 .$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Tác giả của bài toán này là nhà bác học cổ Hi Lạp Nicomède vào thế kỉ thứ I. Cuốn "Nhập môn số học" của ông đã được dùng làm sách giáo khoa về toán học sơ cấp trong một thời gian dài.

42. Cần phải chứng minh :

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

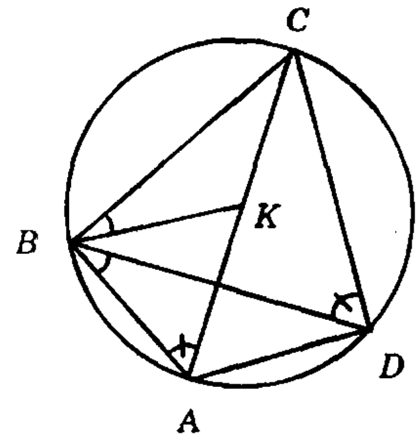
Ta dựng góc KBC bằng góc ABD (hình 25). Khi đó $\Delta ABK \backsim \Delta BCD$ vì $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Từ đó suy ra $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AK}{CD}$ hay $AB.CD = AK.BD$ (1)

Dễ thấy $\Delta ABD \backsim \Delta KBC$ vì $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{BCK}$. Từ đó

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}$$ hay $AD.BC = KC.BD$ (2)

Cộng (1) với (2) :
$AB.CD + AD.BC = (AK + KC)BD$
hay $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Đây chính là điều phải chứng minh.



Hình 25

Ptolémée là nhà bác học cổ Hi Lạp, chết vào khoảng năm 168. Những công trình của ông có ý nghĩa lớn đối với sự phát triển của toán học, vật lý, địa lí và nhất là đối với thiên văn học. Ông đã cố gắng xây dựng luận chứng toán học cho thuyết "Địa tâm" của mình. Hệ thống này (địa tâm) của Ptolémée thống trị suốt 14 thế kỉ cho đến khi nhà thiên văn học Ba Lan Nicolas Copernic (1473 – 1543) đưa ra thuyết "Nhật tâm", phản ánh đúng thực chất của thế giới.

43. Từ điều kiện đầu bài, ta có hệ phương trình :

$$x - y = \frac{1}{3}z$$

$$y - z = \frac{1}{3}x$$

$$z - 10 = \frac{1}{3}y$$

Sau khi giải hệ này nhận được $x = 45$, $y = 37\frac{1}{2}$, $z = 22\frac{1}{2}$ (tất cả các bài toán của Diophante được giải với kí hiệu của toán học ngày nay).

44. Từ phương trình $x + y = 10$ ta có $\frac{x + y}{2} = 5$.

Đặt $\frac{x - y}{2} = z$ ta rút ra $x = 5 + z$, $y = 5 - z$.

Khi đó $x^2 + y^2 = (5 + z)^2 + (5 - z)^2$

hay $x^2 + y^2 = 50 + 2z^2$

Từ phương trình thứ hai của hệ rút ra $68 = 50 + 2z^2$. Từ đó $z^2 = 9$

45. Theo giả thiết thì cạnh huyền bằng $x^3 + x$ còn cạnh góc vuông là $x^3 - x$, theo định lí Pitago thì cạnh góc vuông kia là $\sqrt{(x^3 + x)^2 - (x^3 - x)^2} = x^3$.

Từ đó có phương trình $2x^2 = x^3$, suy ra $x = 2$. Vậy cạnh huyền bằng 10, cạnh góc vuông thứ nhất là 6, cạnh góc vuông thứ hai bằng 8.

46. Kí hiệu x là phần nhỏ của lần chia thứ hai. Khi đó phần lớn của lần chia thứ nhất là 2x, suy ra phần nhỏ của lần chia đầu là 100 − 2x; do vậy phần lớn của lần chia thứ hai là 300 − 6x.

Từ đó ta có phương trình :

$$x + (300 - 6x) = 100$$

Rút ra $x = 40$.

Trả lời : Lần chia đầu : phần nhỏ 20, phần lớn 80
Lần chia sau : phần nhỏ 40, phần lớn 60.

47. Kí hiệu 2x là hiệu của hai số cần tìm. Khi đó số lớn sẽ là 10 + x, còn số nhỏ là 10 − x.

Theo giả thiết : $(10 + x)(10 - x) = 96$,

hay $100 - x^2 = 96$, từ đó $x^2 = 4$.

Vậy các số phải tìm là 12 và 8.

48. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\frac{x}{y} = 3 ; \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5$$

Từ phương trình đầu suy ra $\frac{x^2}{y^2} = 9$, rồi suy ra $\frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10$,

thay vào phương trình thứ hai : $\frac{10y^2}{x + y} = 5$, hay $10y^2 = 5(x + y)$,

chú ý rằng $x = 3y$, nên rút ra $10y^2 = 20y$, vậy $y = 2$, $x = 6$.

49. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y)z = 35 & (1) \\ (x + z)y = 27 & (2) \\ (y + z)x = 32 & (3) \end{cases}$$

(1) trừ (2) $\rightarrow xz - xy = 8$ rồi cộng với (3) rút ra :

$$xz = 20 \; ; \; xy = 12 \; ; \; yz = 15.$$

Đáp số : $z = 5$; $x = 4$; $y = 3$.

50. Bài toán này có vô số lời giải.

Ta có thể biểu thị số đầu là tích của x với lập phương của một số, chẳng hạn $2^3 = 8$, tức là có dạng $8x$; số thứ hai là $x^2 - 1$. Nếu vậy thì một trong các điều kiện của đầu bài được thỏa mãn : Tích hai số cộng với số đầu đúng bằng lập phương của một số :

$$8x(x^2 - 1) + 8x = (2x)^3 \qquad (1)$$

Theo điều kiện thứ hai thì $8x(x^2 - 1) + x^2 - 1$ cũng phải là lập phương của một số nào đó, chẳng hạn $(2x - 1)^3$.

Từ đó ta có phương trình để tính x như sau :

$$8x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (2x - 1)^3 \qquad (2)$$

rút ra $x = \frac{14}{13}$, số đầu là $\frac{112}{13}$, số thứ hai là $\frac{27}{169}$.

Ta nhận thấy rằng tính vô định của nghiệm thể hiện ở chỗ trong (2) ta chỉ cần chọn vế phải sao cho có dạng $(ax + b)^3$ với a, b là các số thực bất kì. Ở cách giải này Diophante chọn $a = 2$, $b = -1$ để cho phương trình trở thành bậc nhất dễ giải.

51. Đặt tổng của ba số I, II, III là :

$$I + II + III = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Hơn nữa, theo giả thiết thì $I + II = x^2$, khi đó $III = 2x + 1$.

Bây giờ giả sử $II + III = (x - 1)^2$.

Từ đó ta nhận được $I = 4x$, $II = x^2 - 4x$, hơn nữa $I + III = 6x + 1$ cần phải là một số chính phương, chẳng hạn $11^2 = 121$.

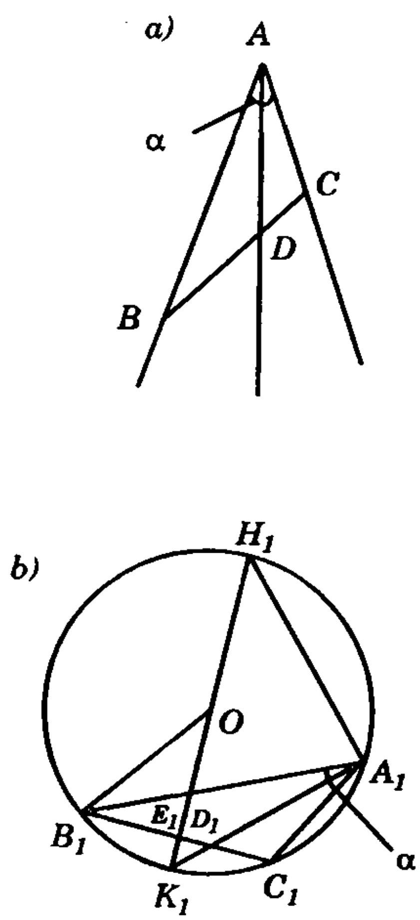
Ta nhận được phương trình :

$$6x + 1 = 121$$

Từ đó $x = 20$.

Do vậy các số sẽ là : I = 80 ; II = 320 ; III = 41.

52. Theo điều kiện đầu bài, cho trước một góc α , đường phân giác của nó và một điểm nằm trên phân giác. Cần phải dựng đoạn BC (hình 26a) sao cho có độ dài đã cho.



Hình 26

Trước tiên dựng một tam giác ABC (hình 26b) ở vị trí tùy ý. Trong trường hợp này, phải dựng một tam giác với đáy đã cho đối diện với góc α và phân giác đã cho. Giả sử B_1C_1 bằng BC. Dựng cung chứa góc α qua B_1C_1 . Từ trung điểm E_1 của dây cung B_1C_1 dựng đường vuông góc K_1E_1 với B_1C_1 .

Như vậy bài toán đưa đến việc dựng dây cung K_1A_1 sao cho $D_1A_1 = DA$ cho trước.

Xét tam giác $E_1K_1D_1$ và $A_1K_1H_1$

Dễ dàng thấy rằng chúng là những tam giác đồng dạng, do đó:

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1} = \frac{E_1K_1}{K_1A_1}$$

hay là $K_1D_1 \cdot K_1A_1 = E_1K_1 \cdot H_1K_1$

Lưu ý rằng $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$; ta nhận được :

$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1$. Vì C_1K_1 là cạnh của tam giác vuông $H_1C_1K_1$ nên : $H_1K_1 \cdot E_1K_1 = (C_1K_1)^2$,

suy ra : $(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = (C_1K_1)^2$

Ký hiệu $K_1D_1 = x ; A_1D_1 = p$ và $C_1K_1 = q$ thì ta có :

$$x^2 + px = q^2$$

Vì thế, sau khi nhận được x từ phương trình trên ta sẽ dựng được tam giác $A_1B_1C_1$ với đường phân giác A_1D_1 .

Thật vậy, mở compa, khẩu độ $x = K_1D_1$, tìm được D_1 . Nối D_1K_1 kéo dài cắt cung chứa góc tại A_1 . Do vậy ta dựng được $\Delta A_1B_1C_1$. Sau đó đặt $A_1B_1=AB$ và dựng BD.

53. Kí hiệu diện tích các hình viên phân là σ , σ_1 , diện tích các hình quạt tương ứng là S , S_1 , còn diện tích các tam giác tương ứng là Σ , Σ_1 (hình 27). Giả sử a , a_1 và r , r_1 tương ứng là các đáy và bán kính của các viên phân. Khi đó :

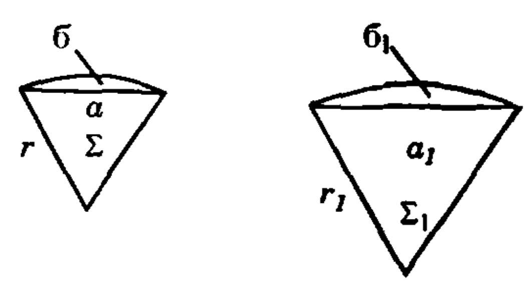
$$\sigma = S - \Sigma ; \sigma_1 = S_1 - \Sigma_1$$

Do các tam giác đồng dạng nên:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$

và hơn nữa.

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$



Hình 27

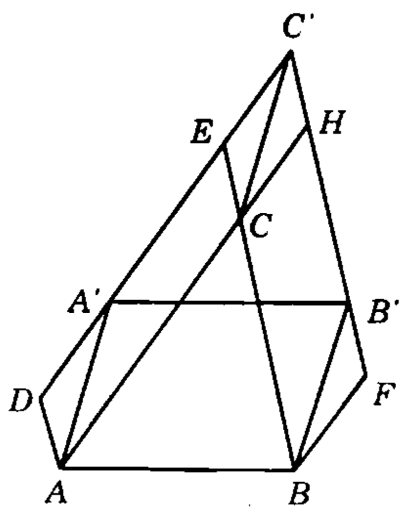
Suy ra $\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{S}{S_1}$

hay là $\frac{\Sigma}{S} = \frac{\Sigma_1}{S_1}$; $\frac{S}{\Sigma} = \frac{S_1}{\Sigma_1}$

Từ đó $\frac{S - \Sigma}{\Sigma} = \frac{S_1 - \Sigma_1}{\Sigma_1}$ hay $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\sigma_1}{\Sigma_1} = \frac{\Sigma}{\Sigma_1}$ hay $\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\Sigma}{\Sigma_1}$

Cuối cùng suy ra $\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$.

54. Giả sử cho ΔABC bất kì và trên cạnh AB của nó dựng hình bình hành ABB'A' và đồng thời dựng các hình bình hành ACED và BCHF tương ứng trên AC và BC sao cho DE đi qua A' và HF đi qua B' (hình 28).



Hình 28

Ta phải chứng minh diện tích hình bình hành ABB'A' bằng tổng diện tích các hình bình hành ACED và BCHF. Kéo dài DE và FH cắt nhau tại C'. Nối C với C'.

Trước hết dễ thấy $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g). Diện tích hình bình hành ACED và ACC'A' bằng nhau; diện tích hình bình hành BB'C'C bằng diện tích hình bình hành BFHC vì cùng đáy và cùng chiều cao.

Bây giờ từ "hình" ABB'C'A'A "lấy đi" Δ A'B'C' thì sẽ "còn" hình bình hành ABB'A'. Nếu như cũng từ "hình" ABB'C'A'A đó "lấy đi" ΔABC thì "còn lại" hai hình bình hành mà tổng diện tích của chúng bằng tổng diện tích của hai hình bình hành ACED và BCHF.

Nhận xét thấy rằng bài toán này là tổng quát hóa của định lí Pitago. Nếu ΔABC là tam giác vuông thì ta sẽ có định lí Pitago.

55. Bài toán dẫn tới việc giải phương trình :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

Giải phương trình này ta có x = 28. Như vậy học trò của Pitago có 28 người.

59. Gọi x là sức chở của Lừa
y là sức chở của La.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :

$$y + 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = x + 1$$

Từ đó dễ dàng rút ra x = 5 ; y = 7.

60. Bài toán dẫn tới giải phương trình :

$$\frac{4}{3}x + x = 12$$

Suy ra $x = 5\frac{1}{7}$ (của ngày)

61. Từ điều kiện bài toán, dẫn tới giải phương trình :

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Giải ra có x = 84. Do vậy Diophante sống được 84 tuổi.

Về cuộc đời của Mêtrôđo (người viết bài toán này) không ai biết rõ, cả thời gian sinh và mất. Trong lịch sử, ông là tác giả các bài toán hay dưới dạng thơ. Những bài toán – thơ này được phổ biến rộng rãi lúc đương thời.

TRUNG HOA

Nền văn hóa Trung Hoa, trong đó có toán học, có nguồn gốc từ thời cổ đại. Nhiều phát minh quan trọng trong khoa học và kĩ thuật của các nhà bác học Trung Hoa là động lực cho những phát minh khác trên thế giới.

Chẳng hạn, họ đã phát minh ra la bàn (vào thế kỉ thứ III trước CN), máy ghi địa chấn (thế kỉ II), máy đo tốc độ (tốc kế). Họ biết chế tạo thuốc súng từ lưu huỳnh trước người châu Âu rất lâu (thế kỉ X); người Trung Quốc đã nắm được bí quyết sản xuất đồ sành sứ từ thế kỉ thứ VII, trước CN. Trung Hoa còn là đất nước của lụa, sơn mài và vécni. Vào thế kỉ XI, người Trung Hoa đã chế tạo chữ in rời, thực chất không khác gì với hiện đại.

Ở Trung Hoa đã xuất hiện môn thiên văn mô tả, tức là khoa học về các thiên thể và lịch. Từ thời cổ đại, các nhà bác học Trung Hoa đã biết quan sát hệ mặt trời, sự chuyển động của các vì sao. Vào thế kỉ IV trước CN, nhà thiên văn Trung Hoa SHI–SHEN đã lập được bảng sơ đồ các vì sao, trong đó mô tả tới 800 ngôi sao mà một bảng như vậy ở châu Âu (gọi là bản đồ) vào thế kỉ thứ II mới được lập. Đài thiên văn cổ Trung Hoa là đài thiên văn Bắc Kinh, được xây ở ngoại ô Bắc Kinh vào năm 1279.

Tất cả chỉ dẫn và lời giải bài tập trong phần này đều rút ra từ các tài liệu Trung Quốc được trình bày với kí hiệu toán học ngày nay.

62. Bài toán dẫn tới việc giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

Dễ dàng rút ra $x = 2,\ y = \frac{1}{2}$.

Như vậy 1 con bò giá 2 lượng, 1 con cừu giá $\frac{1}{2}$ lượng. Nhân đây, xin nói đến tác phẩm toán học cổ Trung Hoa : "Cửu chương thuật toán" (Cửu chương). Cuốn sách này đã đưa ra các quy tắc và những bài toán áp dụng các quy tắc này, trong đó có các bài toán có tính ứng dụng như đo đất, tính thể tích.

63. Bài toán này dẫn đến giải một phương trình vô định, nghiệm nguyên : giả sử x là số lần xúc thóc bằng xẻng, y là số lần xúc thóc bằng đấu gỗ và z là số lần xúc thóc bằng bát, khi đó ta có hệ phương trình :

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1$$

Từ đó nhận được phương trình vô định :

$$19x = 12z \; ; \; x = \frac{12z}{19} .$$

Vì x, y, z nguyên dương nên có thể đặt $z = 19t$

Khi đó : $17y + 13 = 228t$,

Sau khi chọn giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương t sao cho y nguyên, tức là $t = 14$, ta nhận được :

$$x = 168 \; ; \; y = 187 \; ; \; z = 266.$$

Từ đó tính ra số thóc mỗi tên trộm lấy :

Tên trộm đầu tiên lấy 3 tạ 1 yến 9 cân 2 lượng;

Tên trộm thứ hai lấy 3 tạ 1 yến 7 cân 9 lượng;

Tên trộm thứ ba lấy 3 tạ 1 yến 9 cân 2 lượng.

64. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình ba ẩn :

$$\begin{cases} a + b + c = p & (1) \\ a^2 + b^2 = c^2 & (2) \\ ab = 2S & (3) \end{cases}$$

Trong đó a, b, c là cạnh; p là chu vi; S là diện tích của tam giác đã cho.

Từ (2) và (3) suy ra $(a + b)^2 = 4S + c^2$,

do (1) suy ra $(p - c)^2 = 4S + c^2$

từ đó giải ra $$c = \frac{p^2 - 4S}{2p}$$

$$a + b = \frac{p^2 + 4S}{2p}$$

để ý tới phương trình (3) thì a, b được xem như là nghiệm của phương trình bậc 2 :

$$X^2 - \frac{p^2 + 4S}{2p}X + 2S = 0 .$$

Nhân đây xin nói đến tác phẩm "Nhập môn thuật toán" được in năm 1593. Trong tác phẩm này chứa những quy tắc tính toán quan trọng, dễ nhớ dưới dạng những bài thơ. Đương thời, nó được xem như là "giáo khoa thư" toán học sơ cấp, đồng thời nội dung cuốn sách chứa đựng nhiều thông tin về toán học Trung Hoa cho đến cuối thế kỉ thứ XVI.

65. Lời giải của bài toán, như sau : "khi chia cho 3 dư 2, vậy lấy 140, khi chia cho 5 dư 3, vậy ta lấy 63, khi chia cho 7 dư 2, vậy ta lấy 30. Cộng chúng lại với nhau, nhận được 233, từ đó trừ đi 210, ta có kết quả".

Bài toán này có thể giải một cách đơn giản như sau, nó dẫn tới giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5z + 3 \\ x = 7u + 2 \end{cases}$$

hay $3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2$.

Từ đó rút ra $3y = 7u$; $y = \dfrac{7u}{3}$.

Do y nguyên, đặt $u = 3t$, t nguyên, khi đó nhận được :

$$y = 7t$$

từ đó $x = 21t + 2$

Do vậy $21t + 2 = 5z + 3$ hay $21t - 5z = 1$.

Từ đây ta chọn cặp nghiệm $t = 1$, $z = 4$, công thức nghiệm tổng quát của phương trình này là :

$$t = 1 + 5q \; ; \; z = 4 + 21q.$$

trong đó $q = 0, 1, 2, ...$

Vì $x = 21t + 2$, nên $x = 23 + 105q$, $q = 0, 1, 2 ...$ khi $q = 0$ thì x sẽ nhỏ nhất, tức là $x = 23$, còn khi $q = 1$, $x = 128$; $q = 2$, $x = 233$; $q = 3$, $x = 338$, v.v...

66. Chỉ dẫn : chỉ cần xác định xem 1 bách chứa bao nhiêu mét khối, 1 trượng vuông bằng bao nhiêu mét vuông là đủ. Từ đó ta tính ra chiều cao bằng mét.

67. Trong "Cửu chương thuật toán" đưa ra quy tắc sau : "Lấy 4 (bát), chia cho 3 (đốt dưới), gọi là hệ số dưới, lấy 3 (bát), chia cho 4 (đốt trên), gọi là hệ số trên. Lấy hệ số dưới (lớn) trừ hệ số trên (nhỏ) ta được số bị chia. Rồi lấy 9 trừ đi nửa tổng 3 và 4 ta được số chia. Lấy số bị chia chia cho số chia ta được số bát chỉ chênh lệch thể tích của 2 đốt kề nhau. Hệ số dưới $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ chính là thể tích của đốt thứ hai từ dưới lên. Từ đó dễ dàng tính ra thể tích các đốt còn lại".

Theo quy tắc đó, có thể diễn giải như sau :

1) $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$ là hiệu số giữa hai hệ số dưới và trên

2) $9 - \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ là số chia

3) $\frac{7}{12} : \frac{11}{2} = \frac{7}{66} = d$ là số chênh lệch 2 đốt kề nhau

4) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ (bát) là thể tích đốt thứ 2 từ dưới lên.

Cách giải bài toán này được "hiện đại hóa" như sau : Trước hết lưu ý 1 cân bằng 16 lạng, 1 lạng bằng 24 phân. Gọi x là khối lượng mỗi thỏi vàng, z là khối lượng mỗi thỏi bạc, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 9x = 11z & (1) \\ 13 + 8x + z = 10z + x & (2) \end{cases}$$

Bài toán được giải theo phương pháp "giả thiết tạm" (hai lần). Đầu tiên $x_1 = 3$, khi đó $z_1 = \dfrac{9x_1}{11} = 2\dfrac{5}{11}$

Gọi y_1 là "phần thiếu ở vế phải", từ (2) ta có

$$y_1 = \left(\frac{13}{16} + 8.3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10.2\frac{5}{11} + 3\right)$$

$$= 27.\frac{47}{11.16} - 27\frac{96}{11.16} = -\frac{49}{11.16}$$

Sau đó $x_2 = 2$, khi đó $z_2 = 1\dfrac{7}{11}$ và nếu gọi y_2 là "phần thừa ở vế trái" ta có :

$$y_2 = \left(\frac{13}{16} + 1\frac{7}{11} + 8.2\right) - \left(10.1\frac{7}{11} + 2\right) = \frac{15}{11.16}$$

Lập bảng theo kiểu Trung Hoa :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

trong đó cột trái là "vế trái" còn cột phải là "vế phải".

$$\text{Ta có : } x = \frac{2.\dfrac{49}{11.6} + 3.\dfrac{15}{11.6}}{\dfrac{49}{11.6} + \dfrac{15}{11.6}} = 2\frac{15}{64}$$

Như vậy x = 2 cân 3 lạng 6 phân

Khi đó $z = \dfrac{x}{\dfrac{11}{9}} = 1\dfrac{53}{64}$

Như vậy z = 1 cân 13 lạng 6 phân.

69. Theo phương pháp giả thiết tạm (hai lần), tác giả đưa ra quy tắc giải bài toán này như sau : "Giả sử sau 15 ngày thì hai con ngựa gặp nhau, khi đó phần thiếu là 337,5 dặm. Nếu sau 16 ngày mới gặp nhau thì phần thừa là 140 dặm. Lấy phần thừa và thiếu nhân chéo với số lượng ngày giả định rồi cộng lại, được bao nhiêu chia cho tổng của phần thừa và phần thiếu ta xác định được số ngày phải tìm. Nếu phép chia có dư, kết quả là một hỗn số"

Sau n ngày ngựa thứ nhất chạy được :

$$193 + (193 + 13) + (193 + 2.13) + \ldots + [193 + (n - 1).13] =$$

$$= 193n + 13 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \text{ (dặm)}$$

Cũng với số ngày trên ngựa thứ hai chạy được :

$$97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \ldots \left[97 - (n - 1) \cdot \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 97n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \text{ (dặm)}$$

Vì vậy sau n ngày tổng quãng đường cả hai con ngựa chạy được là :

$$193n + 13 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$= 290n + 6\frac{1}{4}(n^2 - n)$ (dặm), cũng chính bằng hai lần quãng đường, tức là 6000 dặm. Từ đây tìm ra được n.

Bây giờ ta diễn giải quy tắc đã nêu trên.

Nếu n = 15, phần thiếu là $6000 - 5662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2}$ (dặm)

Nếu n = 16, phần thừa là 6140 − 6000 = 140 (dặm)

Gọi x là số ngày sẽ gặp nhau, thế thì :

$$x = \frac{15 \cdot 140 + 16 \cdot 337\frac{1}{2}}{140 + 337\frac{1}{2}} = 15\frac{135}{191} \text{ (ngày)}$$

Từ đây dễ dàng tính ra quãng đường mỗi con ngựa chạy được.

70. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

Đáp số : x = giá mỗi con trâu = $1\frac{13}{21}$ (lượng)

y = giá mỗi con cừu = $\frac{20}{21}$ (lượng)

71. Gọi x là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất cao

Gọi y là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất trung bình

Gọi z là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất thấp

Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Giải ra ta có $x = 9\frac{1}{4}$ (hộc)

$y = 4\frac{1}{4}$ (hộc)

$z = 2\frac{3}{4}$ (hộc)

Ở đây không trình bày lời giải "gốc". Song cũng cần nói thêm là người Trung Hoa trong khi giải bài toán này bằng phương pháp "Fan-chen" (tạm dịch là "phân bổ") đã biết đến ma trận và phép biến đổi ma trận của đại số tuyến tính ngày nay, chẳng khác gì quy tắc Cramer trong giải hệ phương trình tuyến tính.

72. Gọi x là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất cao

Gọi y là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất trung bình

Gọi z là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất thấp

Theo bài ra, có hệ phương trình : $\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 3y = 1 - z \\ 4z = 1 - x \end{cases}$

Hay đưa về dạng chính tắc :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3y + z = 1 & (2) \\ x + 4z = 1 & (3) \end{cases}$$

Đáp số : $x = \dfrac{9}{25}$

$y = \dfrac{7}{25}$

$z = \dfrac{4}{25}$

73. Tương tự như các bài toán trên, dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases}$$

Dạng chính tắc là $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y - z = 1 \\ -x + 4z = 1 \end{cases}$

Đáp số : $x = \dfrac{17}{23}$ (yến)

$y = \dfrac{11}{23}$ (yến)

$z = \dfrac{10}{23}$ (yến)

74. Gọi x, y, z tương ứng là giá của 1 con trâu, 1 con cừu, 1 con lợn, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13z + 1000\,; \\ 3x + 3z = 9y\,; \\ 6y + 8z = 5x - 600, \end{cases}$$

Đáp số : $x = 1200$ (đồng)
$y = 500$ (đồng)
$z = 300$ (đồng)

75. Bài toán dẫn đến giải hệ gồm 5 phương trình tuyến tính với 6 ẩn số như sau :

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ 3y + z = m \\ 4z + u = m \\ 5u + v = m \\ 6v + x = m \end{cases}$$

trong đó các ẩn số là x, y, z, u, v, m, thêm vào đó, theo yêu cầu của đầu bài thì m được chọn sao cho các số nguyên dương x, y, z, u, v là bé nhất.

