Lý thuyết quaternion và giải thuật bộ lọc Mahony cho bộ ước lượng trạng thái AHRS

Ngày viết bản đầu tiên: 2022.01.09

Ngày cập nhật: 2024.02.11

Tác giả: Nguyễn Đình Thông

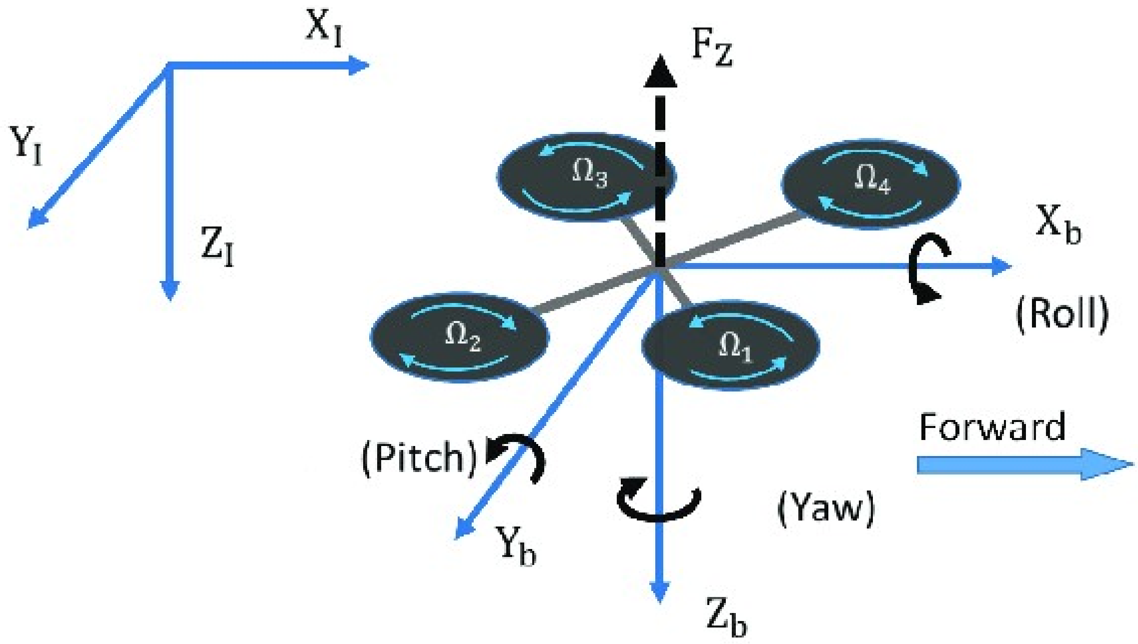
Email: nguyendinhthongit@gmail.com

1.1. Đơn vị ước lượng trạng thái

Đơn vị ước lượng trạng thái là phần quan trọng cho việc điều khiển một hệ thống UAV, để xây dựng đơn vị ước lượng trạng thái chúng ta cần có kiến thức về toán đặc biệt là về phép xoay trong không gian 3 chiều, giải thuật bộ lọc xử lý tín hiệu.

Nội dung trong chương này là giới thiệu các kiến thức toán học cho phép xoay trong không gian ba chiều, trọng tâm là lý thuyết đại số quaternion. Trình bày ý tưởng và giải thuật bộ lọc Mahony cho việc ước lượng trạng thái của hệ thống, và giới thiệu về hai loại bộ lọc thông thấp phổ biến là bộ lọc bù và bộ lọc trung bình.

