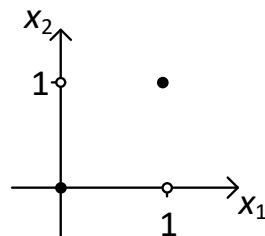


Perceptron, problem xor

Wprowadzenie

Celem zajęć jest próba nauczenia perceptronu rozwiązania problemu xnor (oczywiście na podobnej zasadzie można rozwiązać problem xor). Problem xnor przedstawiony jest na rysunku poniżej:



Każdy punkt przynależy do jednej z klas: zer (puste kółko) lub jedynek (kółko zamalowane). Zatem, jeżeli na wejście perceptronu podane będzie $x_1=0$ i $x_2=0$, wówczas odpowiedzią perceptronu powinno być $y=1$, dla pary (x_1, x_2) równej $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$ odpowiedzią powinno być $y=0$, a dla pary $(1, 1)$ podanej na wejście, odpowiedzią powinno być $y=1$. Współrzędne punktów x_1, x_2 oraz klasę oczekiwaną d można przedstawić w tabeli:

x_1	x_2	d (xnor)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

gdzie x_1 i x_2 to współrzędne punktu, d to klasa do której należy punkt (biały lub czarny, oznaczony odpowiednio jako 0 lub 1). Powyższe dane w programie można zatem przechowywać w dwóch tabelach:

```
x = np.array( [ [0,0],
                [0,1],
                [1,0],
                [1,1]])
d = np.array([1,
              0,
              0,
              1])
```

przy czym *np* to biblioteka *numpy*, którą należy wcześniej zaimportować.

Zadanie 1

Korzystając z kodu programu z poprzedniego laboratorium należy przygotować perceptron i nauczyć go rozpoznawać punkty funkcji xnor oraz narysować linię decyzyjną oddzielającą klasę punktów oznaczonych jako 0 od klasy punktów oznaczonych jako 1. Należy ograniczyć liczbę iteracji procesu uczenia całej tabeli punktów do 100. Początkowe wartości wag perceptronu powinny być losowe.

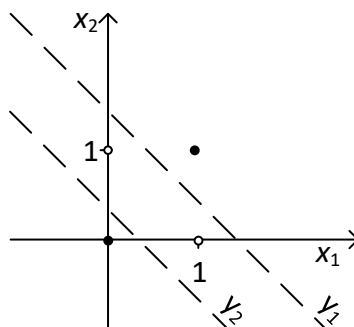
Czy udało się poprawnie nauczyć perceptron rozpoznawania klas wszystkich punktów? Proszę przedstawić wyniki uzyskane przez perceptron dla każdego z punktów.

Proszę samodzielnie spróbować narysować linię decyzyjną oddzielającą klasę punktów 1 od klasy punktów 0. Czy możliwe jest, aby jeden perceptron nauczył się rozpoznawać klasy punkty odpowiadające funkcji xnor?

Rozwiązanie problemu xnor, część 1

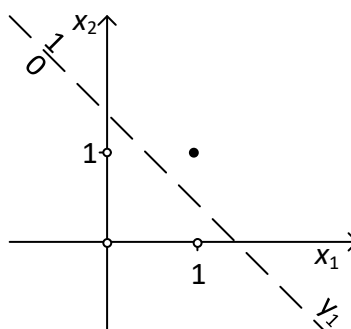
Jak wynika z przeprowadzonych w zadaniu 1 eksperymentów, nie jest możliwe oddzielenie jedną linią decyzyjną klasy punktów 1 od klasy punktów 0. Konieczne jest zatem dokonanie podziału w inny sposób.

Aby odseparować punkty z klas 0 i 1 od siebie, punkty można rozdzielić od siebie dwoma liniami decyzyjnymi tak, jak prezentuje to rysunek poniżej:



Punkty z klasy zero znajdują się w przestrzeni pomiędzy dwoma liniami. Jedynki znajdują się w przestrzeni „na zewnątrz” obydwu linii. Punkty zostały zatem od siebie odseparowane, ale konieczne było użycie dwóch linii decyzyjnych.

