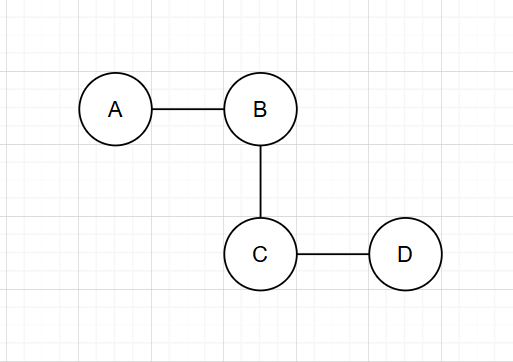
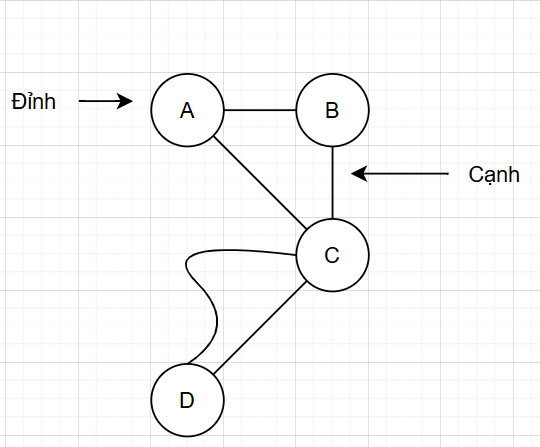
Các lý thuyết cơ bản về đồ thị

1. Đồ thị vô hướng

Đồ thị vô hướng là đồ thị gồm V ( vertex ) là các tập đỉnh và các cạnh E ( egde ) là các cặp không có thứ tự giữa hai đỉnh.

Ta kí hiệu G ( graph) = (V,E)



Hình 1.1 Đa đồ thị vô hướng Hình 1.2 Đơn đồ thị vô hướng

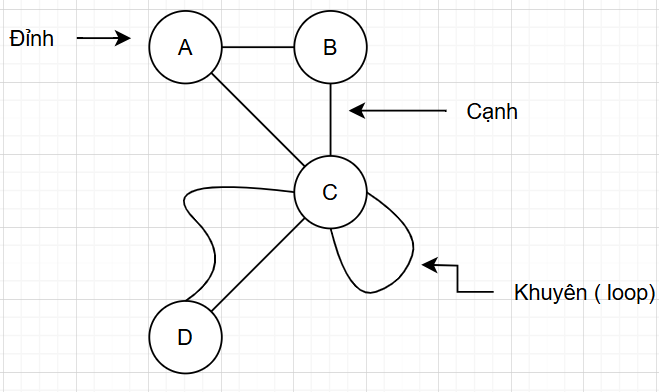
Đa đồ thị vô hướng là đồ thị vô hướng mà các đỉnh liên kết với nhau bằng nhiều cạnh. ( Ví dụ trên ảnh là đỉnh C và đỉnh D liên kết với nhau bằng hai cạnh )

Đơn đồ thị vô hướng là đồ thị vô hướng mà các đỉnh liên kết với nhau bằng một cạnh duy nhất.

1. Giả đồ thị vô hướng

Giải đồ thị vô hướng là đồ thị vô hướng mà trong đó:

* Có thể tồn tại khuyên ( loop ) : Tức là một cạnh nối với chính nó
* Có thể tồn tại cạnh song song : Nhiều cạnh nối cùng 1 cặp đỉnh ( Đa đồ thị vô hướng )



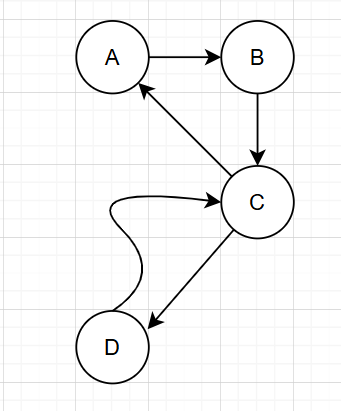
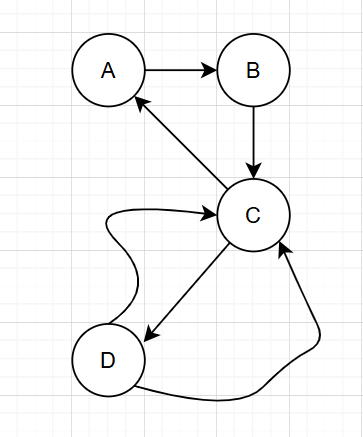
Hình 2 Giả đồ thị vô hướng