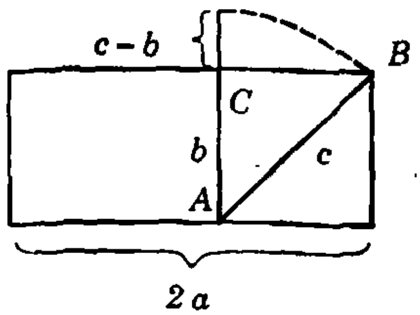
Giải hệ này ta rút ra :

$$x = \frac{265}{721}m\,,\ y = \frac{191}{721}m\,,\ z = \frac{148}{721}m\ ;\ u = \frac{129}{721}m,\ v = \frac{76}{721}m.$$

Do đó cần chọn $m = 721$.

76. Người Trung Hoa cổ đã biết đến định lí Pitago từ rất lâu, mà họ gọi là "định lí về cạnh vuông và cạnh huyền". Những ghi chép về tam giác có các cạnh 3, 4 và 5 có từ gần 2200 năm trước Công nguyên ở Trung Hoa đã chứng minh điều này.

Trong cuốn "Cửu chương thuật toán" đã đưa ra quy tắc để giải bài toán này như sau : "Lấy nửa cạnh bể nước nhân với chính nó gọi là phần đầu; lấy phần nhô lên trên mặt nước 1 trượng nhân với chính nó, được bao nhiêu lấy phần đầu trừ đi nó được một số dư; rồi đem



Hình 29

phần dư này chia cho hai lần phần nhô lên mặt nước, ta có độ sâu của bể nước; thêm vào phần nhô lên mặt nước ta có độ dài của cây sậy" ...

Theo quy tắc trên thì nếu ta gọi độ dài của cạnh bể là 2a, chiều dài cây sậy là c (hình 29), độ sâu của bể là b thì b và c được xác định như sau :

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$$

$$c = b + (c - b) = \frac{a^2 + (c-b)^2}{2(c-b)}$$

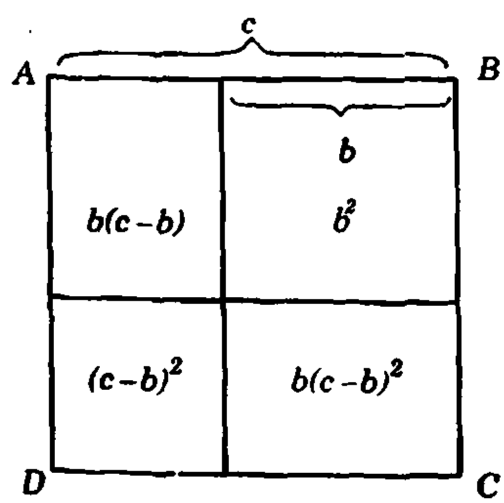
Thay $\quad b - c = \frac{1}{10}$; $2a = 1$ vào ta sẽ có :

$$b = 1\frac{1}{5} \text{ (trượng)}$$

$$c = 1\frac{3}{10} \text{ (trượng)}$$

Nhưng vấn đề là ở chỗ làm thế nào mà người Trung Hoa đã có được quy tắc nêu trên ? Trong lời bình luận về cuốn sách "Toán học trong chín cuốn", tác giả Lưu Hoa đã giải thích một cách thuyết phục về sự hình thành của quy tắc trên. Ông cho rằng các công thức bằng lời trên có được dựa vào trí tưởng tượng phong phú của người Trung Hoa cổ. Có lẽ họ đã sử dụng hình vẽ sau đây (hình 30).

Theo quy tắc gọi là "tung-hoành" thì ta có $a^2 = c^2 - b^2$. Từ hình vẽ ta lại có :



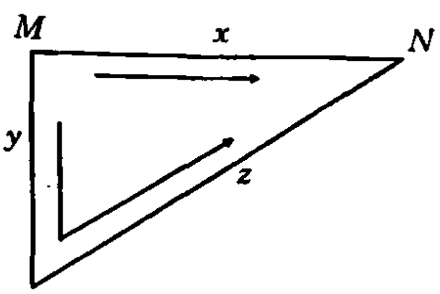
Hình 30

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)^2 + 2b(c - b)$$

từ đó

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$$

77. Ta giải bài toán này theo quy tắc cổ của người Trung Hoa đưa ra, theo ngôn ngữ hiện đại :



Hình 31

Gọi x là quãng đường mà B đi về hướng đông, còn y là quãng đường mà A đi về hướng nam (theo đầu bài thì $y = 10$ (dặm)) và z là quãng đường mà A đi theo hướng chéo (đông - bắc) để gặp B, tức là theo cạnh huyền của tam giác vuông (hình 31).

Khi đó $\quad x^2 + 10^2 = z^2 \quad (1)$

và $\quad 7x = 3(z + 10)$

từ đó rút ra $z = \frac{7}{3}x - 10 \quad (2),$

thay vào (1) : $x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$

hay $\quad 2x^2 - 21x = 0 \,;\, x = 10\frac{1}{2}$(dặm)

theo (2) thì $z = \frac{7}{3}.\frac{21}{2} - 10 = 14\frac{1}{2}$ (dặm).

Trả lời : A đi được $14\frac{1}{2} + 10 = 24\frac{1}{2}$ (dặm)

B đi được $10\frac{1}{2}$ (dặm).

78. Cả bài toán này cũng có quy tắc giải, được gọi là quy tắc "chuẩn bị sẵn". Hiểu theo ngôn ngữ ngày nay như sau :

Nếu kí hiệu x là chiều rộng cánh cửa, y là chiều cao cánh cửa, d là đường chéo của cánh cửa thì ta có hệ phương trình :

$$d^2 = x^2 + y^2$$
$$m = y - x$$

(m ở đây là chênh lệch giữa chiều cao và chiều rộng). Từ đây ta nhận được một phương trình bậc hai :

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

Giải phương trình này ta có :

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}}$$

hay $$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}$$

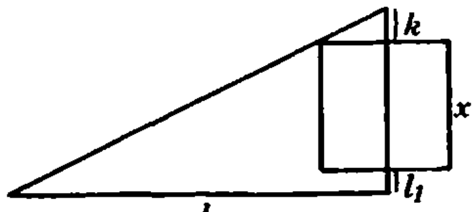
Vì x phải là số dương nên :

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

Còn y sẽ là : $$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}.$$

Quy tắc "chuẩn bị sẵn" này nói lên một điều thú vị là : dường như người Trung Hoa cổ đã biết giải cả phương trình bậc hai !

79. Quy tắc cổ Trung Hoa giải như sau : "số bộ đo được từ cổng phía bắc nhân với hai lần số bộ đi về hướng tây – đó là số bị chia. Cộng thêm số bộ đo từ cổng phía bắc với số bộ đi ra từ cổng phía nam, ta có số chia. Lấy căn bậc hai ta có số đo của cạnh của tòa thành".



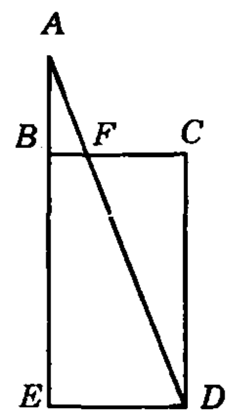
Hình 32

Bài toán này được mô tả trên hình vẽ 32.

Theo các kí hiệu trên hình vẽ, bài toán dẫn tới giải phương trình

$$x^2 + (k + l_1)x - 2kl_2 = 0$$

80. Để giải bài toán, chắc là các nhà toán học cổ Trung Hoa đã biết đến sự đồng dạng của các tam giác vuông (hình 33) :



Hình 33

$\Delta ABF \backsim \Delta FCD$,

suy ra $\quad \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{x}{FC}\ ;\ x = FC \cdot \dfrac{AB}{BF}$

hay $\quad x = \dfrac{AB(BC - BF)}{BF}$.

Vì thế lời giải "cổ" là : "lấy 5 tấc – đường kính giếng, trừ đi 4 phân (1 tấc bằng 10 phân) được bao nhiêu nhân với 5 tấc – chiều cao của cây sào. Đem số này chia cho 4 phân thì có kết quả phải tìm."

81. Sách "cổ" đưa ra lời giải sau đây :

"Chu vi đáy nhân với nó, rồi nhân với chiều cao, chia làm 36 phần, lấy 1 phần".

Như vậy thể tích hình nón theo người Trung Hoa cổ được tính theo công thức :

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{c^2}{4\pi}$$

đã giả thiết $\pi = 3$

82. Người Trung Hoa cổ giải bài toán này theo quy tắc sau : "Nhân chu vi trên với chu vi dưới, mỗi chu vi nhân với nhau, cộng tất cả lại, được bao nhiêu nhân với chiều cao, chia làm 36 phần, lấy 1 phần".

Như vậy, thể tích hình nón cụt ở Trung Hoa cổ được tính theo công thức :

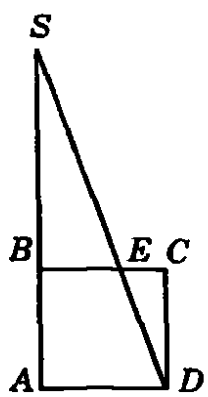
$$V = \frac{(Cc + C^2 + c^2)h}{36}$$

Nó gần đúng với công thức hiện nay, khi coi $\pi = 3$.

$$V = \frac{h}{3} . \frac{Cc + C^2 + c^2}{4\pi} .$$

83. **Quy tắc "cổ" để giải bài toán là : "lấy tổng hai cạnh góc vuông chia cho tích hai cạnh ấy, ta có cạnh của hình vuông nội tiếp tính bằng bộ".**

84. Bài toán có thể được mô tả như hình vẽ 34. Rõ ràng các nhà bác học Trung Hoa đã xét tới các tam giác đồng dạng:



Hình 34

$\Delta SAD \backsim \Delta ECD$, từ đó rút ra :

$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC}$$

hay là $\quad x = AS = \dfrac{AD \cdot CD}{EC}$

Thay số vào công thức trên, ta có quy tắc bằng lời là :

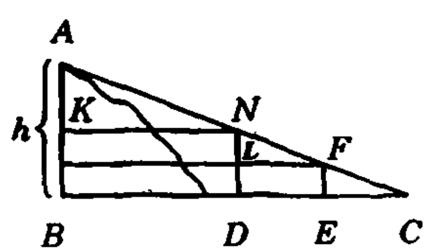
$$x = \frac{1 \text{ trượng} \times 1 \text{ trượng}}{3 \text{ tấc}}$$

"nhân 1 trượng với nó, chia tích đó cho 3 tấc thì có kết quả" đó là quy tắc người Trung Hoa cổ đưa ra.

85. **Xét các tam giác đồng dạng ΔAKN và ΔNLF (hình 35).**

Từ đó có : $\dfrac{AK}{KN} = \dfrac{NL}{LF}$

hay là $\dfrac{x - ND}{BD} = \dfrac{ND - FE}{DE}$



Hình 35

Do đó $$x = ND + \frac{(ND - FE)BD}{DE}$$

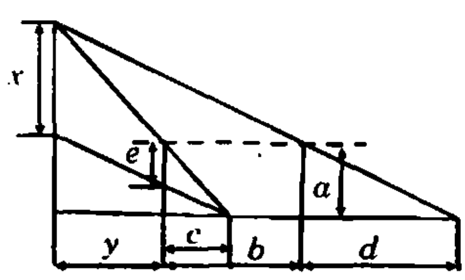
Công thức này là cơ sở hình thành quy tắc cổ được người Trung Hoa đưa ra trong tài liệu "gốc" là : "Lấy chiều cao cột trừ đi 7 tấc tầm nhìn, được bao nhiêu nhân với 53 dặm rồi đem chia cho khoảng cách từ chỗ đứng đến cột là 3 dặm. Sau đó thêm vào thương này chiều cao của cột được kết quả là chiều cao của ngọn núi".

86. Nhà toán học lớn của Trung Hoa vào thế kỉ thứ III là Lưu Hoa là tác giả của nhiều tác phẩm toán học có giá trị, cũng là người đóng góp nhiều cho hình học ứng dụng. Ông rất nổi tiếng trong việc giải những bài toán xác định khoảng cách, hoặc xác định kích thước những vật không tiếp cận được, mà ngày nay những bài toán ấy được xếp vào môn trắc địa học.

Đối với bài toán này, Lưu Hoa đã giải nó theo quy tắc được biểu diễn bằng hai công thức sau :

$$x = \frac{be}{d + c} + e \ ; \ y = \frac{bc}{d - c}$$

trong đó x là chiều cao cây thông, y là khoảng cách từ cây sào đứng trước đến đồi, a là chiều cao của mỗi cây sào, b là khoảng cách giữa hai cây sào, c là khoảng cách từ điểm nằm sau sào thứ nhất đến sào sao cho điểm đó thẳng hàng với đỉnh cây sào và ngọn cây, còn d là khoảng cách từ điểm nằm sau sào thứ hai đến sào thứ hai sao cho điểm đó thẳng hàng với đỉnh sào thứ hai và ngọn cây (hình vẽ 36).



Hình 36

Cũng nên biết rằng, nhiều bài toán khác của Lưu Hoa rất phức tạp. Ông cho lời giải các bài toán này dưới dạng các quy tắc. chủ yếu dựa vào việc xét các tam giác đồng dạng. Do giá trị ứng dụng cao, các bài toán này được phổ biến rộng rãi, không chỉ ở Trung Hoa.

ẤN ĐỘ

Ấn Độ là nước có nền văn minh lớn, rất đa dạng. Hàng ngàn năm trước Công nguyên, ở Ấn Độ, người ta đã biết xây dựng hệ thống tưới tiêu, cung cấp nước cho thành phố, xây nhà tầng bằng gạch nung. Người Ấn Độ từ rất xa xưa đã nắm được nghệ thuật làm đồ gốm, phát triển nghề kim hoàn. Rất nhiều tri thức trong các lĩnh vực ngôn ngữ, thiên văn và các môn khoa học khác đã được tích lũy từ thời Ấn Độ cổ xưa.

Các nhà bác học Ấn Độ đã đạt được nhiều thành tựu to lớn nhất trong lĩnh vực toán học. Họ chính là người sáng lập ra môn số học và đại số mà sau này người Hi Lạp đã kế thừa và phát triển. Đáng kể nhất là việc phát minh ra hệ đếm thập phân gồm 10 chữ số Ấn Độ, có cả số 0 – theo tiếng Ấn Độ là "Xunhi", có nghĩa là "không gì cả". Số không đầu tiên được kí hiệu là dấu chấm, sau nhiều thế kỉ nó biến thành một vòng tròn nhỏ, như ngày nay. Không rõ trong các nhà khoa học Ấn Độ ai là người đầu tiên sử dụng hệ thập phân. Nhưng có nhiều căn cứ để cho rằng hệ thập phân được phát minh vào đầu thế kỉ I, mãi đến thế kỉ thứ II thì số 0 mới được sử dụng.

Những nhà toán học Ấn Độ nổi tiếng nhất là Ariapkhata (cuối thế kỉ I); Bramagupta (thế kỉ thứ VII) và Bkhascara (thế kỉ XII).

Lưu ý : những chỉ dẫn và lời giải các bài toán cổ Ấn Độ đều dùng các kí hiệu ngày nay.

87. Bài toán này lấy ra từ cảo bản Bakhơsali, tìm được vào năm 1881 khi khai quật ở vùng Bakhơsali, thuộc miền bắc Ấn Độ. Nó được viết trên vỏ cây bạch dương vào khoảng thế kỉ II hoặc III sau CN.

Bài toán được giải bằng quy tắc "giả định", lập luận như sau : Giả sử ẩn số bằng 1, khi đó người đầu cúng 1 (nén vàng); người thứ 2 cúng 2; người thứ 3 cúng 6; người thứ 4 cúng 24. Tổng số phần cúng lễ sẽ là 33. Bây giờ chia 123 cho 33 ta sẽ có số phải tìm – tức là số nén vàng người thứ nhất đã cúng.

88. Theo điều kiện bài toán thì

$$n + 5 = x^2$$
$$n - 11 = y^2$$

Từ đó rút ra $x^2 - y^2 = 16$ hay $16 = (x + y)(x - y)$

Vậy $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (II)

Với hệ (I) ta có $x = 5$, $y = 3$, suy ra $n = 20$.

Với hệ (II) ta có $x = \frac{17}{2}$, $y = \frac{15}{2}$, do đó $n = 67\frac{1}{4}$.

89. Bài toán dẫn tới phương trình :

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) + 1 = x$$

Giải ra $x = 15$. Vậy đàn ong có 15 con ong

Bài toán này của nhà toán học Sritđơkhara sống vào khoảng thế kỉ VI – X. Ông là tác giả của nhiều bài toán mà sau này được phổ biến rộng rãi.

90. Gọi x là quãng đường của một thiên thạch đã đi được cho đến khi hai thiên thạch gặp nhau, thế thì thời gian đi hết quãng đường đó là $\frac{x}{v_1}$. Khi đó thiên thạch kia đi được một quãng đường là $d - x$ và đi hết $\frac{d - x}{v_2}$ thời gian. Ta có phương trình :

$$\frac{x}{v_1} = \frac{d - x}{v_2}$$

từ đó $$x = \frac{dv_1}{v_1 + v_2}.$$

Bài toán này lấy từ một cuốn sách của nhà toán học Ấn Độ nổi tiếng Ariapkhata. Ông chuyên viết sách về toán học và thiên văn học.

Ông đã đưa ra nhiều quy tắc về số học, đại số, hình học và lượng giác rất cần thiết cho ngành thiên văn mà trước hết là bảng số thiên văn. Ông còn là tác giả của nhiều bài toán hay, trong đó có bài toán này và bài 91 sau đây.

91. Nếu cho n các giá trị 1, 2, 3, ... thì ta có dãy số tam giác tương ứng : 1, 3, 6, ... chú ý rằng tổng của 2 số hạng kề nhau của dãy số tam giác bao giờ cũng là một số chính phương :

$$
\begin{aligned}
T_n + T_{n-1} &= n^2 \\
T_{n-1} + T_{n-2} &= (n-1)^2 \\
&\dots\dots\dots \\
T_3 + T_2 &= 3^2 \\
T_2 + T_1 &= 2^2
\end{aligned}
$$

Cộng những đẳng thức này lại với nhau ta có :

$$T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_2) + T_1 = n^2 + (n-1)^2 + \\ + \dots + 3^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_2) + T_1 =$$

$$= n \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

$$\Rightarrow 2(T_n + T_{n-1} + \dots + T_2 + T_1) = T_1 + T_n + \\ + n \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - 1 .$$

Vì $T_1 = 1$ và $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$$

Hay $T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

92. Giả sử người thứ nhất có số đồ vật là a và có số tiền là m, còn người thứ hai có số đồ vật là b và số tiền là p. Khi đó nếu ta gọi x là giá trị của một đồ vật thì ta sẽ có phương trình :

$$ax + m = bx + p,$$

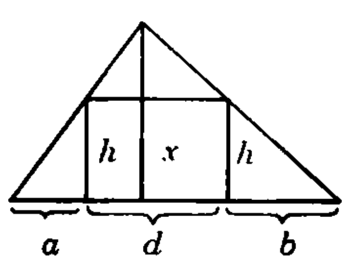
từ đó rút ra $x = \dfrac{p - m}{a - b}$.

93. Kí hiệu d là đường kính đường tròn, ta có :

$\dfrac{\pi d^2}{4} = \left(\dfrac{13}{15}d\right)^2$ từ đó suy ra $\pi = \dfrac{276}{225}$ hay $\pi = 3{,}00(4)$. Sai số ở đây gần 4,3%.

Bài toán này lấy ra từ một tác phẩm toán học – hình học cổ Ấn Độ "Sulva – Sutra" (tức là "quy tắc sợi dây thừng"). Cuốn sách là bản chỉ dẫn đặc biệt về xây dựng các bàn thờ cúng, ở đó có nhiều tư liệu hình học ứng dụng quý giá. Người ta thấy rằng ít nhất vào thế kỉ thứ VIII trước Công nguyên, các nhà bác học Ấn Độ đã biết đến định lí bình phương cạnh huyền (định lí Pitago), tức là trước Pitago khá lâu. Trong "Sulva – Sutra" định lí này đã được nêu ra. Chính cuốn sách này đã đưa ra quy tắc "Katiaina" (tạm dịch là quy vuông) : "Chia đường kính đường tròn thành 15 phần bằng nhau, lấy 13 phần, thì đó chính là cạnh hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn", có nghĩa là đề cập tới bài toán ngược với bài toán "cầu phương đường tròn" của các nhà bác học cổ Hi Lạp. Quy tắc "Katiaina" là nội dung của bài toán vừa xét ở trên.

94. Gọi x là chiều cao của cây đèn bạch lạp, h là chiều cao của cây gậy, còn a và b là độ dài bóng của nó về hai phía, d là khoảng cách giữa hai vị trí của cây gậy đó (hình 37).



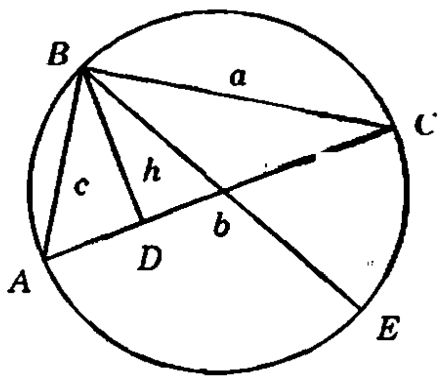
Hình 37

Từ sự đồng dạng của các tam giác ta có :

$$\frac{x}{x - h} = \frac{a + b + d}{d},$$

suy ra $\quad x = \dfrac{h(a+b+d)}{a+b} = h\left(1 + \dfrac{d}{a+b}\right)$.

95. Cần chứng minh rằng :



Hình 38

$\dfrac{ac}{h} = BE$, trong đó BE là đường kính đường tròn ngoại tiếp (hình 38).

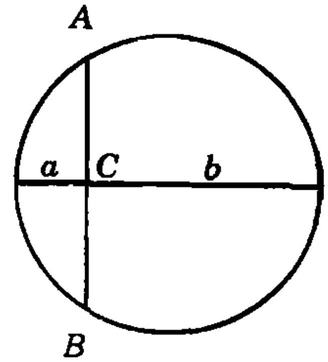
Thấy ngay $\Delta\, ADB \backsim \Delta\, BCE$

nên $c : h = BE : a$

từ đó $\dfrac{ac}{h} = BE$.

96. Gọi D là đường kính đường tròn, ta cần phải chứng minh

$$\frac{AB^2}{4a} + a = D \text{ (hình 39)}$$



Hình 39

Thật vậy : $\quad AC^2 = ab \qquad (1)$

$$AC = \frac{AB}{2} \qquad (2)$$

$$b = D - a \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) rút ra $\dfrac{AB^2}{4} = a(D-a)$ hay $\dfrac{AB^2}{4} + a^2 = Da$ (4).

Chia cả 2 vế của (4) cho a, ta có điều cần chứng minh.

97. Cũng với giả thiết và hình vẽ của bài toán 96, ta cần phải chứng minh :

$$a = \frac{1}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - AB^2}\right) \; ; \; AB^2 = 4aD - 4a^2$$

Thật vậy : dễ thấy $\quad D^2 - 4aD + 4a^2 = D^2 - AB^2$;

$$(D-2a)^2 = D^2 - AB^2$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

98. Bkhascara - Acaria là nhà toán học lỗi lạc Ấn Độ vào thế kỉ XII. Ông sinh năm 1114. Acaria có nghĩa là người thông thái. Bài toán này là một trong những bài toán của ông. Ông đã giải nó bằng phương pháp giả định.

Giả sử số phải tìm là 3. Khi đó theo điều kiện đầu bài thì $3 \times 5 = 15$, một phần 3 của 15 là 5. Do $15 - 5 = 10$ nên đem chia cho 10 ta được 1, thêm vào $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ của 3 ta nhận được :

$$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}.$$

Số này nhỏ hơn 68 đúng 16 lần.

Do đó số phải tìm là $3.16 = 48$.

99. $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} =$

$$= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2.3} + 2\sqrt{2.5} + 2\sqrt{3.5}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Bài toán này lấy ra từ một cuốn sách về toán học của Bkhascara – Acaria.

100. Ta viết đồng nhất thức :

$$[(m^2 + n^2)x]^2 = [(m^2 - n^2)x]^2 + (2mnx)^2$$

và lấy $(m^2 + n^2)x$ là độ dài cạnh huyền, còn $(m^2 - n^2)x$ và $2mnx$ là độ dài những cạnh góc vuông

Từ điều kiện đầu bài ta có :

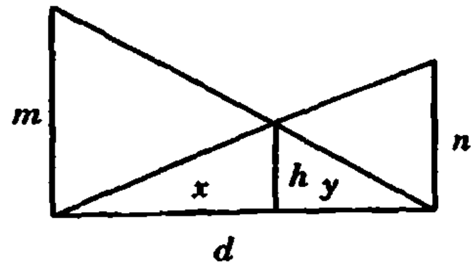
$$(m^2 + n^2)x = mnx^2(m^2 - n^2)$$

hay $\qquad m^2 + n^2 = mn(m^2 - n^2)x$

từ đó $\qquad x = \dfrac{m^2 + n^2}{mn(m^2 - n^2)}$

Từ đây dễ dàng tính ra các cạnh của tam giác phải tìm.

101. Gọi h là đường cao phải tính, d là khoảng cách giữa 2 cây tre, còn x và y là các đoạn ở trên d (hình 40). Quy tắc của Bkhascara có thể được mô tả như sau :



Hình 40

$$h = \frac{mn}{m+n}\ ;\ x = \frac{dm}{m+n}\ ;\ y = \frac{dn}{m+n}$$

Điều này rút ra một cách dễ dàng từ những đẳng thức hiển nhiên sau :

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y};\ \frac{n}{h} = \frac{d}{x}\ ;\ x + y = d.$$

102. Giả sử người thứ nhất có 2x − 100 (rupi) (tiền cổ Ấn Độ), còn người thứ hai có x + 100 (rupi). Khi đó điều kiện của bài toán sẽ được thỏa mãn.

Từ điều kiện thứ hai của bài toán ta có :

$$6(2x - 110) = x + 110$$

Giải phương trình này, rút ra x = 70.

Vậy người thứ nhất có 40 (rupi),
người thứ hai có 170 (rupi).

103. Nhân hai vế của phương trình với 4a ($a \neq 0$) ta có :

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

Sau đó thêm b^2 vào hai vế của đẳng thức :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

Suy ra $2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$

Từ đây ta có $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Còn đối với giá trị âm của nghiệm thì Bkhascara nhận xét rằng "con người không thích thú gì các số âm trừu tượng" !

104. Giả sử đàn ong có $2x^2$ con, ta có phương trình :

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2$$

hay $\quad 2x^2 - 9x = 18$,

từ đó $\quad x = 6$ và $2x^2 = 72$.

105. Gọi số phải tìm là x, ta có phương trình sau :

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35 \ (*)$$

hay $\quad x^3 + 12x - 6x^2 = 35$, trừ 8 vào 2 vế :

$x^3 + 12x - 6x^2 - 8 = 27 ; (x - 2)^3 = 27$

Do đó $x - 2 = 3$; Vậy $x = 5$.

Thực ra phương trình (*) còn cho hai nghiệm ảo nữa, nhưng Bkhascara không xét đến.

Ngoài ra phương trình (*) có thể được biến đổi để trở thành $(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0$,

Từ đây cũng rút ra được $x = 5$, nghiệm ảo rút ra từ phương trình $x^2 - x+7 = 0$.

106. $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$

$\Leftrightarrow x^4 - 11x^3 + 11x^3 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999=0$

$\Leftrightarrow x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) + 909(x - 11) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0$

Từ đây nhận được 2 phương trình :

$$x - 11 = 0 \text{ và } x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

Giải phương trình đầu, ta có $x = 11$, là nghiệm mà Bkhascara đã chỉ ra. Những nghiệm của phương trình thứ hai là phương trình bậc ba, Bkhascara không xét đến. Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình thứ hai này :

$$x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101(x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$$

Từ đây ta nhận được $x = -9$ và hai nghiệm ảo nữa.

