1 Dãy số và chuỗi số

1.1 Dãy số

▶ Bài 1 ◀ Khảo sát sự hội tụ của dãy số sau: $\{a_n\} = n^2e^{-n}$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$ liên tục trên $\mathbb{R}$, khi đó mọi số hạng của dãy $\{a_n\}$ đều là có thể biểu diễn thành dạng $f(n)$. Do đó:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim\{a_n\}$$

Theo quy tắc **L'Hospital**, chúng ta tính được giới hạn của $f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\{a_n\} = 0$. ■

▶ Bài 2 ◀ Khảo sát sự hội tụ của dãy số sau: $\{a_n\} = \ln(n+1) - \ln(n)$

Lời giải:
Ta có:

$$\{a_n\} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Do đó:

$$\lim\{a_n\} = \lim\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln(e) = 1$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\{a_n\} = 1$.

■

▶ Bài 3 ◀ Khảo sát sự hội tụ của dãy số sau: $\{a_n\} = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

Lời giải:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \cos^2 n \leqslant 1$, nên $0 \leqslant \{a_n\} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Mặt khác ta nhận thấy giới hạn $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$ nên theo nguyên lí kẹp $\lim\{a_n\} = 0$.

■

▶ Bài 4 ◀ Khảo sát sự hội tụ của dãy số sau: $\{a_n\} = 2^{-n}\cos n\pi$

Lời giải:

Ta có: $|\{a_n\}| = \left|\dfrac{\cos(n\pi)}{2^n}\right| = \dfrac{|\cos(n\pi)|}{2^n} \Rightarrow 0 \leqslant \{a_n\} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Áp dụng nguyên lí kẹp ta được $\lim|\{a_n\}| = 0 \Rightarrow \lim\{a_n\} = 0$.

■

▶ Bài 5 ◀ Khảo sát sự hội tụ của dãy số sau: $\{a_n\} = \arctan(\ln n)$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \arctan(\ln x)$, ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Do vậy, $\{a_n\}$ hội tụ về $\dfrac{\pi}{2}$.

■

▶ Bài 6 ◀ Tìm giới hạn của dãy số sau:

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

Lời giải:
Số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ là:

$$\{a_n\} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}} = 2^{S_n}$$

.
Suy ra: $\lim\{a_n\} = \lim 2^{S_n} = 2^{\lim S_n}$.
Mặt khác: S_n là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng $\{u_n\}$ với $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2} \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Vậy $\lim\{a_n\} = 2$.

■

▶ Bài 7 ◀ Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi: $a_1 = \sqrt{2}$ và $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Tìm giới hạn của dãy số $\{a_n\}$

Lời giải:
Ta nhận thấy:

$$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2} \text{ và } a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

Giả sử $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1,2,3,\ldots$, ta sẽ chứng minh $a_{n+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$.
Thật vậy, thay a_n vào công thức truy hồi và sử dụng công thức hạ bậc $1+\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, ta được:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

.
Hay $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó $\lim\{a_n\} = 2$

■

1.2 Chuỗi số

1.2.1 Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

Sử dụng tiêu chuẩn tích phân - Integral Test.

▶ Bài 8 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

Lời giải:
Ta có: $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}, \quad \forall n \geqslant 3$, và $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ phân kỳ (bởi nó là tích phân *Riemann* với $\alpha = 1$) do đó theo **Tiêu chuẩn so sánh** chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

■

▶ Bài 9 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

Lời giải:
Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$, khi đó $f(x)$ là một hàm liên tục và nghịch biến trên $[1;\infty)$, bởi:

$$f'(x) = \frac{(1-2x^2)e^x}{e^{2x^2}} \leqslant 0, \forall x \in [1;\infty)$$

Mặt khác, ta có:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{2e^{x^2}}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{2e}$$

.
Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

■

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh - Comparision Test.

▶ Bài 10 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{2n^2+4n+3}$

Lời giải:
Ta có: $\dfrac{5}{2n^2+4n+3} \leqslant \dfrac{5}{2n^2}$, mặt khác: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là chuỗi **Riemann** với $\alpha = 2 > 1$ nên nó hội tụ, và theo tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi đã cho cũng hội tụ theo.

■

▶ Bài 11 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k}$

Lời giải:
Lời giải tương tự như **▶ Bài 8 ◀**.

■

▶ Bài 12 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$

Lời giải:
Đặt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$
Theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn - Limit comparision test:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2^n}{2^n-1} = 1 > 0$$

và như ta đã biết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ là chuỗi hình học với $r = \dfrac{1}{2} < 1$, hay nói cách khác thì nó hội tụ.
Do vậy, chuỗi đã cho cũng hội tụ theo.

