1 Парадокс Карри

Лямбда-исчисление было предложено Черчем в начале 1930х годов для формализации математики В лямбда-исчислении легко выражаются сложные понятия — например, натуральные числа, причем это достигается без введения дополнительного набора аксиом как в формальной арифметике. Предполагалось, что эта теория будет свободна от парадоксов в силу своей элементарности.

Однако, довольно быстро в нем нашлись неустранимые парадоксы. Далее будет изложен один из парадоксов, это не оригинальный парадокс 1932 года — поскольку современное лямбда-исчисление появилось в 1940 году как результат упрощения Черчем исходной теории.

Построим логическое исчисление на основе языка лямбда-выражений, добавив в паре к аппликации импликацию. В таком языке функция $\lambda f.\lambda x.fx \to fx$ являлась бы тавталогией. Естественно, в этом исчислении будут аксиомы и правила вывода, как и в обычном исчислении — среди них будут и обычные логические аксиомы, и аксиомы про лямбда-преобразования, и подобным выражениям будет дан четкий формальный смысл.

Мы будем считать, что если $A =_\beta B$, то $\vdash A \to B$ и $\vdash B \to A$. Удивительно было бы ожидать иного — ведь результат редукции A и B одинаков (либо обе редукции не заканчиваются). В программировании бывает, что мы не можем заменить, например, вызов функции на его результат — например, `printf("Hello, world")` нельзя заменить на 1, хоть численно их результат равен. В математике же считается, что разницы между разной записью значений нет: уравнение $x^2 = 4$ выполнено и при $x = 2 \cdot \sin \pi$, и при $x = \log_2 4$.

Также мы ожидаем доказуемость

$$\alpha \to \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta$$

и

$$\alpha \to \alpha$$

(было бы обидно, если такое нельзя было бы доказать).

В таком исчислении мы могли бы ввести аксиоматику Пеано простыми определениями (см.):

И, не вводя никаких дополнительных аксиом, доказать, скажем, такие утверждения:

Однако, так построенное исчисление черезчур мощно, о чем свидетельствует следующее рассуждение.

Рассмотрим выражение $F_\alpha \equiv \lambda x.xx \to \alpha$ и выражение $\Phi_\alpha \equiv F_\alpha F_\alpha$. Нетрудно видеть, что $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \to \alpha$. Тогда:

$\vdash \Phi_\alpha \to \Phi_\alpha$	Доказуемое утверждение
$\vdash \Phi_\alpha \to \Phi_\alpha \to \alpha$	бета-эквивалентность
$\vdash (\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha \to \alpha) \to (\Phi_\alpha \to \alpha)$	Доказуемое утверждение
$\vdash \Phi_\alpha \to \alpha$	M.P.
$\vdash \Phi_\alpha$	бета-эквивалентность
$\vdash \alpha$	M.P.

Таким образом мы показали, что любое утверждение может быть выведено в данной системе, т.е. система противоречива. Данное противоречие является следствием выразимости в данной системе парадокса Карри. Парадокс можно продемонстрировать фразой «если данное высказывание истинно, то луна сделана из зеленого сыра» или, чуть более формально, выражением $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha \to \alpha$ (если выражение истинно, то из него следует все что угодно).

Чтобы избежать этого парадокса, находящегося в самой основе теории, мы должны чем-то поступиться. Логично уменьшить силу лямбда-выражений, которые мы используем (например так, чтобы Y—комбинатор был невыразим). Без остальных элементов теории обойтись будет тяжело. Из этой идеи и выросла современная теория типов (также, как и современная теория множеств). Дальнейший курс во многом и будет состоять из изучения разнообразных способов ограничения выразительной силы лямбда-исчисления, которая всё ещё способна выразить необходимые мысли, но уже достаточно слабых, чтобы приводить к парадоксам.

2 Просто типизированное лямбда-исчисление

2.1 Импликационный фрагмент интуиционистской логики

Рассмотрим следующее исчисление, являющееся подмножеством интуиционистской логики, содержащим только импликацию. Это исчисление генценовского типа.