107. Gọi d là độ dài đường kính CD, a là dây cung đáy AB của viên phân, x là chiều cao CE phải tìm (hình 41) thì :

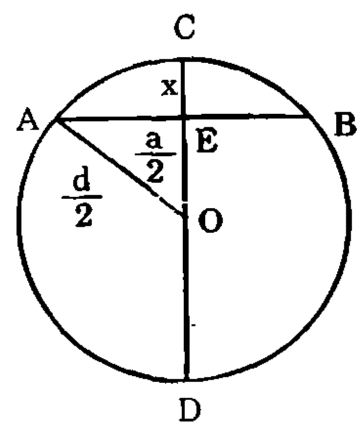
$$\frac{a^2}{4} = x(d-x) = xd - x^2$$

hay $x^2 - xd + \dfrac{a^2}{4} = 0$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2};$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2};$$

$$x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}.$$



Hình 41

108. Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$(x - b)(y - a) = ab + c$$

Để x, y hữu tỉ, cần đặt $x = b + n$ khi đó :

$$y = a + \frac{ab + c}{n}$$

109. Các nhà toán học Ấn Độ đã sử dụng phương pháp suy luận độc đáo, được áp dụng rộng rãi gọi là "quy tắc đảo" hay "quy tắc ngược". Thực chất của suy luận này là nếu cần tìm một số mà sau khi thực hiện một loạt các phép tính sẽ dẫn tới một số đã biết thì từ số đó thực hiện theo trình tự ngược lại với phép tính ngược.

Chẳng hạn với bài toán này, bắt đầu từ số 2, thực hiện các phép toán ngược theo thứ tự ngược lại :

$$(2 . 10 - 8)^2 + 52 = 196 ;$$

$$\sqrt{196} = 14 ; 14 . \frac{3}{2} . 7 . \frac{4}{7} = 84 ; 84 : 3 = 28$$

Vậy số phải tìm là 28.

110. Kí hiệu số khỉ là x, (x > 0), bài toán dẫn đến giải phương trình :

$$\frac{x^2}{64} + 0 . x + 12 = 0 . x^2 + x + 0$$

Rút gọn ta có $x^2 - 64x = -768$

thêm bớt 32^2 :

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024$$

hay $$(x - 32)^2 = 16^2$$

$$x - 32 = \pm 16$$

Vậy x = 48 và x = 16 đều là nghiệm.

111. Bài toán dẫn đến giải phương trình :

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$$

Giải ra có nghiệm là $x_1 = 50$ và $x_2 = 5$.

Bkhascara nhận xét rằng $\frac{1}{5} . 5 - 3$ là số âm nên ta chỉ lấy nghiệm x = 50.

112. Theo đầu bài, nếu gọi x là số mũi tên thì ta có :

$$\frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 6 + 3 + 1 = x$$

dẫn đến phương trình $x^2 - 104x + 400 = 0$,

từ đó $x = 52 \pm \sqrt{52^2 - 400}$

hay $x = 52 \pm 48$

Như vậy có hai nghiệm là : $x_1 = 100$; $x_2 = 4$.

Nhưng theo điều kiện của bài toán chỉ có nghiệm x_1 là chấp nhận được.

113. Bài toán dẫn tới giải phương trình :

$$x = 10\sqrt{x} + \frac{1}{8}x + 6$$

trong đó x là số sếu của đàn sếu.

Đặt $u = \sqrt{x}$ sẽ có một phương trình bậc hai :

$$7u^2 - 80u - 48 = 0$$

Sử dụng công thức của Bkhascara, tìm được

$$u = \frac{80 + \sqrt{6400 + 1344}}{14}$$

hay $u = \dfrac{80 + 88}{14} = \dfrac{168}{14} = 12$

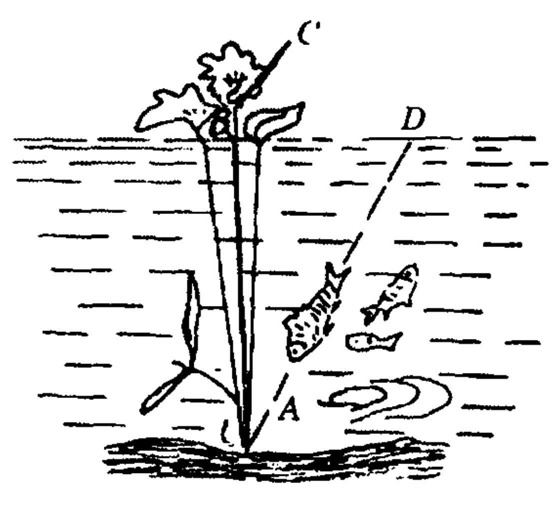
Do đó $x_1 = u^2 = 144$.

Còn nghiệm thứ hai, Bkhascara không lấy vì ứng với giá trị âm của u, hơn nữa x không nguyên, không phù hợp với thực tế.

114. Bài toán có thể được mô tả bằng hình vẽ 42 :

$BC = \frac{1}{2}$ (thước); $BD = 2$ (thước).

Ta phải xác định AB, gọi là x. Từ đó dẫn đến phương trình :



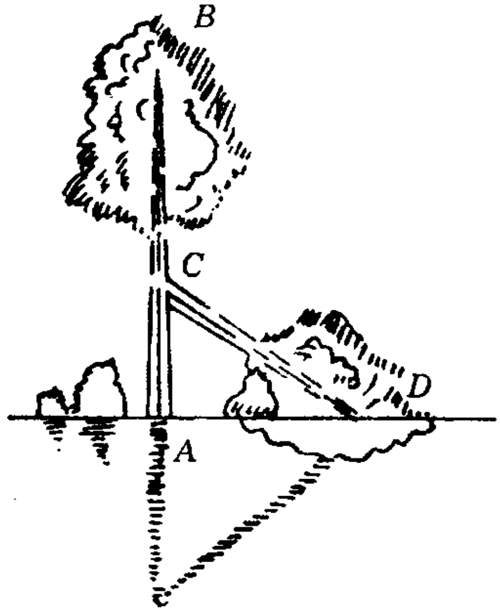
Hình 42

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$$

Từ đây dẫn tới $x + \frac{1}{4} = 4$ do đó $x = 3\frac{3}{4}$ (thước)

Trả lời : hồ sâu $3\frac{3}{4}$ thước.

115. Bài toán được mô tả bằng hình vẽ 43 : cây dương bị gãy ở điểm C với AC = 3 (thước), AD = 4 (thước).



Hình 43

$$\begin{aligned} AB &= AC + CD \\ &= AC + \sqrt{AC^2 + AD^2} \\ &= 3 + \sqrt{9 + 16} = 3 + 5 \\ &= 8 \text{ (thước)} \end{aligned}$$

Vậy cây dương cao 8 thước.

116. Theo "quy tắc đảo", bắt đầu từ số 4, ta có :

$$\sqrt{4} = 2 \;;\; 2 + 1 = 3 \;;\; 3^2 = 9$$
$$9 - 6 = 3 \;;\; 3.5 = 15 \;;$$
$$15 : 3 = 5$$

Vậy số phải tìm là 5.

Quy tắc này được sử dụng rộng rãi, không chỉ ở Ấn Độ mà còn được dùng ở vương quốc Ả Rập và sau đó ở châu Âu.

117. Hãy dùng kí hiệu ngày nay để xem người Ấn Độ cổ giải phương trình Pell như thế nào. Trước tiên dùng các số bất kì x_1, y_1, x_2, y_2 để xác định các số b_1, b_2 sao cho các đẳng thức sau được thỏa mãn :

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2 \;;$$
$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2 \,.$$

hay $$y_1^2 - ax_1^2 = b_1 ;$$
$$y_2^2 - ax_2^2 = b_2 .$$

Rồi nhân hai phương trình này với nhau :

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2 .$$

Sau khi đặt $x_2 = x_1 ; y_2 = y_1$ thì $b_1 = b_2$, dẫn đến phương trình :

$$a(2x_1y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

Chia 2 vế cho b_1^2 :

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2$$

Từ đó $$x = \frac{2x_1y_1}{b_1} ; y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}$$

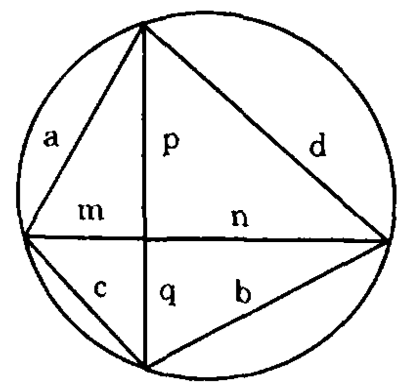
Như vậy các nhà bác học Ấn Độ thu được nghiệm hữu tỉ thỏa mãn phương trình Pell. Bằng cách cho x_1 , y_1 những giá trị tùy ý, đôi khi họ cũng thu được nghiệm nguyên dương.

118. Cần chứng minh : $a^2 + b^2 = D^2$ và $c^2 + d^2 = D^2$ trong đó D là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác (hình 44). Từ xưa, theo Acsimet thì $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2$, theo định lí Pitago thì :

$$m^2 + p^2 = a^2 ; n^2 + q^2 = b^2$$

từ đó suy ra $a^2 + b^2 = D^2$.

Tương tự suy ra $c^2 + d^2 = D^2$.



Hình 44

ẢRẬP

119. Giải những phương trình bậc hai này bằng cách thông thường, ta nhận được :

1) $x_1 = 0 \quad ; x_2 = 8$

2) $x_1 = 6 \quad ; x_2 = -6$

3) $x_1 = 7 \quad ; x_2 = 3$

4) $x_1 = 24 \ ; x_2 = -12$

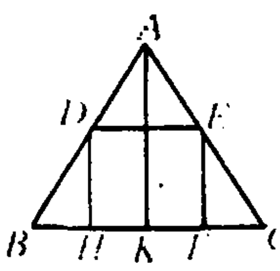
5) $x_1 = 9 \quad ; x_2 = \frac{9}{4}$

6) $x_1 = 12 \ ; x_2 = -19$

Những bài toán này lấy ra từ cuốn sách "Đại số " của AN KHÔRÊDƠMI, nhà toán học lỗi lạc, người Udơbêch, ở vào đầu thế kỉ IX. Ông là tác giả của nhiều tác phẩm toán học nổi tiếng, nhất là hai cuốn sách : một về đại số – trong đó chứa những bài toán này và một về số học. Những cuốn sách này của ông được dùng như sách giáo khoa cổ về đại số.

120. Giả sử đã cho ΔABC cân thỏa mãn đề bài, ta tính đường cao AK của nó (hình 45) :

$$AK = \sqrt{100 - 36} = 8$$



Hình 45

Dễ thấy $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ nên ta có :

$\frac{x}{8 - x} = \frac{12}{8}$, trong đó x là cạnh hình vuông phải tìm.

Vậy $x = 4\frac{4}{5}$.

121. AN KHÔRÊDƠMI đã giải bài toán này bằng phương pháp "giả thiết tạm" hai lần :

Giả sử số phải tìm là 12, khi đó số dư sẽ là 5, thay vì 8 như giả thiết đã cho, tức là ít hơn 3 so với số đã cho. Lại giả sử số phải tìm là 24, khi đó số dư sẽ là 10, tức là nhiều hơn 2 so với 8 là số đã cho.

Vậy số phải tìm là :

$$x = \frac{3 . 24 + 12 . 2}{3 + 2} = 19\frac{1}{5} .$$

122. Gọi số phải tìm là M.

Giả sử $M = 9n + 1$ (n là số tự nhiên)

$$M^2 = 81n^2 + 18n + 1 = 9k + 1$$

Tương tự giả sử $M = 9n + 8$

$$M^2 = 81n^2 + 144n + 64 = 9k' + 1$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

AVIS ENNA là nhà bác học người Tatdic, sinh năm 980, mất năm 1037. Ông có nhiều cống hiến cho khoa học. Ông luôn tin vào sức mạnh của lí trí, chống lại tư tưởng thần học. Sách của ông còn được lưu giữ ở thư viện Laydơn – Anh quốc.

123. AN CARƠKHI lập luận như sau : theo đầu bài thì

$$x(3 + \sqrt{5}) = 1 \ (*)$$

hay $3x + x\sqrt{5} = 1$

Từ đó $3x + \sqrt{5x^2} = 1$; hay $\sqrt{5x^2} = 1 - 3x$

Bình phương hai vế của phương trình : $5x^2 = (1 - 3x)^2$

Từ đó : $4x^2 - 6x + 1 = 0$;

Giải ra ta có $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Cuối cùng số phải tìm là : $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{4}$.

Bài này có thể giải bằng phép trục căn thức ở mẫu số, rất đơn giản : từ (*) ta có

$$x = \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

AN CARƠKHI là nhà toán học trung Á vào thế kỉ XI. Ông đã viết nhiều sách toán, ngày nay còn lưu giữ được hai cuốn, một về số học và một về đại số.

124. Lập luận của AN CARƠKHI như sau :

Từ phương trình cuối rút ra $y = \frac{10}{x}$,

thay vào phương trình thứ hai : $z = \frac{100}{x^3}$.

Vậy, từ phương trình đầu suy ra :

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10000}{x^6}$$

hay $x^8 + 100x^4 - 10000 = 0$

Suy ra $x^4 = -50 + \sqrt{12500}$

Do đó $x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{12500} - 50}}$

125. Gọi x là chiều rộng của hình chữ nhật, khi đó chiều dài là 2x, diện tích sẽ là $2x^2$, còn chu vi là 6x. Ta có phương trình : $2x^2 = 6x$

Từ đây suy ra $x = 3$.

Vậy diện tích hình chữ nhật phải tìm là 18 (đơn vị diện tích).

126. Đặt $\frac{1}{x} = z$, dẫn tới phương trình :

$$z^2 + 2z = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow z + 1 = \pm\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}\ ;\ z_2 = -\frac{5}{2}$$

Do đó $x_1 = 2\ ;\ x_2 = -\frac{2}{5}$.

Tác giả bài toán là nhà bác học, toán học, nhà thơ và nhà triết học người Tatdic ÔMA KHAIAM (1040 - 1123). Ông là người đầu tiên đưa ra các phương pháp giải phương trình bậc 3 – tiền đề của việc ứng dụng đại số vào hình học.

127. Gọi x là phần nhỏ, khi đó phần lớn sẽ là x + 5. Theo bài ra ta có phương trình :

$$2x + 5 = 10$$

Do đó $x = 2\frac{1}{2}$; còn phần lớn bằng $7\frac{1}{2}$.

Tác giả bài toán này là nhà toán học Iran, ở thế kỉ XVI tên là BEGA ETĐIN.

128. Gọi 10 – x là một số (một phần) thì số kia (phần còn lại) sẽ là 10 + x. Theo điều kiện đặt ra ta có :

$$100 - x^2 = 96$$

Từ đây x = 2.

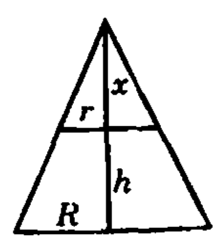
Do đó phần lớn sẽ là 10 + 2 = 12.

Trả lời : Daiđa nhận phần thưởng có giá trị là 12.

129. Xét tam giác (hình 46) ta có :

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R}\ ;\ \ x(R-r) = rh\ ;\ \ x = \frac{rh}{R-r}$$

Do đó $x + h = \frac{Rh}{R-r}$.



Hình 46

130. Giải bằng "quy tắc đảo" của toán cổ Ấn Độ :

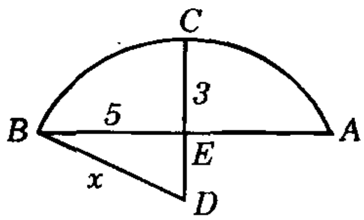
Bắt đầu từ số 50 :

$50 : 10 = 5$; $\quad 5 . 5 = 25$; $\quad 25 - 3 = 22$;

$22 : 2 = 11$; $\quad 11 - 2 = 9$; $\quad \sqrt{9} = 3$.

Vậy số phải tìm là 3.

131. Nhận xét : tương tự như bài toán HOA SEN của toán cổ Ấn Độ. Từ tam giác vuông BED (hình 47), ta nhận được :



Hình 47

$$(x - 3)^2 + 5^2 = x^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2$$

Giải phương trình này rút ra

$$x = 5\frac{2}{3} \text{ (khuỷu tay)}$$

AN CASI là nhà toán học Iran (cuối thế kỉ XIV). Ông còn là bác sĩ giỏi, từng chỉ huy đài thiên văn lớn ở Xamarocan. Ông đã đưa ra cách tính gần đúng số π , với 17 số thập phân, điều này làm cho các nhà toán học đương đại phải kinh ngạc.

132. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

1) Đẳng thức AN CASI đúng với n = 1. Thực vậy :

$$1 = \frac{1}{30}(6 + 15 + 10 - 1) \ ; \ 1 = 1$$

2) Giả sử đẳng thức AN CASI đúng với n = k, tức là

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 = \frac{1}{30}(6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k) \ .$$

3) Ta phải chứng minh đẳng thức AN CASI cũng đúng với $n = k + 1$:

$$1^4+2^4+\ldots+k^4+(k+1)^4 =$$

$$= \frac{1}{30}\left[6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1) \right] \qquad (1)$$

Theo giả thiết quy nạp thì :

$$1^4+2^4+\ldots+k^4+(k+1)^4 = \frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)+(k+1)^4 \quad (2)$$

Cần chứng minh vế phải của (1) và (2) bằng nhau,

$$\frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)+(k+1)^4 =$$

$$= \frac{1}{30}\left[6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k^5 + 15k^4 + 10k^3 - k + 30(k + 1)^4 =$$

$$= 6(k + 1)^5 + 15(k + 1)^4 + 10(k + 1)^3 - (k + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k^5+15k^4+10k^3+1 = 6(k+1)^5-15(k+1)^4+10(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 6k^5+15k^4+10k^3+1 = 6k^5+15k^4+10k^3+1 .$$

Như vậy đẳng thức AN CASI đúng với $n = k + 1$

Do đó nó đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

133. Giải bằng phương pháp "giả thiết tạm" hai lần.

Đầu tiên giả sử $x = 6$ (x là số phải tìm), dẫn đến sai số là 53 (phần thừa ra). Sau đó giả sử $x = 1$, dẫn đến sai số là 12 (phần thiếu), từ đó

$$x = \frac{53.1+12.6}{53+12} = 1\frac{12}{13} .$$

134. Có thể giải bằng phương pháp của bài 133. Lúc đầu giả sử $x = 12$, khi đó sai số là 14 (phần thiếu). Bây giờ giả sử $x = 24$, khi đó sai số là .7 (phần thừa). Do đó :

$$x = \frac{14.24-7.12}{14-7} = 36 .$$

NƯỚC NGA

135. Sau 12 năm thì người thợ thứ nhất dựng được 12 ngôi nhà, người thợ thứ hai dựng được 6 ngôi nhà, người thợ thứ ba dựng được 4 ngôi nhà và người thợ thứ tư dựng được 3 ngôi nhà. Do vậy sau 12 năm nếu cùng làm thì cả 4 người thợ dựng được $12 + 6 + 4 + 3 = 25$ ngôi nhà.

Như vậy để dựng xong một ngôi nhà, cả 4 thợ cùng nhau làm phải mất :

$$\frac{365 \times 12}{25} = 175\frac{1}{5} \text{ (ngày)} .$$

136. Sau 1 giờ sư tử ăn hết 1 con cừu, sói ăn hết $\frac{1}{2}$ con cừu và chó ăn hết $\frac{1}{3}$ con cừu . Vì vậy sau 1 giờ, cả 3 con cùng ăn thì hết $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$ (con cừu). Do đó cả ba con cùng ăn 1 con cừu thì hết $\frac{6}{11}$ (giờ).

137. Tác giả bài toán cho đáp số là 721 quả trứng. Thực ra ta còn chỉ ra rằng số trứng ít nhất là 49 quả. Rõ ràng tác giả chưa có hiểu biết về bội số chung nhỏ nhất. (Bài toán này lấy từ di cảo toán học Nga thế kỉ XVII).

138. Lưu ý rằng 1 antưn = 3 côpêc, 1 đenghi = $\frac{1}{2}$ côpêc ; 1 rup = 100 côpêc. Tất cả đổi ra côpêc.

Đáp số : Số cừu già là 100 con, số cừu non là 12 con, giá 1 cừu già là 46 côpêc, 1 cừu non là 30 côpêc, kém giá 1 cừu già 16 côpêc. Giả sử tất cả là cừu non thì số tiền phải trả là :

$$112 \times 30 = 3360 \text{ (côpêc)}$$

Nhưng số tiền thực trả là 4960 côpêc. Vậy dôi ra $4960 - 3360 = 1600$ (côpêc)

Lấy 1600, chia cho 16 ta có số cừu già.

Đây là lời giải của Matnhitxki, lấy ra trong cuốn "Số học" của ông. Lêônchi Filippôvic. Matnhixki (1669 – 1739) là giáo sư toán học Trường khoa học toán và hàng hải ở Maxcơva do Piôt đại đế thành lập năm 1701. Cuốn "Số học" của ông xuất bản năm 1703, được xem như cuốn sách giáo khoa đầu tiên về số học ở Nga. Cuốn sách này như cuốn Bách khoa toàn thư về toán Sơ cấp. Đương thời, nhà bác học Nga M.V. Lômônôxôp đánh giá rất cao cuốn sách này. Cuốn sách được dùng phổ biến trong các trường phổ thông cho đến giữa thế kỉ XVIII.

139. Giải theo quy tắc "giả thiết tạm" hai lần.

Trước tiên, giả sử số học sinh là 24, khi đó theo điều kiện đầu bài, suy ra tổng số là $24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$ (học sinh). Như vậy so với điều kiện đầu bài, thiếu $100 - 67 = 33$ (học sinh).

Bây giờ giả sử số học sinh là 32, suy ra tổng số là $32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89$ (học sinh). Như vậy so với điều kiện đầu bài thì thiếu $100 - 89 = 11$ (học sinh).

Vậy số học sinh là $\dfrac{33 \,.\, 32 - 24 \,.\, 11}{33 - 11} = 36$ (học sinh)

140. *Đáp số* : 225.

141. *Đáp số* : 325 asin.

142. *Đáp số* : 44.

143. *Đáp số* : 40.

144. *Đáp số* : $458\dfrac{2}{7}$.

145. *Đáp số* : 8 ngày.

146. *Đáp số :* Số tiền lái buôn phải trả là :

$$41943 \text{ rup và } 3\frac{3}{4} \text{ côpêc.}$$

147. *Đáp số :* Sau 12 giờ ; 30 ; 27 ; 24 bao.

148. Lưu ý 1 bộ $= \frac{1}{2}$ asin, do vậy chu vi đáy là 60 asin, đường sinh hình nón là 16 asin.

Diện tích xung quanh của mái nhà hình nón là :

$$\frac{60 \cdot 16}{2} = 480 \text{ (asin bình phương).}$$

Vậy số nỉ cần thiết là : $480 : 2\frac{1}{2} = 192$ (asin)

Số tiền phải trả là : $192 \cdot 2 = 384$ (rup)

149. Gọi số phải tìm là x, theo đầu bài ta có :

$$x = 2q_1 + 1 \;; \qquad x = 3q_2 + 2 \;;$$

$$x = 4q_3 + 3 \;; \qquad x = 5q_4 + 4.$$

Do đó : $x + 1 = 2(q_1 + 1) \qquad x + 1 = 3(q_2 + 1)$

$$x + 1 = 4(q_3 + 1) \qquad x + 1 = 5(q_4 + 1)$$

Do vậy $x + 1$ chia hết cho 2, cho 3, cho 4, cho 5.

Do đó $x + 1$ là bội của 3 ; 4 ; 5, và bội chung nhỏ nhất sẽ là 60.

Vậy số x nhỏ nhất phải tìm là 59.

Bài toán này có vô số nghiệm.

150. Giả sử ngày mà anh ta nghĩ đến là x. Khi đó người đoán sẽ đề nghị như sau :

1) $x \cdot 2 = 2x$

2) $2x + 5$

3) $(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25$

4) $(10x + 25) \cdot 10 = 100x + 250$

Từ số này, người đoán trừ đi 250 sẽ có 100x. Biết 100x, dễ dàng chỉ ra x.

Ta thử kiểm tra quy tắc này của Magnhiski, qua một ví dụ cụ thể : Giả sử ngày nghĩ đến là ngày thứ 6 của tuần, tức là $x = 6$:

1) $2x = 12$

2) $2x + 5 = 17$

3) $(2x + 5) . 5 = 17 . 5 = 85$

4) $100x + 250 = 85 . 10 = 850$

5) $100x + 250 - 250 = 850 - 250 = 600$

$100x = 600$

Vậy $x = 6$.

151. *Đáp số :* $9\frac{7}{37}$.

153. *Đáp số :* 18 ; 6.

154. Trong một ngày chồng dùng hết $\frac{1}{14}$ thùng nước. Nếu hai vợ chồng dùng chung thì hết $\frac{1}{10}$ thùng nước trong 1 ngày.

Như vậy trong 1 ngày vợ dùng hết :

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35} \text{ (thùng nước)}$$

Vậy người vợ dùng 1 thùng nước trong vòng 35 ngày.

155. Sau 1 năm, người thợ phải nhận được 12 rup và chiếc áo khoác (tiền công). Vậy sau 1 tháng anh ta phải nhận được 1 rup và $\frac{1}{12}$ giá trị chiếc áo khoác (tiền công); sau 7 tháng sẽ nhận được 7 rup và $\frac{7}{12}$ giá trị chiếc áo khoác.

Nhưng do nhận được 5 rup và chiếc áo khoác nên $\frac{5}{12}$ giá trị của chiếc áo bằng 2 rup. Vậy chiếc áo khoác có giá trị là :

$$2 : \frac{5}{12} = 4\frac{4}{5} \text{ (rup)}.$$

156. Gônbach đưa ra mệnh đề này năm 1742 trong một bức thư gửi Ơle. Để chứng minh nó, Ơle dùng đồng nhất thức :

$$4n^4 + 1 = (2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1)$$

Từ đó dễ thấy rằng với n = 1 số đã cho là 5, còn với những giá trị khác của n thì $4n^4 + 1$ luôn là hợp số.

Khơnxtian Gônbach (1690 - 1764) là nhà toán học. Năm 1725 ông là viện sĩ Viện hàn lâm Khoa học St. Petecbua. Ông thường xuyên trao đổi thư từ với Ơle suốt 30 năm trời về những vấn đề toán học. Những công trình toán học của ông liên quan đến phương trình vi phân.

157. Để lập tổng S của những phân số có dạng đã cho ta cho m, n chạy từ 1 đến ∞ . Khi đó :

$$S = \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)+\ldots ;$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 . 2}$$

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots = \frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2 . 3}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots = \frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3 . 4}$$

. . . .

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Kí hiệu : $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Do đó $S = \lim_{n \to \infty} S_n = 1$

158-159. Nửa đầu thế kỉ XVIII, trong thư gửi Ơle viện sĩ Gônbach đã đưa ra một mệnh đề, ngày nay gọi là "bài toán Gônbach", phát biểu như sau : "Mọi số lẻ bất kì lớn hơn 5 đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố".

Gônbach đã chỉ ra các ví dụ cụ thể, những số lẻ thỏa mãn mệnh đề này, nhưng không chứng minh được với một số lẻ bất kì. Còn Ơle trả lời rằng mệnh đề của Gônbach là đúng nhưng ông ta không thể đưa ra được lời giải chặt chẽ. Về phần mình Ơle cũng đưa ra một mệnh đề khác, gọi là "Bài toán Ơle", phát biểu như sau : "Mỗi số chẵn lớn hơn hay bằng 4 có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố", và cả mệnh đề này ông ta cũng không chứng minh được.

Ta nhận thấy rằng, nếu giải được "bài toán Ơle" thì có thể giải được "bài toán Gônbach". Thật vậy mọi số lẻ lớn hơn 5 đều viết được dưới dạng $2N + 1 = 3 + 2(N - 1)$ với $2(N-1) \geq 4$.

Nếu "bài toán Ơle" đúng thì số chẵn $2(N - 1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố, do vậy mà số lẻ $2N + 1$ viết được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố, vậy "bài toán Gônbach" đúng. Nhưng nếu "bài toán Gônbach" đúng thì từ đó chưa thể suy ra sự đúng đắn của "bài toán Ơle" được. Như vậy, "bài toán Ơle" khó hơn "bài toán Gônbach" nhiều, điều này đã được khẳng định về sau.