■

▶ Bài 13 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$

Lời giải:
Ta đặt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{n^{\frac{5}{2}}}$.
Ta có:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \cdot \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n^2} = \lim \frac{2n^{\frac{5}{2}}+3n^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{5+n^5}} = 1$$

.
Và $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ (nó là tích phân *Riemann* với $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$)
Do vậy theo **tiêu chuẩn so sánh giới hạn** chuỗi đã cho phân kỳ.

■

Sử dụng tiêu chuẩn đan dấu và hội tụ tuyệt đối - Alternating series and Absolute Convergence.

▶ Bài 14 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Lời giải:

Đặt $b_n = n!$, chuỗi đã cho viết lại thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ hội tụ theo **Tiêu chuẩn đan dấu**. Bởi $b_{n+1} < b_n$ và $\lim b_n = 0$. ■

▶ Bài 15 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$

Lời giải:

■

Đặt $b_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$, khi đó $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Mặt khác: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n|$ hội tụ (theo **Tiêu chuẩn so sánh**).

Theo **Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối**, thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ cũng hội tụ.

Sử dụng tiêu chuẩn tỉ lệ và tiêu chuẩn căn thức - Ratio Test and Root Test.

▶ Bài 16 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

Lời giải:

Đặt $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, áp dụng **Tiêu chuẩn tỉ lệ** ta có:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right| = \lim \left|\frac{n}{n+1}\right| = 0 < 1$$

dãy đã cho hội tụ.

■

▶ Bài 17 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

Lời giải:

Đặt $b_n = \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$, theo **Tiêu chuẩn căn thức** ta có:

$$\lim \sqrt{|b_n|} = \lim \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right) = \lim \left(1 - \frac{n-1}{3n+2}\right) = \frac{2}{3} < 1$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

■

▶ Bài 18 ◀ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

Lời giải:

Ta có:

$$\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

Do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

■

1.2.2 Tìm bán kính hội tụ của chuỗi số

▶ Bài 19 ◀ Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi số sau: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

Lời giải:

Đặt $a_n = \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$, khi đó:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right|$$
$$= 3\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}|x| \to 3|x| \quad \text{khi } n \to \infty$$

Theo **Tiêu chuẩn tỉ lệ**, chuỗi đã cho hội tụ khi $3|x| < 1$ hay $x \in \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, suy ra bán kính hội tụ là $R = \dfrac{1}{3}$.
Bây giờ ta khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại các biên:

- với $x = -\frac{1}{3}$ thì chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ là một chuỗi phân kỳ (bởi nó là chuỗi *Riemann* với $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).
- với $x = \frac{1}{3}$ thì chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ hội tụ theo **Tiêu chuẩn đan dấu**.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

■

2 Khảo sát hàm số hai biến thực

2.1 Giới hạn kép

▶ Bài 20 ◀ Chứng minh giới hạn sau không tồn tại: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Lời giải:

Đặt $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, ta sẽ cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox, trên đường $y = 0$, hàm số sẽ trở thành $f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1, \forall x \neq 0$, nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

Bây giờ, ta cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy, khi đó $x = 0$ và $f(0,y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1, \forall y \neq 0$, nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$$

Bởi vì $f(x,y)$ có giới hạn khác nhau khi $(x,y) \to (0,0)$ theo hai đường khác nhau nên giới hạn kép không tồn tại.

■

▶ Bài 21 ◀ Giới hạn sau có tồn tại hay không (nếu có hãy tính giới hạn đó): $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Lời giải:

Đặt $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, ta sẽ cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox, trên đường $y = 0$, hàm số sẽ trở thành $f(x,0) = \dfrac{0}{x^2} = 0, \forall x \neq 0$, nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Bây giờ, ta cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy, khi đó $x = 0$ và $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0, \forall y \neq 0$, nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Ta tiếp tục cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường $y = x$, khi đó hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}, \forall x \neq 0$, suy ra:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

Bởi vì $f(x,y)$ có giới hạn khác nhau khi $(x,y) \to (0,0)$ theo các đường khác nhau nên giới hạn kép không tồn tại.