Формула — либо маленькая буква греческого алфавита, либо выражение вида $\phi \to \psi$, где ϕ и ψ - формулы, либо выражение вида (ϕ), где ϕ - формула.

Аксиомы и правила вывода:

1. Схема аксиом:
$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}$$

2. Введение импликации:
$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}$$

3. Удаление импликации:
$$\frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \phi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Следующая теорема покажет, что если некоторая формула (составленная только из импликаций и переменных) выводима в интуиционистской логике, то она выводима и в импликационном ее фрагменте.

Теорема 2.1. Модели Крипке корректны и полны для данного исчисления.

Доказательство. Корректность моделей Крипке для данного исчисления следует из их корректности для полного исчисления. Для полноты же нам достаточно показать, что если неверно $\Gamma \vdash \alpha$, то найдется модель Крипке, в которой неверно и $\Gamma \models \alpha$. Построим такую модель.

В качестве миров в этой модели мы возьмем множества формул, замкнутых относительно выводимости: $D(\Gamma) = \{\alpha | \Gamma \vdash \alpha\}$. Отношение вынуждения определим так: $\Gamma \Vdash p$, если $p \in \Gamma$. Наследование же миров будем рассматривать по включению: $\Gamma < \Delta$, если $\Gamma \in \Delta$.

Покажем, что так заданная модель — корректна и полна. То есть, $\Gamma \vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \Vdash \alpha$. Сделаем это индукцией по структуре формулы α.

- $\alpha = x$. Тогда, по определению, $\Gamma \vdash x$ эквивалентно $x \in \Gamma$ и эквивалентно $\Gamma \Vdash x$.

- $\alpha = \beta \to \gamma$.

  Сперва покажем полноту. Пусть $\Gamma \Vdash \beta \to \gamma$. Значит (определение вынуждения импликации в моделях Крипке) $D(\Gamma \cup \beta) \Vdash \gamma$. Раз так, то $\Gamma, \beta \vdash \gamma$ (предположение индукции). По правилу введения импликации тогда $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$.

  Теперь покажем корректность. Пусть $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$ и в некотором мире $\Gamma_n \geq \Gamma$ выполнено $\Gamma_n \Vdash \beta$. Раз $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$, то $\Gamma_n \vdash \beta \to \gamma$. Раз $\Gamma_n \Vdash \beta$, то $\Gamma_n \vdash \beta$ (по полноте, доказанной выше). Тогда $\Gamma_n \vdash \gamma$ (по правилу удаления импликации), и, следовательно, $\Gamma_n \Vdash \gamma$ (по индукционному предположению). Значит, и $\Gamma_n \Vdash \beta \to \gamma$.

$\square$

2.2 Импликационный фрагмент интуиционистской логики

Рассмотрим язык интуиционистской логики, в котором допустима только одна связка — импликация. Такой язык мы назовем языком импликационного фрагмента интуиционистской логики.

Также, рассмотрим все аксиомы интуиционистского исчисления высказываний, которые можно записать в этом языке — они составят аксиомы данного фрагмента логики.

Теорема 2.2. Импликационный фрагмент интуиционистской логики корректен и полон в моделях Крипке.

Доказательство. Корректность очевидна из корректности интуиционистского исчисления высказываний.

Для доказательства полноты мы построим модель Крипке, в которой мирами будут замкнутые относительно доказуемости множества формул. Очевидно, что для любого такого мира W и любой формулы ϕ условия $\phi \in W$ и $W \vdash \phi$ эквивалентны.

Будем считать, что $W \Vdash x$ тогда и только тогда, когда $x \in W$. Покажем тогда, что это справедливо и для любой формулы ϕ (тем самым мы покажем, что миры действительно образуют модель Крипке).

Докажем это индукцией по структуре формулы ϕ. База следует из определения, теперь переход. Т.е., пусть есть формула $\alpha \to \beta$, причём $\alpha \in W$ т.и.т.т., когда $W \Vdash \alpha$, и $\beta \in W$ т.и.т.т., когда $W \Vdash \beta$.