Xét cặp đỉnh {C,D} ta có các cặp cạnh : { {C,D} , {C,C}, { C, D} }

1. Đồ thị có hướng

Là đồ thị mà các tập đỉnh V , các cặp cạnh E ( tập cung ) có hướng. Mỗi cung là một cặp có thứ tự (u,v) tức là hướng đi từ u tới v.

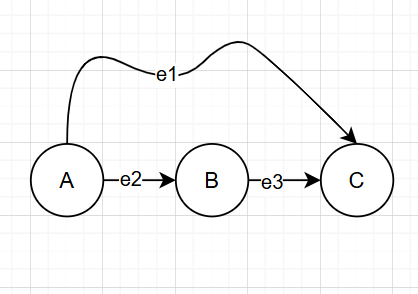
Kí hiệu G = (V,E) trong đó E là tập các cặp có thứ tự (u,v).

Hình 3.1 Đơn đồ thị có hướng Hình 3.2 Đa đồ thị có hướng

1. Đỉnh kề và cạnh liên thuộc

Đỉnh kề : Hai đỉnh u, v được gọi là 2 đỉnh kề khi hai đỉnh đó có một cạnh e nối giữa chúng



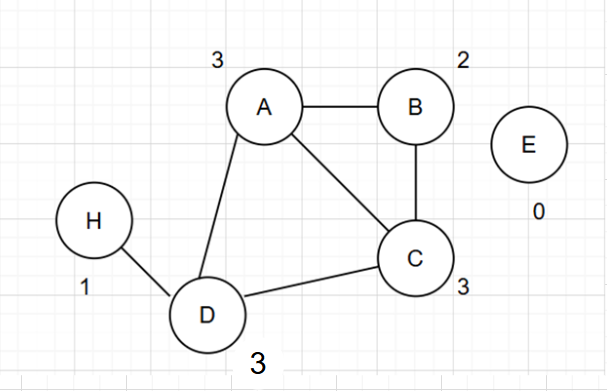
Hình 4 Đỉnh kề {A,B} {B,C} {A,C}

Cạnh liên thuộc : Là cạnh nối giữa hai đỉnh u,v

Trong ảnh trên ta thấy AC (e1) là cạnh liên thuộc nối giữa đỉnh A và đỉnh C,..

1. Bậc của đỉnh trên đồ thị vô hướng

Bậc của đỉnh trên đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc của đỉnh nó.



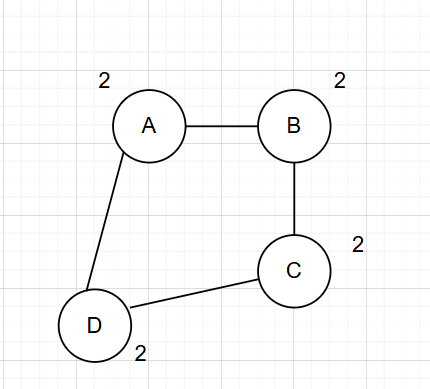
Hình 5.1 Bậc trên đỉnh của đồ thị vô hướng

Kí hiệu :deg(u)

Nếu:

* Đỉnh có số bậc bằng 0 thì được gọi là: Đỉnh cô lập ( Ví dụ đỉnh E )
* Đỉnh có số bậc bằng 1 thì được gọi là : Đỉnh treo ( Ví dụ đỉnh H )

Định lý : Đồ thị G = (V,E) là đồ thị vô hướng có m cạnh thì khi đó ta được tổng bậc của các đỉnh nằm trên đồ thị đó bằng hai lần số cạnh.

