TÀI LIỆU GIẢI TÍCH

[PHẦN 1]

Chương 1. Vi phân hàm số một biến

Chương 2. Tích phân hàm số một biến

Chương 3. Chuỗi số

Chương 4. Hàm số nhiều biến

Bài 1. Giới hạn và liên tục

Bài 2. Đạo hàm và ứng dụng tìm giới hạn

Chương 1. Vi phân hàm số một biến

Bài 1. Giới hạn và liên tục

1.1. Hàm số lượng giác ngược

1.2. Các quy tắc tính giới hạn

1.3. Đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn

1.4. Hàm số liên tục

1.2.2. Các quy tắc tính giới hạn

Giả sử $k \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó:

1) $\lim\limits_{x \to a} [k.f(x)] = k.\lim\limits_{x \to a} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x).\lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

▪ Định lý

Nếu $f(x) \le g(x)$ khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ tồn tại thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

▪ Định lý kẹp giữa

Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x)$ khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

▪ Chú ý

$$\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0^+,\ \frac{1}{-\infty} = 0^-}$$

▪ Một số kết quả giới hạn cần nhớ

$$1)\ \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\tan\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$4)\ \lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

▪ Một số kết quả giới hạn cần nhớ

$$5)\ \lim_{x\to a}\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x\to a} f(x) > 0\right)$$

$$6)\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},\ n\in\mathbb{Z}^+$$

(nếu n lẻ, ta giả sử rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$)

$$7)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\beta^x} = 0 \text{ nếu } \alpha\geq 1,\ \beta>1.$$

1.2.3. Một số ví dụ

VD1. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0.$

Giải. Ta có:

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{1}{x},\ \forall x\in(0;+\infty).$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0.$

VD2. Tính $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3} \right)^{3x}$.

VD 3. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \tan^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{4x}}$.

A. $L = \infty$; B. $L = 1$; C. $L = \sqrt[4]{e}$; D. $L = \sqrt{e}$.

VD4. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{\cot x}{\sin x}}$.

1.3. Đại lượng vô cùng bé và vô cùng lớn

1.3.1. Các định nghĩa

- **Định nghĩa 1**

- $f(x)$ được gọi là *vô cùng bé* (VCB) khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

- $f(x)$ được gọi là *vô cùng lớn* (VCL) khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

▪ Chú ý

- Ta cũng có định nghĩa tương tự cho trường hợp:

$$x \to a^-,\ x \to a^+,\ x \to -\infty,\ x \to +\infty.$$

- Khi $x \to a$ nếu $f(x)$ là vô cùng bé (VCB) thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là vô cùng lớn (VCL).

Ví dụ:

- $f(x) = \tan(\sin x)$ là VCB khi $x \to 0$;
- $g(x) = \tan(\cos x)$ không là VCB khi $x \to 0$;
- $\cos x\,,\ \cot x\,,\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ là các VCB khi $x \to \dfrac{\pi}{2}$;
- $\tan^3\left(\sin\sqrt{1-x}\right)$ là VCB khi $x \to 1^-$;
- $\dfrac{2x+3}{x^2+x+5}$ là VCB khi $x \to \pm\infty$.

▪ Định nghĩa 2

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to a$.

- $f(x)$ được gọi là *VCB cấp cao hơn* $g(x)$, ký hiệu là $f(x) = O(g(x))$, nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- $f(x)$ được gọi là *VCB cùng bậc với* $g(x)$ nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 \neq k \neq \infty).$$

- $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai *VCB tương đương*, ký hiệu là $f(x) \sim g(x)$, nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ví dụ:

- $x^3 = O(x^2)$ khi $x \to 0$ vì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$;
- $\sin^2 x = O(\sin 2x)$ khi $x \to 0$ vì

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x} = 0;$$

- $(x-1)^2 = O(\tan(x^2-1))$ khi $x \to 1$ vì

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\tan(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \left[\frac{x-1}{x+1} . \frac{x^2-1}{\tan(x^2-1)} \right] = 0;$$

- $\sin^3 x \sim x^3$ khi $x \to 0$ vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1;$$

- $\sin^2 3(x-1) \sim \tan[9(x-1)^2]$ khi $x \to 1$ vì

$$\begin{cases} \sin^2 3(x-1) \sim [3(x-1)]^2 \\ \tan[9(x-1)^2] \sim 9(x-1)^2; \end{cases}$$

- $1-\cos x$ là VCB cùng bậc với x^2 khi $x \to 0$, vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

▪ Định nghĩa 3

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai vô cùng lớn (VCL) khi $x \to a$.

- $f(x)$ được gọi là *VCL cấp thấp hơn* $g(x)$ nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai *VCL tương đương*,

  ký hiệu là $f(x) \sim g(x)$, nếu $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

- $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai *VCL cùng cấp* nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 \neq k \neq \infty).$$

Ví dụ:

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0$

  $\Rightarrow \sqrt{x}$ là VCL cấp thấp hơn x^2+1;

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^8+3x^6+2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^7}}} = 1$

  $\Rightarrow \sqrt[4]{x^8+3x^6+2x} \sim x^2$.

1.3.2. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng bé cấp cao

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$, ta có:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) + O(f(x))}{g(x) + O(g(x))} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}}$$

VD8. Tính $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \cos x + 1}{x^4 + x^2}$.

Giải. Ta có:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + (1 - \cos x)}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

▪ Các vô cùng bé tương đương cần nhớ

Khi $u(x) \to 0$, ta có công thức VCB tương đương:

1) $\sin u(x) \sim u(x)$;

2) $\tan u(x) \sim u(x)$;

3) $\arcsin u(x) \sim u(x)$;

4) $\arctan u(x) \sim u(x)$;

5) $1 - \cos u(x) \sim \dfrac{[u(x)]^2}{2}$;

6) $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$;

7) $\ln[1 + u(x)] \sim u(x)$;

8) $[1+u(x)]^\alpha - 1 \sim \alpha u(x)$.

Đặc biệt: $\sqrt[n]{1 + u(x)} - 1 \sim \dfrac{u(x)}{n}$.

Chú ý

- Các công thức vô cùng bé tương đương trên *không áp dụng được* cho hiệu hoặc tổng của các vô cùng bé nếu chúng làm triệt tiêu tử hoặc mẫu của phân thức.

VD. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$ (sai).

Giải đúng là:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x.\dfrac{x^2}{2}}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

VD9. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 2x\sin^2 x)}{\sin x^2 . \tan x}$.

VD10. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} + \arctan^2 x - 1}{\cos^3 x - \cos x + 2x}$.

1.3.3. Quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn cấp thấp

Cho $f_1(x)$ là VCL cấp thấp hơn $f(x)$ và $g_1(x)$ là VCL cấp thấp hơn $g(x)$ khi $x \to a$, ta có:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}$$

VD14. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x\sqrt{x} + 3}{2x^2 + x + 2019}$.

Giải. Khi $x \to +\infty$, ta có:

$$\frac{x^2 + x\sqrt{x} + 3}{2x^2 + x + 2019} \sim \frac{x^2}{2x^2} \Rightarrow L = \frac{1}{2}.$$

VD15. Tính $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + x\sqrt{x} + 3} - \sqrt{3x + 2}}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x + 2019}}$.

Giải. Khi $x \to +\infty$, ta có:

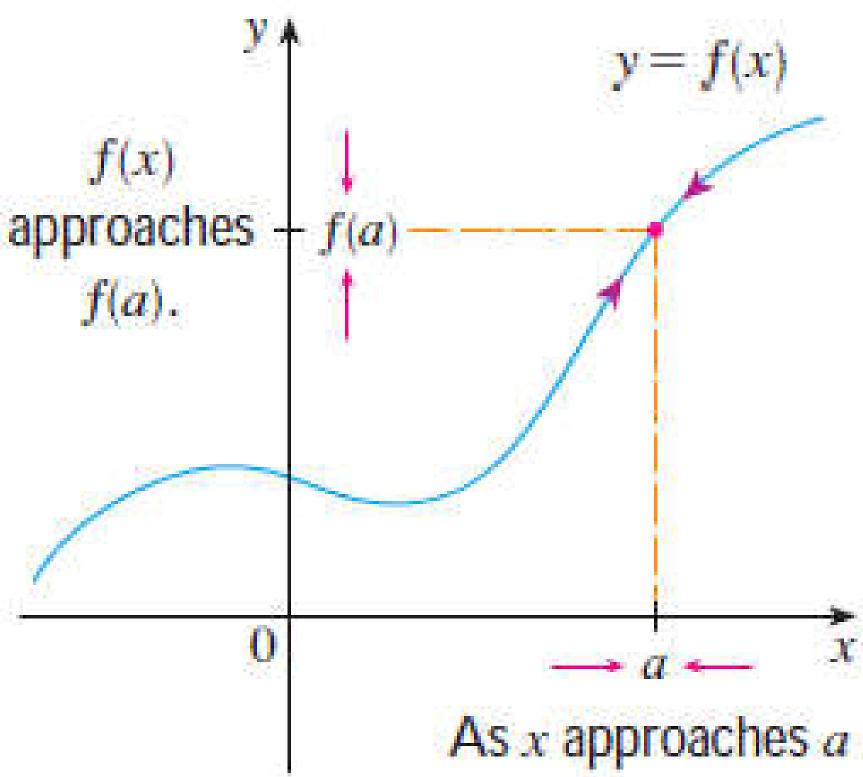
$$\frac{\sqrt{3x^2 + x\sqrt{x} + 3} - \sqrt{3x + 2}}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x + 2019}} \sim \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} \Rightarrow L = \sqrt{3}.$$

1.4. Hàm số liên tục

- ## Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là *liên tục tại điểm* a nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$



- **Chú ý**

Hàm số $f(x)$ liên tục tại a nếu thỏa mãn cả 3 điều:

1) $f(a)$ xác định (nghĩa là $a \in D_f$);

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tồn tại;

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

▪ Định nghĩa

- f *liên tục bên phải tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- f *liên tục bên trái tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- f *liên tục trên* $(a;b)$ nếu f liên tục tại $\forall x \in (a;b)$.
- f *liên tục trên* $[a;b]$ nếu f liên tục trên $(a;b)$ và liên tục phải tại a và liên tục trái tại b.

VD. Tìm α để hàm số sau đây liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x)}{\arctan^2 x + 2x^2}, & x \neq 0 \\ 2\alpha - 3, & x = 0 \end{cases}$$

VD. Tìm α để hàm số sau đây liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\tan^2 x + \sin^2 \sqrt{x}}{2x}, & x > 0 \\ \alpha, & x \leq 0 \end{cases}$$

Chương 1. Vi phân hàm số một biến

Bài 2. Đạo hàm và ứng dụng tìm giới hạn

- 2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1
- 2.2. Đạo hàm cấp cao
- 2.3. Quy tắc L'Hospital

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

- **Định nghĩa 1**

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên lân cận của điểm x_0. Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$, là giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại).

- Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói rằng $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$.

Định nghĩa 2

- Đại lượng

$$f'(x_0).\Delta x$$

ký hiệu $df(x_0)$, được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0.

- Vi phân của hàm số $f(x)$ tại x là

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

- **Chú ý**

Vi phân của hàm $y = f(x)$ là $dy = f'(x)dx$, suy ra

$$\boxed{dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

Các quy tắc tính đạo hàm

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,

2) $[C.f(x)]' = C.f'(x),\ C \in \mathbb{R}$,

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$,

5) Nếu $y = f(u)$ với $u = g(x)$ thì

$$y'(x) = y'(u).u'(x).$$

▪ Đạo hàm các hàm số sơ cấp

1) $(u^{\alpha})' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$

2) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

3) $(\sin u)' = u'.\cos u$

4) $(\cos u)' = -u'.\sin u$

5) $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$

6) $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1+\cot^2 u)$

Đạo hàm các hàm số sơ cấp

7) $(e^u)' = u'.e^u$

8) $(a^u)' = a^u.u'.\ln a$

9) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$

10) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

11) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12) $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

13) $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

14) $(\text{arccot}\, u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

VD1. Tính $df(-1)$ của hàm số $f(x) = x^2 e^{3x}$.