Gần 200 năm, "bài toán Gônbach" vẫn không giải được, cho đến năm 1930, nhà toán học Nga – Xôviêt trẻ là L.G. Snhirenman (1905 – 1938) mới chỉ ra được con đường đi đúng dẫn tới lời giải "bài toán Gônbach".

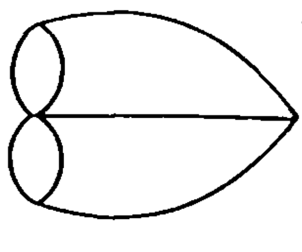
Định lí Snhirenman do ông đưa ra : tồn tại một hằng số k sao cho mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể biểu diễn dưới dạng tổng không quá k số nguyên tố, tức là với mọi số tự nhiên N ($N > 1$) thì : $N = p_1 + p_2 + \dots + p_k$, trong đó p_i là số nguyên tố, hoặc số 0 ; $i = 1, 2, \dots, k$.

Nếu như chứng minh được rằng $k = 3$ thì "bài toán Gônbach" được giải quyết. Bằng cố gắng của các nhà toán học, hằng số k đã được chỉ ra bằng 67, sau đó là $k = 20$.

Năm 1937, nhà toán học Nga Xôviêt I.M.Vinôgrađôp đã chứng minh được "bài toán Gônbach" với số lẻ khá lớn, tức là mệnh đề "mọi số lẻ bắt đầu từ một số khá lớn là tổng của ba số nguyên tố" được chứng minh. Số lẻ khá lớn là bao nhiêu ? Tức là số lẻ hơn số N_0 nào đó. Viện sĩ Bôrôtkin đã chỉ ra được số $N_0 \geq e^{16,038}$, $e \approx 2,7182...$ Phương pháp của Vinôgrađôp giải được "bài toán Gônbach" nhưng vẫn chưa đủ để giải "bài toán Ơle".

Tới nay ngay cả "bài toán Gônbach" với những số chẵn và "bài toán Ơle" vẫn chưa giải được (chính Gônbach cũng không đặt ra bài toán này), mặc dầu định lí Vinôgrađôp đã chỉ ra một số chẵn tương đối lớn là tổng của 4 số nguyên tố.

160. Bài toán này do ƠLE đưa ra vào năm 1750 và sau đó ông giải luôn nó. Theo lời giải này việc đi một lượt qua tất cả 7 cây cầu là không thể được. Bài toán của Ơle tương đương với bài toán vẽ một nét ở hình 48.



Hình 48

L. Ơle (1707 - 1783) là một nhà toán học vĩ đại, bạn thân của Lômônôxôp. Ông sinh ở Baden, Thụy Sĩ. Ông từng là học trò của Iôhan Becnuli. Ông đã viết tất cả 865 công trình khoa học đặc sắc, để lại nhiều dấu ấn trong *các lĩnh vực toán cao cấp, sơ cấp, cơ học, thiên văn học. Ông sống ở Nga khoảng 30 năm, là viện sĩ của Viện hàn lâm khoa học St.Petecbua, ông mất ngày 7 tháng 9 năm 1783 ở Nga.*

161. Có thể giải bài toán này một cách sắc sảo và thông minh nhất như sau : Giả sử người nông dân thứ hai có số trứng gấp m lần số trứng của người thứ nhất. Vì hai người bán trứng thu được cùng một số tiền như nhau nên người thứ nhất phải bán đắt hơn người thứ hai m lần. Nếu trước khi bán, họ đổi số trứng cho nhau thì người thứ nhất có số trứng gấp m lần số trứng của người thứ hai, bán đắt hơn m lần nên sẽ thu được số tiền gấp m^2 lần người thứ hai. Từ đó :

$$m^2 = 15 : 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

do đó $m = \dfrac{3}{2}$

Chia 100 quả trứng theo tỉ lệ 3 : 2 ta tìm được người thứ nhất có 40 quả trứng, người thứ hai có 60 quả trứng.

Bằng phương pháp đại số, ta có thể giải được bài toán này. Gọi x là số trứng của người thứ nhất, thế thì người thứ hai có $100 - x$ (quả trứng). Người thứ nhất bán trứng với giá $\dfrac{15}{100-x}$ (đồng / quả) còn người thứ hai bán trứng với giá $6\dfrac{2}{3} : x = \dfrac{20}{3x}$ (đồng / quả). Vì số tiền thu được bằng nhau, ta có phương trình :

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}$$

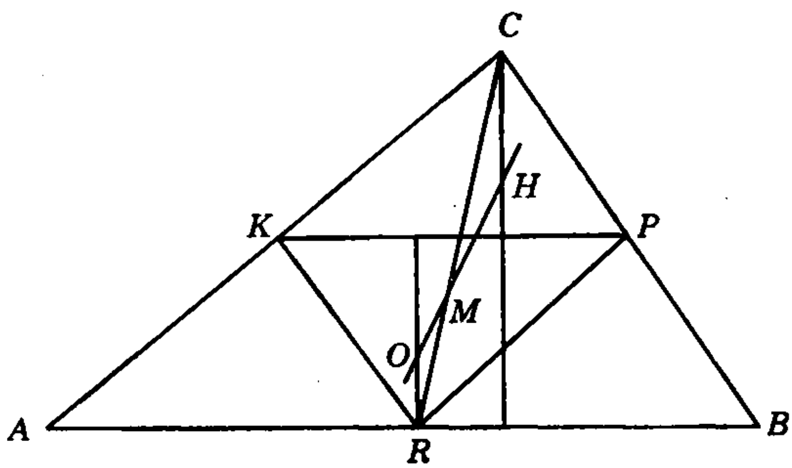
Giải phương trình này có $x_1 = 40$, $x_2 = -200$ (loại).

Ta cũng tìm được kết quả trên.

163. Giả sử ABC là một tam giác tùy ý, gọi P, K, R lần lượt là trung điểm của CB, CA, AB. Gọi H là trực tâm, M là trọng tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Ta phải chứng minh H, M, O thẳng hàng.

Dễ thấy ΔPKR và ΔABC đồng dạng, tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$. M là trọng tâm của ΔPKR vì các trung tuyến của nó cũng là các trung tuyến của ΔABC . Nối M với O và với H :

$\Delta ROM \backsim \Delta CHM$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$ (vì chúng được tạo ra bởi các đường tương ứng trong hai tam giác đồng dạng ΔPKR và ΔABC). Từ đó suy ra $\widehat{RMO} = \widehat{CMH}$, mặt khác C, M, R thẳng hàng nên $\widehat{RMO}$ và $\widehat{CMH}$ trở thành hai góc đối đỉnh. Do đó O, M, H thẳng hàng (hình 49).



Hình 49

Bài toán này lần đầu tiên được Ơle giải năm **1765**. Lưu ý rằng có thể giải ngắn gọn hơn nhờ tính đồng dạng phối cảnh của hai tam giác PKR và ABC với tâm đồng dạng M. Khi đó H sẽ là ảnh của O qua phép đồng dạng này, vì vậy O, M, H thẳng hàng.

164. $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$; $x^3 = \frac{343}{8}$; $x = \frac{7}{2}$.

167. *Đáp số :* 420.

168. *Đáp số :* 15 phút.

169. *Chỉ dẫn :*

Một phần rưỡi của hai phần rưỡi = 1,5 . 2,5.

Ba phần rưỡi của bốn phần rưỡi = 3,5 . 4,5.

Sáu phần rưỡi của tám phần rưỡi = $6,5 \cdot 8,5$.

Đáp số : 232 rup 5 côpêc.

171. *Đáp số :* $93\frac{3}{4}$ côpêc.

172. *Đáp số :* 5 ; $7\frac{1}{2}$ và $12\frac{1}{2}$ côpêc.

174. *Gợi ý :* $4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 13,5$ (côpêc).

là giá tiền của cả hai chiếc mũ.

Đáp số : $1\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{4}$ côpêc

175. *Đáp số :* 16.

176. *Đáp số :* 7 giờ 30 phút.

177. Bí mật khỏi cần bình luận, nó được thấy rõ từ công thức:

$$[(x + 25 + 125 - 37 - x)5] : 2 = 282\frac{1}{2}.$$

Dù nghĩ ra số nào thì cũng phải trừ đi nó trong dãy phép tính để đánh lạc hướng người chơi !

178. Lời giải của V.G. BÊNHEĐIKTÔP[(1)]

"Bài toán rất hay. Các cô con gái trên đường đến chợ đã thống nhất với nhau : Đầu tiên bán trứng theo 7, thay vì theo chục, tức là bán 7 quả một với giá 1 antưn. Sau khi bán hết các "bảy" đó, số trứng mỗi người còn lại ít hơn 7 quả sẽ được bán theo giá 3 antưn một quả. Với cách bán trứng như vậy sẽ thỏa được điều kiện bà mẹ đặt ra".

Đến chợ, cô út bán cho 7 người, mỗi người 7 quả và thu được 7 antưn, còn lại 1 quả trứng. Cô em thứ hai bán cho 4 người, mỗi người

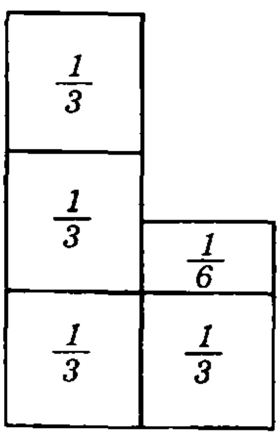
---

(1) V.G. Bênhediktôp (1807 - 1873), một nhà thơ Nga nhưng cũng rất hâm mộ toán học.

7 quả thì được 4 antưn, còn lại 2 quả. Chị cả bán 7 quả thu được 1 antưn, còn lại 3 quả. Sau đó họ thay đổi giá bán của 1 + 2 + 3 = 6 (quả trứng) còn lại với giá 3 antưn 1 quả và thu được $6 \times 3 = 18$ (antưn). Như vậy mỗi người đều bán hết trứng và đều bán được 10 antưn.

179. *Đáp số* : Theo vòng tròn.

180. L.N. Tônstôi giải như sau : "Đối với mảnh lớn thì nếu cả nhóm cắt nửa ngày và nửa nhóm cắt nửa ngày nữa mới xong thì có nghĩa là trong nửa ngày nửa nhóm cắt được $\frac{1}{3}$ mảnh. Vì thế phần còn lại một ít ở mảnh nhỏ đến cuối ngày chưa cắt xong sẽ là $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Nếu 1 người cắt trong 1 ngày được $\frac{1}{6}$ mảnh, số phần được cắt trong 1 ngày là $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$ thì số thợ là 8".



Hình 50

Để cho rõ hơn, ta đưa ra hình vẽ bên (hình 50)

Lời giải đại số như sau :

Gọi x là số thợ, y là số phần của mảnh lớn mà 1 người cắt được trong 1 ngày (ở đây y chỉ là ẩn số phụ thôi).

Khi đó diện tích của mảnh lớn là $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$, diện tích mảnh nhỏ là $\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$.

Vì mảnh lớn gấp đôi mảnh nhỏ, cho nên :

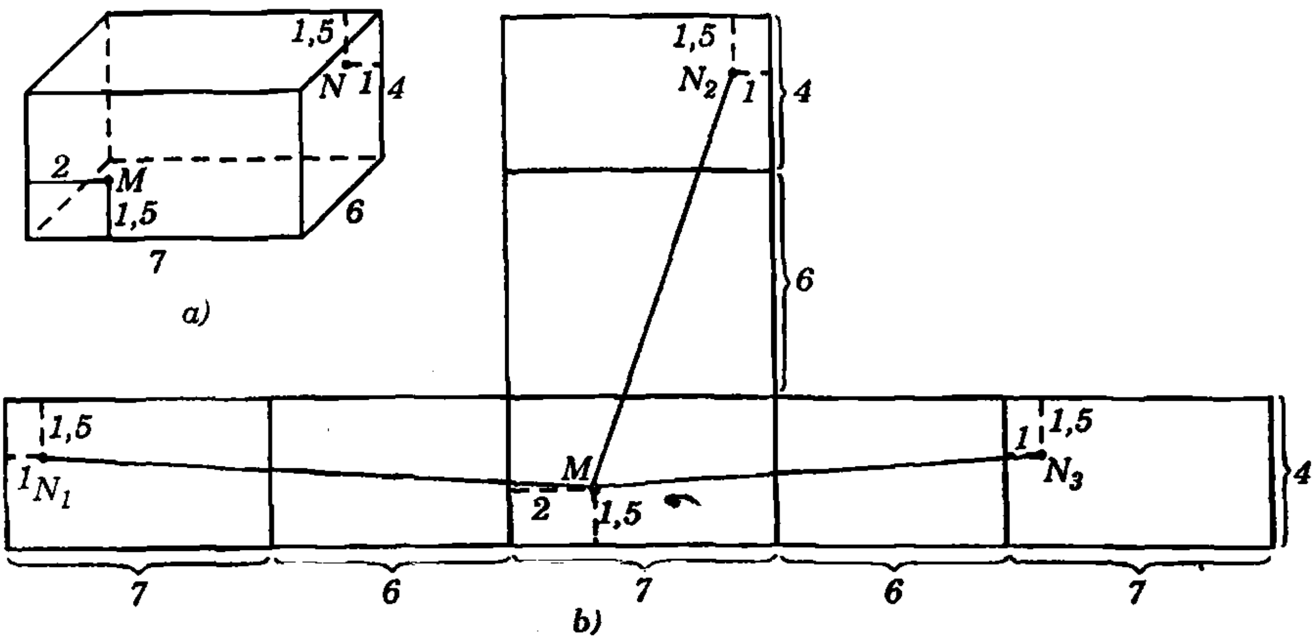
$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2$$

hay $$\frac{3xy}{xy + 4y} = 2 \; ; \; \frac{3x}{x + 4} = 2$$

Từ đó suy ra x = 8.

Đáp số : 8.

181. Bài toán được giải theo phương pháp hình học. Giả sử căn phòng được xác định hoàn toàn với kích thước như sau : dài 7, rộng 6 và cao 4 (asin). Vị trí nhện (N) và ruồi (M) trong hình 51a), còn căn phòng được triển khai theo hình 51b; hơn nữa khoảng cách của ruồi và nhện đến bức tường bên trái và phải tương ứng là 2 và 1 (asin).



Hình 51

Theo hình 51b) thì sẽ có 3 "con đường" ngắn nhất (vì là đường thẳng) để nhện (N) tới chỗ ruồi (M).

Áp dụng định lí Pitago ta có :

$$MN_1 = \sqrt{197} \approx 14,04 \text{ (asin)}$$

$$MN_2 = \sqrt{116} \approx 10,77 \text{ (asin)}$$

$$MN_3 = \sqrt{145} \approx 12,04 \text{ (asin)}$$

Do đó lời giải tốt nhất là đi theo con đường MN_2.

182. 3 anh trả cho 2 em 3 lần 800 (rup), tức là 3 . 800 = = 2400 (rup). Hai em lại chia đôi số tiền nhận được là :

2400 : 2 = 1200 (rup). Do 5 anh em chia đều nhau nên toàn bộ 3 ngôi nhà giá trị 5 . 1200 = 6000 (rup), mỗi ngôi nhà giá trị 2000 (rup).

183. *Chỉ dẫn* : Khi bá tước bắt đầu rời Tula thì người nông dân đã đi được bao lâu ? Mỗi giờ bá tước đuổi theo người nông dân được bao nhiêu dặm ? Sau bao lâu bá tước đuổi kịp người nông dân ? (lưu ý 1 dặm $\approx$ 1,0668km).

184. Người nông dân trả tiền đất hết 70 . 8 = 560,00 (rup). Gieo lúa 9 put cho 1 mẫu thì 70 mẫu hết 70 . 9 = 630 (put), số tiền là : 630 . 1,30 = 819,00. Vậy tổng số tiền "chi phí" là 1379,00 (rup).

Người nông dân thu hoạch trên 70 mẫu là :

$$13 \times 70 = 910 \text{ (vựa)}$$
$$910 \times 6 = 5460 \text{ (put)}$$

Tổng số tiền thu được sẽ là : 5460 × 1,40 = 7644,00 (rup)

Tiền xay lúa : 5460 × 7 = 38220 = 382,2 (rup)

Tiền vận chuyển : 5460 × 11 = 60000 = 600,00 (rup)

Tổng chi phí là : 1379,00 + 382,2 + 600,00 = 2361,80 (rup)

Lợi nhuận là : 7644,00 − 2361,80 = 5282,20.

185. Bàn cờ có tất cả 8 × 8 = 64 (ô)

– Ô thứ nhất : 1 hạt = 2^0

– Ô thứ hai : 2 hạt = 2^1

– Ô thứ ba : 4 hạt = 2^2

. . . .

– Ô thứ 64 : 2^{63} hạt = 9223372036854775808 (hạt)

Vậy tổng số hạt thóc đặt trên bàn cờ là :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ (hạt)}$$

Đó là một con số khổng lồ.

Nếu 1 put chứa 40000 hạt thóc thì chỉ riêng ô cuối cùng thôi đã là 230584300921369 (put) thóc.

186. Trong 1 phút :

Vòi thứ nhất chảy $\frac{1}{24}$ thùng;

Vòi thứ hai chảy $\frac{1}{15}$ thùng;

Từ lỗ rò chảy ra $\frac{1}{120}$ thùng. Như vậy trong một phút, lượng nước chảy vào trong thùng sẽ là :

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{15} - \frac{1}{120} = \frac{1}{10} \text{ (thùng)}$$

Vậy thùng sẽ đầy sau 10 phút.

187. Đây là một trong số 12 bài toán ra cho chú bé 11 tuổi I.Van Pètrôp không biết đọc, biết viết nhưng rất giỏi tính nhẩm. Chú bé này là con một nông dân. Việc thử tài chú bé này diễn ra vào tháng 5 năm 1934.

Đáp số : 1) 3×26

2) $3 \times 21 + 5 \times 3$

3) $3 \times 16 + 5 \times 6$

4) $3 \times 11 + 5 \times 9$

5) $3 \times 6 + 5 \times 12$

6) $3 \times 1 + 5 \times 15$.

Lưu ý rằng : Petrôp đã giải đúng tất cả 12 bài trong thời gian không quá 1 giờ. Sau đây là 11 bài toán còn lại :

1) Cộng nhẩm các số : 143, 27, 38, 29.

2) Cộng nhẩm các số : 427, 28, 7, 20, 652.

3) 15 năm nữa tôi sẽ bằng tuổi anh tôi bây giờ. Vậy anh tôi bao nhiêu tuổi nếu hiện nay tôi 14 tuổi ?

4) Một người bán một mặt hàng thu được 4548 rup, bị lỗ 452 rup. Vậy giá mặt hàng này là bao nhiêu ?

5) Hãy lấy 1600 trừ đi 1248.

6) Hãy lấy 40004 trừ đi 30055.

7) Tìm số mà khi thêm 3455 vào thì được 10000.

8) 12425 gấp bao nhiêu lần 25 ?

9) Dùng số tiền trong 5 bao, mỗi bao có 875 rup 5 côpêc để mua vải lanh với giá 35 côpêc 1 asin, hỏi mua được bao nhiêu asin vải ?

10) Dọc đường nối giữa hai làng trồng 1658 cây với khoảng cách giữa hai cây đều bằng 8 asin. Hỏi hai làng cách nhau bao nhiêu asin ?

11) 12 người dùng hết 136 rup trong một khoảng thời gian nhất định. Hỏi cũng trong khoảng thời gian đó thì 69 người tiêu hết bao nhiêu ?

188. Lời giải dựa trên tính chất sau :

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$$

Do đó $\dfrac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = \dfrac{2 \times 365}{365} = 2$

X.A. Rachinxki (1836 - 1902) vốn là giáo sư các môn khoa học tự nhiên ở trường đại học. Sau này ông trở về dạy "trường làng". Ông chú ý nhiều đến các bài toán không mẫu mực và tính nhẩm.

189. $$\begin{aligned} 84 \times 84 &= 7 \times 12 \times 7 \times 12 \\ &= 7^2 \times 12^2 \\ &= 49 \times 144 \\ &= (50 - 1) \times 144 \\ &= 50 \times 144 - 144 \\ &= 7056 \end{aligned}$$

190. Giả sử tháng đầu thương gia trả x (rup).

Khi đó $\left(1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3+3\frac{1}{2}+4+4\frac{1}{2}\right)x = 753+303$;

do vậy $22x = 1056$;

$$x = \frac{1056}{22};$$

$$x = 48 \text{ (rup)}.$$

Các tháng sau, mời bạn tự tính.

A.N. Xtrannôliubxki (1839 - 1903) là nhà toán học nổi tiếng Nga, giáo sư Học viện hàng hải. Rất giỏi về phương pháp giảng dạy. Ông đã từng là gia sư của nhà nữ toán học Côvalepxkaia.

191. Gọi x là số tuần mà công việc diễn ra, khi đó :

$$(15 - 10)x = 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 7, \text{ từ đó } x = 3 \text{ (tuần)}.$$

192. Gọi x là số tiền mà cha để lại, khi đó :

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)x = 2500 + 3000 \text{ từ đó } x = 20625 \text{ (rup)}.$$

193. Gọi x là tuổi người con thứ hai, khi đó :

$$x + 3x = 45 - 29$$

$$(1 + 3)x = 45 - 29$$

từ đó $x = 4$.

194. Gọi x là số xô rượu loại 1, ta có :

$$\frac{150}{5}x + (50 - x)\frac{140}{7} = 50(30 - 3)$$

do đó $x = \dfrac{50(30-3) - \dfrac{50.140}{7}}{\dfrac{150}{5} - \dfrac{140}{7}}$

195. Gọi x là số bảng bạc phải tìm ta có phương trình :

$$\frac{288}{3}x + \frac{328}{4}(20 - x) = 20(93 - 3)$$

từ đó $x = \dfrac{20(93-3) - \dfrac{328.20}{4}}{\dfrac{288}{3} - \dfrac{328}{4}}$.

196. Theo bài ra có hệ phương trình :

$$5x + 3y = 540$$
$$x + y = 138$$

từ đó $x = 63$ (thước vải màu xanh)

$y = 75$ (thước vải màu đen)

197. *Đáp số* : 237256.

TÂY ÂU

198. Điều kiện bài toán dẫn đến hệ phương trình :

$$x + 7 = 5(y - 7) ;$$
$$y + 5 = 7(x - 5).$$

Giải hệ này, ta nhận được :

$$x = 7\frac{2}{17} ; \quad y = 9\frac{14}{17} .$$

Trả lời : Người đầu có $7\frac{2}{17}$ đina; người thứ hai có $9\frac{14}{17}$ đina.

Bài toán này được lấy trong cuốn "Liber abaci" của nhà toán học Italia Leonađơ Pizanxki Phibônaxi. Ông sinh ra ở Pida, năm 117. Ông đã từng giảng dạy toán học ở Angic, sang phương đông làm quen với toán học A Rập. Chính vì thế mà ông có dịp đối chiếu và so sánh giữa nghệ thuật tính toán Ấn Độ với 9 kí tự Hinđu và nghệ thuật tính toán của Pitago để thấy tính ưu việt của việc sử dụng 9 kí tự Hinđu trong tính toán. Ông đã đúc kết những tri thức "cổ kim" về toán học và quyết định viết cuốn "Liber abaci". Đây là tác phẩm số học và đại số, gồm 15 chương. Công lao vĩ đại nhất của ông đối với khoa học đó là ông là người đầu tiên ở Ấn Độ giới thiệu môn đại số và hệ thống tính toán với các nhà bác học châu Âu.

199. Gọi x là số chim sẻ
y là số chim ngói
z là số bồ câu

Ta có hệ phương trình : $x + y + z = 30$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30$$

Loại z từ hai phương trình trên, suy ra : $10x + 9y = 180$

hay $y = 20 - \frac{10}{9}x$

Sau khi cho $x = 9$ ta nhận được $y = 10$ và $z = 11$.

Đáp số : 9 chim sẻ; 10 chim ngói; 11 chim bồ câu.

200. Regiômôntăng giải bài toán bằng hai cách :

–Cách thứ nhất :

Phương trình được biến đổi về dạng : $10x = x^2 + \frac{100}{27}$

từ đó : $x = 5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}$.

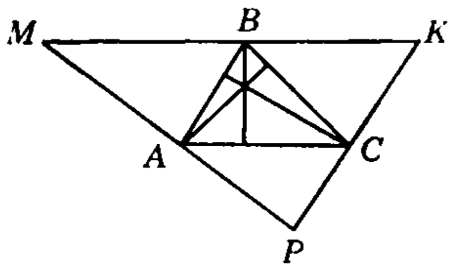
–Cách thứ hai : Đặt $\frac{x}{10 - x} = y$, suy ra từ phương trình đã cho : $y + \frac{1}{y} = 25$

Từ đó : $y = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$

Từ đây, dễ dàng suy ra $x = 5 - \sqrt{21\frac{8}{27}}$.

REGIÔMÔNTĂNG (Regiomontanus) (1436 - 1476) là nhà toán học Đức tên thật là Jôhan Mulơ (Johann Muller). Ông rất nổi tiếng với các công trình của mình về lượng giác và các bản dịch các tác gia Hi Lạp cổ đại. Đáng kể đến là cuốn "Về các tam giác" in năm 1533.

201. Giả sử ABC là tam giác cho trước (hình 52)



Hình 52

Qua các đỉnh của tam giác lần lượt kẻ các đường thẳng song song với các cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành ΔMPK và khi đó A, B, C trở thành trung điểm của các cạnh. Suy ra các đường cao hạ từ A, B, C của ΔABC xuống các cạnh đối diện là các đường trung trực của ΔMPK, do đó chúng đồng quy. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

202. Đề nghị bạn đọc cố gắng tự giải bài toán này.

Bài toán này lấy từ cuốn "Về các phép biến đổi" của Leôna đơ Vanhxi (Léonard de Vinci) (1452 - 1519) – Cuốn sách đã nghiên cứu các bài toán biến đổi vật thể này thành vật thể khác mà không thêm bớt chất liệu. Theo ông, toán học có thể giải quyết được mọi vấn đề, ông đã từng nói "Chỉ có nó (toán học) mới có khả năng làm những người hay cãi im lặng".

203. Gọi x là số tiền của người thứ nhất, y là số tiền của người thứ hai, z là số tiền của người thứ ba, khi đó ta có hệ phương trình :

$$x + \frac{1}{2}(y + z) = 12 ;$$

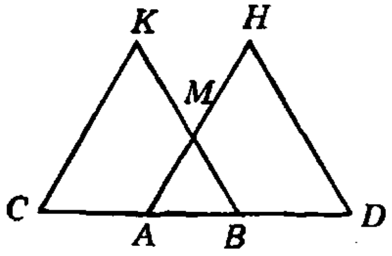
$$y + \frac{1}{3}(z + x) = 12 ;$$

$$z + \frac{1}{4}(x + y) = 12 .$$

Suy ra $x = 3\frac{9}{17}$; $y = 7\frac{13}{17}$; $z = 9\frac{3}{17}$.

Đáp số : $3\frac{9}{17}$; $7\frac{13}{17}$; $9\frac{3}{17}$ florin.

204. Ta dựng như sau : Lấy A làm tâm, quay compa với khẩu độ đã cho cắt đường thẳng AB kéo dài tại D. Rồi lại lấy B là tâm, quay compa với khẩu độ như vậy cắt AB kéo dài tại C (hình 53)



Hình 53

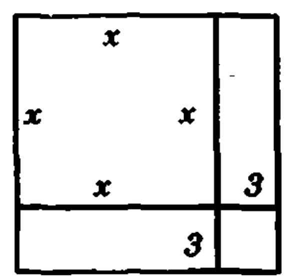
Lần lượt dựng các tam giác đều ADH và BCK. Giao của AH và BK là M. Khi đó ABM là tam giác phải dựng.