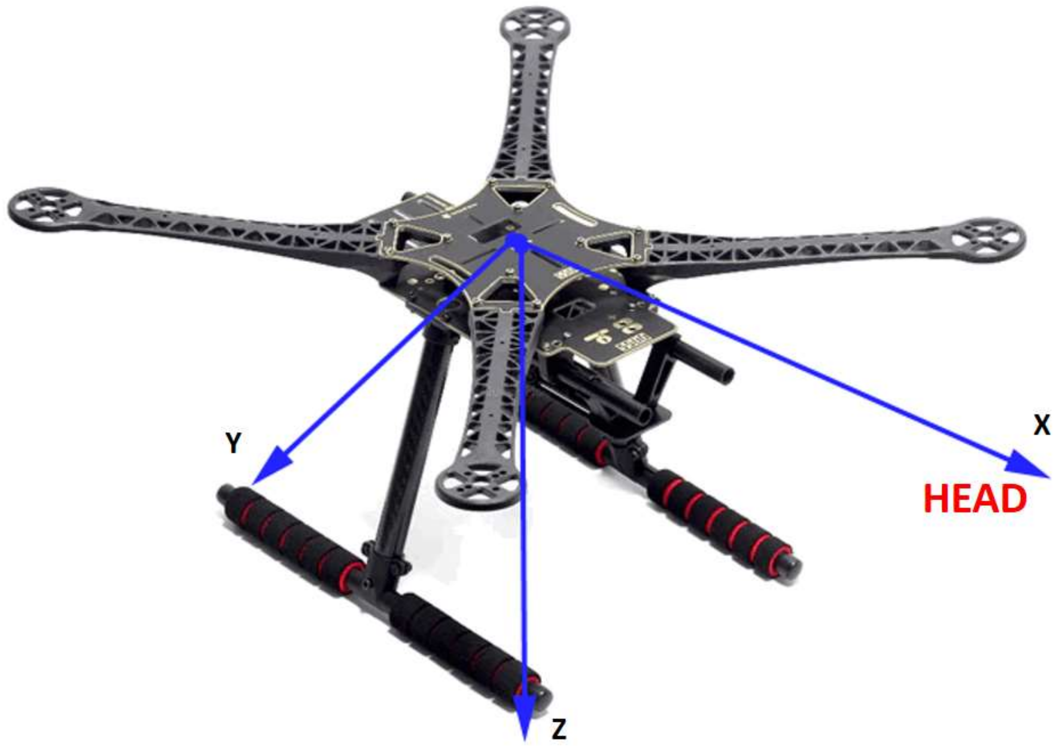
1.1.1. Quy ước hệ trục tọa độ



Hình 1.1.1 Quy ước hệ tọa độ BF và EF

Chọn hệ tọa độ như hình, hệ tọa độ quán tính (Earth Frame – EF) cố định $X_1Y_1Z_1$, hệ tọa độ body luôn luôn gắn với quadcopter $X_bY_bZ_b$.

Gốc tọa độ BF trùng với trọng tâm của quadcopter.



Hình 1.1.2 Quy ước chiều và góc xoay

Chiều z hướng xuống, x hướng trùng trục xoay góc θ, y hướng trùng trục xoay góc ϕ. Chiều dương các góc xoay được quy ước theo quy tắc nắm tay phải.

1.1.2. Quaternion

Các thuật toán ước lượng trang thái trong không gian ba chiều thường được xây dựng trên hai cách biểu diễn DCM hoặc là quaternion, bởi vì đây là hai cách biểu diễn chính xác cho mô tả định hướng và các phép xoay trong không gian ba chiều.

Ưu điểm của quaternion so với Direction Cosine Matrix.

Phép xoay trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi ma trận trực giao 3x3, quaternion chỉ dùng 4x1. Do đó khối lượng tính toán thực hiện là ít hơn, do đó ít tốn thời gian và tài nguyên vi xử lý hơn.

Sau mỗi bước cập nhật trạng thái, dùng DCM chúng ta cần phải thực hiện phép toán để đảm bảo tính trực giao của 3 vectors biểu diễn tương ứng, sẽ gây ra các vấn đề như, tốn tài nguyên và thời gian của vi điều khiển, tích lũy sai số tính toán. Với quaternion chúng ta không cần phải lo đảm bảo tính trực giao như DCM nữa, và với mỗi lần cập nhật quaternion trạng thái, ta chỉ cần chuẩn hóa nó về quaternion đơn vị.

1.1.2.1. Đại số về quaternion

i. Định nghĩa và các phép toán cơ bản

Một quaternion là một dạng số phức đại lượng có hai phần chính là phần thực q_0, và phần vector $\vec{q}$.

$$q = [\vec{q}, q_0] = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_0$$

i, j, j được gọi là các thành phần ảo quaternion.

