BÀI TẬP GIẢI TÍCH - CHƯƠNG 1

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
UIT-HCM

Sinh viên: **Nguyễn Trường Nhân**

MSSV: ***20520671***

Mục lục

1 Giới hạn hàm số.

1.1 Giới hạn cơ bản.

Bài 1.1.1 Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x+2}$$

Lời giải:
Chia tử và mẫu cho x, ta được:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{1}{3}$$

Do $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$ ■

Bài 1.1.2 Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x$$

Lời giải:
Ta có:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

.
Do $f(x)=\sin x$ là một hàm số liên tục trên tập xác định của nó, nên $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. ■

Bài 1.1.3 Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Lời giải:
Biểu thức cần lấy giới hạn có dạng $\infty-\infty$ là dạng vô định. Ta có thể khử dạng vô định bằng cách nhân lượng liên hiệp là $\sqrt{x^2+1}+x$ vào biểu thức như sau:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x).(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Đến đây ta có thể chia cả tử và mẫu của biểu thức cho x và tính được giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

■

Bài 1.1.4 Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}$$

Lời giải:
Để tính được giới hạn của hàm số trên, ta có thể dùng **Nguyên lí kẹp**.
Ta có:

$$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$$

Do đó:

$$\frac{-x}{x^2-100x+3000}\leqslant\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\leqslant\frac{x}{x^2-100x+3000}$$

Giới hạn của vế phải và vế trái cùng bằng 0 nên $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0$ ■

Bài 1.1.5 Tìm giới hạn của hàm số (nếu tồn tại):

$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

Lời giải:
Ta chọn $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, khi đó: $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x = 1$. Do $\sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $k2\pi$.
Tương tự ta chọn $x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$, khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x = -1$. Do $\sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kì $l2\pi$.
Do giá trị của $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ ở hai trường hợp không bằng nhau nên giới hạn cần tìm không tồn tại. ■

1.2 Các dạng vô định.

- Dạng $\infty - \infty$

Bài 1.2.1 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2+x+2}\right)$$

Lời giải:

Ta xác định giới hạn cần tìm có dạng $\infty - \infty$. Bằng phương pháp nhân lượng liên hiệp $\left(\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+x+2}\right)$, ta thu được kết quả:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2+x+2}).(\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+x+2})}{(\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+x+2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+x+2}} = 0$$

■

Bài 1.2.2 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

Lời giải:

Ta quy đồng biểu thức lấy giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ có dạng $\frac{0}{0}$.
Đến đây, ta sử dụng **đại lượng vô cùng bé tương đương** của $\sin x$ là x $(x \to 0)$ để làm gọn mẫu thức, sau đó áp dụng quy tắc **L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \overset{\sin x \sim x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \overset{(L'Hospital)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} \overset{(L'Hospital)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

■

- Dạng $\frac{0}{0}$

Bài 1.2.3 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

Lời giải:
Qui đồng mẫu biểu thức lấy giới hạn ta được:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2.\sin^2 x}\right)$$

Áp dụng quy tắc **Vô cùng bé tương đương** $\sin^2 x \sim x^2 (x \to 0)$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2.\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}\right)$$

Đến đây ta sử dụng **quy tắc L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x - 2x}{4x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos 2x - 2}{12x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin 2x}{12}\right) = \frac{0}{12} = 0$$

Bài 1.2.4 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2} - \cos x}{4x\sin 3x}$$

Lời giải:

Sử dụng các **Vô cùng bé tương đương**:

$$e^{2x^2} \sim 1 + 2x^2 (x \to 0)$$
$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}(x \to 0)$$
$$\sin 3x \sim x(x \to 0)$$

Giới hạn cần tính tương đương:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2} - \cos x}{4x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + 2x^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{4x.3x} = \frac{\frac{5x^2}{4}}{12x^2} = \frac{5}{48}$$

Bài 1.2.5 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x) + 2x^{10}\tan 3x}{\ln(1 - 3x\sin 4x) + x^9}$$

Lời giải:

Sử dụng các **Vô cùng bé tương đương sau**:

$$\ln\cos(3x) = \ln(1 + (-1 + \cos(3x)) \sim (-1 + \cos(3x)) \sim -\frac{9x^2}{2}(x \to 0)$$
$$\ln(1 - 3x\sin(4x)) \sim -3x\sin(4x) \sim -12x^2(x \to 0)$$
$$\tan(3x) \sim 3x(x \to 0)$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x) + 2x^{10}\tan 3x}{\ln(1 - 3x\sin 4x) + x^9} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-9x^2}{2} + 6x^{11}}{-12x^2 + x^9}$$

Ở tử và mẫu ta lấy các **vô cùng bé tương đương** bậc nhỏ nhất:

$$\lim_{x\to}\frac{\ln(\cos 3x) + 2x^{10}\tan 3x}{\ln(1 - 3x\sin 4x) + x^9} = \lim\frac{\frac{-9x^2}{2} + 6x^{11}}{-12x^2 + x^9} = \lim_{x\to 0}\frac{-9x^2}{-24x^2} = \frac{3}{8}$$

Bài 1.2.6 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(4x)} - 1}{\ln(1 - 2x\sin x)}$$

Lời giải:

Biến đổi biểu thức lấy giới hạn ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(4x)} - 1}{\ln(1 - 2x\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(4x) - 1}{\ln(1 - 2x\sin x).(\sqrt{\cos(4x)} + 1)}$$

Áp dụng các **vô cùng bé tương đương** sau:

$$1-\cos(4x)\sim\frac{(4x)^2}{2}=8x^2(x\to 0)$$
$$\ln(1-2x\sin x)\sim -2x\sin(x)\sim -2x^2(x\to 0)$$

Do vậy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(4x)-1}{\ln(1-2x\sin x).(\sqrt{\cos(4x)}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-8x^2}{-2x^2.\left(\sqrt{1-8x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{1-8x^2}+1}=2$$

■

Bài 1.2.7 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{1+x^3}-\sin 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln(\cos x)}-1}$$

Lời giải:

Sử dụng **các vô cùng bé tương đương** để biến đổi và rút gọn các biểu thức ở tử và mẫu:

- Ở mẫu thức:

$$\sqrt[5]{1-2x\ln(\cos x)}-1\sim -\frac{2}{5}x\ln(\cos x)=-\frac{2}{5}\ln(1+(\cos x-1))\sim -\frac{2}{5}x(\cos x-1)\ (x\to 0)$$
$$\sim -\frac{2}{5}x\cdot -\frac{x^2}{2}=\frac{1}{5}x^3$$

- Ở tử thức:

$$\sin(\sqrt{1+x^3})-\sin 1=2\cos\frac{\sqrt{1+x^3}+1}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}$$
$$\sqrt{1+x^3}-1=(1+x^3)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^3(x\to 0)$$
$$2\cos\frac{\sqrt{1+x^3}+1}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}\sim 2\cos 1.\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}\sim 2\cos 1.\frac{\frac{1}{2}x^3}{2}=\frac{1}{2}\cos 1.x^3(x\to 0)$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{1+x^3}-\sin 1}{\sqrt[5]{1-2x\ln(\cos x)}-1}=\frac{\frac{1}{2}\cos 1.x^3}{\frac{1}{5}x^3}=\frac{5}{2}\cos 1$$

■

▶ Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Bài 1.2.8 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 3}\left[\sin(x-3)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Lời giải:

Giới hạn trên có dạng $0.\infty$, ta sẽ chuyển về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ và áp dụng **L'Hospital** cho việc tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 3}\left[\sin(x-3)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{\cot\left(\frac{\pi x}{6}\right)}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to 3}\frac{\cos(x-3)}{-\frac{\pi}{6}\left[1+\cot^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right]}=\frac{1}{-\frac{\pi}{6}.1}=-\frac{6}{\pi}$$

■

▶ Dạng $0\cdot\infty$

Bài 1.2.9 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

Lời giải:

Sử dụng quy tắc **L'Hospital** , ta được:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

▶ Dạng 0^0

Bài 1.2.10 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Lời giải:

Ta có thể tính được nhanh giới hạn trên bằng cách tận dụng kết quả của **Bài1.2.10** như một bổ đề:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

▶ Dạng 1^∞

Để giải quyết dạng này ta cần sử dụng đến các giớ hạn đặc biệt sau:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Bài 1.2.11 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-9}\right)^{2x+7}$$

Lời giải:

Thực hiện một số biến đổi trên lim như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-9}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{13}{3x-9}\right)^{3x-9}\right]^{\frac{2x+7}{3x-9}}$$

Do:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{13}{3x-9}\right)^{3x-9} = e^{13}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{3x-9} = \frac{2}{3}$$

Nên:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-9}\right)^{2x+7} = e^{\frac{26}{3}}$$

Bài 1.2.12 Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$$

Lời giải:
Giả sử u, v là hai hàm số theo biến x, khi đó:

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0} e^k$$

.

Trong đó: $k = \lim_{x\to x_0} v\ln u$.

Trong trường hợp này thì $k = \lim_{x\to 1}\left[\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).\ln\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]$

Áp dụng **vô cùng bé tương đương** :

$$\ln\tan\frac{\pi x}{4} = \ln\left[1+\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\right] \sim \tan\frac{\pi x}{4} - 1 (x\to 1)$$

Đặt $\tan\frac{\pi x}{4} = t$ với $\lim_{x\to 1} t = 1$

Từ công thức $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, ta viết lại được:

$$k = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)2t}{1-t^2} = \lim_{t\to 1}\frac{2t^2-2t}{-t^2+1} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{t\to 1}\frac{4t-2}{-2t} = -1$$

Vậy

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^k = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

■

2 Khai triển Taylor và Maclaurin.

2.1 Khai triển Taylor.

2.2 Khai triển Maclaurin.

Bài 2.2.1 Tìm khai triển *Maclaurin* của hàm số

$$f(x) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

đến cấp n.

Lời giải:
Ta có:

$$f^{(k)}(x) = 2^k\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\frac{\pi}{4}(2k+1)$$

Vậy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\sin\frac{\pi}{4}(2k+1) + o(x^n)$$

■

Bài 2.2.2 Tìm khai triển *Maclaurin* của hàm số

$$\frac{1}{2x+3}$$

đến cấp n.

Lời giải:
Ta có:

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot x^k + o(x^n)$$

■

Bài 2.2.3 Viết khai triển *Maclaurin* của hàm số

$$f(x) = e^x . \ln(1+x)$$

đến cấp 4.

Lời giải:
Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right) \\ &= x+\left(-1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)x^4+o(x^4) \\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4) \end{aligned}$$

■

Bài 2.2.4 Tìm khai triển *Maclaurin* của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x}$$

đến cấp 6.

Lời giải:
Khai triển *Maclaurin* $\dfrac{1}{1+\sin x}$ đến cấp 4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin x} &= 1-\left(x-\frac{x^2}{3!}\right)+\left(x-\frac{x^2}{3!}\right)^2-\left(x-\frac{x^2}{3!}\right)^3+\left(x-\frac{x^2}{3!}\right)^4+o(x^4) \\ &= 1-\left(x-\frac{x^2}{3!}\right)+\left(x^2-\frac{1}{3}x^4\right)-x^3+x^4+o(x^4) \\ &= 1-x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

Vậy

$$f(x) = x^2-x^3+\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+o(x^6)$$

■

3 Tích phân

3.1 Tích phân bất định

Bài 3.1.1 Tính các tích phân bất định sau:

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$$

Lời giải:
Sử dụng phương pháp đổi biến.
Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$, khi đó ta có các đẳng thức lượng giác sau: $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ và $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
Ta có: $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\cdot(1+t^2)\mathrm{d}x$ hay $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

▶

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

▶

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

Bài 3.1.2 Tính các tích phân bất định sau:

$$\int \tan x \mathrm{d}x, \qquad \int \cot x \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Sử dụng phương pháp đổi biến.