Пусть $W \vdash \alpha \to \beta$. Покажем, что $W \Vdash \alpha \to \beta$. Значит, надо показать, что если $W_1 \geq W$ и $W_1 \Vdash \alpha$, то $W_1 \Vdash \beta$. Рассмотрим такой W_1. По предположению индукции $W_1 \vdash \alpha$, и поскольку $W_1 \vdash \alpha \to \beta$ (т.к. $W \subset W_1$), то $W_1 \vdash \beta$ (М.Р.). Значит, $W_1 \Vdash \beta$ (опять же, по предположению индукции).

Обратно, пусть $W \Vdash \alpha \to \beta$. Покажем, что $W \vdash \alpha \to \beta$. Пусть W_α — транзитивное замыкание по $\vdash$ множества $W \cup \{\alpha\}$. Тогда $W_\alpha \Vdash \beta$ (по определению моделей Крипке). Но тогда $W_\alpha \vdash \beta$ (по предположению индукции). Значит, $W, \alpha \vdash \beta$, то есть $W \vdash \alpha \to \beta$ (по т. о дедукции).

Теперь, пусть α — формула импликационного фрагмента и $\models \alpha$. Если окажется, что $\nvdash \alpha$, то $\nVdash \alpha$ в введенной выше модели, что даст противоречие с $\models \alpha$. □

В этом курсе мы будем рассматривать логику в исчислении Генценовского типа (нормальный вывод).

Рассмотрим три правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \texttt{аксиома}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\ \texttt{введение} \to$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \texttt{удаление} \to, \text{М.Р.}$$

Лемма 2.3. Импликационный фрагмент в данном исчислении эквивалентен фрагменту в Гильбертовском исчислении.

Определение 2.1. Тип — это:

- Элементарный тип — маленькая греческая буква из начала алфавита, возможно, с индексом $(\alpha, \beta, \dots)$

- Составной тип. Если τ и σ — некоторые типы, то запись вида $\tau \to \sigma$ — это также некоторый тип.

Греческими буквами конца алфавита ($\sigma, \dots$) будем обозначать типы вообще, неважно, составные или элементарные.

Существует два основных стиля типизации лямбда-исчисления — по Чёрчу и по Карри.

3 Лямбда-исчисление по Чёрчу

Определение 3.1. Пред-лямбда-терм по Чёрчу — это один из следующих объектов:

- Переменная $(a, b, c, \dots)$
- Применение $(\Lambda_1 \Lambda_2)$
- Абстракция ($\lambda x : \tau.\Lambda$ или $\lambda x^\tau.\Lambda$)

По пред-лямбда-терму можно построить лямбда-терм, введя альфа-эквивалентность аналогично бестиповому исчислению (типы должны совпадать).

4 Лямбда-исчисление по Карри

Существует второй вариант исчисления. Главное его отличие — в отсутствии типов при указании переменных в лямбда-термах. Правила типизации:

Принципиальных отличий нет, легко показать следующую теорему:

Определение 4.1 (Стирание)**.** Функцией стирания называется следующая функция:

$Er : \Lambda_T \to \Lambda$:

$$Er(A) = \begin{cases} x & A \equiv x \\ Er(M)\ Er(N) & A \equiv M\ N \\ \lambda x.Er(P) & A \equiv \lambda\ x : \tau.\ P \end{cases}$$

Теорема 4.1.

1. Если $M \to_\beta N$, то $Er(M) \to_\beta Er(N)$
2. Если $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\text{к}} Er(M) : \alpha$.

Поднятие:

1. Если $M \to_\beta N$, то для любого $M_T \in \Lambda_T$, такого, что $Er(M_T) = M$, найдется $N_T \in \Lambda_T$, такой, что $Er(N_T) = T$ и $M_T \to_\beta N_T$.
2. Если $\Gamma \vdash_{\text{к}} M : \alpha$, то найдется такой $M_T \in \Lambda_T$, что $Er(M_T) = M$ и $\Gamma \vdash_{\text{ч}} N : \alpha$.

Доказательство. Упражнение. □

Также, легко доказать аналоги теорем Черча-Россера и теоремы о нормализации.