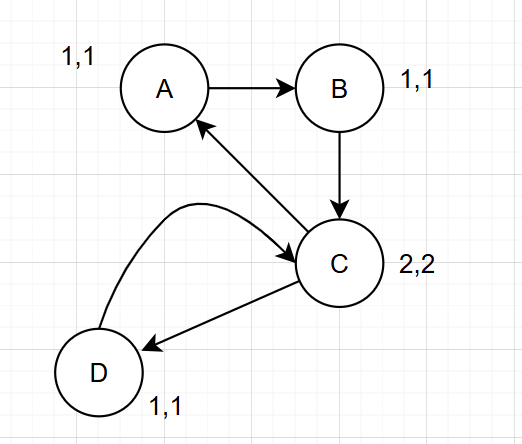


Hình 5.2 Đồ thị có 4 cạnh ( Tổng số bậc của đỉnh là 8 )

1. Bán bậc của đỉnh trên đồ thị có hướng

Bán bậc của đỉnh :

* Bán bậc ra của đỉnh u trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra từ đỉnh u; Kí hiệu : deg+(u)
* Bán bậc vào của đỉnh u trên đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi vào đỉnh u; Kí hiệu : deg-(u)



Hình 6 Bán bậc của đồ thị có hướng (x,y)

Với x là số bán bậc ra, y là số bán bậc vào

* Tổng số bán bậc ra luôn bằng tổng số bán bậc vào và đồng thời cũng bằng số lượng cạnh của đồ thị

In-degree: 1 + 1 + 2 + 1 = 5

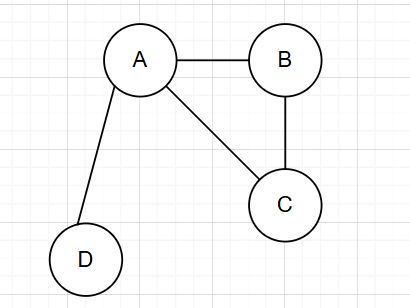
Out-degree = 1 + 1 + 2 + 1 = 5

Edge = 5

1. Đường đi

Đường đi : Là một dãy các đỉnh nối với nhau bằng cách cạnh liên tiếp, không xét hướng.

Ví dụ có 3 đỉnh {A,B,C,D}



Hình 7

Đường đi đơn : là đường đi không lặp lại bất cứ đỉnh nào. Từ ví dụ trên ta có được đường đi đơn { A, B, C }

Đường đi { A, B, C, A, D } không phải đường đi đơn.

1. Chu chình

Là một đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng 1 đỉnh, với ít nhất 3 đỉnh.

Các cạnh không được trùng nhau ( các cạnh phân biệt )

Từ hình 7 ta có một chu chình là {A,B,C,A} và chu chình này được gọi là một chu trình đơn khi mà chỉ cho phép đỉnh đầu với đỉnh cuối trùng nhau

Từ hình 7 ta được chu trình {D,A,B,C,A,D } nhưng không là chu trình đơn vì lặp lại điểm A (Không phải điểm đầu cũng không phải điểm cuối ).

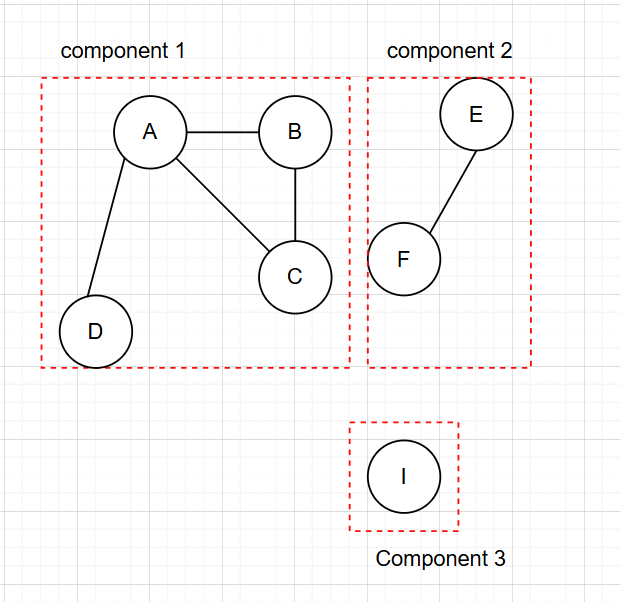
1. Liên thông của đồ thị vô hướng

Liên thông : Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông khi luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kì nằm trên đồ thị đó. ( Đồ thị tạo thành 1 khối thống nhất với nhau )