- $$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$
- $$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

■

Bài 3.1.3 Tính các tích phân bất định sau:

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x, \qquad \int \cos^3 x \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Sử dụng phương pháp đổi biến.

- $$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int \sin x.(1-\cos x)^2 \mathrm{d}x = \int (\cos x - 1)^2 \mathrm{d}\cos x \overset{t=\cos x}{=} \int (t^2-1)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t + C \overset{t=\cos x}{=} \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$
- $$\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int \cos x.(1-\sin x)^2 \mathrm{d}x = \int (1-\sin x)^2 \mathrm{d}\sin x \overset{t=\sin x}{=} \int (1-t^2)\mathrm{d}t = t - \frac{t^3}{3} + C \overset{t=\sin x}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

■

Bài 3.1.4 Tính các tích phân bất định sau:

$$\int e^{\sin x} \mathrm{d}x, \qquad \int e^{\cos x} \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Ta có:

$$\int e^u dx = \frac{e^u}{u'} + C$$

với $u = u(x)$.

- $u(x) = \sin x$
$$\int e^{\sin x} \mathrm{d}x = \frac{e^{\sin x}}{\cos x} + C$$
- $u(x) = \cos x$
$$\int e^{\cos x} \mathrm{d}x = \frac{e^{\cos x}}{\sin x} + C$$

■

Bài 3.1.5 Tính tích phân bất định sau:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Biến đổi tích phân đã cho thành:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1-x+x^2)} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} \right) \mathrm{d}x \tag{1}$$

Để giải quyết tích phân này ta sẽ dùng phương pháp **Hệ số bất định**, cụ thể như sau: trong công thức (1) ta có A,B,C là các hằng số thỏa mãn đồng nhất thức sau:

$$A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x)\equiv 1$$

.

Hay A,B,C là nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases} A+B &= 0 \\ -A+B+C &= 0 \\ A+C &= 1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được: $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$.

Viết lại tích phân (1):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int \frac{1}{3(x+1)}\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}\mathrm{d}x}_{I_1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| + I_1$$

Ta tính tích phân I_1, để làm điều đó, ta cần biến đổi như sau:

$$I_1 = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1-x+x^2}\mathrm{d}x}_{I_2} = -\frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{1}{2}I_2$$

Ta tiếp tục tính I_2 bằng cách đặt $\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, suy ra $t = \arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]$ và $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Rút gọn và viết lại ta được:

$$I_2 = \int \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}t}{3} + C \overset{t=\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right] + C$$

Vậy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|1-x+x^2| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right] + C$$

■

Bài 3.1.6 Tính các tích phân bất định sau:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}, \qquad \int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x, \qquad \int x^2\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Lời giải:

1. Ta đặt $\sqrt{a+x^2} = t-x$, khi đó ta có: $x = \frac{t^2-a}{2t}$ và $\mathrm{d}x = \frac{(t^2+a)\mathrm{d}t}{2t^2}$. Tích phân đã cho viết lại:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{t^2+a}{2t^2}\cdot\frac{2t}{t^2+a}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C \overset{t=x+\sqrt{x^2+a}}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

2. Theo bài (1) ở trên nếu thay $a=1$, bằng phép đặt tương tự ta có: $\sqrt{1+x^2} = 1-x$ và $x = \frac{t^2-1}{2t}$ và $\mathrm{d}x = \frac{(t^2+1)\mathrm{d}t}{2t^2}$, suy ra:

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{8} + \frac{\ln t}{2} - \frac{1}{8t^2} + C$$

Thay $t = \sqrt{1+x^2}+x$ vào, ta được kết quả cuối cùng:

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{8} + \frac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}{2} - \frac{1}{8(\sqrt{1+x^2}+x)^2} + C$$

3. Ta sử dụng phép đặt như bài (2), khi đó ta có:

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{(t^4-1)^2}{8t^4}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t^4}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8t^4}\right) = \frac{t^5}{40} + \frac{t}{4} - \frac{1}{24t^3} + C$$

■

3.2 Tích phân suy rộng

3.2.1 Tích phân suy rộng loại 1.

Xét sựu hội tụ của các tích phân sau:

Bài 3.2.1

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{3+4x^4} \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Theo bài toán $\forall x \geqslant 1$, ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{\cos^2 x}{3+4x^4} \leqslant \frac{1}{3+4x^4} \leqslant \frac{1}{4x^4} \leqslant \frac{1}{x^4}$$

Tích phân $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ là tích phân *Riemann* có $\alpha = 4 > 1$ nên hội tụ.
Do đó, tích phân:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{3+4x^4} \mathrm{d}x$$

cũng hội tụ.