Giải. Ta có:

$$f'(x) = (2x + 3x^2)e^{3x}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = e^{-3} \Rightarrow df(-1) = e^{-3}dx.$$

VD2. Tính vi phân của hàm số $y = 2^{\ln(\arcsin x)}$.

Giải. Ta có:

$$y' = \left[\ln(\arcsin x)\right]'.2^{\ln(\arcsin x)}.\ln 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.2^{\ln(\arcsin x)}.\ln 2$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2^{\ln(\arcsin x)}\ln 2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx.$$

VD3. Tính vi phân của hàm số $y = \arctan \dfrac{x-1}{2x+3}$.

Giải. Ta có: $y' = \left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)' . \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)^2}$

$$= \frac{5}{(2x+3)^2 + (x-1)^2}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

2.2. Đạo hàm cấp cao

- Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, ký hiệu $f''(x)$, được gọi là *đạo hàm cấp hai* của $f(x)$.
- Đạo hàm của hàm số $f''(x)$, ký hiệu $f'''(x)$, được gọi là *đạo hàm cấp ba* của $f(x)$.
- Tổng quát, *đạo hàm cấp* n ($n \geq 4$) của hàm số $f(x)$, ký hiệu $f^{(n)}(x)$, là $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

VD4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$, tính $f'''(0)$.

Giải. Ta có: $f(x) = x^2 e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

$\Rightarrow f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6)e^{-x} \Rightarrow f'''(0) = -6.$

VD5. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x$, tính $f^{(4)}(\pi)$.

Giải. Ta có: $f'(x) = -\sin 2x$

$$\Rightarrow f''(x) = -2\cos 2x \Rightarrow f'''(x) = 4\sin 2x$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 8\cos 2x \Rightarrow f^{(4)}(\pi) = 8.$$

VD6. Tính $f^{(4)}(0)$, với $f(x) = \ln\sqrt[3]{3x+1}$.

Giải. Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x+1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x+1} = (3x+1)^{-1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -3(3x+1)^{-2} \Rightarrow f'''(x) = 2.3^2(3x+1)^{-3}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -6.3^3(3x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -162.$$

VD7. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$, tính $f^{(n)}(x)$.

Giải. Ta có:

$$f(x) = \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-1} = 5(x-2)^{-1} - 4(x-1)^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-1).5(x-2)^{-2} - (-1).4(x-1)^{-2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-1)^2.2[5(x-2)^{-3} - 4(x-1)^{-3}]$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-1)^2.2[5(x-2)^{-3} - 4(x-1)^{-3}]$$

$$\Rightarrow f'''(x) = (-1)^3.3![5(x-2)^{-4} - 4(x-1)^{-4}]$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n.n!\left[\frac{5}{(x-2)^{n+1}} - \frac{4}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

2.3. Quy tắc L'Hospital

Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (hoặc $= \infty$) thì

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

($g'(x) \neq 0$ với $x \neq a$)

▪ Chú ý

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (hoặc $= \infty$) thì $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là *dạng vô định* $\dfrac{0}{0}$ (hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$).

- Các dạng vô định:

$$0.\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty, \text{ và } \infty - \infty$$

đều có thể biến đổi để áp dụng quy tắc L'Hospital.

VD8. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

VD9. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2.\arctan^2 x}$.

VD10. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x} \right)$ $(\infty - \infty)$.

VD11. Tính $L = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1^∞).

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1. Định nghĩa

• Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a;\, b)$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in (a;\, b)$.

Ký hiệu $\int f(x)dx$ (đọc là tích phân).

Nhận xét

• Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

1) $\int a.dx = ax + C,\ \mathrm{a} \in \mathbb{R}$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5) $\int e^{x} dx = e^{x} + C;$

6) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1. Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;\ b]$.

Ta chia đoạn $[a;\ b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Lấy điểm $\xi_k \in [x_{k-1};\ x_k]$ tùy ý $(k = \overline{1,\ n})$.

Lập tổng tích phân: $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) $I = \lim\limits_{\max\limits_{k}(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sigma$ được gọi

là ***tích phân xác định*** của $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$.

Ký hiệu là $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Tính chất

$$1)\ \int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$$

$$2)\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$3)\ \int_a^a f(x)dx = 0;\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$4)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c \in [a;\ b]$$

$$5)\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$6)\ f(x) \leq g(x), \forall x \in [a;\ b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$7)\ a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

$$8)\ m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a;\ b]$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

9) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ thì

$$\exists c \in [a;\ b] : \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Khi đó, đại lượng $\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx}$ được gọi là

giá trị trung bình của $f(x)$ trên đoạn [a; b].

VD 1. Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\cos^2 x}}$ bị chặn (hữu hạn) vì

hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+\cos^2 x}}$ liên tục trên đoạn $[0;\,1]$.

VD 2. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ trên $[1;\,e]$

là $\frac{1}{e-1}\int\limits_1^e \frac{dx}{x}=\frac{1}{e-1}$.

2.2.2. Công thức Newton – Leibnitz

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;\, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm tùy ý của $f(x)$ thì $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ và $F(x) = \varphi(x) + C$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;\, b]$.

Vậy ta có:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Nhận xét

1) Có hai phương pháp tính tích phân như §1.

2) Hàm số $f(x)$ liên tục và *lẻ* trên $[-\alpha;\ \alpha]$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.}$$

3) Hàm số $f(x)$ liên tục và *chẵn* trên $[-\alpha;\ \alpha]$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\alpha} f(x)dx.}$$

4) Để tính $\int_a^b |f(x)|\,dx$, ta dùng bảng xét dấu của $f(x)$ để tách $|f(x)|$ thành tổng của các hàm trên mỗi đoạn nhỏ.

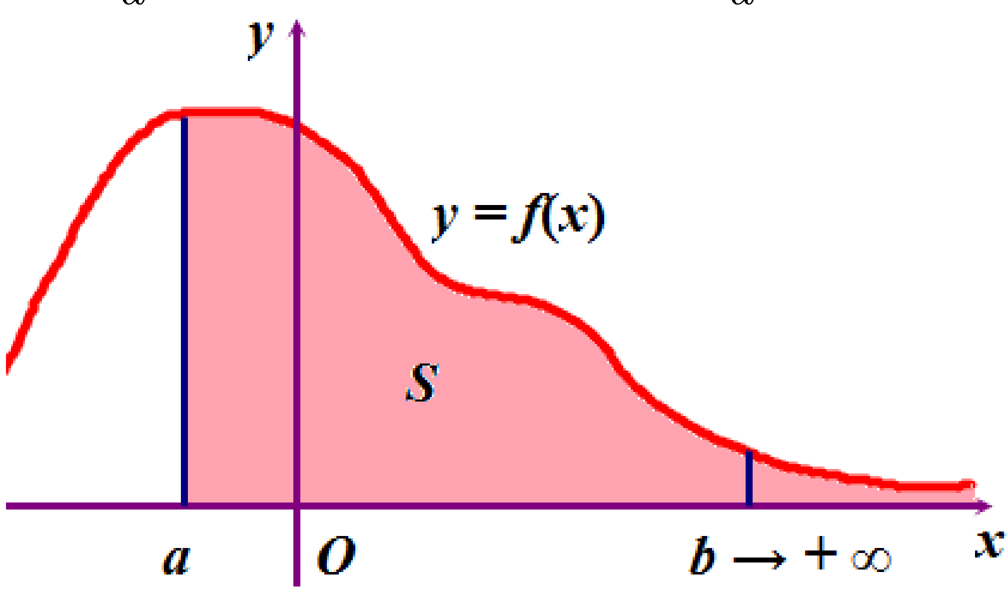
Đặc biệt

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \text{ nếu } f(x) \neq 0, \forall x \in (a;b).$$

§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;+\infty)$ $(b \to +\infty)$. Khi đó, diện tích S có thể tính được cũng có thể không tính được. Trong trường hợp tính được hữu hạn thì:

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

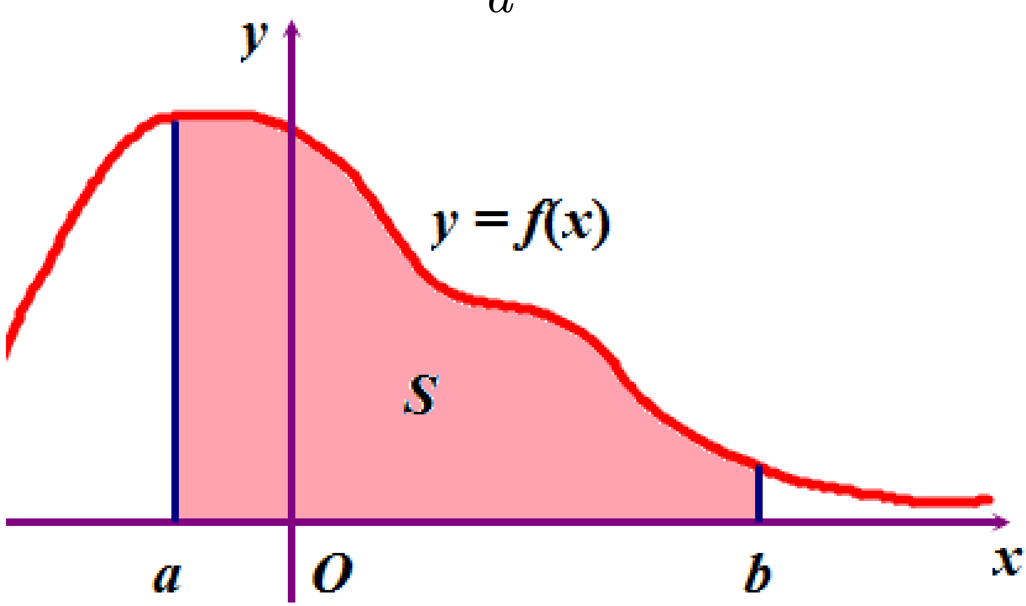


§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

• Khái niệm mở đầu

Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\ b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành là:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,.$$



§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

4.1. Tích phân suy rộng loại 1

4.1.1. Định nghĩa

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a;\, b]$ $(a < b)$.

Giới hạn (nếu có) của $\int\limits_a^b f(x)dx$ khi $b \to +\infty$ được gọi là ***tích phân suy rộng loại*** **1** của $f(x)$ trên $[a;+\infty)$.

Ký hiệu là: $\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.}$

• Định nghĩa tương tự:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

• Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói ***tích phân hội tụ***, ngược lại là ***tích phân phân kỳ***.

• Nghiên cứu về tích phân suy rộng (nói chung) là ***khảo sát sự hội tụ*** và ***tính giá trị hội tụ*** (thường là khó).

VD 1. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Giải

• ***Trường hợp α = 1:***

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) = +\infty \text{ (phân kỳ)}.$$

• ***Trường hợp α khác 1:***

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \left(x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Vậy

- Với $\alpha > 1$: $I = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ (hội tụ).

- Với $\alpha \leq 1$: $I = +\infty$ (phân kỳ).

Chú ý

- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, ta dùng công thức:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}.}$$

- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$, ta dùng công thức:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}.}$$

- Tương tự:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.}$$

4.1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

a) Tiêu chuẩn 1

• Nếu $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a;+\infty)$ và

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ hội tụ thì } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ.}$$

• Các trường hợp khác tương tự.

VD 4. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^{10}}\, dx$.

b) Tiêu chuẩn 2

- Nếu $\int\limits_{a}^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ hội tụ thì $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (ngược lại không đúng).
- Các trường hợp khác tương tự.

VD 5. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x} \cos 3x\, dx$.

c) Tiêu chuẩn 3

- Cho $f(x),\ g(x)$ liên tục, luôn dương trên $[a;+\infty)$

  và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. Khi đó:

  ➢ Nếu $0 < k < +\infty$ thì:

  $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ* hoặc *phân kỳ*.

  ➢ Nếu $k = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ* thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*.