Bài toán này do nhà toán học Italia nổi tiếng Nicôla Tactalia (1499 - 1557) đặt ra. Ông là người tìm ra phương pháp giải phương trình bậc 3 dạng $x^3 + px = q$ *với q , p là những số dương.*

205. Cacđanô giải bằng phương pháp hình học.

Dùng hình 54, ta có :

$$x^2+2.3x+9 = x^2+6x+9 = (x+3)^2$$



Hình 54

Theo điều kiện đầu bài :

$$x^2 + 6x = 91 \text{ , từ đó rút ra}$$

$$(x + 3)^2 = 100$$

Suy ra $x + 3 = 10$, do đó $x = 7$

Nhà toán học Italia nổi tiếng Jerôm Cacđanô (1501 - 1576) tác giả cuốn sách "Nghệ thuật vĩ đại", hay về các quy tắc đại số xuất bản năm 1545. Ông là người đầu tiên đưa ra cách giải phương trình bậc 3 (mà công thức nghiệm gọi là công thức Cacđanô) trong cuốn sách trên. Cũng trong tác phẩm này ông còn nêu cách giải một phương trình bậc bốn.

Cacđanô rất uyên bác. Ông còn dạy cả y học và triết học. Ông là người theo chủ nghĩa kinh nghiệm.

206. Dùng kí hiệu ngày nay, bài toán dẫn tới phương trình: $x^2 - 10x + 40 = 0$, từ đó : $x_1 = 5+\sqrt{-15}$; $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$.

Ở thời kì của Cacđanô thì bài toán này không có nghiệm vì khi đó chưa có khái niệm về số ảo và các phép toán trên chúng. Chính ông đã gặp phải số phức trong các bài toán khác mà không lí giải được. Ông đặc biệt kinh ngạc khi thấy rằng khi cộng và nhân "các số không tồn tại" này theo các quy tắc thông thường thì dẫn đến các kết quả thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

Một trong những đóng góp to lớn của Cacđanô là ông đã chú ý tới số phức. Tuy nhiên mãi đến 1799 Vêxêli, một nhà toán học Đan Mạch (1745 - 1818) mới xây dựng số phức một cách chặt chẽ. Đến thế kỉ XIX, trên cơ sở chặt chẽ về sự phát triển của số phức, lí thuyết hàm số biến số phức ra đời. Lí thuyết này được áp dụng rộng rãi trong khoa học kĩ thuật hiện đại.

207. Lời giải đầy đủ lần đầu tiên của bài toán này do Cacđanô đưa ra. Bạn đọc cũng có thể xem lời giải bài toán trong sách giáo khoa hình học lớp 9.

208. Viet đã giải như sau :

Đặt $x = y + z$, phương trình đã cho trở thành :

$$y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0 \qquad (*)$$

Do z tùy ý nên ta có thể chọn z sao cho hệ số của y bằng 0, tức là $2z + p = 0$ hay $z = -\frac{p}{2}$.

Khi đó $z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}$.

Nên phương trình (*) trở thành :

$$y^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

Do đó $\quad y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Suy ra $\quad x = y + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

FRĂNGXOA VIET (1540 - 1603) là nhà toán học Pháp, cũng đồng thời là luật sư, một chính khách nổi tiếng, một chuyên gia giải mã tài năng. Ông đã tìm ra bí mật của bộ mã mà Tây Ban Nha sử dụng trong cuộc chiến tranh với Pháp, giúp vua Henry IV phá tan những âm mưu của Tây Ban Nha.

Bằng cách sử dụng những kí hiệu số, Viet đã làm cho đại số phát triển. Định lí nổi tiếng của Viet về quan hệ giữa các nghiệm số của phương trình và hệ số của chúng, mà ngày nay chúng ta đã biết trong chương trình toán học ở phổ thông, là một dấu ấn lớn về tài năng của ông. Ông đã đưa ra phương pháp giải thống nhất các phương trình bậc 2, bậc 3 và bậc 4. Viet cũng có đóng góp nhiều trong hình học và lượng giác. Các công trình toán học của ông được in trong cuốn sách "Quy tắc toán học" vào năm 1579.

209. Gọi t là thời gian viên bi rơi tự do từ A đến D. Giả sử ma sát không khí là không đáng kể (hình 7). Khi đó : $AD = \frac{gt^2}{2}$

trong đó g là gia tốc rơi tự do, từ đó rút ra :

$$t = \sqrt{\frac{2AD}{g}}.$$

Gọi t_1 là thời gian chuyển động trượt của viên bi theo dây cung AC (ma sát coi như bằng 0).

Ta có : $AC = \frac{at_1^2}{2}$

trong đó a là gia tốc của chuyển động theo hướng nghiêng AC. Từ đó :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}}$$

Từ C, hạ đường vuông góc CE tới AD. Trong cơ học đã xác định được :

$$\frac{a}{g} = \frac{AE}{AC} \text{ hay } a = \frac{AE.g}{AC}$$

Ta lại có $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$, do đó $a = \frac{AC}{AD} . g$.

Cuối cùng thì :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2AC}{a}} = \sqrt{\frac{2AC . AD}{AC . g}} = \sqrt{\frac{2AD}{g}} = t.$$

Tương tự như vậy, nếu gọi t_2 là thời gian chuyển động của viên bi trượt theo dây cung AB thì ta cũng có : $t_2 = t$.

Như vậy $t_1 = t_2 = t$, tức là thời gian chuyển động theo mọi dây cung bằng thời gian chuyển động rơi tự do.

Galilê đã phát biểu bài toán này như sau : "Nếu từ điểm cao nhất của vòng tròn dựng phía trên[1] một mặt phẳng ngang kê những mặt phẳng nghiêng khác nhau thì thời gian trượt theo những mặt phẳng nghiêng ấy tới vòng tròn là bằng nhau".

Bài toán này đã được đưa ra và giải trong cuốn sách "Những cuộc nói chuyện và chứng minh toán học liên quan đến hai lĩnh vực khoa học mới gắn với cơ học và chuyển động tại chỗ", xuất bản năm 1638 ở Hà Lan.

GALILEO GALILÊ (Galileo Galilei) (1564 – 1642) là nhà toán học, cơ học, vật lí và thiên văn học Italia. Ông đã chế tạo ra kính thiên văn phóng đại tới 32 lần. Nhờ đó ông đã phát hiện ra các trạng thái của sao kim, những vết đen trên mặt trời và sự chuyển động quay xung quanh mặt trời của các hành tinh. Ông đã xem việc quan sát để nhận ra hiện tượng phản ánh thế giới xung quanh là xuất phát điểm của nhận thức thế giới. Ông kiên trì đấu tranh chống sự hủ lậu và thủ cựu trong khoa học, đặc biệt là chủ nghĩa giáo điều quý tộc.

Galilê bị nhà thờ thiên chúa giáo truy bức tàn bạo. Hai lần ông đã bị đưa ra trước "Tòa án giáo hội thánh thần". Lần đầu vì in những

(1) Ở đây ta phải hiểu là vòng tròn nằm trong mặt phẳng, vuông góc với mặt phẳng nằm ngang (người dịch chú thích).

phát kiến thiên văn. khẳng định tính đúng đắn quan điểm của Côpecnic về trái đất,quay xung quanh trục của nó và quay xung quanh mặt trời. Lần thứ hai vào năm 1633, ông bị đưa ra tòa án do xuất bản tác phẩm "Đối thoại về hai hệ thống thế giới chủ yếu nhất . Ptôlêmê và Côpecnic" một cách rộng rãi. Trong tác phẩm này, ông đã bằng cách so sánh hệ thống "địa tâm" (của Ptôlêmê) và hệ thống "nhật tâm" (của Côpecnic) chứng tỏ ưu thế và tính đúng đắn của hệ "Nhật tâm". Bằng sự gian trá và mưu mô, cuối cùng giáo hội đã ép được Galilê công khai từ bỏ các quan điểm của mình và tổ chức một lễ "sám hối" ô nhục. Để tránh số phận của Brunô (bị thiêu sống ngày 17/2/1600 tại Rôma), ông già 70 tuổi Galilê buộc phải qùy trong bộ quần áo kẻ phạm tội ăn năn, giữ trước ngực cuốn kinh thánh công khai từ bỏ sự gắn bó với học thuyết của Côpecnic và tuyên bố các nghiên cứu của mình có lợi cho học thuyết này là sai lầm, không phù hợp với giáo lí và phỉ báng thánh thần.

Tuy vậy, ngay sau nghi lễ tại tòa án, ông vẫn bướng bỉnh nói rằng "Dù sao trái đất vẫn quay". Ông vẫn bị truy bức, luôn bị giáo hội giám sát, trở thành tù nhân suốt đời. Ông mất tại nhà riêng của mình ở Achetri gần Phlorenci.

210. Giả sử rằng các đường thẳng PS và NC cắt nhau tại điểm R, khi đó :

DC : PN = DR : PR (hình 55).

Chú ý đến những đường thẳng SAE, SBF, SCH, SDK, ta cũng nhận được :

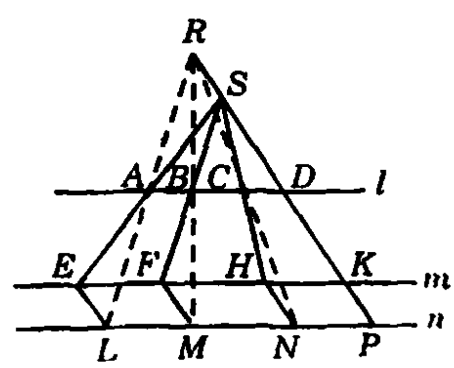
DA : KE = DB : KF = DC : KH.

Lưu ý rằng EL // FM // HN // KP, ta sẽ có

KE = PL ; KF = PM ; KH = PN,

Từ đó DA : PL = DB : PM = = DC : PN = RD : RP.

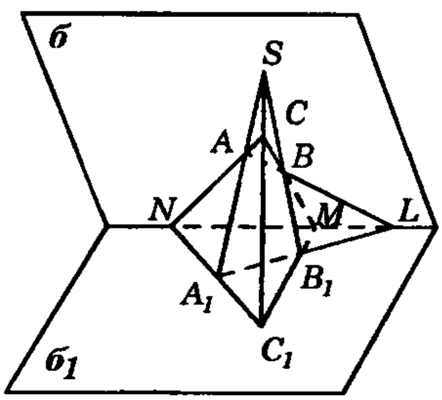
Do đó các đường thẳng AL, BM, CN, SP đồng quy tại điểm R. Đó chính là điều phải chứng minh.



Hình 55

Iôhan Keplê (Johann Kepler) (1571 - 1630) là một nhà toán học và thiên văn học Đức nổi tiếng, tác giả của công trình nổi tiếng "Môn hình học không gian mới của những thùng rượu vang". (1615), trong đó trình bày những cơ sở của giải tích vô cùng bé, về sau này được phát triển trong những công trình của Lepnit và Niutơn, hướng dẫn và cùng Buôcghi (Jobst - Burgi – người Thụy Sĩ – 1552 - 1632, người sản xuất nhạc cụ) lập bảng tính lôgarit vào năm 1624, xuất bản cuốn "Bảng lôgarit". Như một nhà thiên văn, ông đã tìm ra quy luật chuyển động của hành tinh và suốt đời dành cho sự phát triển của thuyết nhật tâm của Côpecnic.

211. Giả sử đã cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trong mặt phẳng khác nhau σ và σ_1 (hình 56). Ngoài ra những đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, đồng quy tại S.



Hình 56

Ta sẽ chứng minh rằng các đường thẳng AB và A_1B_1, BC và B_1C_1, AC và A_1C_1 cắt nhau tại những điểm cùng nằm trên một đường thẳng.

Xét hai cạnh tương ứng AB và A_1B_1 – chúng giao nhau thực sự tại điểm L và chúng cùng nằm trên một mặt phẳng, cụ thể là mặt phẳng tam giác SA_1B_1. Dễ thấy điểm L thuộc cả hai mặt phẳng σ và σ_1.

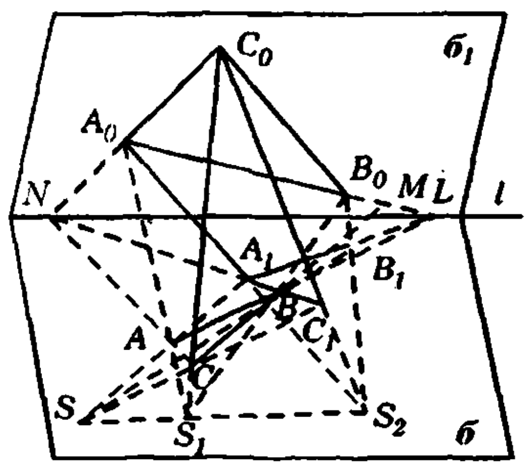
Tương tự như vậy các giao điểm M, N của các cặp đường thẳng tương ứng BC và B_1C_1, AC và A_1C_1 cũng thuộc cả hai mặt phẳng σ và σ_1.

Do vậy L, M, N nằm trên giao tuyến của σ và σ_1, có nghĩa là L, M, N thẳng hàng. Bài toán đã được chứng minh.

Gira Đêgiac (1593 - 1662) là một nhà toán học Pháp, kĩ sư quân giới – đặt cơ sở cho môn hình họa. Bài toán trên là trường hợp riêng của định lí Đêgiac, là một trong những định lí cơ bản của hình học *xạ ảnh. Định lí Đêgiac được phát biểu : "Nếu trong hai tam giác giao điểm của những cặp cạnh tương ứng thẳng hàng thì các đường thẳng nối những đỉnh tương ứng đồng quy".*

Tư tưởng của Đêgiac sau này được phát triển vào đầu thế kỉ XIX trong các công trình của nhà toán học Pháp Mônggia và Pônxen, nhà toán học Đức I.A. Stein, v.v...

212. Giả sử các tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ (hình 57) nằm trong cùng một mặt phẳng σ và giả sử S là giao điểm của những đường thẳng nối những đỉnh tương ứng A và A_1 ; B và B_1 ; C và C_1. Ta kí hiệu L, M, N là những giao điểm của những cạnh tương ứng AB và A_1B_1 , BC và B_1C_1 , AC và A_1C_1 (theo điều kiện đầu bài thì những đường thẳng này nằm trong cùng một mặt phẳng, không song song). Ta sẽ chứng minh rằng các điểm L, M, N thẳng hàng.



Hình 57

Vẽ qua điểm S một đường thẳng tùy ý, không nằm trong mặt phẳng σ và lấy trên đó điểm S_1 , S_2 tùy ý.

Ta nối đỉnh S_1 với các điểm A, B, C và nối S_2 với các điểm A_1 , B_1 , C_1 . Những đường thẳng S_1A và S_2A_1 giao nhau vì chúng nằm trong cùng một mặt phẳng (mặt phẳng tam giác A_1SS_2) và không song song (không xét trường hợp song song với nhau). Ta kí hiệu giao điểm của chúng là A_0 . Hoàn toàn tương tự như vậy thì các đường thẳng S_1B và S_2B_1 ; S_1C và S_2C_1 cắt nhau tại B_0 và C_0. Ta nhận được tam giác $A_0B_0C_0$ nằm trong mặt phẳng σ_1 nào đó, giao với mặt phẳng σ theo đường thẳng l nào đó.

Tam giác $A_0B_0C_0$ cùng với mỗi tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ đã thỏa mãn điều kiện định lí Đêgiac trong không gian và do đó các giao điểm L, M, N của các cạnh tương ứng của các tam giác phải thẳng hàng, cùng nằm trên đường thẳng l.

Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại. Giả sử các cạnh tương ứng của các tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ giao nhau tại những điểm L, M, N tren đường thẳng l nào đó. Ta sẽ chứng minh rằng những đường thẳng không song song đi qua những đỉnh tương ứng giao nhau và đồng quy tại một điểm. Để chứng minh điều này qua đường thẳng l ta vẽ một mặt phẳng σ_1 tùy ý khác với σ. Qua L, M, N, trong σ_1 kẻ ba đường thẳng tùy ý sao cho chúng không cùng đi qua một điểm và không song song với nhau. Khi đó trong mặt phẳng σ_1 ta nhận được tam giác $A_0B_0C_0$, trong đó A_0 là giao điểm của những đường thẳng vẽ qua L và N; còn B_0 là giao điểm của những đường thẳng qua L và M, và C_0 là giao điểm của những đường thẳng qua M và N.

Tam giác $A_0B_0C_0$ cùng với các tam giác đã cho ABC và $A_1B_1C_1$ thỏa điều kiện định lí đảo của định lí Đêgiac trong không gian, do đó những đường thẳng A_0A, B_0B, C_0C giao nhau tại một điểm S_1 nào đó, còn các đường thẳng A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 thì giao nhau tại cùng một điểm S_2 nào đó, khác với S_1.

Ta xét đường thẳng S_1S_2. Ta gọi giao điểm của đường thẳng này với mặt phẳng σ là S. Bây giờ ta xét các đường thẳng AA_1 và S_1S_2. Chúng phải cắt nhau bởi vì nằm trong cùng một mặt phẳng (của tam giác $S_1A_0S_2$). Nhưng chúng chỉ có thể giao nhau tại điểm S. Chứng minh tương tự, các đường thẳng BB_1 và CC_1 cũng đi qua điểm S. Từ đó ta rút ra rằng những đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của hai tam giác đã cho đồng quy. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét : Phân tích kĩ lưỡng hơn bài toán Đêgiac, ta dẫn tới kết quả tổng quát hơn sau đây. Nếu những đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của hai tam giác đã cho giao nhau tại một điểm hoặc song song với nhau thì có thể xảy ra ba khả năng :

1) Cả ba giao điểm của các cạnh tương ứng thẳng hàng.

2) Một cặp cạnh tương ứng trong những đường thẳng song song sẽ song song với đường thẳng đi qua giao điểm của hai cặp cạnh tương ứng còn lại.

3) Mỗi cặp cạnh tương ứng bao gồm những đường thẳng song song với nhau.

Hơn nữa, ta nhận thấy rằng định lí Đêgiac trên mặt phẳng đã được chứng minh nhờ hình học không gian bằng cách đưa vào tam giác $A_0B_0C_0$ *trong mặt phẳng* σ_1 , *không trùng với* σ *mà trên đó có hai tam giác ABC và* $A_1B_1C_1$. *Đã có nhiều nỗ lực để giải quyết bài toán không dựa vào không gian ba chiều. Tuy nhiên, tất cả mọi nỗ lực đó dường như không đem lại kết quả. Chỉ có nhà toán học Đức Hinbe (Hilbert) (1862 - 1943) đã chứng minh được rằng không thể tồn tại phép chứng minh nếu không sử dụng tính bằng nhau của các đoạn thẳng.*

213. Phương trình đã cho

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

Có thể được viết :

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0$$

hay là $x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0$

Từ đó suy ra $x_1 = 4$

Những nghiệm còn lại, rút ra từ phương trình

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

Để tìm những nghiệm này, viết phương trình dưới dạng

$$x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 = 0$$

hay $x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0$

rút ra $x_2 = 3$, còn lại hai nghiệm nữa rút ra từ phương trình:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Giải phương trình này : $x_3 = 2$ và $x_4 = -5$.

Rơnê Đêcac (René Descartes) (1596 - 1650) là nhà toán học, triết học Pháp, người viết cuốn "Hình học" (1637) nổi tiếng, trong đó lần đầu tiên trong lịch sử khoa học, phương pháp tọa độ được thể hiện.

Phương pháp tọa độ cho phép Đêcac cùng với Phecma xây dựng môn hình học giải tích, môn khoa học xem xét những bài toán hình học theo quan điểm phương trình đại số.

Đêcac phát triển lí thuyết phương trình bằng cách đưa vào những kí hiệu. Lần đầu tiên ông kí hiệu biến số, những ẩn số là x, y, z, đưa ra phương pháp hệ số bất định mà hiện nay đang được ứng dụng rộng rãi. Trong triết học và cả trong toán học, Đêcac luôn coi trọng phương pháp phân tích, tùy thuộc vào mỗi vấn đề cần phải phân tích, chia nó ra thành từng phần để có thể giải quyết được từ đơn giản tới phức tạp.

214. $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$, trong đó q là công bội của cấp số nhân.

Vì $q = \dfrac{a_2}{a_1}$ nên $S = \dfrac{a_1}{1 - \dfrac{a_2}{a_1}} = \dfrac{a_1^2}{a_1 - a_2}$

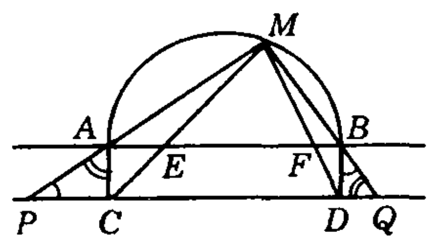
Từ đó $\dfrac{S}{S - a_1} = \dfrac{\dfrac{a_1^2}{a_1 - a_2}}{\dfrac{a_1^2}{a_1 - a_2} - a_1} = \dfrac{a_1^2}{a_1 a_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Pie Phecma (Pierre de Fermat) (1601 - 1665) là một nhà toán học Pháp. Ngay từ khi còn tre đã theo học luật và trở thành luật sư. Ông đặc biệt yêu thích nghiên cứu toán học. Phecma thường xuyên trao đổi thư từ với các nhà bác học vĩ đại, ông thường có những phân tích sâu sắc và đưa ra những phê phán lí thuyết toán học hiện thời và thông báo cho họ về những nghiên cứu của mình. Phecma đã xây dựng nhiều phần kiến thức và sự phát triển sau này của toán học cao *cấp (Phép tính vi tích phân và hình học giải tích). Tên tuổi của ông được biết đến trong một vài định lí số học (Lí thuyết số).*

215. Trước tiên ta nhận thấy rằng $\widehat{P} = \widehat{DBQ}$ và $\widehat{PAC} = \widehat{Q}$ vì là những góc có cạnh tương ứng vuông góc. ($\widehat{PMQ} = 90^o$) (hình 58).

Từ sự đồng dạng của các tam giác ACP và BDQ suy ra $\frac{PC}{BD} = \frac{AC}{DQ}$, nhưng theo giả thiết BD = AC, suy ra $PC \cdot DQ = AC^2$. Vì AC là cạnh của hình vuông nội tiếp hình tròn có AB là đường kính của đường tròn này nên $AB^2 = 2AC^2$ và do đó :



Hình 58

$$2PC \cdot DQ = 2AC^2 = AB^2 .$$

hay là $$2PC \cdot DQ = CD^2 \qquad (1)$$

Hơn nữa, dễ dàng thấy rằng

$$\frac{PC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{DQ}{FB} \qquad (2)$$

Đẳng thức (1) trên cơ sở hệ thức (2) được viết :

$$2AE \cdot FB = EF^2 \qquad (3)$$

Bởi vì $AF + EB = AB + EF$

nên sau khi bình phương hai vế ta nhận được :

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + EF^2 + 2AB \cdot EF$$

Từ đó, lưu ý đến (3) ta thu được :

$$AF^2 + EB^2 + 2AF \cdot EB = AB^2 + 2AE \cdot FB + 2AB.EF$$

hay là $$AF^2+EB^2+2AF.EB = AB^2+2(AE.FB+AB.EF) \qquad (4)$$

Ta xét đồng nhất thức :

$$(AE+EF)(EF+FB) = AE.FB+(AE+EF+FB)EF$$

hay là : $AF . EB = AE . FB + AB . EF$ (5)

Từ (4), trên cơ sở (5), cuối cùng ta rút ra :

$$AF^2 + EB^2 = AB^2$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

216. Bài toán được nêu là một trường hợp riêng của định lí lớn Phecma nổi tiếng :

Phương trình $x^n+y^n = z^n \quad n \in Z^+, n > 2$

không có nghiệm nguyên.

Sau khi đọc sách, Phecma làm một việc thông thường là viết nhận xét vào lề sách. Chẳng hạn, sau khi đọc cuốn "Số học" của Điôphăng (Diophante), ngay tại chỗ nói về phương trình vô định $x^2+y^2 = z^2$, bên lề cuốn sách Phecma đã viết : "Không thể khai triển lập phương một số thành tổng của hai lập phương, lũy thừa bậc bốn một số thành tổng của hai lũy thừa bậc bốn, nói chung lũy thừa bậc n bất kì của một số thành tổng của hai số lũy thừa bậc n. Tôi đã tìm ra phép chứng minh diệu kì mệnh đề này, nhưng ở đây giấy quá hẹp để trình bày".

Cho đến nay vẫn còn là một sự đánh đố là Phecma đã chứng minh như thế nào và liệu có thực sự chứng minh được hay không?(*) Vấn đề là ở chỗ mặc dù với tất cả nỗ lực của các nhà toán học, định lí lớn Phecma dạng tổng quát vẫn chưa được chứng minh và cũng chưa có ai phản bác, mặc dù đối với vài trường hợp n cụ thể bài toán đã được chứng minh chặt chẽ. Chẳng hạn với n = 3 và n = 4, định lí đã được viện sĩ Viện hàn lâm Pêtecbua, Ơle (1707 - 1783) chứng minh, đối với n = 5 đã được nhà toán học trường đại học Gettingen là Đirichsơlê (1810 - 1859) chứng minh. Giáo sư trường Đại học tổng hợp Beclin là Cumme (1810 - 1893) nhờ những phương pháp mới đa dạng đã kiểm tra tính đúng đắn đến n = 100. Cuối

(*) Nhà toán học Andrew Wiles (Mĩ) đã công bố chứng minh định lí lớn Phecma (dài khoảng 200 trang), năm 1993, bằng nhiều công cụ toán hiện đại (xem *Câu chuyện hấp dẫn về bài toán Phecma,* NXBGD, 2000).

cùng, ngày nay những nhà toán học Mĩ, sử dụng kết quả của Cumme, nhờ máy tính điện tử đã chứng minh được rằng khẳng định của Phecma là đúng với mọi n từ 3 đến 4002.

Với n = 4, như đã được chỉ ra ở trên, bài toán đã được Ơle giải. Ông ta đã chứng minh rằng phương trình

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (1)$$

không có nghiệm nguyên. Để đạt được mục đích này chỉ cần chứng minh phương trình :

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (2)$$

không có nghiệm nguyên.

Giả sử ta đã chứng minh được rằng phương trình (2) không có nghiệm nguyên. khi đó phương trình (1) cũng không có nghiệm nguyên.

Thực vậy, giả sử x_1, y_1, z_1 là nghiệm nguyên của phương trình (1). Khi đó :

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$$

và khi đó bộ ba số nguyên x_1, y_1, z_1^2 sẽ là nghiệm của phương trình (2). Và nếu nghiệm này không phải là nghiệm nguyên thì cũng không phải là nghiệm của (1).

Như vậy để giải bài toán Phecma (định lí lớn Phecma với n = 4) cần phải chứng minh rằng phương trình (2) không có nghiệm nguyên. Để chứng minh ta dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử rằng phương trình có nghiệm nguyên : x_1, y_1, z_1, hơn nữa những số này sẽ không nhỏ hơn trị tuyệt đối của nó. Ta có : $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$

hay là $(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2$

Từ đó thấy rằng x_1^2, y_1^2, z_1 là những số Pitago, như ta đã biết có thể được biểu thị qua những số dương nguyên tố cùng nhau u và v (u > v)

$$x_1^2 = uv \tag{3}$$

$$y_1^2 = \frac{u^2-v^2}{2} \tag{4}$$

$$z_1 = \frac{u^2+v^2}{2} \tag{5}$$

Vì trong đẳng thức (3) tích của hai số nguyên tố cùng nhau u và v là chính phương, tức là bằng x_1^2 , nên u và v cần phải là những số chính phương (hãy chứng minh điều này !) tức là :

$$u = u_1^2 \tag{6}$$

$$v = v_1^2 \tag{7}$$

hơn nữa u_1 và v_1 phải là những số lẻ nguyên tố cùng nhau và $u_1 > v_1$.

Các đẳng thức (3), (4), (5) trên cơ sở các đẳng thức (6) và (7) có dạng :

$$x_1^2 = u_1^2 v_1^2 \tag{8}$$

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} \tag{9}$$

$$z_1 = \frac{u_1^4 + v_1^4}{2} \tag{10}$$

Ta xét đẳng thức (9). Từ (9) rút ra :

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 - v_1^2)}{2} \tag{11}$$

Vì hiệu và tổng của hai số lẻ luôn là một số chẵn nên

$$u_1 + v_1 = 2u_2 \tag{12}$$

$$u_1 - v_1 = 2v_2 \tag{13}$$

Do vậy mà $$u_1 = u_2 + v_2 \quad (14)$$

$$v_1 = u_2 - v_2 \quad (15)$$

Và ở đây u_2 và v_2 là những số nguyên tố cùng nhau. Điều đó mâu thuẫn với đẳng thức (14) và (15).