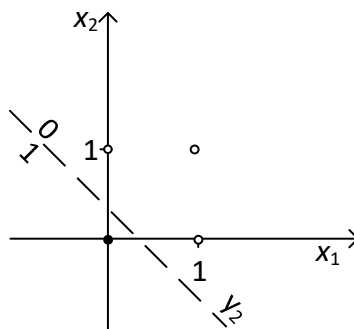
Każda linia decyzyjna może być reprezentowana przez jeden perceptron. Zatem aby uzyskać dwie linie decyzyjne, należy nauczyć dwa perceptrony rozpoznawać dwa różne rodzaje punktów. Aby pierwszy perceptron p_1 nauczył się dzielić przestrzeń zgodnie z linią decyzyjną y_1 , perceptron p_1 będzie musiał nauczyć się rozpoznawać takie punkty:



Dane można więc przedstawić w tabeli jak poniżej:

x_1	x_2	d_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

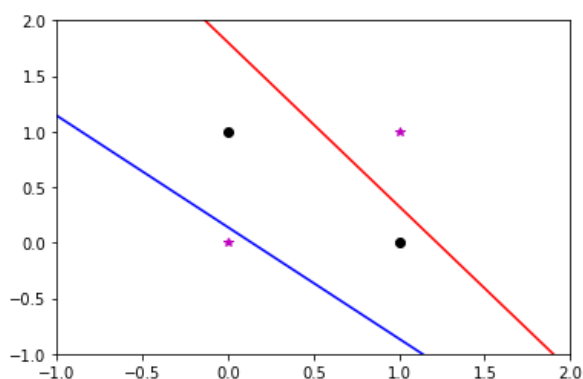
gdzie d_1 to informacja o klasie punktu, jaka będzie musiała być poprawnie rozpoznawana przez perceptron p1 tak, aby linia decyzyjna była poprawna. Natomiast dla drugiej linii decyzyjnej perceptron p2 będzie musiał nauczyć się rozpoznawać takie punkty i ich klasy:



x_1	x_2	d_2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Zadanie 2

Należy przygotować dwa perceptrony p1 i p2 posiadające wyjścia oznaczone odpowiednio jako y_1 oraz y_2 . Następnie należy nauczyć rozpoznawać perceptrony odpowiednio próbek d_1 oraz d_2 z powyższych dwóch tabel. Można skorzystać z kodu programu z poprzedniego laboratorium. Należy pamiętać, że każdy z perceptronów p1 i p2 posiada swój zestaw wag, które powinny być wstępnie losowane. Należy również zwrócić uwagę, że wartość x_0 jest stała i wynosi -1 . Należy przedstawić wyniki nauki każdego z perceptronów porównując oczekiwaną wartość d z odpowiedzią perceptronu y . Należy również narysować dwie linie decyzyjne dla każdego z perceptronu na jednym wykresie wraz z punktami oraz zaznaczyć klasę punktów (na przykładowym obrazku poniżej są to gwiazdki oraz kółka), np. w taki sposób:

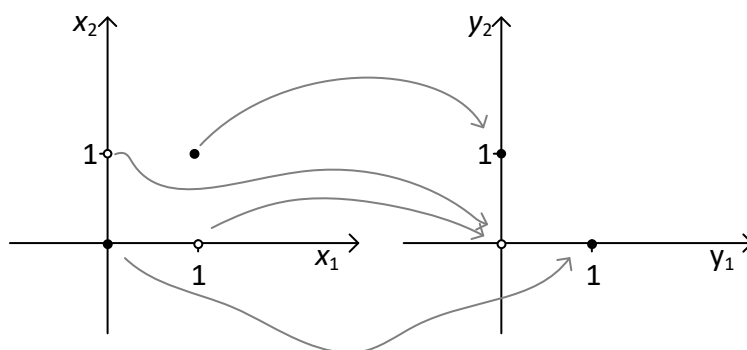


Rozwiązanie problemu xnor, część 2

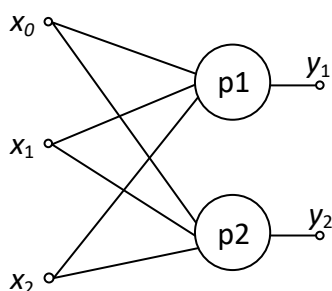
Po poprawnym nauczaniu dwóch perceptronów, można uzyskane rezultaty obydwu perceptronów połączyć i zestawić ze sobą w poniższej tabeli:

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	0

Co można zauważyć? Współrzędne x_1 i x_2 punktów, po przejściu przez perceptrony, zamieniają swoje współrzędne na y_1 i y_2 . Prezentuje to poniższy rysunek:



Graficznie obywatel perceptrony można przedstawić jako dwie czarne skrzynki, w których ukryte są wagi oraz funkcje aktywacji, tak jak na rysunku poniżej:

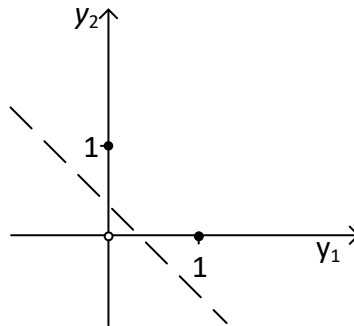


gdzie, dla przypomnienia, $x_0 = -1$.