➢ Nếu $\begin{cases} k = +\infty \\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \textit{ phân kỳ} \end{cases}$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ*.

• Các trường hợp khác tương tự.

VD 6. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + 2x^3}$.

Chú ý

Nếu $f(x) \sim g(x)$ $(x \to +\infty)$ thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ và } \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ có cùng tính chất.}$$

VD 7. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + \sin x + x}$.

VD 8. Điều kiện của α để $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^{\alpha} x + 1}}$ hội tụ là:

A. $\alpha > 3$; B. $\alpha > \dfrac{3}{2}$; C. $\alpha > 2$; D. $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

<u>VD 9.</u> Điều kiện của α để $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^{\alpha}+x^4-3}$ hội tụ?

4.2. Tích phân suy rộng loại 2

4.2.1. Định nghĩa

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;\, b)$ và *không xác định* tại b, khả tích trên mọi đoạn $[a;\, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$.

Giới hạn (nếu có) của $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ khi $\varepsilon \to 0$ được gọi là ***tích phân suy rộng loại 2*** của $f(x)$ trên $[a;\, b)$.

Ký hiệu:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.}$$

- Định nghĩa tương tự:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \text{ (suy rộng tại } a\text{);}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \text{ (suy rộng tại } a,\ b\text{).}$$

- Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói ***tích phân hội tụ***, ngược lại là ***tích phân phân kỳ***.

VD 10. Khảo sát sự hội tụ của $I = \int\limits_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}},\ b > 0.$

Giải

• ***Trường hợp α = 1:***

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln x \Big|_{\varepsilon}^{b} \right) = \ln b - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = +\infty.$$

• ***Trường hợp α khác 1:***

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{b} x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(x^{1-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^{b} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Vậy

- Với $\alpha < 1$: $I = \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ (hội tụ).
- Với $\alpha \geq 1$: $I = +\infty$ (phân kỳ).

VD 11. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

A. $I=-\frac{\pi}{3}$; B. $I=\frac{\pi}{3}$; C. $I=\frac{\pi}{6}$; D. $I=+\infty$.

VD 12. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

VD 13. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-x}$.

4.1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ như tích phân suy rộng loại 1.

Chú ý

Nếu $f(x) \sim g(x)\ (x \to b)$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$

có cùng tính chất (với b là cận suy rộng).

VD 14. Tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^{\alpha}dx}{\sqrt{x(x+1)(2-x)}}$

hội tụ khi và chỉ khi:

A. $\alpha < -1$; B. $\alpha < -\dfrac{1}{2}$; C. $\alpha > -\dfrac{1}{2}$; D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>VD 15.</u> Tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha}+1}{\sqrt{(x^2+1)\sin x}}dx$

phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \le -1$; B. $\alpha \le -\frac{1}{2}$; C. $\alpha \ge -\frac{1}{2}$; D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chú ý

- Cho $I = I_1 + I_2$ với $I,\ I_1,\ I_2$ là các tích phân suy rộng ta có:

1) I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

2) $\begin{cases} I_1 \to -\infty (phân\ kỳ) \\ I_2 \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty (phân\ kỳ) \\ I_2 \ge 0 \end{cases}$

thì I phân kỳ.

3) $\begin{cases} I_1 \to -\infty (phân\ kỳ) \\ I_2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty (phân\ kỳ) \\ I_2 < 0 \end{cases}$

thì chưa thể kết luận I phân kỳ.

VD 16. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha + 1}{\sqrt{x^2 \sin x}} dx$ phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \le \frac{1}{4}$; B. $\alpha \le -\frac{1}{4}$; C. $\alpha \le -\frac{1}{2}$; D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

VD17. Xét sự hội tụ của $I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$.

VD18. Xét sự hội tụ của $I = \int\limits_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2 \arctan x} dx$.

Bài 1. Khái niệm cơ bản về chuỗi số

Bài 2. Chuỗi số dương

Bài 3. Chuỗi số có dấu tùy ý

Bài 1. Khái niệm cơ bản về chuỗi số

1.1. Định nghĩa chuỗi số

1.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

1.3. Tính chất của chuỗi số

1.1. Định nghĩa chuỗi số

Số hạng tổng quát

$$\boxed{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Tổng riêng thứ *n*: $S_n \xrightarrow{n \to \infty} S$ **(trị hội tụ)**

- Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn thì ta nói chuỗi số *hội tụ*

  và có tổng là S, ta ghi là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.
- Ngược lại, ta nói chuỗi số *phân kỳ*.

VD1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

VD2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

VD3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$.

- **Định lý**

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$ hội tụ $\Leftrightarrow |q| < 1$

1.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

- **Ứng dụng**

Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ

VD5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + n + 2}$.

Giải. Ta có:

$$u_n = \frac{n^4}{3n^4 + n + 2} \to \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{chuỗi số phân kỳ.}$$

VD6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4 + 1}$.

Giải. Ta có:

$$u_n = \frac{n^5}{n^4 + 1} \to +\infty \neq 0 \Rightarrow \text{chuỗi số phân kỳ.}$$

1.3. Tính chất của chuỗi số

- Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\alpha \in \mathbb{R})\end{gathered}}$$

- Tính chất hội tụ (phân kỳ) của chuỗi số không đổi nếu ta thêm hoặc bớt đi hữu hạn số hạng.

....

Chương 3. Chuỗi số

Bài 2. Chuỗi số dương

2.1. Định nghĩa chuỗi số dương

2.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

- 2.2.1. Tiêu chuẩn Maclaurin – Cauchy
- 2.2.2. Tiêu chuẩn so sánh
- 2.2.3. Tiêu chuẩn d'Alembert
- 2.2.4. Tiêu chuẩn Cauchy

2.1. Định nghĩa chuỗi số dương

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu $u_n > 0, \forall n \geq 1.$

VD. Xét các chuỗi số sau, ta có:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ là chuỗi số dương vì

$$u_n = \frac{2n-1}{3^n} > 0, \forall n \geq 1.$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ không phải là chuỗi số dương vì

$$u_2 = \frac{\cos 2}{4} < 0.$$

2.2. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số

2.2.1. Tiêu chuẩn Maclaurin – Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục, không âm và giảm trên $[1;+\infty)$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}$$

▪ Hệ quả

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

▪ Chú ý

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ và được gọi là chuỗi số điều hòa.

VD1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + 2n^3 + 1}}$.

VD2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\sqrt[3]{\ln^2 n + 1}}$.

2.2.2. Tiêu chuẩn so sánh

- ## Tiêu chuẩn so sánh 1

Cho 2 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa $0 \le u_n \le v_n, \forall n \ge n_0$.

Khi đó, ta có:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ

VD3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

Giải. Ta có:

$$\frac{1}{n.2^n} \le \frac{1}{2^n}, \forall n \ge 1.$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ hội tụ.

▪ Tiêu chuẩn so sánh 2

Nếu $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$ thì

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ có cùng tính chất}}$$

VD4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$.

2.2.3. Tiêu chuẩn d'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Khi đó:

- Nếu *D* < 1 thì chuỗi số hội tụ;
- Nếu *D* > 1 thì chuỗi số phân kỳ;
- Nếu *D* = 1 thì ta chưa thể kết luận.

VD5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$.

VD6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2.2.4. Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Khi đó:

- Nếu $C < 1$ thì chuỗi số hội tụ;
- Nếu $C > 1$ thì chuỗi số phân kỳ;
- Nếu $C = 1$ thì ta chưa thể kết luận.

VD7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

Giải. Ta có:

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 < 1 \Rightarrow \text{chuỗi số hội tụ.}$$

VD8. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.

Bài 3. Chuỗi số có dấu tùy ý

3.1. Chuỗi số đan dấu

3.1.1. Định nghĩa

3.1.2. Tiêu chuẩn Leibniz

3.2. Chuỗi số có dấu tùy ý

3.2.1. Định nghĩa

3.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

3.1. Chuỗi số đan dấu

3.1.1. Định nghĩa

Cho dãy số dương (u_n), các chuỗi số có dạng

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n}$$

được gọi là các chuỗi số đan dấu.

VD. Các chuỗi số sau là chuỗi số đan dấu:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{9}{16}-\frac{17}{32}+\ldots$

3.1.2. Tiêu chuẩn Leibniz

Nếu dãy (u_n) giảm về 0 thì các chuỗi số đan dấu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n$$

hội tụ. Khi đó, ta gọi chuỗi số là *chuỗi Leibniz*.

VD1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Giải. Dãy $(u_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ giảm và $u_n=\frac{1}{n}\to 0$

$\Rightarrow$ chuỗi số đã cho hội tụ.

VD2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

VD3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$.

3.2. Chuỗi số có dấu tùy ý

3.2.1. Định nghĩa

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \in \mathbb{R})$ được gọi là chuỗi số có dấu tùy ý.
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là bán hội tụ nếu

  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ

VD4. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ.

3.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

VD5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^n)}{n^2}$.

VD6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{3^n}$.

§4. CHUỖI HÀM

4.1. Khái niệm chung về chuỗi hàm

4.1.1. Các định nghĩa

- Cho dãy hàm $u_1(x),\ u_2(x),\ldots,\ u_n(x),\ldots$ cùng xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Tổng hình thức:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1)$$

được gọi là chuỗi hàm số hay ***chuỗi hàm*** trên $D \subset \mathbb{R}$.

- Nếu tại $x_0 \in D$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ ***hội tụ*** (***phân kỳ***) thì x_0 được gọi là ***điểm hội tụ*** (***phân kỳ***) của chuỗi (1).

- Tập hợp các điểm hội tụ x_0 của chuỗi (1) được gọi là ***miền hội tụ*** của chuỗi (1).
- Chuỗi (1) được gọi là ***hội tụ tuyệt đối*** tại $x_0 \in D$ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(x_0) \right|$ hội tụ.
- Tổng $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ được gọi là ***tổng riêng*** thứ n của chuỗi (1).

  Trong miền hội tụ của chuỗi (1), tổng $S_n(x)$ hội tụ về một hàm số $f(x)$ nào đó.
- Hàm $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$ xác định trong miền hội tụ của chuỗi (1) được gọi là ***tổng*** của chuỗi (1).

Ta viết là: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x).$

Khi đó, $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ được gọi là ***phần dư*** của (1) và tại mỗi x thuộc miền hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

<u>VD 1.</u> Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

<u>Giải</u>

• Với $x > 0$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{ne^{-nx}} = e^{-x} < 1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

• Với $x \le 0$: $ne^{-nx} \not\to 0 \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $\left(0; +\infty\right)$.

VD 2. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

Giải

- Với $x = 0$: Chuỗi hội tụ.

- Với $x \neq 0$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} : \frac{x^{2n}}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n+1} = 0 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ.}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là $\mathbb{R}$.

4.2. Chuỗi lũy thừa

4.2.1. Định nghĩa

Chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ với a_n, x_0 là các hằng số được gọi là *chuỗi lũy thừa*.

<u>Nhận xét</u>

- Nếu đặt $x' = x - x_0$ thì chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- Miền hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chứa $x = 0$ nên khác rỗng.

4.2.2. Bổ đề Abel

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = \alpha \neq 0$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \left(-|\alpha|;\ |\alpha|\right)$.

• **Hệ quả**

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x = \beta$ thì phân kỳ tại mọi x thỏa $|x| > |\beta|$.

4.2.3. Bán kính hội tụ

a) Định nghĩa

• Số $R > 0$ để $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trên $(-R;\ R)$ và phân kỳ tại $\forall x : \left|x\right| > R$ được gọi là *bán kính hội tụ*.

• Khoảng $(-R;\ R)$ được gọi là *khoảng hội tụ*.

<u>Nhận xét</u>

• Nếu chuỗi hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $R = +\infty$.
• Nếu chuỗi phân kỳ $\forall x \neq 0$ thì $R = 0$.

b) Phương pháp tìm bán kính hội tụ

Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = r$ thì:

$$R = \begin{cases} 0, & r = +\infty \\ \dfrac{1}{r}, & 0 < r < +\infty. \\ +\infty, & r = 0 \end{cases}$$

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Bước 1. Tìm bán kính hội tụ R, suy ra khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là: $(-R;\ R)$.