Ta nhận thấy rằng vì u_2, v_2 nguyên tố cùng nhau nên tổng bình phương của chúng sẽ là những số nguyên tố cùng nhau với mỗi số đó, tức là $u_2^2 + v_2^2$ không thể có ước chung khác 0 với cả u_2 và cả v_2.

Bây giờ ta lấy công thức (11), biểu thị nó qua u_2 và v_2 theo các công thức (14) và (15) :

$$u_1^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2u_2v_2$$

$$v_1^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2$$

Từ đó $$u_1^2 + v_1^2 = 2(u_2^2 + v_2^2) \quad (16)$$

$$u_1^2 - v_1^2 = 4u_2v_2 \quad (17)$$

Dùng (11); (16), (17) ta có : $y_1^2 = 4u_2v_2(u_2^2 + v_2^2)$

hay $$\frac{y_1^2}{4} = u_2v_2(u_2^2 + v_2^2) \quad (18)$$

Ta nhận thấy rằng trong bộ ba các số Pitago x_1^2, y_1^2, z_1, hai số đầu tiên không thể cùng lẻ. Bởi vậy luôn có thể coi x_1^2 là lẻ, y_1^2 là chẵn và do đó z_1 lẻ. Nhưng mọi số chẵn bất kì là một số chính phương đều chia hết cho 4 do vậy $\frac{y_1^2}{4}$ là một số nguyên.

Trong vế phải của đẳng thức (18) là tích của ba số nguyên tố cùng nhau u_2, v_2 và $u_2^2 + v_2^2$, và tích này lại là một số chính phương (bằng $\left(\frac{y_1}{2}\right)^2$).

Do vậy mỗi số này đều là số chính phương, tức là :

$$u_2 = x_2^2, \quad v_2 = y_2^2, \quad u_2^2 + v_2^2 = z_2^2 .$$

Từ đó ta suy ra $x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$.

Như vậy, nếu coi bộ ba số nguyên x_1, y_1, z_1 là nghiệm của phương trình : $x^4 + y^4 = z^2$ thì nhất định sẽ tìm được một bộ ba số nguyên khác x_2, y_2, z_2 cũng là nghiệm của phương trình này và $z_1 > z_2$.

Bất đẳng thức $z_1 > z_2$ suy ra từ lập luận sau :

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2}$$

nhưng $z_1 = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$

Từ đó $z_1 > z_2^2$, suy ra $z_1 > z_2$.

Lặp lại tất cả những lập luận ở trên đối với bộ ba số x_1, y_1, z_1, ta nhận được một bộ ba số nguyên nữa (x_3, y_3, z_3) cũng sẽ là nghiệm cua phương trình (2) và những bộ ba như vậy có thể nhận được bao nhiêu tùy ý. Tất cả tạo nên một dãy nghiệm :

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3), \ldots ,$$

trong đó những số nguyên dương z_1, z_2, z_3, ... tạo thành dãy vô hạn đơn điệu giảm $z_1 > z_2 > z_3 > \ldots$ điều này dẫn tới mâu thuẫn.

Thực vậy, số sau cùng của dãy không thể lớn hơn z_1, do đó mà dãy không thể vô hạn. Như vậy việc giả sử rằng phương trình (2) có nghiệm nguyên dẫn tới mâu thuẫn.

Do vậy phương trình (2) không thể có nghiệm nguyên và do đó phương trình (1) cũng không thể có nghiệm nguyên. Đó chính là điều phải chứng minh.

NHẬN XÉT : Phương pháp được áp dụng ở đây được gọi là phương pháp lùi vô hạn. Nó dựa trên việc xây dựng một dãy vô hạn các nghiệm bội những số dương đơn điệu giảm :

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

Phương pháp này, đặc biệt hay được sử dụng trong những trường hợp riêng của định lí lớn Phecma, còn trong trường hợp tổng quát đối với phương trình

$$x^n + y^n = z^n$$

(trong đó n là số tự nhiên) thì không áp dụng được.

217. Giả sử OABC là một tam diện đã cho và giả sử OA = a, OB = b, OC = c. Khi đó :

$$S_{\Delta OAB} = \frac{ab}{2} \; ; \; S_{\Delta OAC} = \frac{ac}{2} \; ; \; S_{\Delta OBC} = \frac{bc}{2}$$

Từ đó : $S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC} = \dfrac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}$ (1)

Theo định lí Pitago thì :

$$AC = \sqrt{a^2+c^2} \; ; \; BC = \sqrt{b^2+c^2} \; ; \; AB = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Sau khi áp dụng công thức Hêrông, ta nhận được :

$$S^2_{\Delta ABC} = \frac{AC+BC+AB}{2} \times \frac{AC+BC-AB}{2} \times$$

$$\times \frac{AC-BC+AB}{2} \times \frac{-AC+BC+AB}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(AC^2+2AB.BC+BC^2-AB^2)(AB^2+2AC.BC-AC^2-BC^2)$$

$$= \frac{1}{16}(4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2) = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}$$

Vậy $S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}$ (2)

So sánh các đẳng thức (1) và (2) ta suy ra :

$$S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} ;$$

đó là điều phải chứng minh.

Bài toán đã giải là định lí Pitago mở rộng trong hình học không gian. Giáo sư V.Litman cho rằng tính tương tự này lần đầu tiên đã được Giôhan - Phungabe tìm ra vào năm 1622.

218. *Lời giải đại số* : Ta kí hiệu p là nửa chu vi của hình chữ nhật, còn x là một trong hai cạnh của nó. Khi đó diện tích S sẽ là :

$$S = x(p - x)$$

hay là $\quad x^2 - px + S = 0$

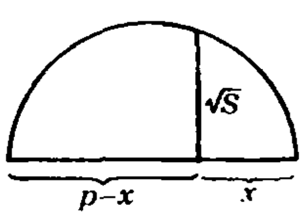
Giải phương trình này ta nhận được :

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}$$

Rõ ràng là x là một số thực chỉ khi $S \leq \dfrac{p^2}{4}$, hơn nữa giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{p^2}{4}$, tức là $S_{max} = \dfrac{p^2}{4}$, khi đó $x = \dfrac{p}{2}$.

Do đó trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. Đó là điều phải chứng minh.

Lời giải hình học :



Hình 59

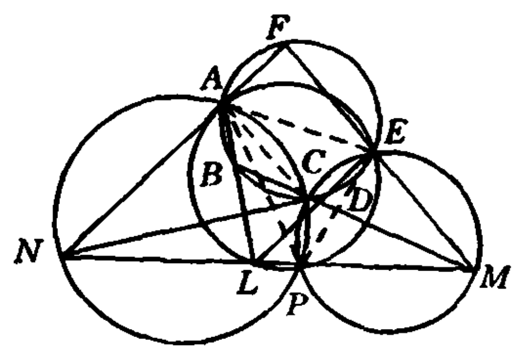
Xét nửa đường tròn đường kính bằng nửa chu vi hình chữ nhật, bằng p. Dựng một đường vuông góc với đường kính (hình 59). Đường kính được chia làm hai phần x và p − x. Khi đó độ dài bằng số của đoạn vuông góc tại điểm chia sẽ bằng $\sqrt{S}$ vì : $(p - x)x = S$

Rõ ràng là S đạt tới cực đại nếu độ dài đoạn vuông góc bằng bán kính, tức là khi $S = \frac{p^2}{4}$, điều này chỉ có thể xảy ra khi và chỉ khi $p - x = x$ hay $x = \frac{p}{2}$, tức là khi đó hình chữ nhật trở thành hình vuông.

Tác giả của bài toán là nhà toán học lỗi lạc người Anh Giôn Valit (1616 - 1703), giáo sư trường Đại học tổng hợp Ôxpho, tác giả của nhiều công trình toán học. Ông nghiên cứu nhiều về những vấn đề nền tảng khoa học của hình học như một khoa học suy luận, rút ra từ những tiên đề trước đó. Đặc biệt ông cũng đã thử chứng minh tiên đề song song (tiên đề Ơclit) dựa trên các tiên đề khác. Ông cũng nổi tiếng bởi "tiên đề Valit" : "Đối với mọi hình đều tồn tại hình đồng dạng với nó với kích thước bất kì".

219. Ta kí hiệu giao điểm của những cạnh đối diện AB và DE, BC và EF, CD và FA tương ứng là L, M, N. Cần phải chứng minh rằng L, M, N thẳng hàng (đường thẳng Pascal). Nối A với C, A với E (hình 60) ta vẽ chúng với đường nét rời.

Vẽ các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACN, ECM và AEL. Kí hiệu P là giao điểm hai đường tròn đầu tiên khác với điểm C. Ta chỉ ra rằng đường tròn thứ ba cũng đi qua điểm P Muốn vậy, chỉ cần chứng minh rằng : $\widehat{APE} = \widehat{ALE}$.



Hình 60

$$\widehat{APE} = \widehat{APC} + \widehat{CPE} =$$

$$= \frac{sđ\overset{\frown}{DEF} - sđ\overset{\frown}{ABC}}{2} + \frac{sđ\overset{\frown}{FAB} - sđ\overset{\frown}{CDE}}{2} =$$

$$= \frac{sđ\overset{\frown}{EF} - sđ\overset{\frown}{CD} + sđ\overset{\frown}{FA} - sđ\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{sđ\overset{\frown}{EFA} - sđ\overset{\frown}{BCD}}{2} = \widehat{ALE}.$$

Bây giờ ta chứng minh các điểm M, N, P cùng nằm trên một đường thẳng, ta sẽ chứng minh $\widehat{CPM} + \widehat{CPN} = 180^o$.

$$\widehat{CPM} = 180^o - \widehat{CEM} = \widehat{CEF} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{FABC}}{2}$$

$$\widehat{CPN} = 180^o - \widehat{CAN} = \widehat{CAF} = \frac{sđ\overset{\frown}{CEF}}{2}$$

$$\widehat{CPM} + \widehat{CPN} = \frac{sđ\overset{\frown}{FABC}}{2} + \frac{sđ\overset{\frown}{CEF}}{2} = \frac{sđ\overset{\frown}{FABCEF}}{2} = 180^o.$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được rằng các điểm L, P và M thẳng hàng. Như vậy các điểm M, P, N cùng nằm trên một đường thẳng, các điểm M, P, L cũng cùng nằm trên một đường thẳng. Do đó ta suy ra M, L, N thẳng hàng. Đó là điều phải chứng minh.

Blez Patxcan (Blaise Pascal) (1623 - 1662) là nhà toán học, vật lí học, triết học người Pháp. Tài năng toán học của ông xuất hiện từ thời niên thiếu. Ông đã tìm ra những định lí hình học phẳng đầu tiên vào tuổi thanh niên. Những hình làm ông suy nghĩ nhiều là hình tam giác, hình bình hành, đường tròn, hình chóp, v.v.

Bài toán Patxcan mà lời giải được trình bày ở trên là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát. Định lí Patxcan có thể được phát biểu như sau :

"Trong mọi lục giác nội tiếp một tiết diện Cônic (đường tròn, elip, hypebol, parabol, cặp đường thẳng...) giao điểm của những cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng". *Pascal đã chứng minh định lí này khi ông 16 tuổi, bắt đầu với đường tròn (bài toán Pascal), và sau đó chứng minh tính đúng đắn với mọi Cônic bất kì nhận được từ đường tròn bằng một phép chiếu. Patxcan đã công bố những phát hiện của mình vào năm 1640 lần đầu tiên trong cuốn "Thử nghiệm lí thuyết tiết diện Cônic", với kích thước của cuốn sách là* $47 \times 39cm$.

Định lí Patxcan là một trong những định lí cơ bản của hình học xạ ảnh hiện đại, môn hình học nghiên cứu những tính chất chung nhất của các hình vẫn còn chưa được biết tới nhờ phép chiếu xuyên tâm những tiết diện. Khi nghiên cứu tiểu sử của Patxcan người ta thấy rằng với định lí này tên tuổi của Patxcan đã nổi lên như một nhà toán học, bác học tiên phong trên toàn cầu.

Patxcan có rất nhiều phát minh quan trọng trong lĩnh vực toán học cũng như trong lĩnh vực khác. Chẳng hạn trong cuốn "Về đặc tính của sự chia hết" thì những dấu hiệu chung của sự chia hết của các số nguyên dựa trên việc tính tổng của từng chữ số đã được đưa ra.

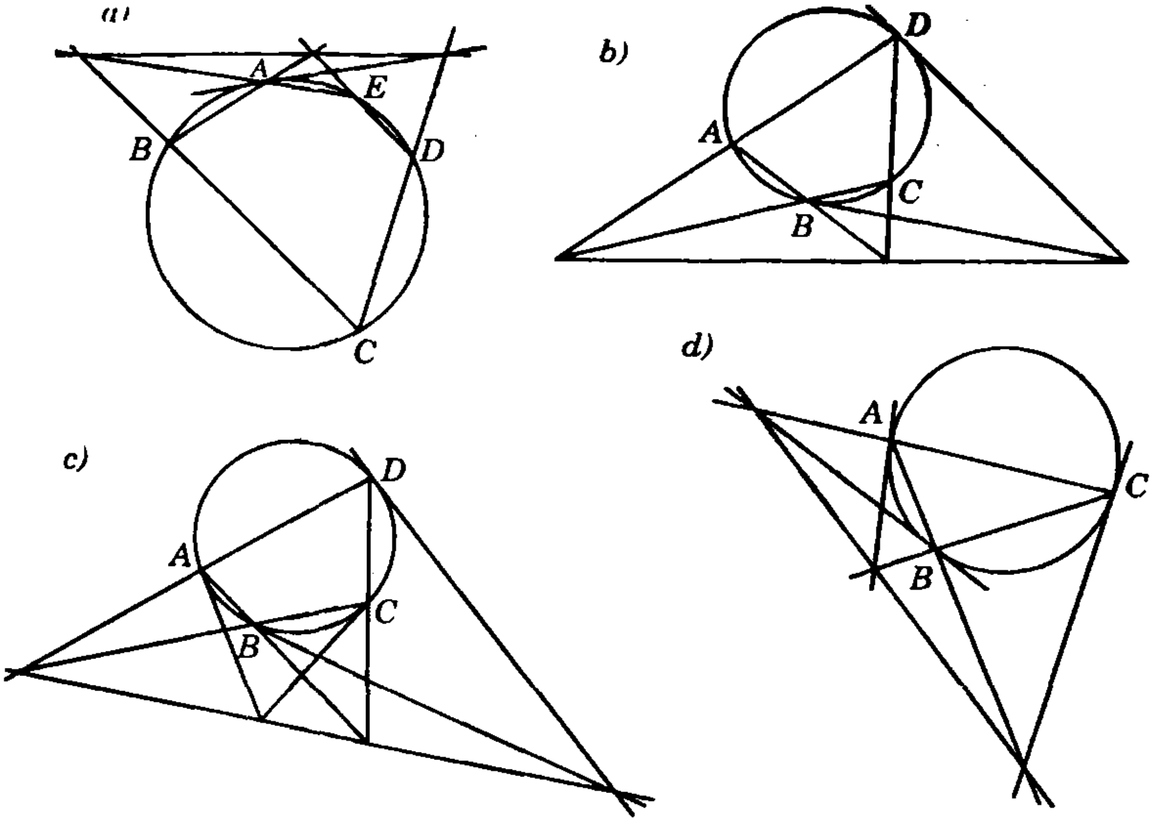
Trong cuốn "Tam giác số học", ông đã đưa ra phương pháp tính hệ số của nhị thức và đã phát biểu hàng loạt những định luật của lí thuyết xác suất, thêm vào đó đã chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, một phương pháp chứng minh lần đầu tiên đã được đưa ra và áp dụng để chứng minh định lí và giải bài tập. Trong những công trình về hình học của mình về tính diện tích và thể tích, Patxcan đã đi đến "ngưỡng cửa" của việc phát minh ra phép tính vi tích phân.

220. Ta xét những trường hợp sau đây của bài toán Patxcan.

1. TRƯỜNG HỢP I. Giả sử hai đỉnh của lục giác nội tiếp trong đường tròn trùng nhau. Khi đó cạnh tạo bởi hai đỉnh này biến thành tiếp tuyến (hình 61a). Trong trường hợp này có khẳng định sau :

Trong một ngũ giác bất kì nội tiếp một đường tròn thì giao điểm của hai cặp cạnh không kề và giao điểm của cạnh thứ năm với tiếp tuyến đỉnh đối diện sẽ nằm trên một đường thẳng.

2. TRƯỜNG HỢP II. Tương tự đối với tứ giác nội tiếp đường tròn, được xem như một lục giác có hai cặp đỉnh trùng nhau. Trong trường hợp này ta có mệnh đề sau đây : *Trong một tứ giác bất kì nội tiếp đường tròn hai cặp cạnh đối diện và một cặp tiếp tuyến của hai đỉnh đối diện giao nhau tại ba điểm thẳng hàng* (hình 61b)).



Hình 61

Khi kẻ tất cả tiếp tuyến tại các đỉnh của tứ giác, dễ dàng chứng minh mệnh đề sau đây :

Trong một tứ giác nội tiếp bất kì, hai cặp cạnh đối diện và hai cặp tiếp tuyến tại những đỉnh đối diện cắt nhau tại bốn điểm thẳng hàng (hình 61c)).

3. TRƯỜNG HỢP III. Cuối cùng, ta xét tam giác nội tiếp trong một đường tròn là một lục giác nội tiếp, trong đó các đỉnh đôi một trùng nhau. Khi đó sẽ có mệnh đề sau đây :

Trong một tam giác bất kì nội tiếp một đường tròn, ba giao điểm giữa các cạnh của nó với tiếp tuyến của đỉnh đối diện cùng nằm trên một đường thẳng (hình 61d)).

221. Bài toán được lấy ra từ cuốn "Đặc tính của sự chia hết" của Patxcan.

Patxcan giải bài toán này nhờ lập luận sau đây : Giả sử khi chia 10 cho một số A, nhận được số dư r_1 , khi chia $10r_1$ cho A, có số dư r_2, khi chia $10r_2$ cho A, có số dư r_3, v.v. Nếu số đã cho, chẳng hạn có bốn chữ số sẽ có dạng MCDU, trong đó M, C, D và U lần lượt là những chữ số hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục và đơn vị thì dấu hiệu tổng quát của sự chia hết của số này cho A như sau :

Nếu $U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3$ chia hết cho A (bội của A) thì A chia hết số MCDU, (A là ước).

Thật vậy, giả sử :

$$10 = Aq_1 + r_1$$
$$10r_1 = Aq_2 + r_2$$
$$10r_2 = Aq_3 + r_3$$

Khi đó

$$U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3 = U+D(10 - Aq_1) + C(10r_1 - Aq_2) +$$
$$+ M(10r_2 - Aq_3) = U + 10D + 10C(10 - Aq_1) +$$
$$+ 10M(10r_1 - Aq_2) - m \,.\, A = U + 10D + 100C +$$
$$+ 100M(10-Aq_1) - m' \,.\, A = U+10D+100C+1000M - m''.A$$

(trong đó m, m', m'' là những số nguyên).

Đây chính là điều phải chứng minh !

222. Bài toán được giải nhờ lập luận sau :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ gồm 26000. Do đó $\frac{1}{12}$ là 2000. Vì vậy phần thứ nhất là 12000 livơrơ; phần thứ hai là 8000 livơrơ và phần thứ ba là 6000 livơrơ.

Bài toán này được lấy ra từ tuyển tập các bài toán của nhà toán học Pháp Giăc Ogianal (1640 - 1717), người đã viết "Giáo trình toán học" gồm bốn tập.

223.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
-\;y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\
y^4 \pm 2ay^3 \mp a^2y^2 \\
\hline
-\;2ay^3 - 4\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y \\
2ay^3 \pm 4a^2y^2 \mp 2a^3y \\
\hline
-\;-\frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\
\pm\frac{1}{2}a^2y^2 \mp a^3y \pm \frac{1}{2}a^4 \\
\hline
0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
y^2 - 2ay + a^2 \\
\hline
y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}
\end{array}
\end{array}
$$

Đáp số : $y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}$.

Bài toán này được lấy ra từ cuốn "*Số học đại cương*" của I.Niutơn (1642 - 1727), một nhà toán học và vật lí học người Anh.

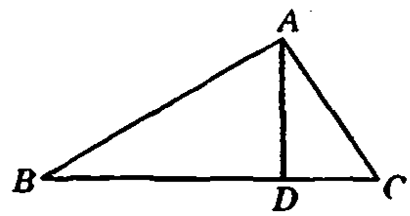
Ixăc Niutơn là con trai của một chủ trại, đã chết trước khi Niutơn ra đời. Ngay từ thời thơ ấu, nhà bác học tương lai đã xuất hiện nhiều khuynh hướng của một người có tính tự lập nghiên cứu và học vấn uyên bác.

Học ở trường Đại học tổng hợp Cambơrit, ông đã làm các thầy giáo ở đó kinh ngạc với khả năng toán học của mình. Sau đó ông trở thành giáo sư trường này. Từ năm 1703 ông đã là Chủ tịch Hội hoàng gia Luân Đôn, một hội gồm nhiều nhà bác học lỗi lạc đương thời.

Ixăc Niutơn là tác giả của cuốn sách nổi tiếng "Khởi đầu toán học của triết học tự nhiên" (1687) trong đó trình bày những định luật của Niutơn trong lĩnh vực cơ học và hàng loạt những phát minh khác. Vào năm 1707, Niutơn đã viết cuốn "Số học đại cương" trình bày phương pháp đại số và các kí hiệu hiện đại được trình bày.

Để tưởng nhớ Niutơn, trên nấm mồ của ông ở Luân Đôn, có dòng chữ : "Nơi đây ngài Ixăc Niutơn, người đầu tiên đã cắt nghĩa sức mạnh của thượng đế nhờ phương pháp toán học (hình học), cắt nghĩa sự chuyển động của các hành tinh và thủy triều. Ông là người đầu tiên nghiên cứu tính đa dạng của tia sáng, từ đó rút ra đặc tính của màu sắc, điều này từ trước đó không ai làm được... Ông sống mãi trong lòng chúng ta..."

224. Niutơn đã giải bài toán này như sau : Đặt BC = a, AD = y (hình 62). Vì góc ABD đã cho nên tỉ số giữa độ dài của AD và BD cũng đã biết (nhờ bảng sin hay tang).



Hình 62

Đặt AD = d và BD = l. Như vậy

$d : l = y : BD$, từ đó $BD = \frac{ly}{d}$.

Cũng đúng như vậy, vì đã cho góc ACD, tỉ số AD : CD bằng

$d : f$, do đó $DC = \frac{fy}{d}$.

Nhưng BD + DC = BC tức là $\frac{ly}{d} + \frac{fy}{d} = a$.

Giải phương trình này với ẩn số là y : $y = \frac{ad}{l + f}$.

Bài toán này được lấy ra từ cuốn sách "Số học đại cương hay cuốn sách về tổng hợp và phân tích số học" của Niutơn.

225. *Lời giải của Niutơn:* "Nếu 12 con bò trong 4 tuần ăn hết $3\frac{1}{3}$ mẫu cỏ thì do tính tỉ lệ, 36 con bò sau 4 tuần, hoặc 16 con bò sau 9 tuần, hoặc 8 con bò sau 18 tuần ăn hết 10 mẫu cỏ, giả sử rằng cỏ không mọc lại. Nhưng vì cỏ luôn mọc lại nên 21 con bò sau 9 tuần ăn chỉ 10 mẫu cỏ, có nghĩa là cỏ mọc lên trên 10 mẫu. Sau 5 tuần cuối cùng, có thể nuôi được trong 9 tuần số thừa ra của 21 con bò trên 16 con bò, tức là 5 con bò, hoặc nuôi $\frac{5}{2}$ con bò trong vòng 18 tuần. Sự lớn lên của cỏ sau 14 tuần (dư ra 18 trên 4 tuần đầu) tương tự có thể nuôi được 7 con bò trong 18 tuần, hoặc 5 tuần : 14 tuần $= \frac{5}{2}$ bò : 7 bò .

Do vậy sau khi thêm 7 con bò mà có thể nuôi nó chỉ bằng cỏ mới mọc vào nhóm 8 con mà cỏ có thể nuôi chúng trong suốt 4 tuần đầu tiên thì tổng số sẽ là 15 con bò. Cuối cùng, nếu 10 mẫu có thể nuôi được 15 con bò trong 18 tuần thì nhờ tính tỉ lệ, 24 mẫu có thể nuôi được 36 con bò trong cùng một thời gian.

Ta sẽ thiết lập một phương trình đại số của bài toán này. Kí hiệu y là ẩn số phụ chỉ phần cỏ mọc trên một mẫu trong một tuần. Khi đó trong đợt đầu cỏ mọc $3\frac{1}{3}y$, và sau 4 tuần là

$3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$. Do đó 12 con bò trong 4 tuần ăn hết bao nhiêu cỏ thì có bấy nhiêu diện tích trong $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ mẫu. Hơn nữa dễ dàng tính được rằng cứ 1 con bò trong 1 tuần sẽ ăn hết bao nhiêu cỏ thì có bấy nhiêu diện tích đồng cỏ.

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144} \text{ (mẫu)}$$

Bây giờ ta đi tìm diện tích có thể chứa cỏ dự trữ để nuôi 21 con bò trong 9 tuần. Nó gồm 10 + 90y mẫu vì sức lớn hằng tuần của cỏ trên 1 mẫu là y, trong 9 tuần sẽ là 9y và 9 tuần trên 10 mẫu là 90y. Như vậy diện tích cỏ đủ để nuôi 1 con bò trong vòng 1 tuần là :

$$\frac{10 + 90y}{9 . 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ (mẫu)}$$

Do số ngày nuôi phải như nhau nên :

$$\frac{10+40y}{144} = \frac{10+90y}{189}$$

Từ đây tìm ra $y = \frac{1}{12}$.

Sau đó diện tích của đồng cỏ cần thiết để nuôi 1 con bò trong 1 tuần là :

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{5}{54} \text{ (mẫu)}$$

Ta kí hiệu x là số bò phải tìm, có thể nuôi trên đồng cỏ thứ ba trong 18 ngày, ta nhận được phương trình :

$$\frac{24 + 24 . 18 . \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54}$$

Giải phương trình này tìm ra $x = 36$.

Do đó 36 chú bò sẽ ăn hết 24 mẫu cỏ trong vòng 18 tuần.

226. *Lời giải của Niutơn :*

"Ta nhận thấy rằng nội dung của bài toán chứa những mệnh đề cần phải được biểu thị bằng những biểu thức.

Lời nói	Biểu thức đại số
Thương gia có 1 số tiền.	x
Năm đầu tiên chi phí mất 100 bảng	$x - 100$
Số dư của ông ta tăng lên $\frac{1}{3}$.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ hay $\frac{4x-400}{3}$
Năm thứ hai ông lại chi phí 100 bảng nữa và lại tăng	$\frac{4x-400}{3} - 100$ hay $\frac{4x-700}{3}$
số dự lên $\frac{1}{3}$.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9}$ hay $\frac{16x-2800}{9}$
Năm thứ ba ông lại chi phí 100 bảng và số dư	$\frac{16x-2800}{9} - 100$ hay $\frac{16x-3700}{9}$
cũng tăng lên $\frac{1}{3}$, hơn nữa số tài sản gấp đôi lúc ban đầu.	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27}$ hay $\frac{64x-14800}{27} = 2x$

Như vậy bài toán được biểu diễn dưới dạng phương trình đại số:

$$\frac{64x-14800}{27} = 2x$$

$$\text{hay } 64x - 14800 = 54x$$

$$10x = 14800$$

$$x = 1480 .$$

Như vậy thương gia lúc đầu có 1480 bảng".

227. Biến đổi số hạng đầu tiên và số hạng thứ hai thành dạng $a + bi$. Với số hạng đầu :

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} = \sqrt{1+i\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Với số hạng thứ hai làm tương tự, ta tìm được :

$$\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

từ đó tổng phải tìm là :

$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$, đó là điều phải chứng minh.