Однако, несмотря на сходство, есть и отличие — типизация по Карри несколько более широкая. А именно, если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то из этого не следует $\sigma = \tau$. Скажем, справедливо $\vdash_{\text{к}} \lambda x.x : \alpha \to \alpha$ и $\vdash_{\text{к}} \lambda x.x : \beta \to \beta$.

4.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Теперь мы готовы показать, что просто типизированное лямбда-исчисление в некотором смысле изоморфно импликационному фрагменту интуиционистской логики.

Заметим сперва, что T содержит в точности те же формулы, что и введенный в предыдущем параграфе язык.

Теорема 4.2. (Об изоморфизме Карри-Ховарда)

1. Если $\Gamma \vdash_{ч} M : \phi$, то $types(\Gamma) \vdash \phi$.
2. Если $\Gamma \vdash \phi$, то найдется такой $M \in \Lambda_T$, что $\{x_\phi | \phi \in \Gamma\} \vdash_{ч} M : \phi$.

Доказательство. Доказательство обоих частей теоремы несложно, но мы приведем доказательство второй части из методических соображений.

Покажем существование M индукцией по структуре доказательства $\Gamma \vdash \phi$. Для этого рассмотрим заключительное правило и разберем случаи.

□

5 Отрицание

В данном случае нам будет удобнее ввести специальное обозначение для лжи ($\perp$), а отрицание ввести как формулу $\neg\phi \equiv \phi \to \perp$. Ложь же мы можем определить следующим образом:

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}$$

С точки зрения изоморфизма никакой терм не имеет тип $\perp$. Иными словами, если мы доказали, что некоторый терм имеет тип $\perp$, то значит данный терм не существует.

Из этого хорошо видно, что изоморфизм как раз соответствует интуиционистской, а не классической логике. В самом деле, рассмотрим выражение $\alpha \vee \neg\alpha$, то есть $\alpha \vee (\alpha \to \perp)$. Можем ли мы утверждать, что данный тип всегда обитаем? Если так, то тогда всегда существует лямбда-терм $A : \alpha \vee (\alpha \to \perp)$. Однако, непонятно, как такое выражение доказать: функция $\alpha \to \perp$ в общем случае не является обитаемой (она должна возвращать лямбда-выражение, которого нет в природе — такое возможно только если $\alpha = \perp$).

6 Сильная нормализация

Определение 6.1. Будем называть терм A *сильно нормализуемым* если выполнено одно из следующих условий:

- A в нормальной форме
- $A \to_\beta B$ влечёт сильную нормализуемость B

Лемма 6.1. Пусть A — сильно нормализуемый терм, тогда любая цепочка редукций неизбежно приводит к нормальной форме за конечное количество шагов.

Доказательство. Рассмотрим множество N_0 — множество всех термов в нормальной форме. Рассмотрим процесс его пополнения: $N_{n+1} = N_n \cup A : \text{для всех} BA \to_\beta B \text{влечет} B \in N_n$. Тогда $\cup N_i = N^*$ будет содержать все сильно нормализуемые термы (доказательство очевидно из определения).

Пусть $(A) = mini : A \in N_i$. Очевидно, что если $A \to_\beta B$, то $C(A) > C(B)$. Отсюда следует конечность любой цепочки редукций. □

Определение 6.2. Множество SN — множество сильно нормализуемых термов

Определим оценку для типов. Будем считать, что $[\![\sigma]\!]$ — это все лямбда-выражения, которые могут иметь данный тип.

Соответственно определим аналог для функций на оценках, $A \to B = \{C : \forall P \in A(CP \in B)\}$, множество всех термов, которые из любого терма из A делают терм из B. А именно:

Определение 6.3. Оценкой типа τ назовем:

$$[\![\tau]\!] = \begin{cases} SN, & \text{если } \tau \text{ — атомарный тип} \\ [\![\sigma]\!] \to [\![\theta]\!], & \text{если } \tau \equiv \sigma \to \theta \end{cases}$$

Определение 6.4. Будем называть множество S *насыщенным*, если одновременно выполнены следующие условия:

1. $S \subseteq SN$
2. Если $n \geq 0$ и $\{M_1, \dots, M_n\} \subseteq SN$, то $xM_1 \dots M_n \in S$.
3. Если $n \geq 1$, $\{M_1, \dots, M_n\} \subseteq SN$ и $P[x := M_1]M_2 \dots M_n \in S$, то $(\lambda x.P)M_1 \dots M_n \in S$.