Bước 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số tại $x = \pm R$.

Bước 3

- Nếu các chuỗi số phân kỳ tại $x = \pm R$ thì kết luận: miền hội tụ của chuỗi hàm là $(-R;\ R)$.
- Nếu chuỗi số phân kỳ tại $x = R$ và hội tụ tại $x = -R$ thì kết luận: miền hội tụ của chuỗi hàm là $[-R;\ R)$.
- Tương tự: miền hội tụ là $(-R;\ R]$, $[-R;\ R]$.

VD 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

VD 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n.2^n}$.

VD 6. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

VD 7. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n (x+2)^{n^2}$.

4.3. Sơ lược về chuỗi Fourier

a) Chuỗi lượng giác

Chuỗi hàm dạng: $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (*)

được gọi là ***chuỗi lượng giác***.

Nếu chuỗi (*) hội tụ đều trên $[-\pi; \pi]$ đến hàm số $f(x)$ thì các hệ số a_n, b_n được tính theo công thức:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad (2);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n = 1,\ 2,\ldots \quad (3).$$

b) Định nghĩa chuỗi Fourier

- Chuỗi lượng giác (*) có các hệ số được tính theo công thức (2), (3) được gọi là ***chuỗi Fourier*** của hàm $f(x)$.

  Các hệ số a_n, b_n được gọi là hệ số Fourier của $f(x)$.

- Mọi hàm $f(x)$ khả tích trên $[-\pi;\ \pi]$ tương ứng với chuỗi Fourier của nó và thông thường ta viết:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Nhà Toán học và Vật lý học Pháp.

VD 8. Tìm chuỗi Fourier của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Giải. Do hàm $f(x)$ lẻ nên:

$f(x).\cos nx$ lẻ và $f(x).\sin nx$ chẵn.

Suy ra:

- $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

- $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

VD 9. Tìm chuỗi Fourier của $f(x) = \left|x\right|$ trên $[-\pi;\ \pi]$.

Giải. Do hàm $f(x)$ chẵn nên ta có:

• $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

• $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|x\right| dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\, dx = \pi,$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

c) Khai triển Fourier của hàm số

- **Định lý Dirichlet**

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi; \pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên $[-\pi; \pi]$ đến tổng là:

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

J.P.G.
Lejeune Dirichlet
(1805 – 1859)
Nhà Toán học Đức

VD 10. Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0 \\ x, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Giải. Hàm $f(x)$ thỏa mãn định lý. Ta có:

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \dfrac{\pi}{2},$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

- $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, \ n = 2k \\ \dfrac{1}{n}, \ n = 2k+1. \end{cases}$

Vậy:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}.$$

..............................Hết..............................

Chương 4. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Khái niệm cơ bản

Bài 2. Đạo hàm riêng – Vi phân

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

Chương 4. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Khái niệm cơ bản

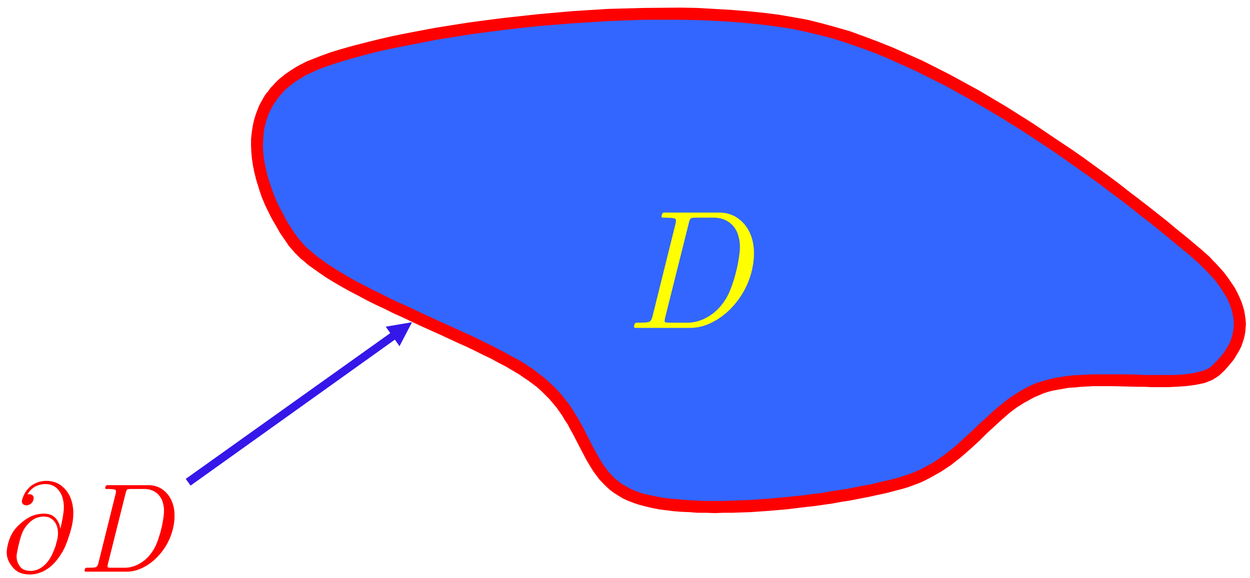
1.1. Các định nghĩa

1.2. Giới hạn của hàm hai biến số

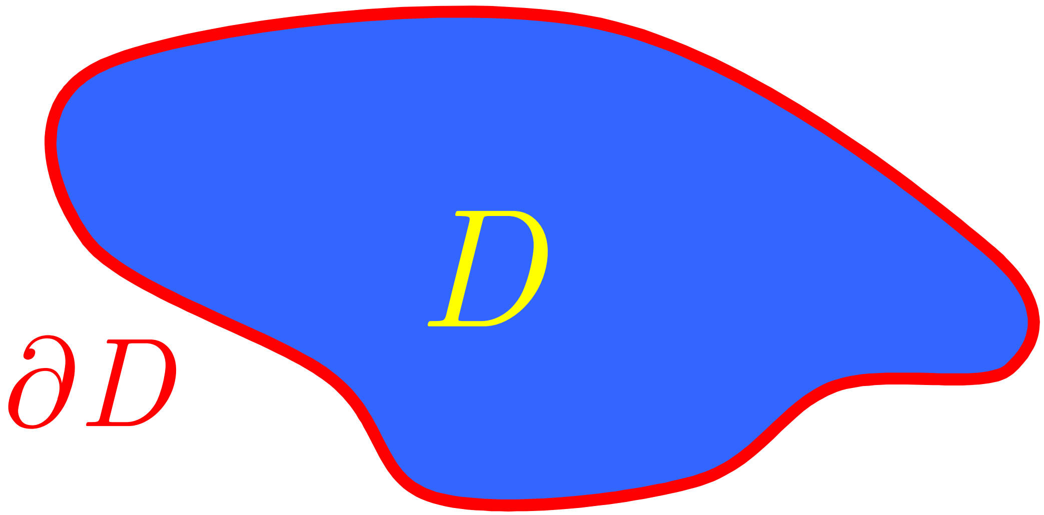
1.3. Hàm số liên tục

1.1. Các định nghĩa

a) Miền phẳng

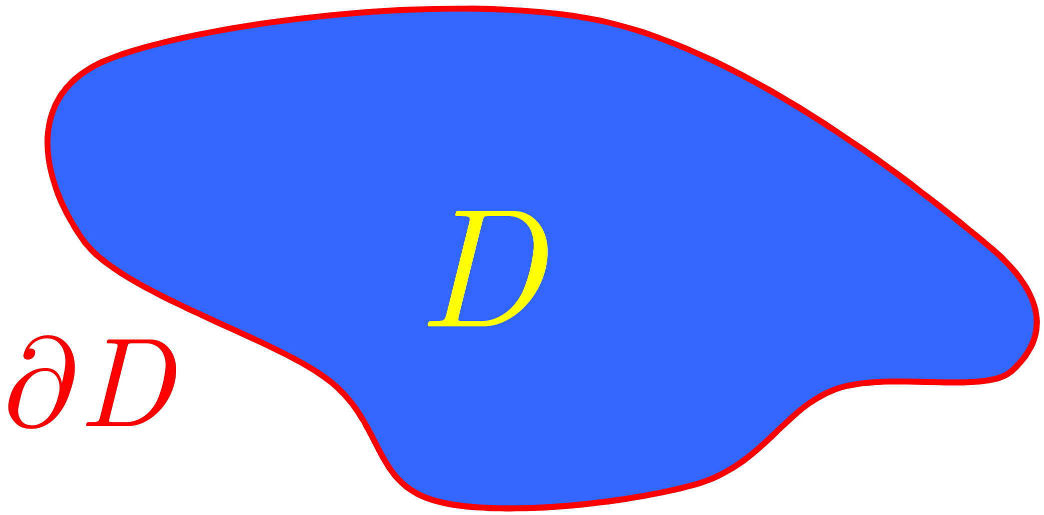


Miền đóng



$$\boxed{\overline{D} = D \cup \partial D}$$

Miền mở

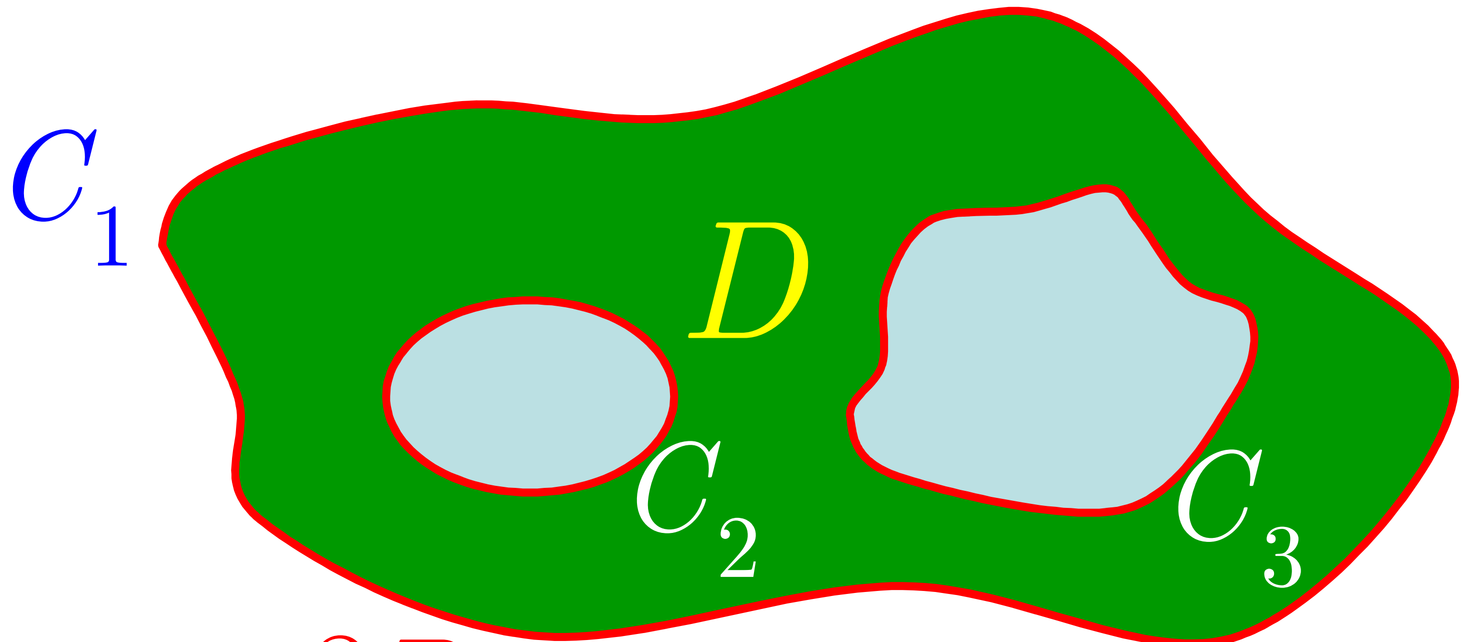


$$\boxed{D = \bar{D} \setminus \partial D}$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