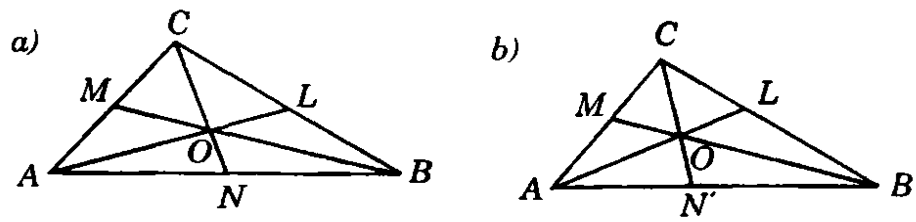
Tác giả của bài toán này là nhà toán học, triết học người Đức Gotphorit Vilơ Lepnit (Gottfried Wilhelm Leibniz) (1646 - 1716). Ông vào đại học ngay tại thành phố ông sinh trưởng và ở đó ông đã học luật. Toán học đã thu hút ông bởi tính lôgic của nó. Ngay từ thời trẻ ông đã làm quen với những công trình khoa học, nghiên cứu những công trình của Aristôt và Đềcac. Ông đã từng là nhà ngoại giao ở Pari. Năm 1673 ông sống ở Anh, tham gia Hội hoàng gia, làm quen với Patxcan, sau khi quay trở về Pari, ông trở thành thành viên của Hội hoàng gia.

Cùng thời với Niutơn và độc lập với ông ta, Lepnit đã tìm ra phép tính vi và tích phân.

Nhà bác học đã đặt ra cơ sở của lí thuyết về định thức, nảy sinh ra trong quá trình giải hệ phương trình tuyến tính nhiều ẩn. Ngoài ra Lepnit có nhiều công trình nghiên cứu tính chất các đường cong, khai triển hàm số thành chuỗi, v.v.

228. 1) *Điều kiện cần :*

Giả sử các đường thẳng AL, BM, CN (hình 63a), giao nhau tại điểm O. Ta chứng minh rằng : $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA} = 1$



Hình 63

Từ hình vẽ, ta nhận được :

$$\frac{AN}{NB} = \frac{S_{\Delta ACN}}{S_{\Delta NCB}} = \frac{S_{\Delta AON}}{S_{\Delta NOB}} = \frac{S_{\Delta ACN}-S_{\Delta AON}}{S_{\Delta NCB}-S_{\Delta NOB}} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}$$

Tương tự ta chứng minh được rằng :

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta COA}} \text{ và } \frac{CM}{MA} = \frac{S_{\Delta COB}}{S_{\Delta AOB}}.$$

Từ đó suy ra (sau khi nhân vế với vế) :

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}.\frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta COA}}.\frac{S_{\Delta COB}}{S_{\Delta AOB}} = 1.$$

2) *Điều kiện đủ* : Giả sử ta có $\frac{AN}{NB}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA} = 1$ (2)

Ta phải chứng minh rằng khi đó các đường thẳng AL, BM, CN đồng quy (hình 63b).

Kí hiệu giao điểm của AL và BM là O, vẽ CO kéo dài cắt AB tại N', theo chứng minh ở điều kiện cần ta có :

$$\frac{AN'}{N'B}.\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA} = 1.$$

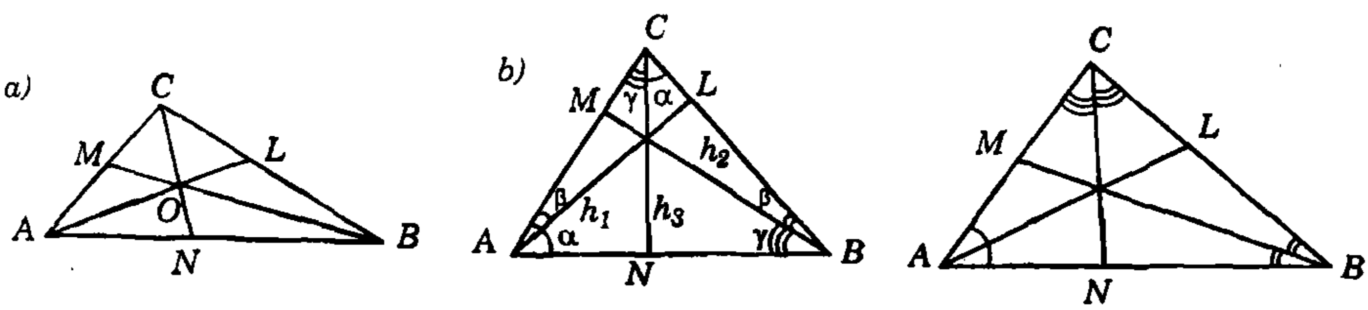
Từ đó so sánh với (2) ta rút ra $\dfrac{AN'}{N'B} = \dfrac{AN}{NB}$,

hay là $\dfrac{AN'+N'B}{N'B} = \dfrac{AN+NB}{NB} \Rightarrow \dfrac{AB}{N'B} = \dfrac{AB}{NB} \Rightarrow N'B = NB$,

hay N' trùng với N.

Đgiôvanni Xêva (1648 - 1734) là nhà hình học Italia, kĩ sư khí động học. Bài toán của Xêva lấy ra trong cuốn sách "Về những đường thẳng" (1678). Xêva đã giải bài toán của mình bằng một vài phương pháp thuần túy hình học, dựa trên luật thống kê, tức là xuất phát từ hình anh cơ học.

229. 1) Xét tam giác ABC tùy ý, vẽ các trung tuyến của nó là AL, BM, CN (hình 64a)).



Hình 64

$\dfrac{AN}{NB} \cdot \dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = 1$ (*) vì đối với các trung tuyến thì :

$$AN = NB \; ; \; BL = LC \; ; \; CM = MA.$$

Và ngược lại, ta cũng có ngay hệ thức (*) , nên các trung tuyến đồng quy.

2) AL, BM, CN là những đường cao của ΔABC (hình 64b)).

Ta kí hiệu các góc tạo bởi các đường cao với các cạnh của tam giác ABC là α , β , γ . Khi đó :

$$\frac{AN}{NB} = \frac{h_3 tg\gamma}{h_3 tg\alpha} = \frac{tg\gamma}{tg\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{h_1 tg\alpha}{h_1 tg\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} \quad (2)$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{h_2 tg\beta}{h_2 tg\gamma} = \frac{tg\beta}{tg\gamma} \quad (3)$$

Nhân vế với vế của (1), (2), (3) suy ra

$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{tg\gamma}{tg\alpha} \cdot \frac{tg\alpha}{tg\beta} \cdot \frac{tg\beta}{tg\gamma} = 1$, hệ thức này nói lên các đường cao của tam giác đồng quy.

3) Giả sử AL, BM, CN là các đường phân giác của các góc A, B, C của tam giác ABC (hình 64c)).

Ta kí hiệu các cạnh tương ứng của tam giác là a, b, c. Khi đó, dựa trên tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{AN}{NB} = \frac{b}{a} \ ; \ \frac{BL}{LC} = \frac{c}{b} \ ; \ \frac{CM}{MA} = \frac{a}{c}$$

từ đó suy ra $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

Do đó các đường phân giác AL, BM, CN đồng quy.

230. Đối với các phần tử của cấp số nhân $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \ldots$ ta có hệ thức :

$u_2 : u_1 = u_{n+1} : u_n$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$

Giả sử rằng cấp số cộng đã cho tăng, khi đó u_1 sẽ là nhỏ nhất, còn u_{n+1} là lớn nhất. Theo bất đẳng thức Oclit đã biết thì:

$$u_{n+1} + u_1 > u_2 + u_n \ ;$$

$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1)$$

với $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$u_3 > u_2 + (u_2 - u_1);$$
$$u_4 > u_3 + (u_2 - u_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{n+1} > u_n + (u_2 - u_1)$$

Sau khi cộng từng vế các bất đẳng thức, ta có :

$$u_{n+1} > u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) \qquad (1)$$

Chú ý tới điều kiện đã cho, ta tìm ra :

$$u_2 + (n-1)(u_2-u_1) = a_2+(n-1)(a_2-a_1) = a_{n+1} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), cuối cùng suy ra : $u_{n+1} > a_{n+1}$

trong đó $n = 2, 3, 4 \dots$; đó là điều phải chứng minh.

Jacôp Becnuli (1654 - 1705) là nhà bác học Thụy Sĩ, giáo sư Đại học tổng hợp Baden. Ông nổi tiếng bởi những công trình về hình học vi phân, phép tính biến phân và vật lí toán.

231. Giả sử rằng con ngựa được mua x đồng, khi bán mất đi $\frac{x^2}{100}$ đồng. Do đó theo điều kiện bài toán thì $x - \frac{x^2}{100} = 24$

Giải phương trình này ta nhận được $x_1 = 40$ và $x_2 = 60$. Như vậy ai đó đã mua con ngựa 40 hoặc 60 pixton.

Bài toán được giải ở trên được nhà toán học Pháp là Eten Bơzu (1730 - 1783) đưa ra. Ông chuyên nghiên cứu về lí thuyết phương trình đại số (1779) cũng như định lí nổi tiếng về tính chia hết của đa thức đại số cho x - a, trong đó a là nghiệm của đa thức (Định lí Bơzu). Bơzu cũng là tác giả của nhiều cuốn sách có ứng dụng rất lớn.

232. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học đầy đủ.

1) Khẳng định đúng với n = 1, thực vậy, khi đó

$$f_1(x) = q_0x + a_1$$
$$f_1(x) = a_0(x - b) + a_0b + a_1$$
$$f_1(x) = a_0(x - b) + f_1(b)$$

từ đẳng thức sau cùng thấy rằng số dư của phép chia $f_1(x)$ cho $(x - b)$ là $f_1(b)$.

2) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$. Ta chứng minh rằng nó đúng với $n = k + 1$, theo giả thiết quy nạp :

$$f_k(x) = (x - b)\varphi(x) + f_k(b)$$

hơn nữa :

$$f_{k+1}(x) = a_0x^{k+1} + a_1x^k + \ldots + a_kx + a_{k+1} =$$

$$= x(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k) + a_{k+1} = xf_k(x) + a_{k+1} =$$

$$= x[(x - b)\varphi(x) + f_k(b)] + a_{k+1}$$

$$= x(x - b)\varphi(x) + xf_k(b) + a_{k+1}$$

Số dư của phép chia $f_{(k+1)}(x)$ cho $(x - b)$ là $xf_k(b) + a_{k+1}$ (đa thức bậc 1).

Nhưng trên cơ sở giả thiết ban đầu là đúng đối với đa thức bậc 1, do vậy mà số dư của phép chia $f_{k+1}(x)$ cho $x - b$ sẽ là :

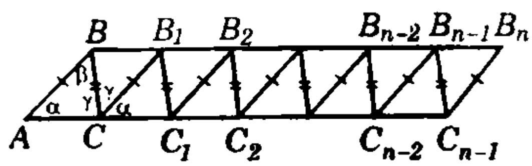
$$bf_k(b) + a_{k+1} = a_0b^{k+1} + a_1b^k + \ldots + a_kb + a_{k+1} = f_{k+1}(b) .$$

Như vậy, khẳng định là đúng với $n = k + 1$, có nghĩa là đúng với mọi n. Đó là điều phải chứng minh.

233. Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tổng các góc trong một tam giác ABC bất kì lớn hơn 2v. Kéo dài cạnh AC (hình 65) và từ điểm C về phía bên phải đặt $n - 1$ đoạn

CC_1 , C_1C_2 , C_2C_3 , ... , $C_{n-2}C_{n-1}$

bằng nhau và bằng AC. Khi đó ta có:



Hình 65

$$CC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_{n-2}C_{n-1} = AC .$$

Bây giờ ta dựng trên những đoạn thẳng vừa rồi những tam giác CB_1C_1 , $C_1B_2C_2$, ... , $C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$, bằng tam giác đã cho, tức là :

$$\Delta ABC = \Delta CB_1C_1 = \Delta C_1B_2C_2 = \ldots = \Delta C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1} .$$

Sau đó nối các điểm B và B_1 , B_1 và B_2 ,..., B_{n-2} và B_{n-1} lại với nhau bằng các đoạn thẳng (coi rằng những điểm này cùng nằm trên một đường thẳng) ta nhận được các tam giác : BCB_1 , $B_1C_1B_2$, $B_2C_2B_3$, ... , $B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$.

Trên đoạn $B_{n-1}C_{n-1}$ cũng dựng thêm một tam giác $B_{n-1}C_{n-1}B_n$ bằng các tam giác đã dựng.

Ta biết rằng nếu hai cạnh của tam giác bằng hai cạnh của tam giác khác thì đối diện với góc lớn hơn nằm giữa hai cặp cạnh này là cạnh lớn hơn. Áp dụng điều này vào các tam giác ABC và BCB_1 .

Suy ra $BB_1 < AC$, do đó $AC - BB_1 > 0$, tức là $AC - BB_1$ là một đoạn thẳng nào đó.

Do độ dài của đường gấp khúc luôn lớn hơn độ dài đoạn thẳng nên :

$$AB + BB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nC_{n-1} >$$
$$> AC + CC_1 + C_1C_2 + \ldots + C_{n-2}C_{n-1} ;$$

Từ đó $AB + n\,.\,BB_1 + B_nC_{n-1} > n\,.\,AC$

Lưu ý rằng $B_nC_{n-1} = AB$, ta nhận được :

$$2AB + n\,.\,BB_1 > n\,.\,AC \text{ hay } n(AC - BB_1) < 2AB . \qquad (*)$$

Với mọi số tự nhiên n.

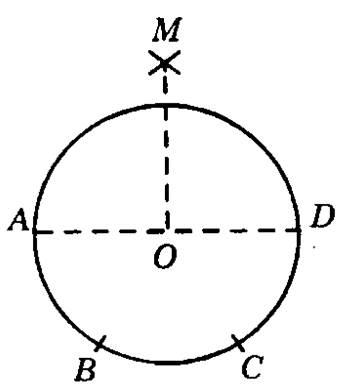
Bất đẳng thức (*) mâu thuẫn với tiên đề Acsimet ở chỗ đối với đoạn thẳng bất kì, có thể dựng lặp lại đoạn thẳng nhỏ hơn một số hữu hạn lần sao cho ta nhận được một đoạn thẳng lớn hơn đoạn thẳng kia. Theo tiên đề này đối với đoạn thẳng $AC-BB_1$ và 2AB có thể chọn được một số tự nhiên n nào đó để cho
$n(AC - BB_1) > 2AB$.

Vậy ta suy ra rằng, trong hệ thống hình học dựa trên tiên đề Acsimet thì tổng các góc trong của một tam giác sẽ không thể lớn hơn 2v, đó chính là điều phải chứng minh.

Anđơrây Mari Lơgiangđrơ (Adrien Marie Legendre) (1752 - 1833) là một nhà toán học Pháp, nổi tiếng bởi những công trình về giải tích toán học và phép tính biến phân, là người đầu tiên trong số các nhà bác học tìm ra (1805) và áp dụng phương pháp tính bình phương tối thiểu, tác giả của cuốn "Bước đầu của hình học" phổ biến rộng rãi ở Pháp và nước ngoài. Đặc biệt cuốn "Bước đầu của hình học" đã được biết đến ở Nga, chẳng hạn N.I. Lôbasepxki (1792 - 1856) đã nghiên cứu cuốn sách đó.

Bài toán được lấy ra từ bài toán của Lơgiăngđrơ "Tư duy về những đường thẳng song song" (năm 1833).

234. Bài toán này đã được Napôlêông vẽ. Để giải nó cần quay compa từ một điểm A tùy ý trên đường tròn đã cho liên tiếp để có các điểm B, C, D, khẩu độ compa bằng r là bán kính đường tròn đã cho (hình 66). Vì AC là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn nên $AC = r\sqrt{3}$. Từ những điểm A và D là hai đầu mút của đường kính AD vẽ những đường tròn với bán kính bằng AC, chúng giao nhau tại M. Đoạn OM bằng khẩu độ của compa phải tìm, nó chia đường tròn ra làm bốn phần bằng nhau.



Hình 66

Thực vậy, $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$ là cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn và chia đường tròn thành bốn phần bằng nhau.

235. Phép chứng minh như sau :

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2$$

$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$

Trong đó $a^2 + 2 + 2a \neq 1$ và $a^2 + 2 - 2a = (a-1)^2 + 1 \neq 1$.

Như thế $a^4 + 4$ có hai ước số khác nhau, khác với chính nó và khác đơn vị. Đó là điều phải chứng minh.

Bài toán này là của Sôphi Giecmen (Sophie Germain) (1776 - 1831) nhà toán học nữ người Pháp, viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pari.

236. Giả sử $a < p$ và $b < p$, trong đó p là một số nguyên tố. Ta sẽ chứng minh rằng ab không chia hết cho p.

Giả sử ngược lại, ab chia hết cho p. Khi đó tồn tại một số dương nhỏ nhất $b_1 \leq b$, nhỏ hơn p, khi nhân với a cho một số là bội của p. Sau khi chia b_1 cho p ta nhận được : $b_1 = pm + n$ ở đây $n < b_1 < p$.

Từ đó : $n = b_1 - pm$

Nhân hai vế với a, ta tìm được : $an = ab_1 - apm$;

an chia hết cho p vì ab_1 chia hết cho p (theo điều giả sử) và apm cũng chia hết cho p.

Vậy an chia hết cho p, nhưng $n < b_1$, do đó b_1 không phải là số dương nhỏ nhất để cho ab_1 chia hết cho p, điều đó mâu thuẫn với mệnh đề đưa ra. Có nghĩa là ab không chia hết cho p. Đó chính là điều phải chứng minh.

Cac Phridric Gauxơ (Karl Friedrich Gauss) (1777 - 1855) là một nhà bác học Đức, đương thời được gọi là "Ông vua của toán học". Khả năng toán học của ông xuất hiện từ thời thơ ấu. Khi nhớ về những năm còn thơ, Gauxơ đã tự nói về mình "tôi học tính sớm hơn học nói".

Gauxơ sinh ra ở Braunsvaisơ trong một gia đình người thợ sửa ống nước. Ông đã trải qua bậc giáo dục tiểu học ở nhà trường lúc 7 tuổi, khi đó ông đã làm cho thầy giáo và bạn bè phải khâm phục vì khả năng toán học kì diệu của mình.

Ông đã học ở trường Đại học tổng hợp Gơttinghen. Sau này (năm 1807) ông đã trải qua gần 50 năm nghiên cứu trong trường này, ở khoa toán và thiên văn. Ngay khi còn là sinh viên, ở tuổi 19, Gauxơ đã có những phát minh đáng kể, ông đã làm sáng tỏ bài toán dựng đa giác đều n cạnh bằng thước và compa. Đặc biệt sau khi giải phương trình $x^{17} - 1 = 0$, ông đã dựng được đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa.

Nhờ việc tính toán mà Gauxơ đã định vị một cách chính xác hành tinh Serera mà sau này các nhà thiên văn đã tìm ra.

Nghiên cứu những vấn đề của toán học Gauxơ là người đi tiên phong trong lí thuyết chuỗi và lí thuyết phương trình vi phân, những định lí cơ bản của đại số cao cấp, đề cập đến phương trình đại số bậc n. Trong cuốn "Những nghiên cứu số học" ông đã trình bày những cơ sở của lí thuyết số hiện đại, ông có những công trình cơ bản về lí thuyết vi phân.

Trong lĩnh vực vật lí ông nghiên cứu về lí thuyết trường điện từ và một vài vấn đề về quang học.

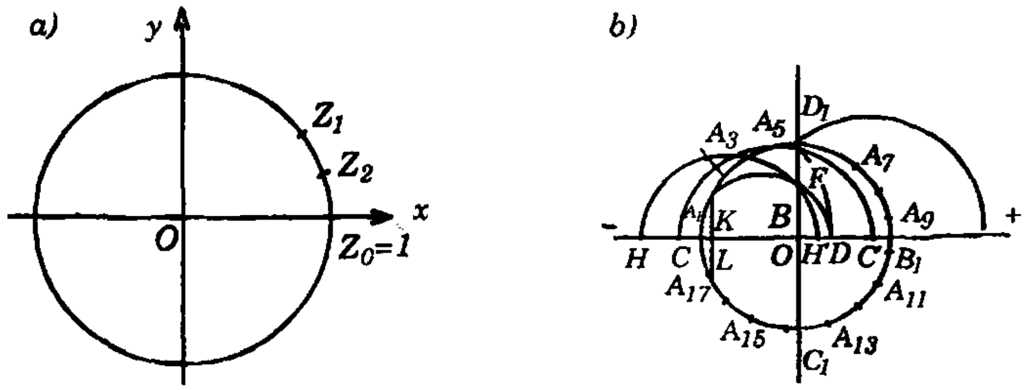
Vào năm 1818, trao đổi thư từ với vài nhà bác học, Gauxơ đã đưa ra ý nghĩ về khả năng tồn tại của hình học phi Ơclit song song với hình học Ơclit (sau này được gọi là hình học Lôbasepxki).

Tuy nhiên vì thời gian trôi qua đã quá lâu, những bài viết của Gauxơ đáng tiếc là không tìm thấy và không có một bài báo nào được công bố.

237. Giải bài toán đã cho dẫn tới việc chia đường tròn cố bán kính bằng đơn vị thành 17 phần đều nhau. Để làm được điều này cần phải dựng các điểm

$$zk = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad \text{(hình 67a))}$$

trong đó $i^2 = -1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$, z_k là nghiệm của phương trình : $z^n - 1 = 0$



Hình 67

Giả sử : $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{17} + i\sin\dfrac{2\pi}{17}$

Khi đó theo công thức Môivre thì : $\varepsilon^k = \cos\dfrac{2k\pi}{17} + i\sin\dfrac{2k\pi}{17}$, $k = 1, 2, ..., 16$. Vậy nghiệm của phương trình : $z^{17} - 1 = 0$ sẽ là số : $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{16}$. Tất cả những nghiệm này, dễ thấy trong cách biểu diễn, là những đỉnh khác nhau của một đa giác đều 17 cạnh, nội tiếp đường tròn đơn vị.

Hơn nữa, ta nhận thấy rằng

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{17} . \varepsilon^{-k} = 1 . \varepsilon^{-k} = \varepsilon^{-k}$$

Do vậy căn bậc 17 của đơn vị có thể sẽ là :

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \varepsilon^{-7}, \varepsilon^{-6}, ..., \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}.$$

Ta biết rằng $z^{17} - 1 = (z-1)(z^{16} + z^{15} + ... + z + 1)$ do đó mọi căn bậc 17 của 1, trừ 1 ra, cần phải thỏa :

$$z^{16} + z^{15} + ... + z^2 + z + 1 = 0$$

tức là : $\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + ... + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

hay : $\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + ... + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1$

suy ra : $\varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + ... + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = -1$

Sử dụng tính giao hoán, kết hợp của phép cộng số phức ta có:

$$(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}) +$$

$$+ (\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7}) = -1$$

trong đó phần tử trong dấu móc nhận được nhờ khai căn bậc hai phần tử đứng trước. Ta kí hiệu mỗi dấu móc tương ứng là η và η_1, khi đó : $\eta + \eta_1 = -1$

Dễ thấy $\eta\eta_1 = -4$

Do vậy η và η_1 là nghiệm của phương trình bậc hai :

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Hơn nữa : $\eta > 0$, $\eta_1 < 0$.

Bây giờ ta chia tất cả các căn bậc 17 của đơn vị ra làm bốn nhóm : z, z_1, z_2, z_3 :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} &= z \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} &= z_1 \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 &= z_2 \\ \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} &= z_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

Từ đây dễ dàng thấy : $z + z_1 = \eta$

$$zz_1 = -1$$

Như vậy z và z_1 là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - \eta x - 1 = 0 \qquad (2)$$

do đó $$z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}$$

$$z_1 = \frac{\eta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}$$

Hơn nữa : $z > 0$, $z_1 < 0$.

Cũng từ hệ (*) ta nhận được

$$z_2 + z_3 = \eta_1 ;$$
$$z_2 z_3 = -1$$

z_2 và z_3 là nghiệm của phương trình : $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$ (3)

do đó $$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$z_3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

với $z_2 > 0$ và $z_3 < 0$

Sau khi đặt $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$;
$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1$$

Ta nhận được $y + y_1 = z$;
$$yy_1 = z_2$$

trong đó z là nghiệm dương của phương trình (2), còn z_2 là nghiệm dương của phương trình (3);

Rút ra y và y_1 là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - zx + z_2 = 0 \qquad (4)$$

từ đó $y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}$; $y_1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}$

Hơn nữa $y > y_1$ vì $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$

$$\text{và } y = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

Bây giờ ta tìm ε từ phương trình : $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$

$$\text{hay } \varepsilon^2 - y\varepsilon + 1 = 0$$

Suy ra $\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}$, vì $y = 2\cos\frac{2\pi}{17}$,

nên $\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1} = \frac{y}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$

$$= \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17} = \varepsilon$$

Công thức : $\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}$ chứng tỏ rằng căn bậc 17 của đơn vị có thể biểu thị qua căn bậc hai và do đó có thể dựng được nó bằng thước và compa. Do vậy bài toán dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa được giải một cách xác định. Bây giờ ta sẽ chỉ ra việc dựng được tiến hành như thế nào. Ta dựng các đoạn thẳng sau đây :

1) $\eta = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$

2) $\eta_1 = -\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$

3) $z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}$

4) $z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}$.

5) $y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}$

Sau khi dựng đoạn thẳng y, dễ dàng chia đường tròn thành 17 phần. Thực vậy, như đã chỉ ra ở trên $y = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, do đó $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}$ là khoảng cách từ điểm chính giữa của cung đến một trong hai đỉnh của đa giác đều 17 cạnh, thực hiện việc dựng bằng cách sau đây (hình 67b)) :

1) Dựng đường tròn bán kính đơn vị và kẻ đường nằm ngang A_1B_1 và đường thẳng đứng là đường kính D_1C_1.

2) Trên trục chứa đường kính A_1B_1, quy định hướng dương là hướng về phía bên phải, tức là từ A_1 đến B_1 có hướng ngược với hướng từ B_1 đến A_1 (về phía bên trái, được coi là hướng âm), và như vậy về phía bên phải, từ điểm O ta sẽ đặt những đoạn thẳng có hướng dương, còn về bên trái những đoạn thẳng có hướng âm.

3) Dựng đoạn $OB = -\frac{1}{4}$.

4) Khi đó : $BD_1 = \sqrt{OB^2 + OD_1^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$

5) Lấy điểm B làm tâm của đường tròn vẽ đường tròn bán kính BD_1 và giao điểm của nó với đường nằm ngang là C và C', vậy thì $BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $BC = -\frac{\sqrt{17}}{4}$

6) Từ những điểm C' và C vẽ những đường tròn bán kính $C'D_1$ và CD_1 tương ứng, cắt trục nằm ngang tại những điểm D' và D ;

7) Như vậy từ hình vẽ (hình 67b)) ta nhận được :

$$OC = OB + BC = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\eta_1}{2};$$

$$OC' = OB + BC' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\eta}{2};$$

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z;$$

$$OD = OC + CD = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1} = z_2;$$

8) Dựng nửa đường tròn đường kính A_1D, cắt cung OD_1 tại F;

9) Lấy F làm tâm vẽ đường tròn bán kính $FK = \frac{1}{2}OD'$

10) Lấy K làm tâm vẽ đường tròn tâm K, bán kính KF chia trục nằm ngang bởi hai điểm H và H'.

11) Khi đó

$$-OH + OH' = HH' = 2KH' = OD' = z$$

$$-OH \,.\, OH' = OF^2 = -OA_1 \,.\, OD = OD = z_2 \,.$$

bởi vì $-OA_1 = 1$. Do đó đoạn thẳng $-OH$ và OH' sẽ là nghiệm của phương trình : $x^2 - zx + z_2 = 0$

Nhưng phương trình này trùng với phương trình (4) mà nghiệm của nó là y_1 và y. Do đó $y = -OH$ và $y_1 = OH'$, $(y > y_1)$

12) Ta lấy nghiệm lớn hơn y và dựng đoạn :

$$OL = \frac{y}{2} = \frac{-OH}{2};$$

13) Dựng tại L một đường vuông góc với trục ngang, cắt đường tròn tại những điểm A_2 và A_{17} , thêm vào đó $A_1A_2 = \frac{2\pi}{17}$, còn dây cung của nó là cạnh của đa giác đều 17 cạnh phải tìm.