Лемма 6.2. SN насыщено

Доказательство. Проверим требования к насыщенному множеству.

1. $SN \subseteq SN$
2. Пусть найдется бесконечная последовательность редукций $xM_1 \dots M_n \longrightarrow_\beta xM_1' \dots M_n' \longrightarrow_\beta xM_1'' \dots M_n'' \dots$. Тогда найдется бесконечная последовательность редукций какого-то из его аргументов: $M_k \longrightarrow_\beta M_k' \longrightarrow_\beta M_k'' \dots$. Значит, $M_k \notin SN$. Поэтому, если $M_k \in SN$ для всех k, то и $xM_1 \dots M_n \in SN$.
3. Пусть $P[x := M_1]M_2 \dots M_n \in SN$. Пусть существует бесконечная цепочка редукций формулы $(\lambda x.P)M_1 \dots M_n$. В данной цепочке неизбежно должна быть произведена редукция подвыражения $(\lambda x.P')M_1'$ (здесь $P \twoheadrightarrow_\beta P'$, $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M_1'$). Это так, поскольку цепочки редукций $M_1, \dots M_n$ имеют конечную длину по условию, также и редукция P не может быть бесконечной (иначе мы могли бы производить эти редукции в исходной формуле). Но результат этой редукции может быть получен из исходного выражения — после чего цепочка редукций будет иметь конечную длину по условию.

$\square$

Лемма 6.3. Если A, B насыщенны, то $A \to B$ насыщено

Доказательство. Рассмотрим $xM_1 \dots M_n$, где $M_i \in SN$. И рассмотрим $(xM_1 \dots M_n)P$, где $P \in A$. Раз $A \subseteq SN$, то $P \in SN$.

Теперь рассмотрим $P[x := Q]M_1 \dots M_n \in A \to B$. То есть, $(P[x := Q]M_1 \dots M_n)K \in B$. Тогда по определению, $(\lambda x.P)QM_1 \dots M_nK \in B$ $\square$

Лемма 6.4. Если σ — тип, то $[\![\sigma]\!]$ насыщено

Доказательство. Упражнение. $\square$

Определение 6.5.

- Оценка — отображение переменных на термы.
- Оценка терма при оценке переменных: $[\![M]\!]_\rho = M[x_1 := \rho(x_1), \dots x_n := \rho(x_n)]$ при $x_i \in FV(M)$.
- $\models M : \sigma$ — $[\![M]\!] \in \sigma$.
- $\rho \models M : \sigma$ — $[\![M]\!]_\rho \in \sigma$.
- $\rho \models \Gamma$ — $\rho \models g_i : \gamma_i$ (переменные имеют надлежащие типы в данной оценке переменных)
- $\Gamma \models M : \sigma$ — Если $\rho \models \Gamma$, то $\rho \models M : \sigma$

Теорема 6.5. Так определенная оценка корректна: если $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \models M : \sigma$.

Доказательство. Рассмотрим индукцию по построению доказательства типизиации M.

- $\overline{\Gamma \vdash x : \sigma}$. Тогда $x : \sigma \in \Gamma$. Фиксируем какую-нибудь оценку ρ. Тогда если $\rho \models \Gamma$, то обязательно $[\![x]\!]_\rho \in \sigma$. Но это и значит, что $\rho \models x : \sigma$.

$\square$

Теорема 6.6. Любой просто типизированный терм сильно нормализуемый.