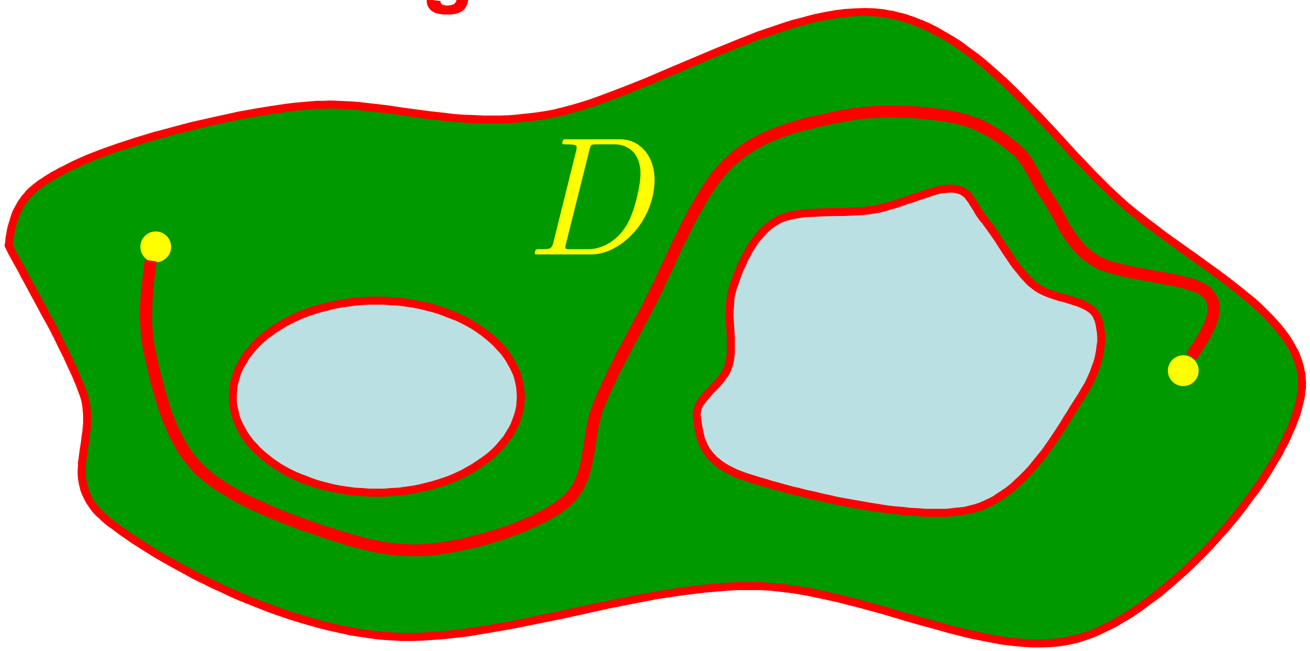
Miền đa liên

Miền đơn liên

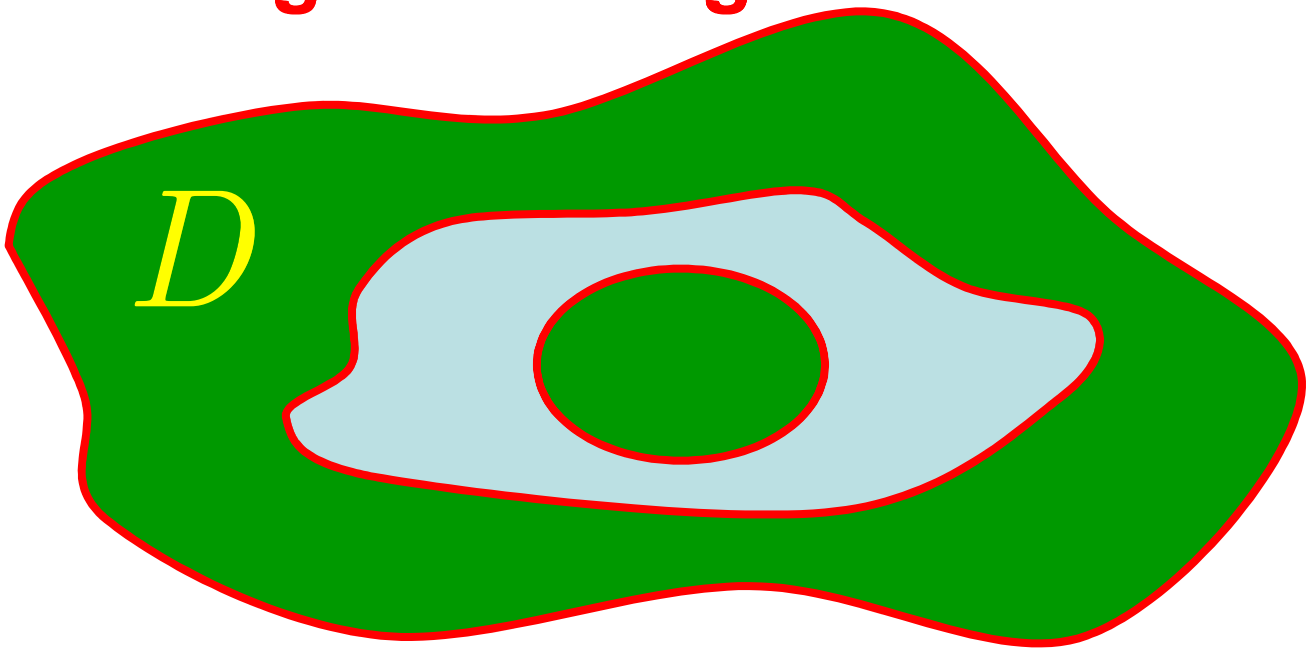


$$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

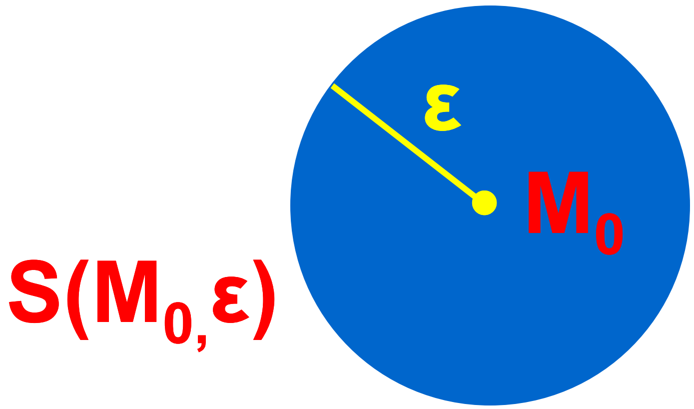
Miền liên thông



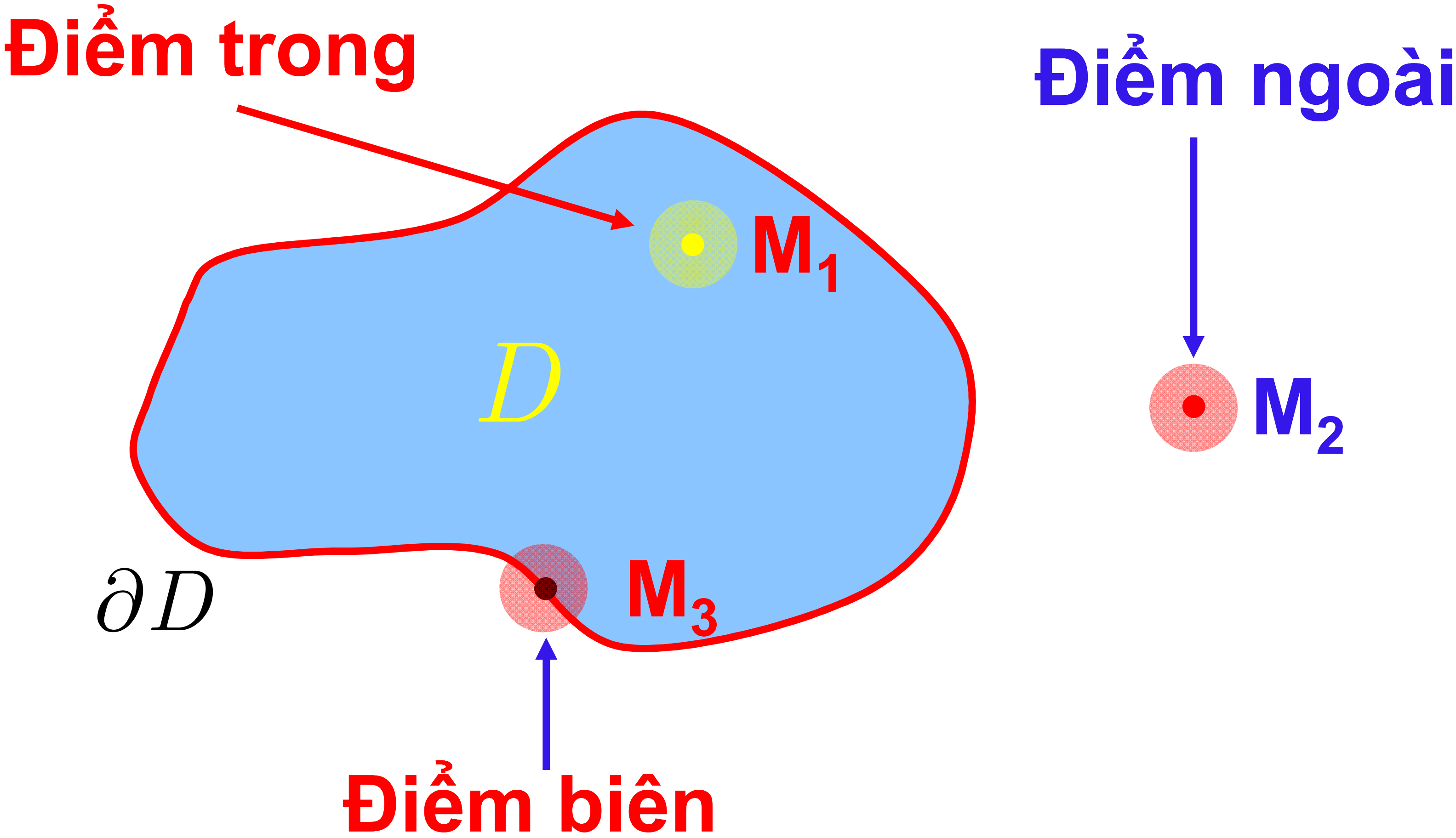
Miền không liên thông



b) Lân cận của một điểm trong mặt phẳng



$$\boxed{M \in S(M_0, \varepsilon) \Leftrightarrow d(M, M_0) < \varepsilon}$$



Điểm trong
Điểm ngoài
M1
M2
M3
D
∂D
Điểm biên

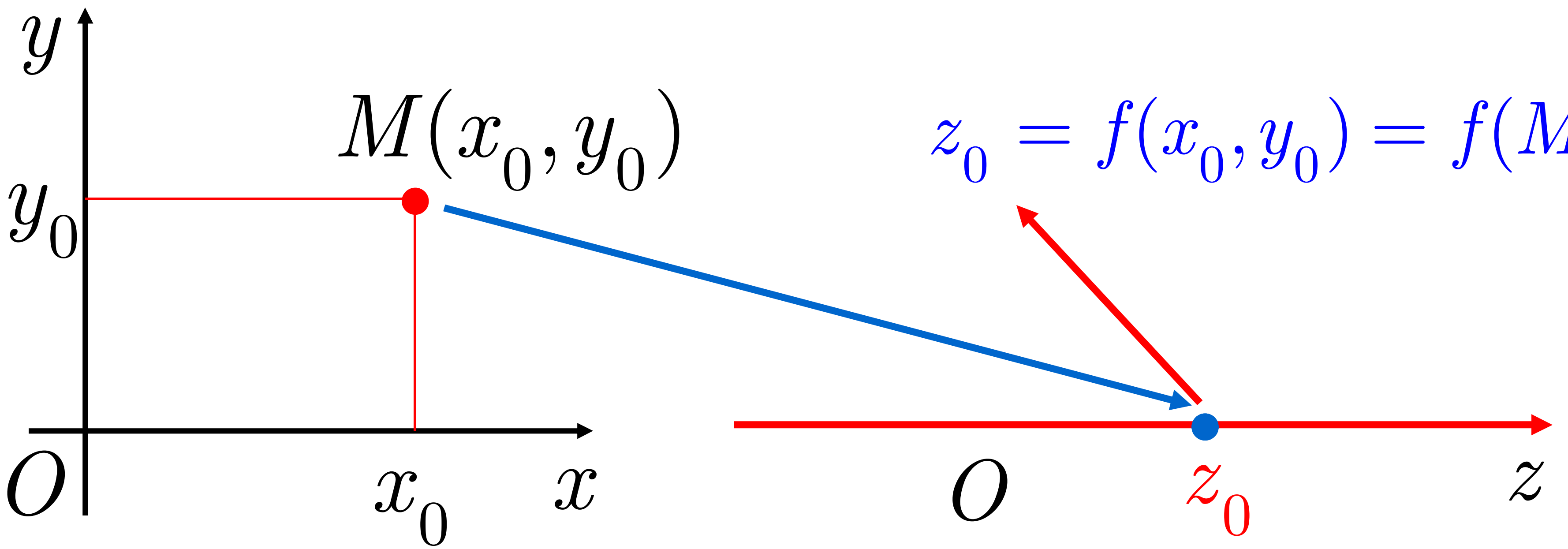
d) Hàm số hai biến số

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là miền xác định (MXĐ) của hàm số $f(x, y)$, ký hiệu là D_f.

