Contents

1 Mathematics

1.1 Linear Algebra

1.2 Fourier Transform

1.2.1 复数表示

直角坐标表示：

$$z = x + iy$$

极坐标表示：

$$z = \rho e^{i\theta}$$

欧拉函数：

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{i\pi} &= -1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2.2 复数性质

对于 $z \in \mathbb{C}$，则 $f(z) \in \mathbb{C}$ 为复变函数，令 $z = x + iy$，那么 $f(z) = u + iv$，其中 $x, y, u, v \in \mathbb{R}$。若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在，则对于 x 方向，$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle x} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{\triangle u + i \triangle v}{\triangle x}$；对于 y 方向，$\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\triangle f(z)}{i \triangle y} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{\triangle u + i \triangle v}{i \triangle y}$，两方向要相等，故

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & \text{，实部} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} & \text{，虚部} \end{cases} \tag{1.2}$$

式子（1.2）为**柯西-黎曼关系**（C-R 关系）。若函数 $f(z)$ 在定义域内满足柯西-黎曼关系，则称为该函数在定义域内可解析。

如果平面区域 $\mathbb{D}$ 内任意闭曲线所围部分属于 $\mathbb{D}$，那么称 $\mathbb{D}$ 是单连通区域，否则称为复连通区域。

定理：函数 $f(z)$ 在单连通区域 $\mathbb{D}$ 内满足 C-R 关系，则对任意封闭曲线 L，有

$$\oint_L f(z)dz = 0 \tag{1.3}$$

。

证明：

$$\begin{aligned}\oint_L f(z)dz &= \oint_L (u+iv)(dx+idy) \\ &= \oint_L (udx - vdy) + i\oint (vdx+udy) \\ &= \iint_{\mathbb{D}} (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint_{\mathbb{D}} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy\end{aligned}$$

代入公式（1.2）得 $\oint_L f(z)dz = 0$。注：格林公式 $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{\mathbb{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$。

证毕

复数的重要性质：已知单连通区域上的边界点，我们就可以求得该区域内的所有点的函数值。

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{1.4}$$

其中，L 为单连通区域 $\mathbb{D}$ 的边界，$z_0 \in \mathbb{D}$。

证明：

由上述定理可知单连通区域内，任意封闭曲线积分都为零，故取 L 为以 z_0 为圆心，δ 为半径的圆，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \lim_{\delta\to 0}\frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_L \frac{dz}{z-z_0} \\ &= \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_0^{2\pi} id\theta \\ &= f(z_0)\end{aligned} \tag{1.5}$$

证毕

由此，又可以得到该区域内的任意点导数为:

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{1.6}$$

当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}[f(z)] \\ &= \frac{d}{dz}[\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(w)}{w-z}dw] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(w)\frac{d}{dz}(\frac{1}{w-z})dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(w)\frac{1}{(w-z)^2}dw \end{aligned} \tag{1.7}$$

对此继续求导便可得到公式（1.6)。

1.2.3 卷积

卷积的定义：

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{1.8}$$

卷积的性质：

1. 线性；$f*(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha f*g_1+\beta f*g_2$
2. 交换律；$f*g=g*f$
3. 结合律；$(f*g)*h=f*(g*h)$

1.2.4 傅里叶级数

函数点积的定义：

$$<f(x),g(x)>=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx \tag{1.9}$$

根据此定义可得：

$$\begin{aligned} <\sin n_1x,\cos n_2x> &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin n_1x\cos n_2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(n_1+n_2)x+\sin(n_1-n_2)x]dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

即 $\sin n_1x$ 与 $\cos n_2x$ 正交。

任意一个函数都可以表示成一个奇函数与偶函数的和：

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

于是，尝试使用一组正交的函数 $sinnx$,$cosnx$,$\mathbf{1}$ 的和来表示任意一个函数，这样就得到了傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.10}$$