14) Để hoàn thành việc dựng đa giác đều 17 cạnh, dựng các cung bằng cung A_1A_2 liên tiếp trên đường tròn và nối những điểm nhận được bởi các dây cung.

Bài toán dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa như đã chỉ ra ở trên đã được Gauxơ giải khi ông 19 tuổi. Những lập luận tổng quát về khả năng dựng đa giác đều n cạnh lúc đó cũng được đưa ra và dẫn tới việc chứng minh định lí nổi tiếng sau đây : "Việc dựng một đa giác đều n cạnh bằng thước và compa chỉ có thể thực hiện được khi và chỉ khi n được biểu diễn dưới dạng :

$$2^m p_1 p_2 \dots p_s ,$$

trong đó p_1 , p_2 , ... , p_s là những số nguyên tố khác nhau có dạng $2^{2^k} + 1$.

Nói riêng, khi n là một số nguyên tố thì cần và đủ để dựng được đa giác đều n cạnh là n có dạng $2^{2^k} + 1$.

Tính đến điều kiện sau cùng, ta thấy rằng :

$$17 = 2^{2^k} + 1 \text{ với } k = 2$$

do đó đa giác đều 17 cạnh dựng được bằng thước kẻ và compa. Để chính xác hơn, khả năng dựng những đa giác đều n cạnh sau đây đã được kiểm tra :

Tam giác đều : $3 = 2^{2^k} + 1$ (với $k = 0$)

Ngũ giác đều : $5 = 2^{2^k} + 1$ (với $k = 1$) v.v.

Theo định lí Gauxơ chẳng hạn, không thể dựng được một đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa vì 7 không thể biểu diễn dưới dạng $2^{2^k} + 1$ được.

238. Bài toán có hai nghiệm :

Nghiệm thứ nhất

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Nghiệm thứ hai

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

Bài toán đã cho được một nhà toán học trẻ tuổi người Pháp nghiên cứu, đó là Simeon Deni Poatxông (Simeon Denis Poisson) (1781 - 1840). Bài toán này theo lời Poatxông đã quyết định số phận của ông : ông quyết định rằng sẽ trở thành nhà toán học.

Thời gian đã chứng tỏ rằng nhà bác học giữ đúng lời hứa của mình. Ông đã là thành viên của Viện khoa học châu Âu, đặc biệt là viện sĩ thông tấn của Viện Hàn lâm khoa học Petecbua.

239. Cần phải chứng minh rằng trung bình cộng của n số dương không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng. Mệnh đề này có thể được chứng minh theo nhiều cách khác nhau. Sau đây là phép chứng minh của Côsi.

Ta cần phải chứng minh :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}\ .$$

Thật vậy $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2})$

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu bất đẳng thức đúng với $n = m$ thì nó cũng đúng với $n = 2m$. Thật vậy :

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m} = \frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\dfrac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}{m} \geq$$

$$\geq \sqrt[m]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\ldots\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}} \geq \sqrt[m]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\ldots\sqrt{x_{2m-1}x_{2m}}} =$$

$$= \sqrt[2m]{x_1x_2x_3\cdot\ x_{2m-1}x_{2m}}\ .$$

Như vậy nếu bất đẳng thức đúng với $n = 2$ thì nó cũng đúng với $n = 4, 8, 16, \ldots$, tức là đúng với mọi số tự nhiên là lũy thừa của 2. Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n. Nếu n không phải là một lũy thừa của 2 thì ta có thể thêm vào số tự nhiên q để sao cho $n + q = 2^m$, ta có bất đẳng thức đúng sau đây :

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{x_1x_2x_3\ldots x_nx_{n-1}\ldots x_{n+q}}$$

Nếu ta chọn $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+q} = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ thì bất đẳng thức trở thành :

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.q}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q}$$

Từ đó rút ra :

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q}$$

hay là :

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{n+q} \geq x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \geq x_1x_2x_3\ldots x_n$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Dấu bằng chỉ xảy ra trong trường hợp tất cả các x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ bằng nhau, tức là $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Thực vậy, nếu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, thay vào vế trái, ta sẽ có dấu bằng. Bây giờ giả sử $x_1 \neq x_2$ còn các x_i khác là những số dương tùy ý, khi đó :

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\ldots+x_n}{n} \geq$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n}\text{, nhưng } \frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2}$$

Từ đó suy ra $\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3\ldots x_n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$

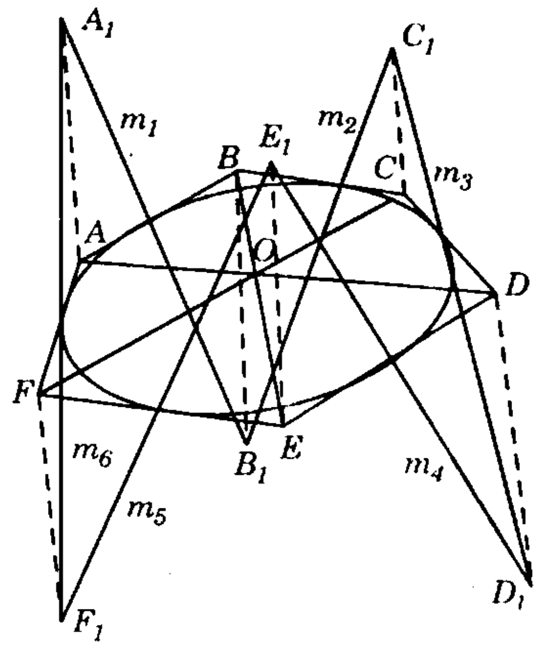
và do vậy : $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$.

Ôguyxttanh Lui Côsi (Augustin Laui Cauchy) (1789 - 1857) là một nhà toán học Pháp, có nhiều công trình chủ yếu trong giải tích toán học (phương trình vi phân, lí thuyết chuỗi) và lí thuyết hàm số biến số phức. Ông là thành viên của Viện Hàn Lâm khoa học Pari.

240. Bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau. Xin đưa ra một trong những cách giải dựa trên hình học không gian.

Ta xét một lục giác trong không gian $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng là lục giác ABCDEF đã cho (hình 68).

Để đạt được điều này ta quay từng đường thẳng m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 cùng nằm về một phía với mặt phẳng (ABCDEF) một góc 45^o quanh bán kính tại tiếp điểm, thêm vào đó, những đường thẳng được đánh số lẻ (m_1, m_3, m_5) về cùng một phía, còn những đường thẳng được đánh số chẵn (m_2, m_4, m_6) về phía khác. Ta nhận thấy rằng những đường thẳng được đánh số lẻ sẽ giao nhau và cùng nằm trong cùng một mặt phẳng với mỗi đường thẳng đánh số chẵn vì những đường thẳng này đối xứng với nhau qua mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chiếu chứa lục giác ABCDEF đi qua phân giác của góc tạo bởi các hình chiếu.



Hình 68

Giao điểm của m_1 và m_2, m_2 và m_3, m_3 và m_4, m_4 và m_5, m_5 và m_6, m_6 và m_1 tương ứng là B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. A_1. Bằng cách như vậy ta nhận được lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng chiếu là lục giác ABCDEF.

Bây giờ ta nối những đỉnh đối diện của lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ bởi những đường thẳng A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1. Những đường thẳng này từng đôi một giao nhau vì nằm trong cùng một mặt phẳng.

Ta xét, chẳng hạn, đường thẳng A_1D_1 và B_1E_1, chúng giao nhau bởi vì chúng không song song và lại nằm trong cùng một mặt phẳng – mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng giao nhau $m_1 = A_1B_1$. $m_4 = E_1D_1$.

Những đường thẳng A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 không cùng nằm trong một mặt phẳng, do đó nếu từng đôi một giao nhau thì phải đồng quy tại một điểm O_1 (trên hình vẽ không chỉ ra). Hình chiếu của O_1 trên mặt phẳng chiếu chính là điểm O, là giao điểm của các đường thẳng AD, BE, CF. Đó chính là điều phải chứng minh.

S.J. Briăngxông (1785 - 1864) là một nhà toán học Pháp. Ông đã chứng minh bài toán về lục giác ngoại tiếp nhờ lí thuyết cực được đưa ra bởi nhà hình học Pháp Pônxen.

Nhờ phép chiếu xuyên tâm, Briăngxông đã mở rộng bài toán của mình trên tất cả các tiết diện Cônic bằng cách tương tự như định lí Patxcan chẳng hạn, là một định lí đóng vai trò rất quan trọng trong hình học xạ ảnh và những ứng dụng của nó nữa. Định lí Briăngxông được phát biểu là : "Trong mọi lục giác ngoại tiếp một tiết diện Cônic (đường tròn, elip, parabol, hypebol, cặp đường thẳng) thì những đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng quy tại một điểm (gọi là điểm Briăngxông).

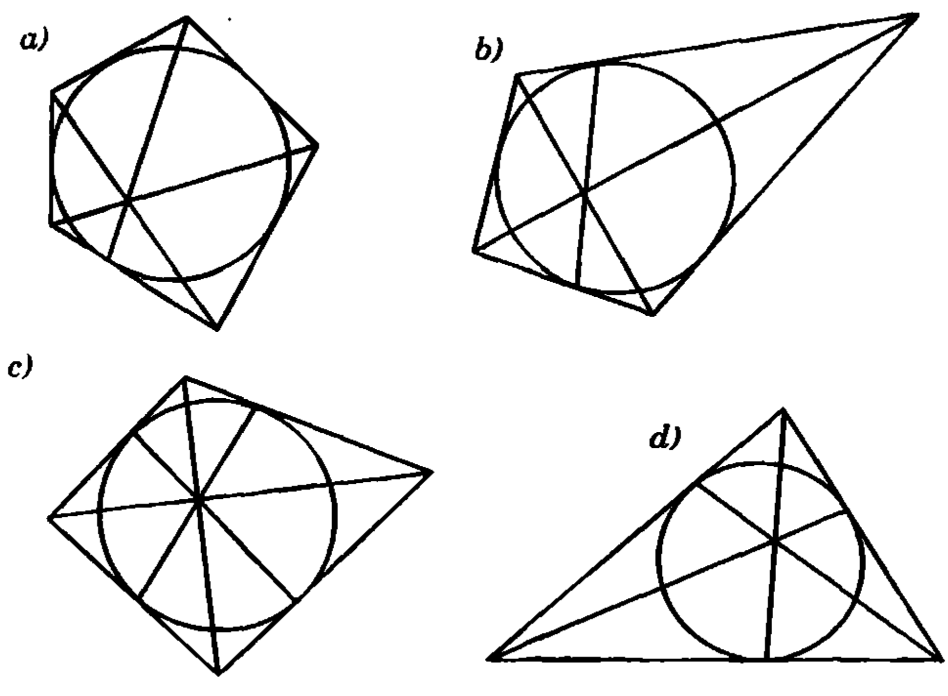
Một điều thú vị là định lí Patxcan và Briăngxông trong hình học xạ ảnh có một sự tương đồng là dựa trên nguyên lí hai mặt của chùm đường thẳng bởi việc thay thuật ngữ "điểm" bởi "đường" và ngược lại (tính đối ngẫu). Tuy nhiên đứng về mặt lịch sử thì định lí Briăngxông ra đời chậm hơn định lí Patxcan 150 năm.

241. Xét một lục giác ngoại tiếp đường tròn. Trong lục giác này theo bài toán đã được xét của Briăngxông, những đường thẳng nối những đỉnh đối diện đồng quy (điểm Briăngxông). Nếu bây giờ những tiếp điểm của hai cạnh kề tiến gần nhau theo đường tròn thì lục giác sẽ biến thành ngũ giác (có một cạnh trùng nhau) và theo bài toán Briăngxông ta rút ra khẳng định sau : -Trong một ngũ giác ngoại tiếp đường tròn thì những đường thẳng nối hai cặp đỉnh không liên tiếp và đường thẳng nối đỉnh thứ năm với tiếp điểm của cạnh đối diện đồng quy (hình 69a)).

Bây giờ ta xét một tứ giác ngoại tiếp đường tròn xem như một lục giác có hai cạnh trùng nhau. Khi đó sẽ có khẳng định sau : Trong một tứ giác bất kì ngoại tiếp một đường tròn thì hai đường chéo và đường thẳng nối hai tiếp điểm hai cạnh đối diện đồng quy (hình 69b)).

Không khó khăn gì ta rút ra kết luận sau : Trong mọi tứ giác ngoại tiếp đường tròn hai đường chéo của nó và hai đường thẳng nối tiếp điểm của hai cặp cạnh đối diện đồng quy (hình 69c)).

Nếu xét tam giác ngoại tiếp đường tròn, xem như một lục giác có ba cạnh trùng nhau, các đỉnh là ba đỉnh của tam giác và ba tiếp điểm thì rút ra kết luận sau : Trong mọi tam giác ngoại tiếp một đường tròn thì những đường thẳng nối đỉnh của tam giác với tiếp điểm của cạnh đối diện đồng quy (hình 69d)).

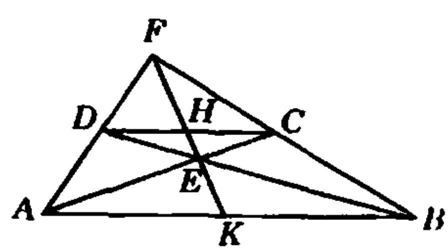


Hình 69

242. Trên cơ sở định lí Xêva (hình 70), chúng ta có :

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác $\dfrac{FD}{DA} = \dfrac{FC}{CB}$ (2)



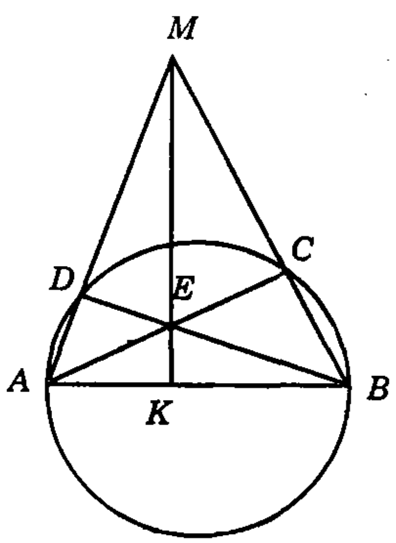
Hình 70

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} = 1$, hay là AK = KB, đó chính là điều phải chứng minh.

Có thể giải bài toán này không cần dùng đến định lí Xêva (chẳng hạn xem cuốn "Hình học của thước kẻ và compa" (Maxcơva 1957 - trang 34)).

Jacôp Stainơ (1796 - 1863) là một nhà toán học Thụy Sĩ, một trong những nhà sáng lập hình học xạ ảnh, thành viên của Viện Hàn lâm khoa học Beclin từ năm 1835, giáo sư trường Đại học tổng hợp Beclin, quan tâm nhiều đến bài toán dựng hình bằng thước kẻ và nhờ vào một đường tròn cố định.

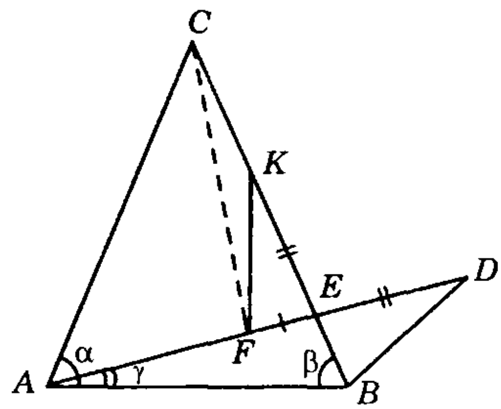
243. Nối hai đầu của đường kính AB với điểm M. Kí hiệu giao điểm của các đường thẳng AM và BM với đường tròn là D và C. Giả sử E là giao điểm của AC và BD. Khi đó đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại K và đó chính là đường vuông góc với AB phải dựng. (Tại sao vậy ? mời bạn tự phân tích lấy) (hình 71).



Hình 71

244. Ta xét tam giác cân ABC và một tam giác không cân ABD tùy ý (hình 72) có đáy chung AB và có tổng của hai cạnh bên bằng nhau, tức là AD + DB = AC + CB.

Tam giác ABE là phần chung của hai tam giác ABC và ABD. Để giải bài toán này, ta cần chứng tỏ rằng tam giác DBE là một bộ phận của tam giác ACE. Trên đường thẳng AE và EC tương ứng lấy các điểm F và K sao cho EF = EB và EK = ED. Rõ ràng rằng tam giác FKE bằng tam giác BDE. Bây giờ ta cần phải chứng minh rằng F nằm giữa A và E, còn điểm K nằm giữa C và E. Ta hãy xét ΔAEB. Trong tam giác này $\gamma < \beta$, vì $\gamma < \alpha$ còn $\alpha = \beta$ (theo giả thiết ΔABC cân). Từ đó $AE > BE$ và $AE > FE$ vì $BE = FE$. Do đó điểm F nằm giữa A và E.



Hình 72

Bây giờ giả sử rằng điểm K nằm giữa C và E. Khi đó

$$AF + FK + KE + EF <$$
$$< AF + FC + CE + EF ;$$

$$EF = EB , KE = ED ,$$
$$FK = BD ,$$

$$AF + DB + ED + EF < AF + FC + CE + EB$$

$$AF + FE + ED + DB < AE + FC + CB$$

$$AD + DB < AF + FC + CB$$

Nhưng do $AD + DB = AC + CB$

nên $AC + CB < AF + FC + CB$

hay là $AC < AF + FC$ (*)

Bất đẳng thức (*) luôn đúng.

Ta có điều phải chứng minh.

245. *Lời giải của Xtuôcm (Sturm) :*

Giả sử x là số ngày phải tìm, quãng đường người thứ nhất đi được là tổng của một cấp số cộng, những số hạng của nó là 10 và $10 + \frac{x-1}{4}$, tức là quãng đường này bằng $\left(20 + \frac{x-1}{4}\right) \times \frac{x}{2}$ hay

$\frac{(79 + x)x}{8}$. Người thứ hai, xuất phát sau ba ngày để gặp người đầu tiên sau $x - 3$ ngày và do đó :

$$\left[14 + \frac{(x-4)2}{3}\right] \frac{x-3}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{(17+x)(x-3)}{3} \text{ (dặm)}$$

Theo điều kiện đầu bài suy ra :

$$\frac{(79+x)x}{8} - \frac{(17+x)(x-3)}{3} - 40 = 0 \quad (1)$$

hay $$5x^2 - 125x + 552 = 0 \quad (2)$$

$$x_1 = 5{,}72 \ldots ; \; x_2 = 19{,}27 \ldots$$

Nhưng vì x là số nguyên nên nghiệm trên không thỏa. Nhưng có thể chứng tỏ rằng phần nguyên của nghiệm (5 và 19) thỏa điều kiện đầu bài.

Nếu a là quãng đường của người thứ nhất, còn b là quãng đường của người thứ hai, hơn 40 dặm. Giả sử người thứ nhất trên đường x ngày, còn người thứ hai là x − 3 ngày, ta rút ra :

$$5x^2 - 125x + 552 = 24(b - a) \quad (3)$$

Điều này là hiển nhiên.

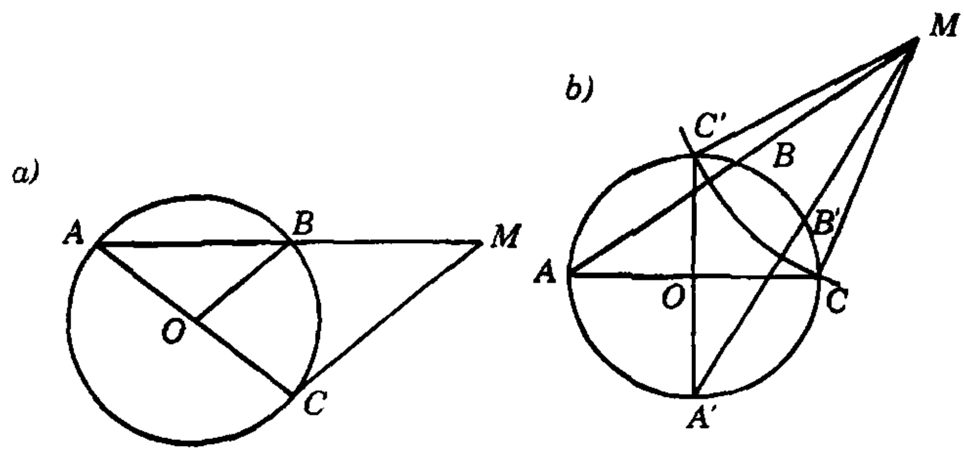
Bây giờ ta lần lượt thế 5 và 6 vào phương trình (2), khi đó kết quả nhận được ở vế trái lớn hơn 0 và nhỏ hơn 0 với giá trị thứ hai, nhưng nhờ (3), hiệu b − a luôn cùng dấu với tam thức $5x^2 - 125x + 552$, do vậy cuối ngày thứ năm thì a < b còn đến cuối ngày thứ 6 thì a > b. Như thế cuộc gặp đầu tiên sẽ ở giữa ngày thứ năm và ngày thứ sáu. Tương tự có thể chứng minh rằng lần gặp thứ hai sau 19 ngày, dễ hiểu về khả năng cuộc gặp lần này vì người thứ hai đã tăng vận tốc của mình ngang với vận tốc của người thứ nhất. Điều này khẳng định một lúc nào đó hai người sẽ có cùng vận tốc. Chúng ta tìm được số ngày 13, nằm giữa 5 và 19. (Lời giải của Xtuôcm từ cuốn "Những bài toán sơ cấp lịch sử" của G.N. Pôpôp − Xuất bản năm 1938, tr.210 - 211).

Giăc Saclơ Xtuôcm (1803 - 1855) là một nhà toán học Pháp nổi tiếng (gốc Thụy Sĩ), thành viên của Viện Hàn lâm khoa học Pari. Từ năm 1840 là giáo sư trường Bách nghệ Pari, tác giả của định lí về xác định số nghiệm của phương trình đại số nằm trên một đoạn cho *trước, tác giả của nhiều công trình về phương trình vi phân, quang học và cơ học.*

246. Chúng ta giả sử rằng bài toán đã giải được. Giả sử AM là cát tuyến phải tìm (hình 73), còn điểm A và B là giao điểm của cát tuyến với đường tròn. Theo giả thiết AB = BM, nối điểm A với tâm O cắt đường tròn tại C. Nối O với B và C với M.

Như vậy ΔACM nhận được có OB là đường trung bình. Nhưng, như đã biết, đường trung bình của tam giác luôn song song với cạnh đáy và bằng nửa cạnh đáy, suy ra OB // CM và $OB = \frac{CM}{2}$ hay CM = 2OB = 2R, trong đó R là bán kính đường tròn đã cho.

Áp dụng điều phân tích ở trên dễ dàng dựng cát tuyến phải tìm. Lấy M làm tâm, dựng đường tròn có bán kính bằng đường kính đường tròn đã cho, cắt đường tròn đã cho tại C và C' (hình b)). Nối C với O và C' với O, các đoạn thẳng CO và C'O cắt đường tròn tương ứng tại các điểm A và A', ta có các cát tuyến AM và A'M là các cát tuyến phải tìm. Từ lập luận trên và cách dựng, rút ra bài toán có hai nghiệm.



Hình 73

Bài toán này được lấy ra từ cuốn "Những định lí và các bài toán hình học sơ cấp" của nhà toán học Bỉ Eđen Katall (1814 - 1894), người rất nổi tiếng bởi những công trình toán học cao cấp và sơ cấp.

247. *Anri Mônđơ người Pháp, có tài tính nhẩm đặc biệt. Sinh ra trong một gia đình nông dân ở làng quê gần Tua, cậu bé có một khả năng tính nhẩm phi thường đối với những số rất lớn và phức tạp. Trước tiên vào năm 1840, người ta đã chú ý tới cậu bé và đã giới thiệu cậu bé với chủ tịch Viện Hàn lâm khoa học Pari là Pônxen. Một số viện sĩ đã kiểm tra trình độ của cậu bé. Họ đưa ra hai bài toán : bình phương của 756 bằng bao nhiêu và có bao nhiêu phút trong 52 năm ? Mônđơ đã trả lời chính xác ngay tức khắc.*

Pônxen thành lập một hội đồng gồm các viện sĩ - nhà toán học để nghiên cứu khả năng toán học của cậu bé. Trong hội đồng gồm có Côsi, Liuvin, Xtuôcm và Arago. Ngày 14 tháng 12 năm 1840, cuộc thử nghiệm được tiến hành, trong đó cậu bé phải trả lời những bài toán rất khó bằng tính nhẩm. Bài toán thứ mười hai là bài toán được đưa ra trong cuốn sách này.

Việc tính toán và kiểm tra cho thấy cậu bé hoàn toàn có thể so sánh với máy tính và những câu hỏi phức tạp, khó nhất được trả lời một cách tin tưởng. Chẳng hạn câu hỏi, hai số nào mà hiệu bình phương của chúng bằng 133. Cậu bé trả lời nhanh rằng đó là những số 66 và 67. Khi người ta nói với cậu bé rằng có nghiệm đơn giản hơn, sau vài giây suy nghĩ, cậu bé trả lời đó là 13 và 6. Cậu bé gần như không phải suy nghĩ, trả lời ngay tức khắc về so sánh $(1204)^2$ và $(1006)^3$. *A. Mônđơ so sánh rất nhanh cả với bài toán phải suy nghĩ : Tìm một số biết lập phương của nó cộng với 84 được một số bằng tích của chính số đó với 37. Chẳng hạn hai số 3 và 4 :*

$$3^3 = 27 \quad ; \quad 27 + 84 = 111 = 3 \cdot 37$$
$$4^3 = 64 \quad ; \quad 64 + 84 = 148 = 4 \cdot 37$$

Còn lời giải bài toán như sau : $x^2 - y^2 = 133$

$$(x + y)(x - y) = 1.133 = 19 . 7$$

từ đó : $x + y = 19$

$x - y = 7$

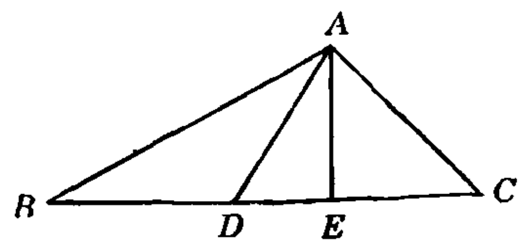
Vậy $x = 13$; $y = 6$

Suy ra : $x + y = 133$

$x - y = 1$

Vậy $x = 67$; $y = 66$

248. Xét tam giác ABC, lấy trên cạnh BC điểm D nằm giữa B và C, nối D với A và từ A dựng đường vuông góc với BC cắt BC tại E. Ta cần phải chứng minh rằng



Hình 74

$$AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.DC.BD.$$

Giả sử rằng điểm E nằm giữa D và C (hình 74).

Khi đó $\widehat{ADC}$ là góc nhọn, còn $\widehat{ADB}$ là góc tù. Sau khi áp dụng hai lần định lí về bình phương cạnh của tam giác đối diện với góc tù và sau đó với góc nhọn, ta có :

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD . DE \qquad (1)$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC . DE \qquad (2)$$

Nhân (1) với DC, (2) với BD ta được :

$$AB^2 . DC = BD^2 . DC + AD^2 . DC + 2BD . DE . DC \qquad (3)$$

$$AC^2 . BD = AD^2 . BD + DC^2 . BD - 2DC . DE . BD \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$$AB^2 . DC + AC^2 . BD = AD^2(BD + DC) + BD . DC(BD+DC)$$

hay : $AB^2 . DC+AC^2 . BD-AD^2 . BC = BC . DC . BD$

Trong sách giáo khoa bài toán Stiuơt được gọi là định lí Stiuơt và thường được áp dụng để tính các đoạn thẳng của tam giác. Chẳng hạn, nhờ định lí Stiuơt có thể giải bài toán tính độ dài đường phân giác và trung tuyến của tam giác.