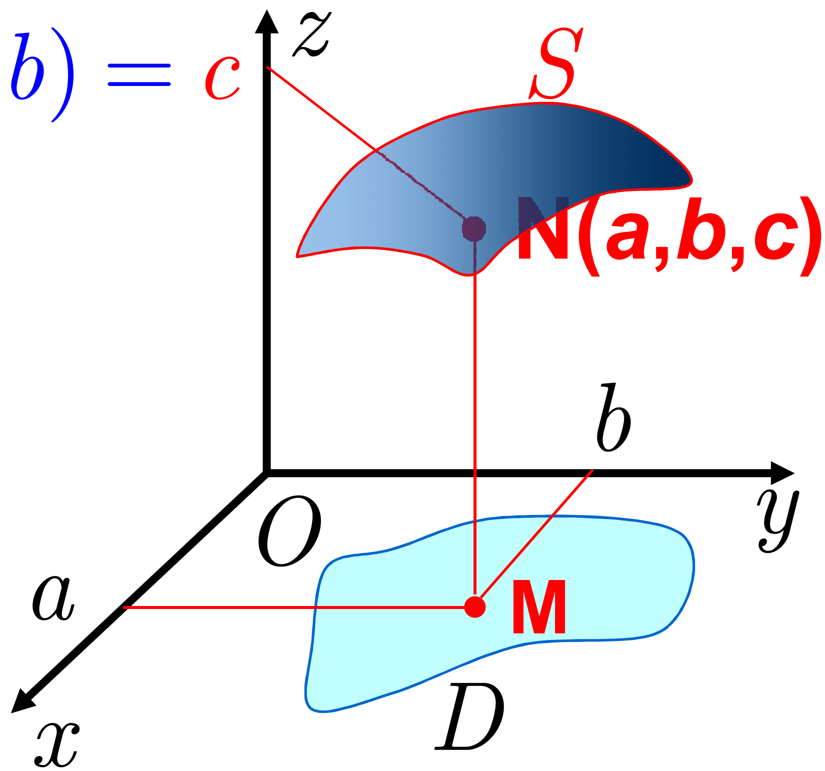
$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \in \mathbb{R}\}}$$

- $z = f(x, y)$ được gọi là giá trị của hàm số tại (x, y).



Đồ thị của hàm số *z* = *f*(*x*,*y*)

$$f(M) = f(a,b) = c$$



$$\boxed{S = \{(x, y, f(M)) \mid M(x,y) \in D\}}$$

VD.

- Hàm số $f(x,\ y) = 3x^2y - \cos xy$ có $D_f = \mathbb{R}^2$.
- Hàm số $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có MXĐ là hình tròn đóng tâm $O(0;\ 0)$, bán kính $R = 2$.

Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 \geq 0$

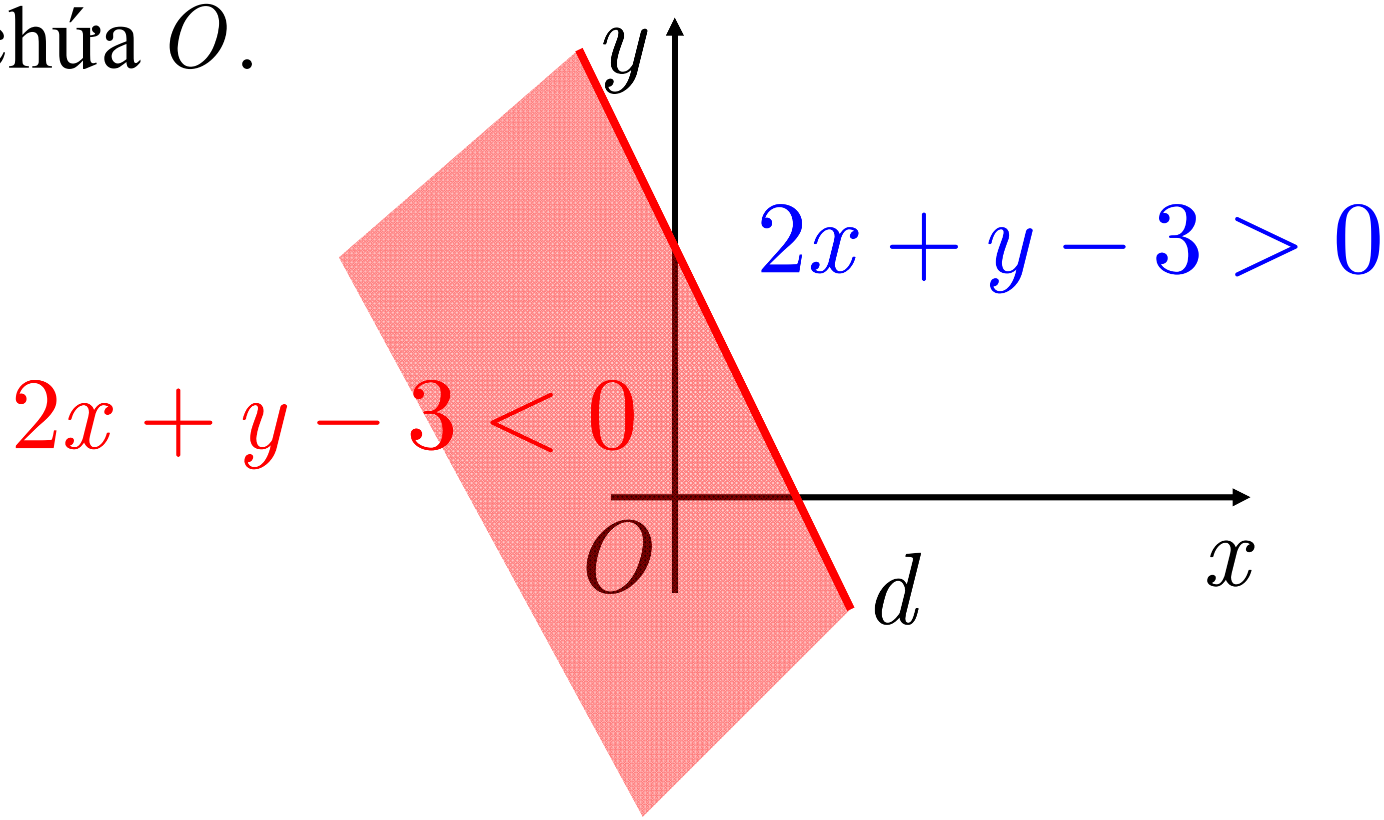
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

- Hàm số $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ có MXĐ là hình tròn mở tâm $O(0;\,0)$, bán kính $R = 2$.

Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4.$$

- Hàm số $z = f(x,y) = \ln(2x + y - 3)$ có MXĐ là nửa mp mở có biên $d : 2x + y - 3 = 0$, không chứa O.



1.2. Giới hạn của hàm hai biến số

1.3. Hàm số liên tục

....

Bài 2. Đạo hàm – Vi phân

2.1. Đạo hàm riêng

2.2. Vi phân

2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm $M_0(x_0,y_0)$. Cố định $y = y_0$, đạo hàm hàm số $f(x,y_0)$ tại x_0 được gọi là *đạo hàm riêng theo biến* x của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0,y_0), ký hiệu là:

$$f'_x(x_0,y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

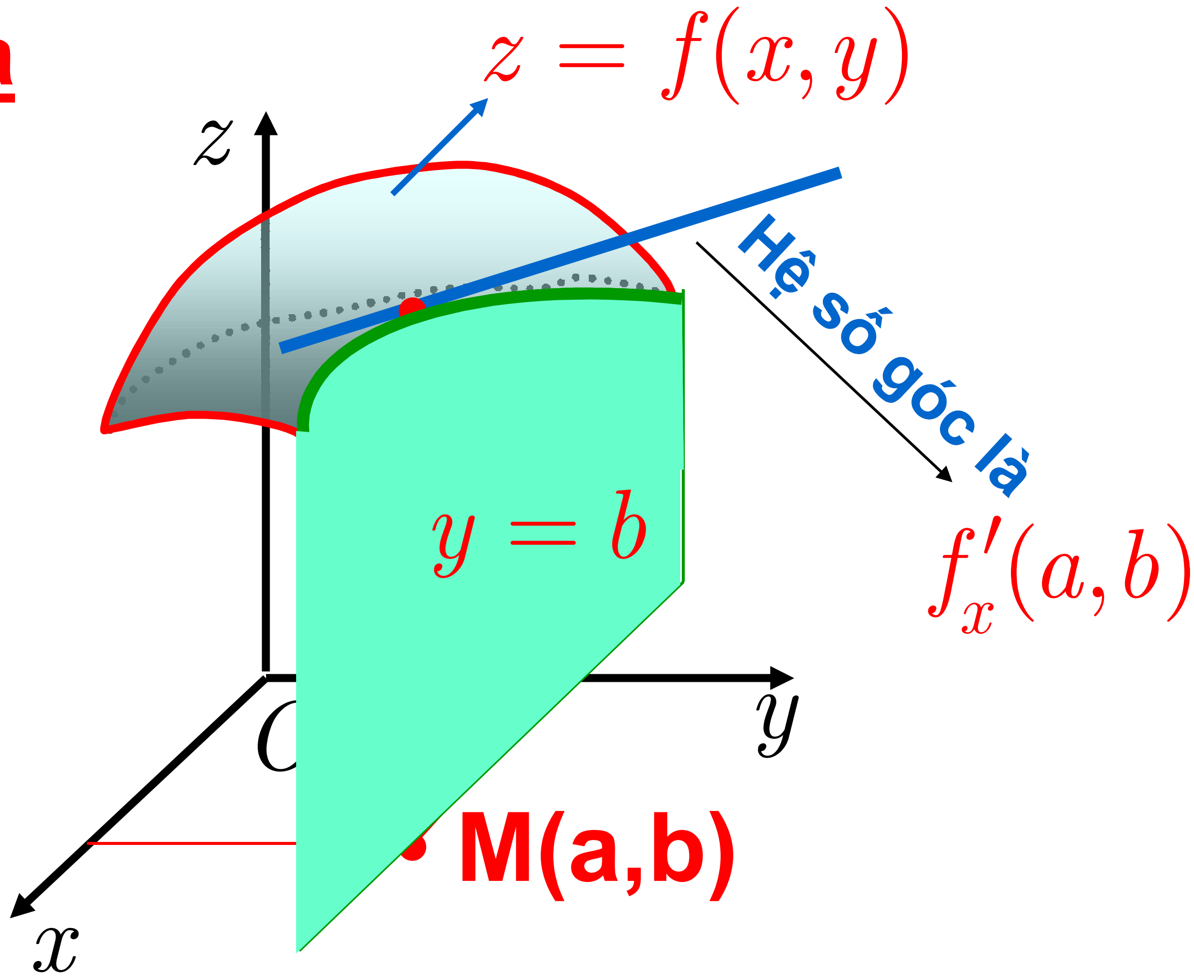
2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