Hình 7 là đồ thị liên thông, hình 5.1 là đồ thị không liên thông

1. Thành phần liên thông của đồ thị vô hướng

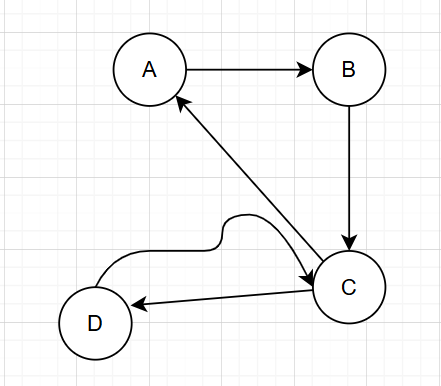
Thành phần liên thông được hiểu là các phân tách của đồ thị liên thông, đối với đồ thị chỉ có duy nhất một đỉnh (node ) vẫn được tính là một thành phần liên thông



Hình 10 Thành phần liên thông

1. Liên thông mạnh ( yếu ) của đồ thị có hướng

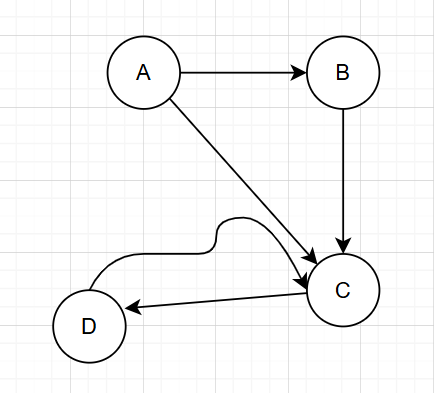
Đồ thị có hướng G = (V,E) được gọi là liên thông mạnh nếu tại hai đỉnh bất kì u,v luôn luôn tồn tại đường đi từ u đến v.



Hình 11.1 Liên thông mạnh của đồ thị có hướng

Đồ thì có hướng G = (V,E) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông.

* Đồ thì liên thông mạnh thì chắc chắn là liên thông yếu, ngược lại không đảm bảm đúng.



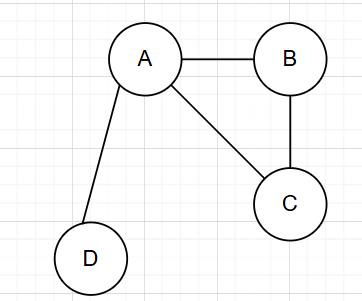
Hình 11.2 Đồ thị liên thông yếu

Không có đường đi nào giữa từ đỉnh C đến đỉnh A.

1. Ma trận kề của đồ thị vô hướng

Là ma trận vuông n x n với n là số đỉnh của đồ thị vô hướng. Các phần tử của ma trận là 0 hoặc 1.

Giả sử có ma trận 4x4 tức là n = 4. Số đỉnh bằng 4 {A,B,C,D}



Hình 12.1 Đồ thị vô hướng 4 đỉnh ABCD

Biễu diễn ma trận theo nguyên tắc aji = 0 hoặc aij = 1

Nếu đỉnh i liền kề đỉnh j thì aij = 1 ngược lại aij = 0

Biểu diễn:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |
| A | 0 | 1 | 1 | 1 |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 |
| C | 1 | 1 | 0 | 0 |
| D | 1 | 0 | 0 | 0 |

Ma trận kề của đồ thị vô hướng hình 12

Ta thấy được các cạnh từ ma trận biễn diễn: AB,AC,AD,BA,BC,CA,CB,DA.

Tính chất :

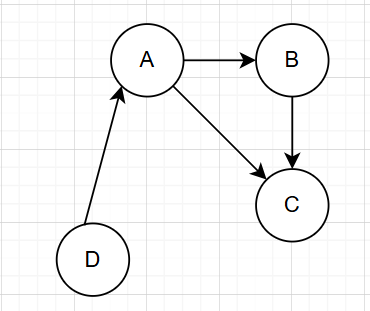
* Đây là ma trận đối xứng qua đường chéo chính.
* Tổng các phần tử mà aij = 1 ,bằng 2 lần tổng số cạnh ( vì aij = aji = 1 “đã gấp hai lần một cạnh”)
* Tổng các phần tử trên hàng hoặc trên cột của đỉnh u bằng số bậc của đỉnh u

1. Ma trận kề của đồ thị có hướng

Là ma trận vuông n với n là số đỉnh của đồ thị có hướng đang xét có các phần tử mang giá trị 0 hoặc 1.