Tính chất giữa các thành phần ảo.

$$i^2 = k^2 = k^2 = ijk = -1$$

Từ đó suy ra các phương trình sau

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

Độ lớn của quaternion

$$\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Quaternion liên hợp

$$conj(q) = q^* = [\vec{q}, q_0]^* = -q_1 i - q_2 j - q_3 k + q_0$$

Quaternion chuẩn hóa.

$$norm(q) = \frac{q}{\|q\|}$$

Quaternion nghịch đảo.

$$inv(q) = q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

Cho 2 quaternion q và p có dạng.

$$q = [\vec{q}, q_0] = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_0$$
$$p = [\vec{p}, p_0] = p_1 i + p_2 j + p_3 k + p_0$$

Phép cộng hai quaternion

$$\begin{aligned} p + q = [\vec{q}, q_0] + [\vec{p}, p_0] &= [\vec{p} + \vec{q}, q_0 + p_0] \\ &= (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k + (q_0 + p_0) \end{aligned}$$

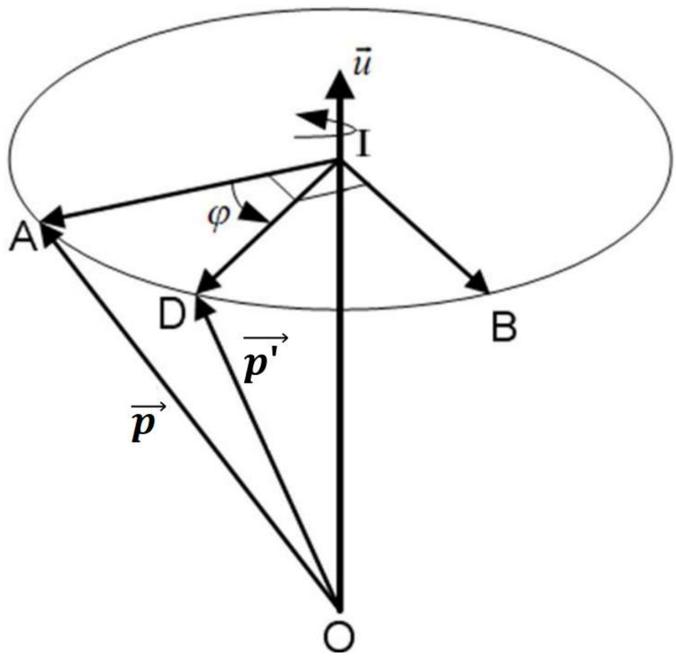
Phép nhân quaternion

$$q \otimes p = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = L(q)p$$

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = R(p)q$$

ii. Phép toán xoay dựa trên quaternion

Theo định lý xoay của Euler (Euler's rotation theorem), mọi sự thay đổi định hướng của vật rắn trong không gian 3 chiều từ trạng thái này sang trạng thái khác đều có thể biểu diễn bằng một phép xoay 1 góc φ quanh 1 vector đơn vị $\vec{u}$.



Hình 1.1.3 Minh họa phép xoay dùng đại số quaternion

Phép xoay này được biểu diễn bởi 1 quaternion xoay như sau.

$$q = [\vec{q}, q_0] = \vec{u} sin\frac{\varphi}{2} + cos\frac{\varphi}{2}$$

Một vector trong không gian 3 chiều có tọa độ $[p_x; p_y; p_z]$ được biểu diễn là quaternion thuần $p = p_x i + p_y j + p_z k + 0$

Trạng thái mới của p sau khi áp dụng phép xoay 1 góc φ quanh 1 vector đơn vị $\vec{u}$, là p', có công thức tính là:

$$p' = qpq^{-1}$$

Công thức này có thể được chứng minh nhờ kết quả công thức xoay của Rodrigues.

iii. Ma trận xoay dựa trên quaternion

Cũng tương tự như ma trận xoay từ DCM, từ công thức phép toán xoay ở trên ta xây dựng ma trận xoay dựa trên quaternion.

$$p' = qpq^{-1} = Rp$$

$$R = \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix}$$

Ma trận này thể hiện sự liên hệ giữa biểu diễn quaternion và DCM, dó vậy ta có thể sử dụng một số kết quả của DCM cho việc tính toán và xây dựng phương trình dùng quaternion.

iv. Chuyển đổi giữa quaternion và các góc Euler

Chuyển đổi từ quaternion sang góc Euler

Từ quaternion biểu diễn định hướng, ta có công thức sau để chuyển thành các góc trong không gian.