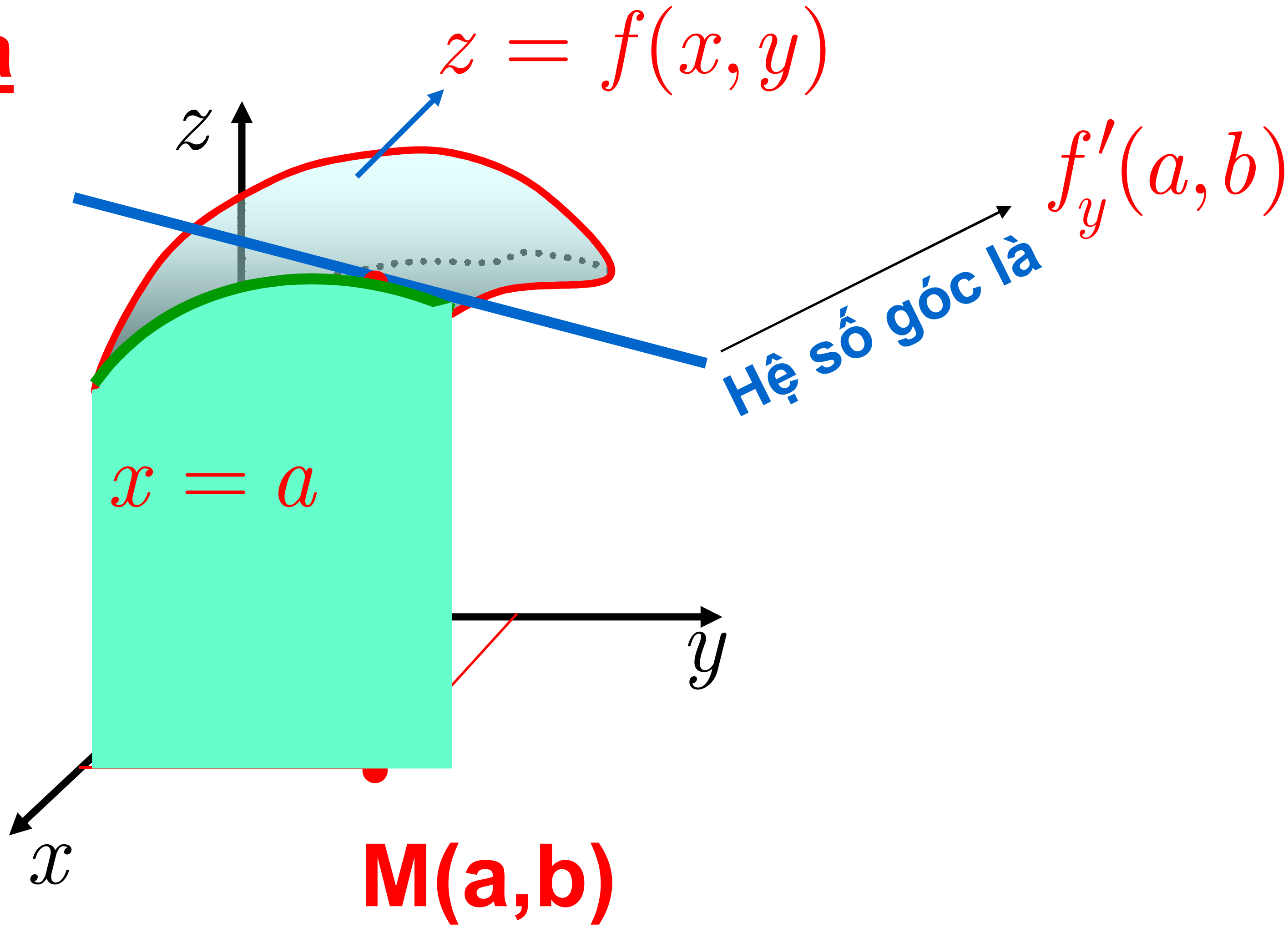
Tương tự, đạo hàm riêng $f(x,y)$ theo biến y tại (x_0,y_0) là:

$$\boxed{f'_y(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

- **Ý nghĩa**



- **Ý nghĩa**



- **Chú ý**

- Các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến đều đúng cho đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến.
- Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến x, ta xem biến y là hằng số và ngược lại.

VD1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2y^3 - 3xy \text{ tại } (-1;\,2).$$

Giải. Ta có:

$$f'_x(x,y) = (x^4 - 3x^3y^2 + 2y^3 - 3xy)'_x = 4x^3 - 9x^2y^2 - 3y$$

$$f'_y(x,y) = (x^4 - 3x^3y^2 + 2y^3 - 3xy)'_y = -6x^3y + 6y^2 - 3x$$

Thay $x = -1$, $y = 2$ vào $f'_x(x,y)$ và $f'_y(x,y)$ ta được:

$$f'_x(-1;\,2) = -46 \text{ và } f'_y(-1;\,2) = 39.$$

VD2. Tính các đạo hàm riêng của $f(x, y) = \sin(x^2 y)$.

VD3. Tính các đạo hàm riêng của hs $z(x, y) = e^{y \ln x}$.

VD4. Tính các đạo hàm riêng của hs $z = \dfrac{x^2 + 2xy}{x - y}$.

VD5. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$z = \ln \sqrt{\left(\frac{x - y}{x + y}\right)^3} \text{ tại } (2; -1).$$

2.1.2. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng của các hàm số $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ được gọi là các *đạo hàm riêng cấp hai* của hàm số $f(x,y)$, ký hiệu là:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x,\ f''_{xy} = (f'_x)'_y,\ f''_{yx} = (f'_y)'_x,\ f''_{y^2} = (f'_y)'_y$$

hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$

- Hàm số nhiều hơn 2 biến và đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 có định nghĩa tương tự.

VD. $f^{(5)}_{x^2y^3}(x,y) = ((((f'_x(x,y))'_x)'_y)'_y)'_y = (f''_{x^2}(x,y))'''_{y^3}$;

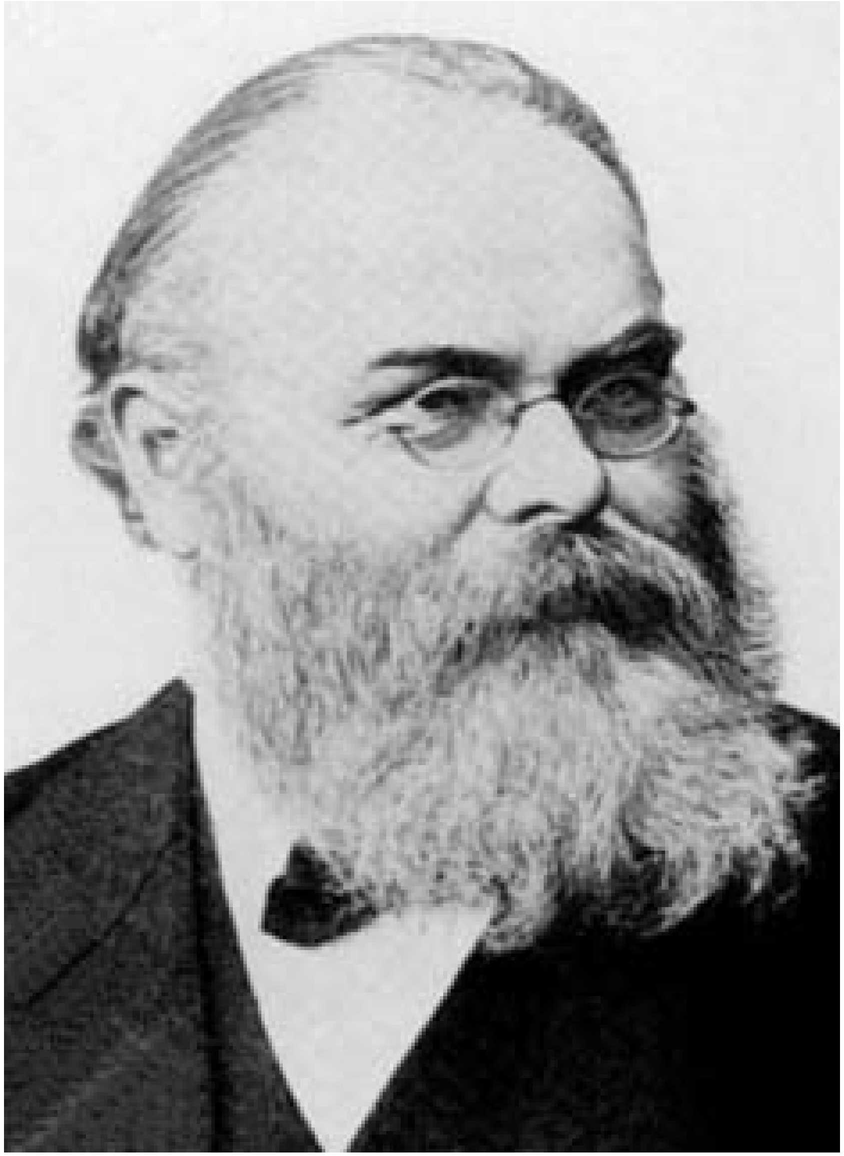
$$f^{(6)}_{x^2yxz^2}(x,y,z) = (((f''_{x^2}(x,y,z))'_y)'_x)''_{z^2}.$$

Sơ đồ

$$
\begin{tikzcd}
 & & f''_{x^2} \\
 & f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f''_{xy} \\
f(x,y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & f''_{y^2} \\
 & f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f''_{yx}
\end{tikzcd}
$$

- **Định lý Schwarz**

Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ thì $f''_{xy} = f''_{yx}$.



Hermann Amandus Schwarz
(1843 – 1921)

VD6. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$f(x,y) = x^3e^y + x^2y^3 - y^4$ tại $(-1; 1)$.

VD7. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$$f(x,y) = \cos(xy^2).$$

VD8. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $z = e^{x-y^2}$.

VD9. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của $z = \dfrac{2xy}{x-y}$.

VD10. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$$z = \arctan\frac{x}{y}.$$

2.2. VI PHÂN

2.2.1. Vi phân cấp 1

Đại lượng

$$f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ký hiệu $df(x_0, y_0)$, được gọi là ***vi phân*** hàm số $f(x, y)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$.

Công thức vi phân của $f(x,y)$ tại $M(x,y)$ là

$$\boxed{df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$

- Vi phân của hàm nhiều hơn hai biến số có định nghĩa tương tự, chẳng hạn

$$\boxed{df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz}$$

VD11. Cho hs $f(x,y) = 2x^3y^2 - x^2y$, tính $df(1;-1)$.

Giải. Ta có các đạo hàm riêng là:

$$f'_x(x,y) = 6x^2y^2 - 2xy \Rightarrow f'_x(1;-1) = 8,$$

$$f'_y(x,y) = 4x^3y - x^2 \Rightarrow f'_y(1;-1) = -5.$$

Vậy $df(1;-1) = f'_x(1;-1)dx + f'_y(1;-1)dy = 8dx - 5dy$.

VD12. Tính vi phân của hàm số $f(x,y)=\tan(x^2y)$.

Giải. Ta có các đạo hàm riêng là:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=[\tan(x^2y)]'_x=\dfrac{2xy}{\cos^2(x^2y)}, \\ f'_y(x,y)=[\tan(x^2y)]'_y=\dfrac{x^2}{\cos^2(x^2y)}. \end{cases}$$

Vậy $df(x,y)=\dfrac{2xy}{\cos^2(x^2y)}dx+\dfrac{x^2}{\cos^2(x^2y)}dy$.