Bài 3.2.2

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{3x^4+x^2}{7x^9+x^3+2} \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Khi $x \to \infty$ thì các biểu thức ở tử và mẫu trở thành các vô cùng lớn. Ta áp dụng **Vô cùng lớn tương đương**:

$$\frac{3x^4+x^2}{7x^9+x^3+2} \sim \frac{3x^4}{7x^9} = \frac{3}{7x^5}$$

.
Tích phân $\int_{1}^{+\infty} \frac{3}{7x^5} \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{28x^4} + \frac{3}{28} = \frac{3}{28}$ nên hội tụ.
Do vậy, tích phân

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{3x^4+x^2}{7x^9+x^3+2} \mathrm{d}x$$

cụng hội tụ.

Bài 3.2.3

$$\int_{1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1}\right) \mathrm{d}x$$

Lời giải:
Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1} = 0$$

.
Áp dụng **vô cùng bé tương đương** ta được:

$$\sin^2\left(\frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1}\right) \sim \left(\frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1}\right)^2 \qquad (x \to \infty)$$

Áp dụng **vô cùng lớn tương đương**:

$$\left(\frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1}\right)^2 \sim \left(\frac{2x^3}{8x^5}\right)^2 = \frac{1}{16x^4}$$

Tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{16x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{48x^3} + \frac{1}{48} = \frac{1}{48}$ nên hội tụ.
Do đó, tích phân

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin^2\left(\frac{2x^3+x+3}{8x^5+4x+1}\right) dx$$

hội tụ.

Bài 3.2.3

$$\int\limits_1^{+\infty} \ln^3\left(\frac{2x^2+3x+5}{2x^2+8x+1}\right) dx$$

Lời giải:
Ta có:

$$\lim_{x\to\infty} \ln^3\left(\frac{2x^2+3x+5}{2x^2+8x+1}\right) = 0$$

Áp dụng **vô cùng bé tương đương** ta được:

$$\ln^3\left[1+\left(\frac{2x^2+3x+5}{2x^2+8x+1}-1\right)\right] \sim \left(\frac{2x^2+3x+5}{2x^2+8x+1}-1\right)^3 = \left(\frac{4-5x}{x^2+8x+1}\right)^3 \qquad (x\to\infty)$$

Áp dụng **vô cùng lớn tương đương**:

$$\frac{4-5x}{x^2+8x+1} \sim \frac{-5x}{x^2} = \frac{-5}{x} \qquad (x\to\infty)$$

Ta có tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{-5}{x}\right)^3 dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{125}{3x^2} - \frac{125}{3} = \frac{-125}{3}$ nên hội tụ.

Do đó, $\int\limits_1^{+\infty} \ln^3\left(\frac{2x^2+3x+5}{2x^2+8x+1}\right) dx$ tích phân cũng hội tụ.

Bài 3.2.4

$$\int\limits_1^{+\infty} \left[1-\cos\left(\frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3}\right)\right] dx$$

Lời giải:
Ta có:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3} = 0$$

Áp dụng **vô cùng bé tương đương** ta được:

$$\left[1-\cos\left(\frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3}\right)\right] \sim \frac{1}{2}\left(\frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3}\right)^2 \qquad (x\to\infty)$$

Áp dụng **vô cùng lớn tương đương**:

$$\left(\frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3}\right)^2 \sim \left(\frac{3x^4}{8x^7}\right)^2 = \frac{9}{64x^6} \qquad (x\to\infty)$$

Ta có tích phân $\int\limits_1^{\infty} \frac{9}{64x^6} dx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-9}{320x^5} + \frac{9}{320} = \frac{9}{320}$ hội tụ.