Các tập giá trị A có các phần tử con aij (i và j là hai đỉnh kề):

* Bằng 1 khi cạnh ij là một cạnh của đồ thị và có đường đi từ i tới j.
* Bằng 0 trong trường hợp không có đường đi từ i tới j.



Hình 13 Đồ thị có hướng

Xét đồ thị có hướng ở hỉnh 12 ta có ma trận biểu diễn như sau:

Xét theo hàng ngang

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |
| A | 0 | 1 | 1 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 1 | 0 | 0 | 0 |

Ma trận kề biểu diễn đồ thị có hướng hình 12

Từ đó ta thấy :

* Tổng các phần tử tại aij = 1 luôn luôn bằng tổng số cạnh của đồ thị.
* Có thể không đối xứng qua đường chéo chính.
* Tổng các phần tử trên cột của đỉnh u là bán bậc vào (in-degree) của đỉnh u.
* Tổng các phần tử trên hàng của đỉnh u là bán bậc ra(out-degree) của đỉnh u

Đánh gia ma trận kề của hai hình thái đồ thị:

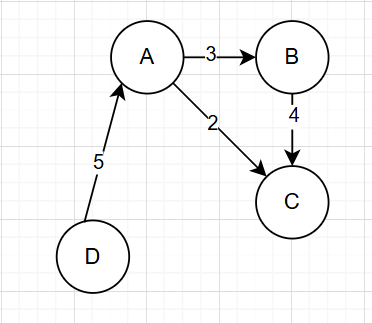
* Ưu điểm:
  + Dễ cài đặt, đơn giản, dễ dàng kiểm tra xem hai đỉnh i và j có kề nhau không bằng các kiểm tra aij ( độ phức tạp O(1))
* Nhược điểm:
  + Tốn bộ nhớ vì cần gấp đôi bộ nhớ để lưu ma trận( mất . Giả sử ma trận có 1000 đỉnh thì mất ô nhớ để lưu.
  + Khó thêm hoặc xóa đỉnh.
  + Không hiệu quả khi thực hiện duyệt đỉnh kề vì phải duyệt cả hàng của ma trận khi mà có vài đỉnh kề

1. Ma trận trọng số

Trọng số hay còn gọi là chi phí ( cost )là độ dài quãng đường của hai đỉnh kề u và v. Tức nó là độ dài cạnh của hai đỉnh kề.

Giả sử mỗi cạnh e = (u,v) có trọng số c(u,v). Ma trận trọng số c = c(i,j) .Nếu i và j không phải là một cạnh của đồ thị thì thông thường ta sẽ cho c(i,j) bằng không hoặc là bằng vô cùng (-inf).

Ma trận trọng số cũng sẽ là một ma trận vuông n x n với n là số đỉnh của đồ thị đang xét.



Hình 14 Đồ thị có hướng và có trọng số

Từ đồ thị ta biễu diễn được ma trận trọng số của đồ thị có hướng hình 14

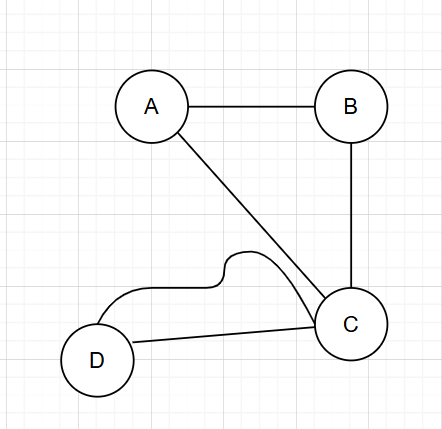
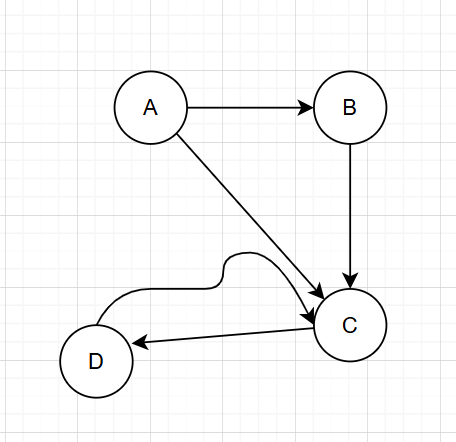
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D |
| A | 0 |-∞ | 3 | 2 | 0 | -∞ |
| B | 0 |-∞ | 0 |-∞ | 4 | 0 |-∞ |
| C | 0 |-∞ | 0 |-∞ | 0 |-∞ | 0 |-∞ |
| D | 5 | 0 |-∞ | 0 |-∞ | 0 |-∞ |