Доказательство. Так как $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \models M : \sigma$. Пусть $\rho(x) = x$. Тогда $\rho \models g_i : \gamma_i$ ($g_i \in [\![gamma_i]\!]$ по лемме и определению насыщенного множества). Тогда $\rho \models \Gamma$. Тогда $\rho \models M : \sigma$, то есть $[\![M]\!]_\rho \in \sigma \subseteq SN$. $\square$

7 О классе функций, определимых в просто типизированном лямбда-исчислении

Определение 7.1. Назовем *высотой* типа $h(\tau)$ следующее выражение:

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \equiv \alpha \\ \max(h(\rho), h(\sigma)) + 1 & \tau \equiv \rho \to \sigma \end{cases}$$

Определение 7.2. Назовем расширенным полиномом функцию $E : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ следующего вида:

$$E(x, y) = \begin{cases} a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{1,1}xy + \dots + a_{m,n}x^m y^n & x > 0, y > 0 \\ b_0 + b_1 x + \dots + b_k & x > 0, y = 0 \\ c_0 + c_1 y + \dots + c_l & x = 0, y > 0 \\ k & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Определение 7.3. Пусть тип ν — это $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Пусть n — некоторое натуральное число. Выражение $\overline{n} \equiv \lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x^{\alpha}.f^n x$ назовем чёрчевским нумералом, соответствующим числу n.

Теорема 7.1. При фиксированном типе для целых чисел $\nu = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ в типизированном исчислении по Чёрчу класс двуместных функций ограничен расширенными полиномами. То есть, каков бы ни был замкнутый лямбда-терм R, такой что $\vdash_{\text{ч}} R : \nu \to \nu \to \nu$, найдется расширенный полином $E(m, n)$, такой, что $R\,\overline{m}\,\overline{n} =_\beta \overline{E(m, n)}$.

Лемма 7.2. Если в выражении X^ξ, находящемся в нормальной форме, подтерм T^τ не является свободной переменной выражения T, и $T \neq X$, то всегда найдется такой подтерм S^σ, что $h(\sigma) > h(\tau)$, причем $\sigma = \tau \to \rho$ или $\sigma = \rho \to \tau$.

Доказательство. Рассмотрим подтерм T. Возможны следующие варианты:

1. T — это некоторая переменная x (она обязана быть связанной по условию леммы). То есть T — часть выражения $S = \lambda x : \tau. \dots x \dots$. Тогда $S : \tau \to \rho$, и $h(\tau \to \rho) > h(\tau)$.

2. T — это некоторая абстракция $T = \lambda x : \sigma.P^\pi$. Тогда заметим, что по условию $T \neq X$. Значит, T входит в некоторое более общее выражение — либо в абстракцию $S^{\upsilon\to\tau} = \lambda y : \upsilon.T$, либо в применение $S^{\tau\to\upsilon}T$ (применение вида TA является редексом и потому невозможно).

3. T — это некоторое применение $T = S^\upsilon \to \tau Y$.

□

Лемма 7.3. $(\lambda t.g^n t)^m x \twoheadrightarrow_\beta g^{m\cdot n}x$.

Доказательство. Индукция по m:

База Пусть $m = 0$. Тогда $(\lambda t.g^n t)^0 x \equiv x \equiv g^{0\cdot n}x$.

Переход Пусть $(\lambda t.g^n t)^m x \twoheadrightarrow_\beta g^{m\cdot n}x$. Тогда

$$(\lambda t.g^n t)^{m+1}x \equiv (\lambda t.g^n t)^m((\lambda t.g^n t)x) \twoheadrightarrow_\beta g^{m\cdot n}((\lambda t.g^n t)x) \longrightarrow_\beta g^{m\cdot n}(g^n x) \equiv g^{(m+1)\cdot n}x$$

□

Доказательство теоремы. Рассмотрим лямбда-терм $R\, a^{\nu}\, b^{\nu}\, f^{\alpha\to\alpha}$. Очевидно, что $R : \alpha \to \alpha$.

Согласно свойству сильной нормализации, данный терм имеет нормальную форму N. Рассмотрим ее. Заметим, что если T^{τ} — подтерм N, то он обязан иметь тип либо ν, либо $\alpha \to \alpha$, либо α.

Доказать это можно разбором случаев с использованием индукции и предыдущей леммы. Заметим, что в выражении не может быть выражений атомарных типов, отличных от α (поскольку у нас запрещены свободные переменные). Возьмем некоторый терм T^{τ} и рассмотрим $h(\tau)$.