我们又可以算出每个基函数的系数：

$$\begin{cases} a_0 & =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \\ a_n & =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx \\ b_n & =\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx \end{cases} \tag{1.11}$$

例： 假设 $k\in\mathbb{Z}$，欲把函数

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,x\in[2k\pi,(2k+1)\pi) \\ 0 & ,others \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，则

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=1 \\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\sin nx|_0^{\pi}=0 \\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\cos nx|_0^{\pi}=\begin{cases} \frac{2}{n\pi} & ,n=2k+1 \\ 0 & ,others \end{cases} \end{aligned}$$

因此，

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\cdots)$$

把 $f(x)$ 沿 x 轴左移 $\frac{\pi}{2}$ 得到：

$$f(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\cdots) \tag{1.12}$$

把 $x=0$ 代入式（1.12），得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

例： 假设 $k\in\mathbb{Z}$，欲把函数

$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\in[2k\pi,(2k+1)\pi) \\ 0 & ,others \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，则

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\sin nx = \frac{1}{n^2\pi}\cos nx|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & ,n=2k \\ -\frac{2}{n^2\pi} & ,n=2k+1 \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} xd\cos nx = -\frac{1}{n\pi}x\cos nx|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

于是，

$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots) + (\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots)$

把 $x=0$ 代入，得

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

1.2.5 傅里叶级数到傅里叶变换

把以 T 为周期的函数 $f(t)$ 在区间 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上展成傅里叶级数，令 $\omega = \frac{2\pi}{T}$：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t) \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega tdt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega tdt \end{aligned} \tag{1.13}$$

由欧拉公式（1.1）可得：

$$\begin{cases} \cos\theta & = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta & = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \tag{1.14}$$

把式（1.14）代入（1.13）得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t} + \frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

其中，

$$\begin{aligned}\frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2}[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt - i\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt] \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos n\omega t - i\sin n\omega t)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt\end{aligned} \tag{1.16}$$

同理可得

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{in\omega t}dt$$

于是，记

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{1.17}$$

这样，我们就得到了傅里叶级数的指数形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{1.18}$$

当 $T \to +\infty$ 时，$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f(t)$，

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-in\omega\tau}d\tau]e^{in\omega t} \\ &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-in\omega\tau}d\tau]e^{in\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau]e^{i\omega t}d\omega\end{aligned} \tag{1.19}$$

由此，我们可以把一个非周期函数表示成傅里叶积分公式。设

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.20}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.21}$$

从上面两式可以看出 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 可以通过积分运算相互表示，式（1.20）叫做 $f(t)$ 的傅里叶变换，记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

式（1.21）叫做 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换，记为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

1.2.6 傅里叶变换的性质

1. **线性**。$\mathcal{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathcal{F}[f]+\beta\mathcal{F}[g]$

2. $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^nF(\omega)$
   证明：
   当 $n=1$ 时，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-i\omega t}dt\\&=f(t)e^{-i\omega t}|_{-\infty}^{+\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\\&=i\omega F(\omega)\end{aligned}\tag{1.22}$$

   同理当 $n=2$ 时，

$$\mathcal{F}[f''(t)]=(i\omega)^2F(\omega)$$

   以此类推，可得

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^nF(\omega)$$

证毕

3. $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^nf(t)$

4. **Parseval's thoerem.**$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$
   证明：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\bar{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(t)e^{i\omega t}dt$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)[\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(t)e^{i\omega t}dt]d\omega\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega]dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(t)f(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt\end{aligned}\tag{1.23}$$

证毕

5. **卷积**。$\mathcal{F}[f * g(t)] = F(\omega)G(\omega)$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx] d^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)e^{-i\omega(t-x)} d(t-x) \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

证毕

1.3 Wavelet Transform

1.4 Laplace Transform

2 Feature Extraction

2.1 CNN

2.2 RNN

2.3 Transformer

2.3.1 Architecture

2.3.2 Position Encoding

2.3.3 Attention

2.3.4 Mask

2.3.5 References