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atan2\ (2(q_1q_2+q_3q_0), 2q_0^2+2q_1^2-1) \\ \operatorname{asin}(-2q_1q_3+2q_2q_0) \\ atan2\ (2(q_2q_3+q_1q_0), 2q_0^2+2q_3^2-1) \end{bmatrix}$$

Chuyển đổi từ các góc Euler sang quaternion

Từ định hướng trong không gian được biểu diễn bởi 3 góc Euler, công thức chuyển sang quaternion tương ứng là:

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\left(\frac{\phi}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\psi}{2}\right)+s\left(\frac{\phi}{2}\right)s\left(\frac{\theta}{2}\right)s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ s\left(\frac{\phi}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\psi}{2}\right)-c\left(\frac{\phi}{2}\right)s\left(\frac{\theta}{2}\right)s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right)s\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\psi}{2}\right)+s\left(\frac{\phi}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right)s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right)s\left(\frac{\psi}{2}\right)-s\left(\frac{\phi}{2}\right)s\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

1.1.2.2. Phương trình động học dưới dạng quaternion

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes p(\omega_B)$$

Với ω_B là vận tốc góc trong BF, và các đại lượng:

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_0$$
$$p(\omega_B) = \omega_x i + \omega_y i + \omega_z i + 0$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix}$$

Suy ra

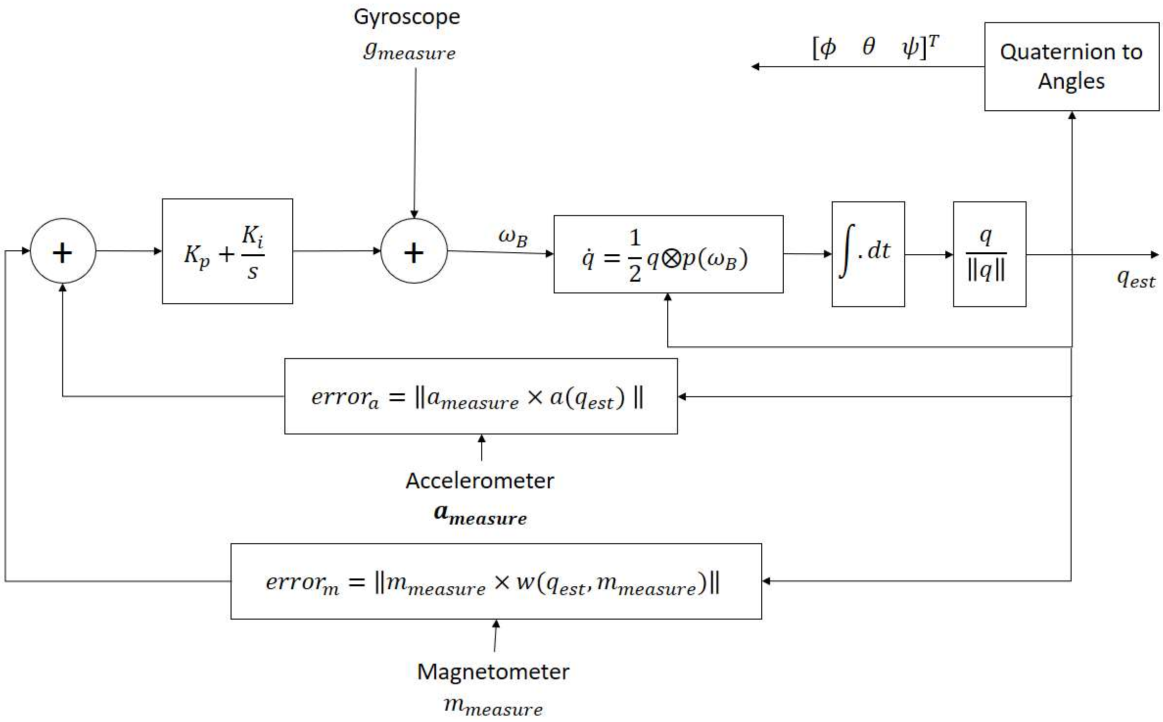
$$\dot{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