Dodając do tabeli kolumnę zawierającą oczekiwany rezultat rozpoznawania problemu xnor, tabela przyjmuje taką postać:

x_1	x_2	y_1	y_2	d (xnor)
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

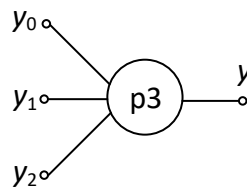
Kombinacje wyjść dwóch perceptronów y_1 oraz y_2 można zestawzić z oczekiwaną odpowiedzią xnor-a na zadane wejścia x_1 i x_2 . I tak, jeżeli mamy kombinację wyjść perceptronów $y_1=0$ i $y_2=1$ lub $y_1=1$ i $y_2=0$ wówczas odpowiada to klasie 1 w problemie xnor. Dwa zera pojawiające się na wyjściu perceptronów y_1 i y_2 odpowiadają zeru w xnor. Taka przestrzeń jest już możliwa do podziału dla jednego perceptronu. Można podejrzec to na wykresie:



Należy zwrócić uwagę na fakt, że osie oznaczone są teraz jako y_1 i y_2 . Punkty z wykresu mają swoje odwzorowanie w następującej tabeli:

y_1	y_2	d (xnor)
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Ponieważ ten problem jest już możliwy do rozwiązania przy pomocy jednego perceptronu (punkty oznaczone zerami i jedynkami można odseparować jedną linią decyzyjną), można zatem nauczyć rozpoznawać te trzy punkty z powyższej tabeli trzecim perceptronem oznaczonym p3:



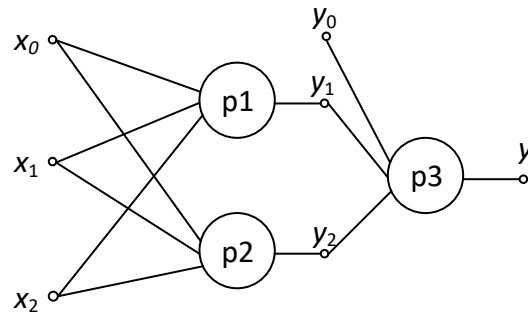
Przy czym należy pamiętać, że wejścia tym razem oznaczone są jako y_1, y_2 (analogicznie do wejść x_0, x_1, x_2) oraz $y_0 = -1$. Perceptron posiada swój osobny zestaw wag.

Zadanie 3

Należy przygotować perceptron p3 i nauczyć rozpoznawać poprawnie klasy trzech punktów o współrzędnych (y_1, y_2) przedstawionych w tabeli powyżej. Proszę zaprezentować uzyskane rezultaty dla każdego z punktów oraz przedstawić linię decyzyjną wraz z punktami na wykresie.

Rozwiązanie problemu xnor, część 3

Tak nauczony trzeci perceptron można dołączyć do wcześniejszych dwóch tak, aby uzyskać taką dwuwarstwową strukturę:



W ten sposób utworzona została najprostsza sieć neuronową zbudowana z trzech perceptronów, dzięki której można rozwiązać problem nxor (lub xor). Sieć ta potrafi rozpoznawać punkty, klasy można odseparować dwiema liniami decyzyjnymi. Dane wejściowe punktu (x_1, x_2) są przekazywane jednocześnie do perceptronów p1 i p2. Po dokonaniu obliczeń w obydwu perceptronach, uzyskane wartości wyjściowe y_1, y_2 są przekazywane na wejście perceptronu p3. W perceptronie p3, po wykonaniu obliczeń, uzyskiwana jest odpowiedź y , która jest jednocześnie odpowiedzią całej sieci neuronowej.

Jeżeli wszystkie trzy perceptrony będą poprawnie nauczone, wówczas uzyskane wartości y na zadane wartości punktów x_1, x_2 powinny odpowiadać spodziewanym wartościom funkcji nxor.

Zadanie 4

Należy połączyć ze sobą wszystkie trzy nauczone w zadaniach 2 i 3 perceptrony zgodnie z powyższym schematem. Dane powinny przepływać przez wszystkie elementy sieci z lewej strony od wejścia do wyjścia sieci przez kolejne perceptrony p1, p2 a następnie wyniki przekazane powinny być do p3, który zwraca ostateczny wynik klasyfikacji. Należy zbadać i podać odpowiedzi poszczególnych perceptronów oraz całej sieci na zadane punkty reprezentujące problem nxor z zadania 1. Należy pamiętać, aby wykorzystać wagi nauczone w poprzednich zadaniach.

Zadanie dodatkowe 5

Przygotuj sieć neuronową rozwiązującą problem XOR.