1. Если $h(\tau) \geq 3$, то $T = \overline{a}$ или $T = \overline{b}$. Пусть это не так, и существуют такие P^{π}, что $P \neq \overline{a}$, $P \neq \overline{b}$ и $h(\pi) \geq 3$. Возьмем среди таких P подтерм с типом максимальной глубины. Однако, по лемме в нем неизбежно найдется такой S^{σ}, что $h(\sigma) > h(\pi)$, что противоречит максимальности $h(\pi)$.

2. Если $h(\tau) = 2$, то τ имеет вид либо $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$, либо $(\alpha \to \alpha) \to \alpha$. По лемме найдется такой S^{σ}, что $\sigma = \tau \to \rho$ или $\sigma = \rho \to \tau$. В любом из случаев не найдется такого ρ, что $\nu = \sigma$, то есть $S \neq a$ и $S \neq b$, что невозможно по предыдущему пункту.

3. $h(\tau) = 0$ или $h(\tau) = 1$. Тогда очевидно, что $\tau \equiv \alpha$ или $\tau \equiv \alpha \to \alpha$ соответственно.

Теперь рассмотрим терм $S^{\alpha\to\alpha}$. Рассмотрим, какие выражения могут иметь такой тип. Можно показать, что это будет либо:

1. f

2. $aT^{\alpha\to\alpha}$ или $bT^{\alpha\to\alpha}$

3. $\lambda y.S_1(\dots S_k Z \dots)$, где S_i — это либо f, либо af или bf, а Z либо совпадает с y, либо является некоторой другой переменной из объемлющей лямбда-абстракции.

Пусть S — подтерм N типа $\alpha \to \alpha$. Покажем по индукции по структуре S, что $S[a := \overline{m}, b := \overline{n}] =_{\beta} f^{\overline{E(m,n)}}$, либо $\lambda y.f^{\overline{E(m,n)}}z$ (для некоторых $m, n \in \mathbb{N}_0$).

Разберем случаи:

1. $S \equiv f$ — тогда $E(m,n) = 1$ и $S \equiv f^1$.

2. $S \equiv aT$ (случай bT рассматривается аналогично) — тогда:

   Пусть $T \equiv f^{\overline{E(m,n)}}$, тогда

   $$a[a := \overline{m}]T \equiv (\lambda fx.f^m x)(\lambda x.f^{E(m,n)x})$$

   По лемме это выражение бета-эквивалентно такому:

   $$\lambda x.(f^{E(m,n)})^m x \equiv \lambda x.f_1^E(m,n)x$$

   Аналогично, если $T \equiv \lambda y.f^{\overline{E(a,b)}}z$, то $a[a := \overline{m}]T \equiv (\lambda fx.f^{\overline{m}}x)\lambda y.f^{\overline{E(m,n)}}z =_{\beta} \lambda y.f^{\overline{E(m,n)}}z$

□

8 Основные задачи

Можно задаться вопросом: что мы можем получить с этой теории? Традиционно рассматривают следующие три задачи:

1. Задача проверки типов — проверить, выполнено ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для данных Γ, M и σ.

2. Задача восстановления (синтеза) типов (типизируемости) — проверить, возможно ли для данного лямбда-выражения M найти такие Γ и σ, что $\Gamma \vdash M : \sigma$.

3. Задача населенности типа — проверить, найдется ли для данного типа σ контекст Γ и терм M, такой, что $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Для просто типизируемого лямбда-исчисления существует алгоритмическое решение для всех трёх задач.

Определение 8.1. Пусть V — атомарные типовые переменные лямбда-исчисления. *Подстановкой типов* назовём почти постоянную функцию $S : V \to T$ — т.е. функцию, тождественную на всей области определения, кроме некоторого конечного множества значений.