Ma trận trọng số của đồ thị có hướng hình 14

1. Danh sách cạnh không có trọng số

Danh sách cạnh là một danh sách lưu đỉnh đầu và đỉnh cuối của một cạnh. Thường được dùng khi đồ thị thưa ( thường số lượng cạnh ).

Trong đồ thị vô hướng không cần phải lặp lại cạnh đã được thêm vào danh sách tức là khi thêm cạnh AB rồi không cần thêm lại cạnh BA vào nữa. Thường sẽ được chọn u < v để thêm vào. Các phần tử trong danh sách cạnh được sắp xếp thăng dần theo u ( đỉnh đầu của các cạnh ). Tuy nhiên ở đồ thị có hướng thì mỗi cạnh được biểu diễn đều phải thêm vào danh sách.



Hình 15.1 Đồ thị có hướng Hình 15.2 Đồ thị vô hướng

Danh sách cạnh được biểu diễn như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | | u ( đỉnh đầu) | v (đỉnh cuối) | | A | B | | A | C | | B | C | | C | D | | D | C |   Danh sách cạnh cho đồ thị hình 15.1 | |  |  | | --- | --- | | u ( đỉnh đầu) | v ( đỉnh cuối) | | A | B | | A | C | | B | C | | C | D |   Danh sách cạnh cho đồ thị hình 15.2 |

1. Danh sách cạnh có trọng số

Tương tự như danh sách cạnh cho đồ thị vô hướng hay đồ thị có hướng, ta cần thêm một cột trọng số ( weight ) cho danh sách.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| u ( đỉnh đầu ) | v (đỉnh cuối) | w (trọng số) |
| A | B | 10 |
| … | … | … |
| N | M | X |

Danh sách cạnh cho đồ thị có trọng số

Có nhiều phương pháp để tạo danh sách cạnh sử dụng map lồng map ,… tuy nhiên để đơn giản ta có thể tạo một struct như sau

struct edge {

int u,v,w;

/\*

u là đỉnh đầu

v là đỉnh cuối  
w là trọng số

\*/

};

Cách khác dùng tuple ta có thể khai báo đa dạng số phần tử

#include<bits/stdc++.h>

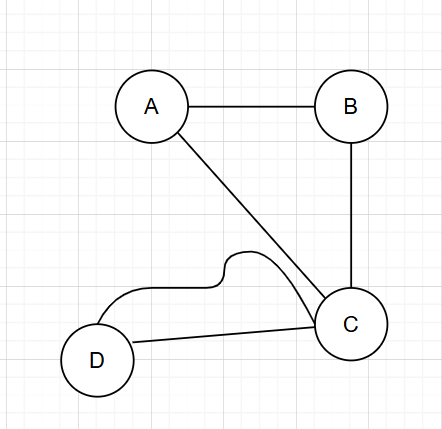
using namespace std;

tuple <int ,int ,int> egde;

…

1. Danh sách kề

Danh sách kề là danh sách lưu các đỉnh kề với đỉnh thứ i đang được xét



Hình 17 Đồ thị vô hướng

Từ đồ thị hình 17 ta có thể tạo ra danh sách kề như sau:

|  |  |
| --- | --- |
| Đỉnh | Đỉnh kề |
| A | {B,C} |
| B | {A,C} |
| C | {A,B,C,D} |
| D | {C} |

Danh sách kề cho đồ thị hình 17

Ta có thể sử dụng vector để lưu danh sách kề:

* Cách 1: vector<int> v[n] // sử dụng mảng n vector ( n là số đỉnh )
  + Cách lưu ví dụ như v[A].pushback(B) // tức là vector đỉnh A sẽ lưu các đỉnh kề với nó trong dòng này là lưu đỉnh B
* Cách 2: vector<vector<int>> v(n);
  + Thực hiện tương tự như cách 1