▶ **Bài 22** ◀ Tìm giới hạn sau nếu nó tồn tại: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

Lời giải:

Bằng cách làm tương tự như ▶ **Bài 20** ◀ và ▶ **Bài 21** ◀ ta chứng minh được $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ khi $(x,y) \to (0,0)$ theo các dường $x = 0, y = 0, y = x^2, x = y^2$. Nhưng chúng ta không thể kết luận hoàn toàn rằng $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ mà sẽ phải chỉ ra giới hạn này tồn tại và nó bằng 0 (nếu có thể).

Đặt $\varepsilon = 0$, ta sẽ tìm số δ sao cho:

$$\text{Nếu} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{thì} \quad \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

Có nghĩa là:

$$\text{Nếu} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{thì} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon$$

Nhưng $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ bởi vì $y^2 \geqslant 0$, vì vậy $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$ và:

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, khi đó:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leqslant 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta \leqslant 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Vậy theo định nghĩa giới hạn ta có:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

2.2 Giới hạn lặp

▶ **Bài 23** ◀ Tính giới hạn lặp sau: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2-y^2}\right)\right]$

Lời giải:

Đầu tiên ta tính giới hạn sau:

$$\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2-y^2}\right) = \frac{x^2-x^3}{x^2-1} = \frac{-x^2}{x+1}$$

Tiếp theo :

$$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^2y^3 - x^3y^2}{x^2-y^2}\right)\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

▶ **Bài 24** ◀ Tính giới hạn lặp sau: $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\left[\lim_{y\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x - \sin 2y}{\cos x \cos 2y}\right)\right]$

Lời giải:

Ta có: $\lim_{x\to\pi}\left[\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x-\sin 2y}{\cos x\cos 2y}\right)\right]=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\cos x}{-\cos x}\right)=-1$

2.3 Đạo hàm riêng

▶ Bài 25 ◀ Cho hàm số $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, tính $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$.

Lời giải:
Ta có:

$$\begin{aligned} f_x(x,y)&=-2x, \quad f_x(1,1)=-2\\ f_y(x,y)&=-4y, \quad f_y(1,1)=-4 \end{aligned}$$

▶ Bài 26 ◀ Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ với z là hàm số của hai biến x,y được cho bởi phương trình

$$x^3+y^3+z^3+6xyz+4=0$$

Sau đó tính giá trị của các đạo hàm riêng này tại điểm $(-1,1,2)$.

Lời giải:
Để tính đạo $\frac{\partial z}{\partial x}$ ta đạo hàm phương trình đã cho theo biến x và coi hai biến y,z như hằng số, khi đó ta có:

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+6yz+6xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Suy ra:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}$$

Tương tự, ta tính được:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}$$

Điểm $(-1,1,2)$ thỏa mãn phương trình $x^3+y^3+z^3+6xyz+4=0$ nên nó nằm trên mặt cong và các giá trị đạo hàm riêng tai điểm này là:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}=\frac{(-1)^2+2.1.2}{2^2+2.(-1).1}=-\frac{5}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}=\frac{1^2+2.(-1).2}{2^2+2.(-1).(1)}=\frac{3}{2}$$

2.4 Tìm cực trị tự do của hàm 2 biến thực

▶ Bài 27 ◀ Tìm các cực trị tự do và điểm yên ngựa của hàm số sau $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

Lời giải:
Đầu tiên ta tính các đạo hàm riêng:

$$f_x=4x^3-4y, f_y=4y^3-4x$$

Do các đạo hàm riêng này xác định tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ nên các điểm kỳ dị của hàm số chình là các nghiệm của phương trình $f_x=0$ và $f_y=0$. Hay:

$$x^3-y=0 \qquad \text{và} \qquad y^3-x=0$$

Để giải 2 phương trình trên ta thay $y=x^3$ từ phương trình đầu tiên vào phương trình thứ hai, khi đó ta được:

$$0=x^9-x=x(x^4-1)(x^4+1)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

Vì vậy có 3 nghiệm thực x lần lượt là $0,-1,1$, suy ra các điểm kỳ dị lần lượt là $(0,0),(-1,-1),(1,1)$
Bây giờ ta tính các đạo hàm riêng cấp 2 và định thức $D(x,y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{xy} = -4 \quad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Bởi vì $D(0,0) < 0$ nên nó $(0,0)$ là **điểm yên ngựa**, $D(1,1) = 128 > 0$ và $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ nên $(1,1)$ là **cực tiểu tự do**, $D(-1,-1) = 128 > 0$ và $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ nên $(-1,-1)$ cũng là một **cực tiểu tự do của hàm số**.

3 Tích phân đường và tích phân mặt

3.1 Tích phân đường

3.2 Tích phân mặt