9 Изоморфизм Карри-Ховарда

9.1 Варианты просто типизированного исчисления

Конструкция	Связка	Операции
Упорядоченная пара	$\alpha \& \beta$	$\pi_1 : \alpha \& \beta \to \alpha$
		$\pi_2 : \alpha \& \beta \to \beta$
		$\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
Алгебраический тип	$\alpha \vee \beta$	$in_1 : \alpha \to \alpha \vee \beta$
		$in_2 : \beta \to \alpha \vee \beta$
		$case : (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma$

10 Исчисление 1-го порядка

Более радикальный путь усиления теории — рассмотрение исчислений 1-го и высших порядков. Подробно на теориях 1-го порядка мы останавливаться не будем, единственное, отметим, что такая теория будет требовать определение выражений двух сортов: предметных и логических. Аналогом с точки зрения изоморфизма Карри-Ховарда для логических значений будут типы, а предметными выражениями могут быть любые выражения над не-типовыми значениями: например, над строками, целыми числами и т.п.

11 Линейные типы

Все системы типов, которые мы ранее рассматривали, были так или иначе основаны на интуиционистской логике. В данном разделе мы немного отступим в сторону и приведем пример системы типов, основанной на логике, существенно отличающейся от интуиционистской.

Линейная логика была предложена Жираром в ... Основная ее мотивация - попытка в логических выражениях учесть стоимость тех или иных утверждений. В самом деле, традиционная интерпретация интуиционистской логики предполагает, что если некоторое утверждение A доказано, то это утверждение может быть использовано в дальнейшем рассуждении сколько угодно раз без дополнительных затрат. Однако, поскольку мы живем в реальном мире, такой взгляд на вопрос есть упрощение.

Вспомним традиционную интерпретацию интуиционистской логики — например, импликация $A \to B$ есть метод получения по утверждению A утверждения B. Но, к сожалению, в реальном мире часто превращение объекта A в объект B разрушает исходный объект. Линейная логика предлагает способ учесть это в логических рассуждениях.

Рассмотрим выражение $A \multimap B$ (связка $\multimap$ читается как lollipop — леденец): будем говорить, что из A можно получить B, если материальный объект A можно превратить в материальный объект B. Например, утверждение, что за 31 рубль можно получить в кассе метрополитена один жетон на проезд можно записать как `31 рубль` $\multimap$ `жетон`. В рамках этой аналогии утверждение `31 рубль` $\multimap$ `жетон`, `31 рубль` $\vdash$ `31 рубль` $\otimes$ `жетон` не может быть доказано: ведь превратив 31 рубль в жетон, мы не сможем больше этими 31 рублями пользоваться.

Например, мы можем показать, что $\langle !(A\&B)\rangle \vdash !A \otimes !B$ и $\langle !A \otimes !B\rangle \vdash !(A\&B)$. Поясним первое выражение: если у нас есть неограниченный источник одноразовых автоматов, умеющих выдать A или B по нашему выбору, то это то же самое, что иметь два специализированных автомата, выдающих неограниченное количество A (первый автомат) и B (второй автомат).

Часто в исчислении рассматривают еще одну (парную к &) связку $(!(A \parr B) = !A \oplus !B)$, но содержательно к нашему рассуждению она ничего не добавит, поэтому для простоты мы ее опустим.

Помимо двуместных связок, имеющих прямые аналогии в интуиционистской логике, мы введем новую одноместную связку, называемую экспонентой или «точно».

Линейная логика в некотором смысле эквивалентна интуиционистской:

Теорема 11.1. Каково бы ни было выражение X в интуиционистской логике, найдется выражение X° в линейной.

В прямую сторону доказательство тривиально — если стереть все !, превратить $\otimes$ и & в $\cap$, а $\oplus$ и $\parr$ — в $\vee$, то мы получим аксиомы интуиционистской логики. Обратное утверждение можно показать с помощью *стандартного* вложения интуиционистской логики в линейную:

Интуиционистская связка	Аналог в линейной логике
$A \to B$	$!A \multimap B$
$A \cap B$	$A\&B$
$A \vee B$	$!(!A \oplus !B)$

Особую важность в линейной логике играют структурные правила: правило ослабления и правило сжатия:

Правило ослабления позволяет уничтожать значения:

$$\frac{}{\vdash A \to B}$$

Если мы впрямую построим по такой системе типовую систему для лямбда-исчисления, мы не добьемся нашей цели: ведь мы всегда можем превратить значение из линейного типа в интуиционистский и наоборот. Для этой цели мы запретим превращения и построим две параллельные теории.