hoặc viết ở dạng khác

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (\text{エラー! 指定したスタイルは使われていません。}.1)$$

1.1.3. Giải thuật Mahony Filter

Từ lý thuyết về quaternion ở mục (3.2.2), và các nghiên cứu của Mahony, bộ lọc Mahony Filter được dựa trên ý tưởng sai số đo từ cảm biến gyroscope sẽ được tính toán qua bộ điều khiển PI, với đầu vào được tính toán dựa vào gia tốc kế và từ trường kế, trạng thái quaternion bước trước đó.



Hình 1.1.4 Lưu đồ giải thuật Mahony Filter

Giải thuật Mahony Filter như sau:

i. Tính thành phần sai số hiệu chỉnh tốc độ góc từ gia tốc

Chuẩn hóa gia tốc kế từ giá trị cảm biến.

$$a_{measure} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{measure} = \frac{a_{raw}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Tính vector gia tốc từ quaternion bước trước đó.

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ q_0q_0 - q_1q_1 - q_2q_2 + q_3q_3 \end{bmatrix}$$

Sai số hiệu chỉnh tốc độ góc từ gia tốc kế là tích có hướng của vector gia tốc kế và vector gia tốc của trạng thái hiện tại.

$$error_a = a_{measure} \times v$$

ii. Tính thành phần sai số hiệu chỉnh từ trường kế

Chuẩn hóa từ trường kế từ giá trị cảm biến.

$$m_{measure} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_{measure} = \frac{m_{raw}}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}}$$

Tính vector w, vector từ trường ước lượng.

$$w = w(q, b(h(q, m_{measure})))$$

Sai số hiệu chỉnh tốc độ góc từ từ trường kế là tích có hướng của vector từ trường từ cảm biến và vector từ trường được ướng lượng .

$$error_m = m_{measure} \times w$$

iii. Tính sai số hiệu chỉnh cho vận tốc góc (gyroscope)

Từ sai số vận tốc góc tính được từ gia tốc và từ trường. Tổng sai số:

$$error_g = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = error_a + error_m$$

Sai số này qua bộ điều khiển PI như trên sơ đồ Hình 3.2.2, ngõ ra của bộ điều khiển PI là lượng để hiệu chỉnh lại tín hiệu gyroscope.

Công thức cập nhật gyro ở miền rời rạc:

$$\omega_B = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{Maho \quad Filter} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_{measure} + K_p \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + K_i \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

iv. Tính lượng quaternion thay đổi

Tính vi phân quaternion ước lượng được dùng công thức phương trình động học dưới dạng quaternion từ phương trình (3.1).

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & g_z & -g_y & g_x \\ -g_z & 0 & g_x & g_y \\ g_y & -g_x & 0 & g_z \\ -g_x & -g_y & -g_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

v. Cập nhật quaternion trạng thái mới

$$q = \int_0^t \dot{q} d\tau$$

Ở miền rời rạc.

$$q(k) = q(k-1) + \dot{q}(k)T$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} T$$

vi. Chuẩn hóa lại quaternion cho bước kế tiếp và tính góc

Chuẩn hóa lại quaternion

$$q = \frac{q}{\|q\|} = \frac{q}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

Chuyển đổi từ quaternion sang góc ϕ, θ, ψ dùng công thức chuyển đổi từ quaternion sang góc Euler ở mục (4.2.1.4)

Tài liệu tham khảo:

https://philstech.blogspot.com/2015/06/complimentary-filter-example-quaternion.html