Nên tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \left[1-\cos\left(\frac{3x^4+2}{8x^7+4x^2+3}\right)\right] dx$ cũng hội tụ.

Bài 3.2.5

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+3}{2+4x+5x^3} dx$$

Lời giải:
Theo **vô cùng lớn tương đương** khi ($x \to \infty$) thì:

$$\frac{x\sqrt{x}+3}{2+4x+5x^3} \sim \frac{x\sqrt{x}}{5x^3} = \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}$$

Ta có tích phân $\int \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$, do tích phân $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ là tích phân *Riemann* có $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ nên hội tụ, suy ra tích phân $\int \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ hội tụ.

Do đó: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+3}{2+4x+5x^3}\mathrm{d}x$ cũng hội tụ theo.

Bài 3.2.6

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

Lời giải:

Ta đặt: $\sqrt{1+x^2} = t - x$, khi đó: $\begin{cases} x &= \dfrac{t^2-1}{2t} \\ \sqrt{1+x^2} &= t - x = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ \mathrm{d}x &= \dfrac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t \end{cases}$. Ta đổi biến:

x	1	$+\infty$
t	$\sqrt{2}+1$	$+\infty$

Đổi biến tích phân đã cho thành:

$$\int\limits_{\sqrt{2}+1}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \ln\left[\frac{t-1}{t+1}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}+1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\ln\left[\frac{t-1}{t+1}\right] - \lim_{x\to(\sqrt{2}+1)^+}\ln\left[\frac{t-1}{t+1}\right] = 0 - \ln\frac{1}{1+\sqrt{2}} = -\ln\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ.

Bài 3.2.7

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{1+3x^4}\mathrm{d}x$$

Lời giải:
$\forall x \geqslant 1$ ta luôn có:

$$\left|\frac{\cos(4x)}{1+3x^4}\right| = \frac{|\cos(4x)|}{1+3x^4} \leqslant \frac{1}{1+3x^4} \leqslant \frac{1}{3x^4} \leqslant \frac{1}{x^4}$$

Do tích phân $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$ là tích phân *Riemann* với $\alpha = 4 > 1$ là tích phân hội tụ nên tích phân $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\cos(4x)}{1+3x^4}\right|\mathrm{d}x$ cũng hội tụ.

Theo **tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối** ta cũng có $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{1+3x^4}\mathrm{d}x$ hội tụ theo.

3.2.2 Tích phân suy rộng loại 2

Bài 3.2.8 Tính tích phân sau:

$$\int\limits_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$$

Lời giải:
Sử dụng phương pháp **Tích phân đổi biến**, $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}(\ln x)$, ta có:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}} = \int_1^e [\ln x]^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}(\ln x) = 2[\ln x]^{\frac{1}{2}}\Big|_1^e = 2\sqrt{\ln x}\Big|_1^e = 2$$

Bài 3.2.9 Tính tích phân sau:

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Lời giải:

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{u=-x^2}{=} \frac{-1}{2}\int_0^{-\infty} e^u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}e^0 - \lim_{u\to-\infty} e^u = \frac{1}{2}$$

Xét tính hội tụ (phân kỳ) của các tích phân sau:

Bài 3.2.10

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$$

Lời giải:
Ta có: $\forall x \in [1;+\infty) \Rightarrow \ln(1+x) \geqslant \ln 2$.
Ta xét tích phân sau:

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln 2}{x}\mathrm{d}x = \ln 2\,[\ln|x|]_1^{+\infty} = +\infty$$

Do đó, tích phân dã cho phân kì.

Bài 3.2.11

$$\int_0^1 \frac{\ln x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Lời giải:
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$, $f(x)$ có một tiệm cận đứng là $x=0$ khi $(x \to 0^+)$.
Sử dụng **vô cùng bé tương đương** sau $\ln x = \ln[1+(1-x)] \overset{x\to 1}{\sim} (x-1)$
Ta được tích phân sau **tương đương** với tích phân ban đầu:

$$\begin{aligned} J = \int_0^1 \frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^1 - \tan^{-1}(x)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Tích phân J hội tụ nên tích phân ban đầu cũng hội tụ.

Bài 3.2.12

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

Lời giải:

Áp dụng **công thức tích phân từng phần** $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$,

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}(-\cos x)\\ &= \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{x\to\infty} -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 + I\end{aligned}$$

Ta có:

$$J = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\mathrm{d}x$$

.

Do $|\cos x| \leqslant 1$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$ nên tích phân J hội tụ hay I cũng hội tụ theo.

Mặt khác, nếu đặt $f(x) = \frac{-\cos x}{x}$, khi đó theo nguyên lí kẹp, ta có:

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Suy ra:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{\cos x}{x} = 0$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ.

■

Bài 3.2.13 Tính tích phân bất định sau:

$$I = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

Lời giải:

Đặt $x = \tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$ và $u = tan^{-1}x$.

Do $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ nên tích phân bất định viết lại như sau:

$$I = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 u}\cdot\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int \cos^2 u\mathrm{d}u$$

.

Sử dụng công thức hạ bậc: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, ta có:

$$I = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sin(2\tan^{-1}x)\right) + C$$

■

Bài 3.2.14 Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi sau:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+3n+4}\right)^{n^2}$$

Lời giải:

Đặt $a_n = \frac{1}{5^n}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+3n+4}\right)^{n^2}$, do dãy a_n có chứa lũy thừa của n nên ta sẽ ưu tiên dùng **Tiên chuẩn căn thức - Root test** hay còn gọi là **tiêu chuẩn Cauchy** để khảo sát sự hội tụ của chuỗi.
Ở bài toán này ta sẽ phải sử dụng một giới hạn đặt biệt sau:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ta có :

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\left|\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+3n+4}\right)^n\right| = \frac{1}{5}\left|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+3n+4}\right)^n\right| \\
&= \frac{1}{5}\left|\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-n-1}{2n^2+3n+4}\right)^n\right| \\
&= \frac{1}{5}\left|\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+3n+4}{-n-1}}\right)^{\frac{2n^2+3n+4}{-n-1}}\right]^{\frac{n(-n-1)}{2n^2+3n+4}}\right| \\
&= \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{5\sqrt{e}} < 1
\end{aligned}
$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo **tiêu chuẩn Cauchy**

$$
\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \iint_{\mathbf{R}} f(x,y)\mathrm{dA},\ \nabla f=\nabla g,\ \nabla f=\langle f_x(a,y),\, f_y(x,y)\rangle = f_x(x,y)\mathbf{i}+f_y(x,y)\mathbf{j},\ D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\nabla f\cdot\mathbf{u}
$$

$$
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{det}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}
$$

$$
\iiint_{\mathbf{E}} \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}V
$$

Problem Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{e^{3x}-1}\mathrm{d}x$$

Lời giải:
Ta có khai triển **Taylor** của hàm số $\ln(1+\sqrt[4]{x})$ là

$$\ln(1+\sqrt[4]{x}) = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}(\sqrt[4]{x})^3 - \frac{1}{4}x + \cdots$$

.
Do đó ta có đẳng thức tương đương sau:

$$\frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{e^{3x}-1} \sim \frac{\sqrt[4]{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}(\sqrt[4]{x})^3 - \frac{1}{4}x}{e^{3x}-1} \sim \frac{-\frac{1}{4}x}{e^{3x}}$$

khi $x \to \infty$
Ta xét tích phân sau, là tích phân có cùng tính chất với tích phân đã cho:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4}x}{e^{3x}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int_1^{+\infty} x\cdot e^{-3x}\mathrm{d}x$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{4}\int_1^{+\infty} x\cdot e^{-3x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}\int_1^{+\infty} x\mathrm{d}e^{-3x} \\
&= \frac{1}{12}\left[e^{-3x}\cdot x\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{12}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{3x}} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{3e^{3x}}\Big|_1^{\infty} \right] \\
&= -\frac{1}{18e^3}
\end{aligned}$$

Do đó I hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ theo.