VD13. Cho hs $f(x,y) = e^{y-x^2}\cos(x^2y)$, tính $df(1;-\pi)$.

Giải. Ta có các đạo hàm riêng là:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = -2xe^{y-x^2}[\cos(x^2y) + y\sin(x^2y)] \\ f'_y(x,y) = e^{y-x^2}[\cos(x^2y) - x^2\sin(x^2y)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(1;-\pi) = 2e^{-\pi-1} \\ f'_y(1;-\pi) = -e^{-\pi-1}. \end{cases}$$

Vậy $df(1;-\pi) = (2dx - dy)e^{-\pi-1}$.

2.2.2. Vi phân cấp 2

Vi phân của $df(x,y)$, ký hiệu là $d^2f(x,y)$, được gọi là *vi phân cấp 2* của hàm số $f(x,y)$.

$$\boxed{d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2}$$

VD14. Tính $d^2f(2;-1)$ của hàm số

$$f(x,y) = x^2y^3 + xy^2 - 3x^3y^5.$$

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy^3 + y^2 - 9x^2y^5 \\ f'_y(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy - 15x^3y^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = 2y^3 - 18xy^5 \\ f''_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 2y - 45x^2y^4 \\ f''_{y^2}(x,y) = 6x^2y + 2x - 60x^3y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(2;-1) = 34 \\ f''_{xy}(2;-1) = -170 \\ f''_{y^2}(2;-1) = 460. \end{cases}$$

Vậy $d^2f(2;-1) = 34dx^2 - 340dxdy + 460dy^2$.

VD15. Tính vi phân cấp 2 của hàm số $z = \sin(xy^2)$.

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} z'_x = y^2 \cos(xy^2) \\ z'_y = 2xy\cos(xy^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z''_{x^2} = -y^4 \sin(xy^2) \\ z''_{xy} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2) \\ z''_{y^2} = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2 \sin(xy^2). \end{cases}$$

Vậy $d^2z(x,y) = -y^4 \sin(xy^2)dx^2$

$$+4y[\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2)]dxdy$$

$$+2x[\cos(xy^2) - 2xy^2 \sin(xy^2)]dy^2.$$

Chương 4. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

3.1. Định nghĩa

3.2. Cực trị tự do

3.3. Cực trị có điều kiện

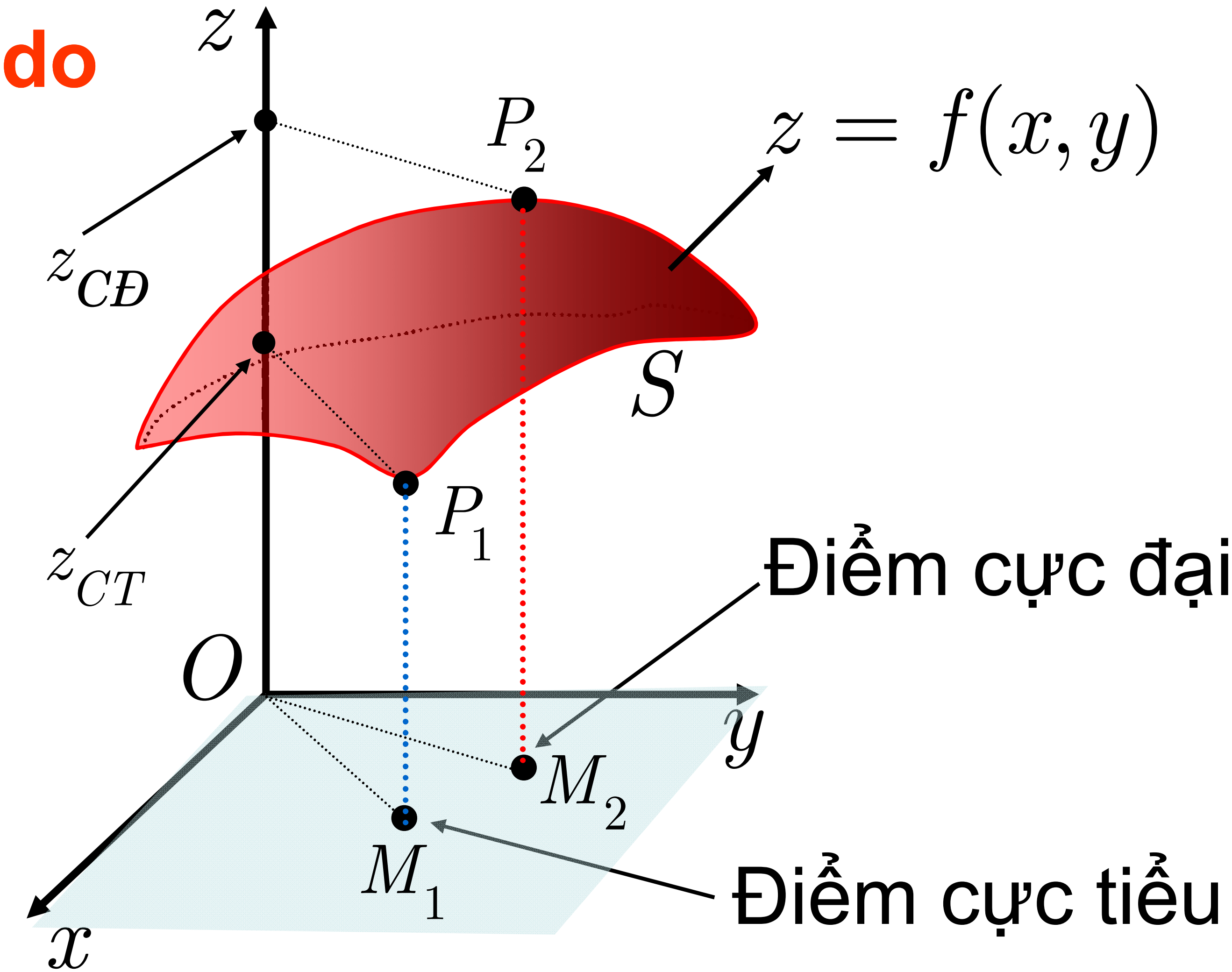
3.1. Định nghĩa

- Hàm số $z = f(x, y)$ đạt *cực trị địa phương* (gọi tắt là cực trị) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi điểm $M(x, y) \in S(M_0) \setminus M_0$ thì

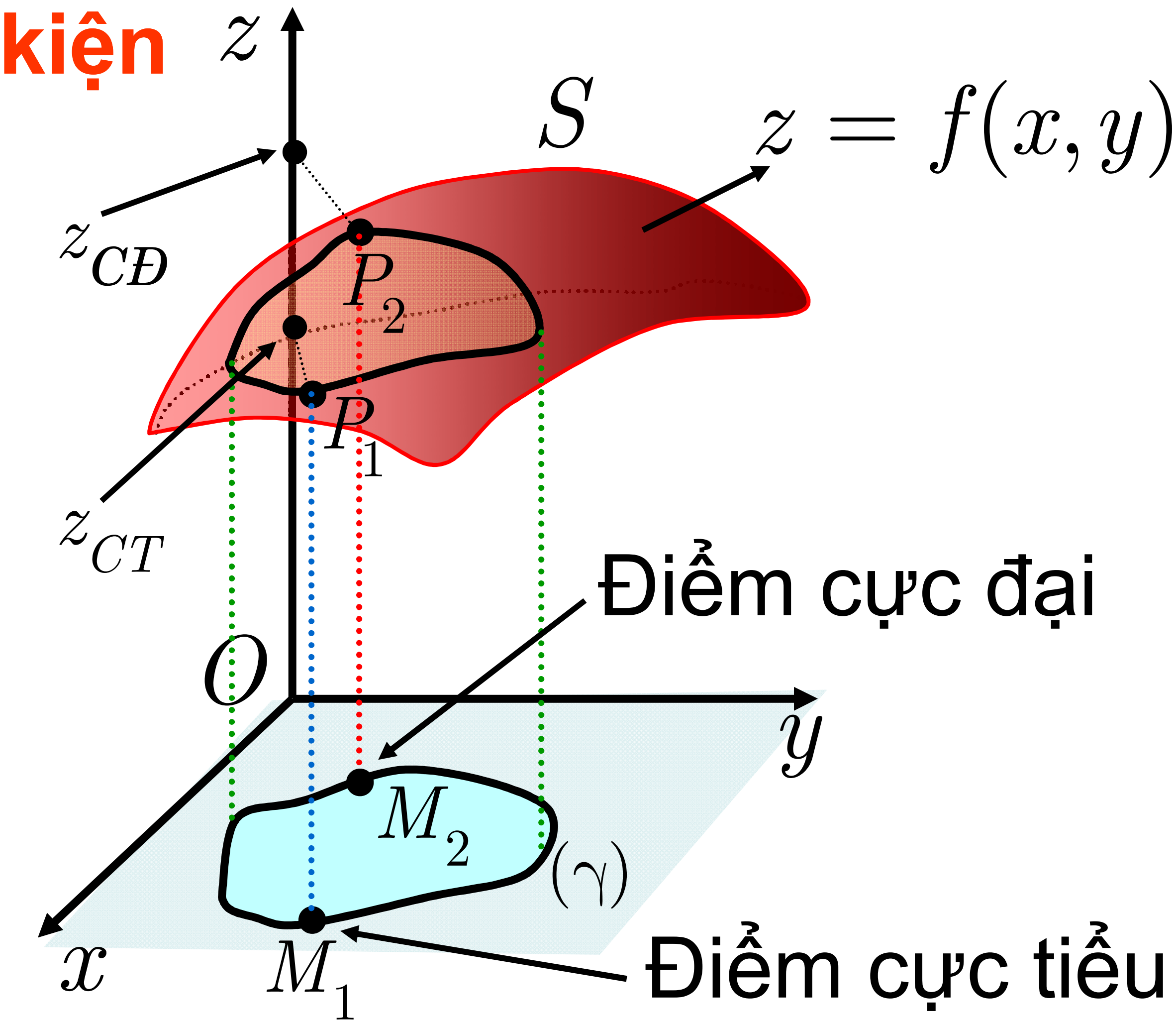
$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$ có dấu không đổi.

- Nếu $\Delta f > 0$ thì $f(x_0, y_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* và M_0 là *điểm cực tiểu* của $z = f(x, y)$.
- Nếu $\Delta f < 0$ thì $f(x_0, y_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* và M_0 là *điểm cực đại* của $z = f(x, y)$.

Cực trị tự do



Cực trị có điều kiện



3.2. CỰC TRỊ TỰ DO

▪ Phương pháp tìm cực trị tự do

Để tìm cực trị tự do của hàm số $f(x,y)$ trên $D \subset \mathbb{R}^2$, ta thực hiện các bước sau

• **Bước 1.** Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ phtrình

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

- **Bước 2.** Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ pt trên và $M_0(x_0, y_0) \in D$, ta tính:

$$\begin{cases} A = f''_{x^2}(x_0, y_0) \\ B = f''_{xy}(x_0, y_0) \Rightarrow \Delta = AC - B^2. \\ C = f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$$

- **Bước 3.** Ta có các trường hợp:

1) nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì $f(x,y)$ *đạt cực tiểu* tại M_0;

2) nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì $f(x,y)$ *đạt cực đại* tại M_0;

3) nếu $\Delta < 0$ thì $f(x,y)$ *không đạt cực trị* tại M_0;

4) nếu $\Delta = 0$ thì ta *chưa thể kết luận*.

VD1. Tìm điểm dừng của hàm số

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 12x - 5.$$

VD2. Tìm cực trị của hs $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8$.

VD3. Tìm cực trị của hs $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 2$.

VD4. Tìm điểm cực trị của hàm số

$$z = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$

VD5. Tìm cực trị của hàm số $z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

VD6. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = 2x^3 + 5x^2 + xy^2 + y^2 - 4.$$

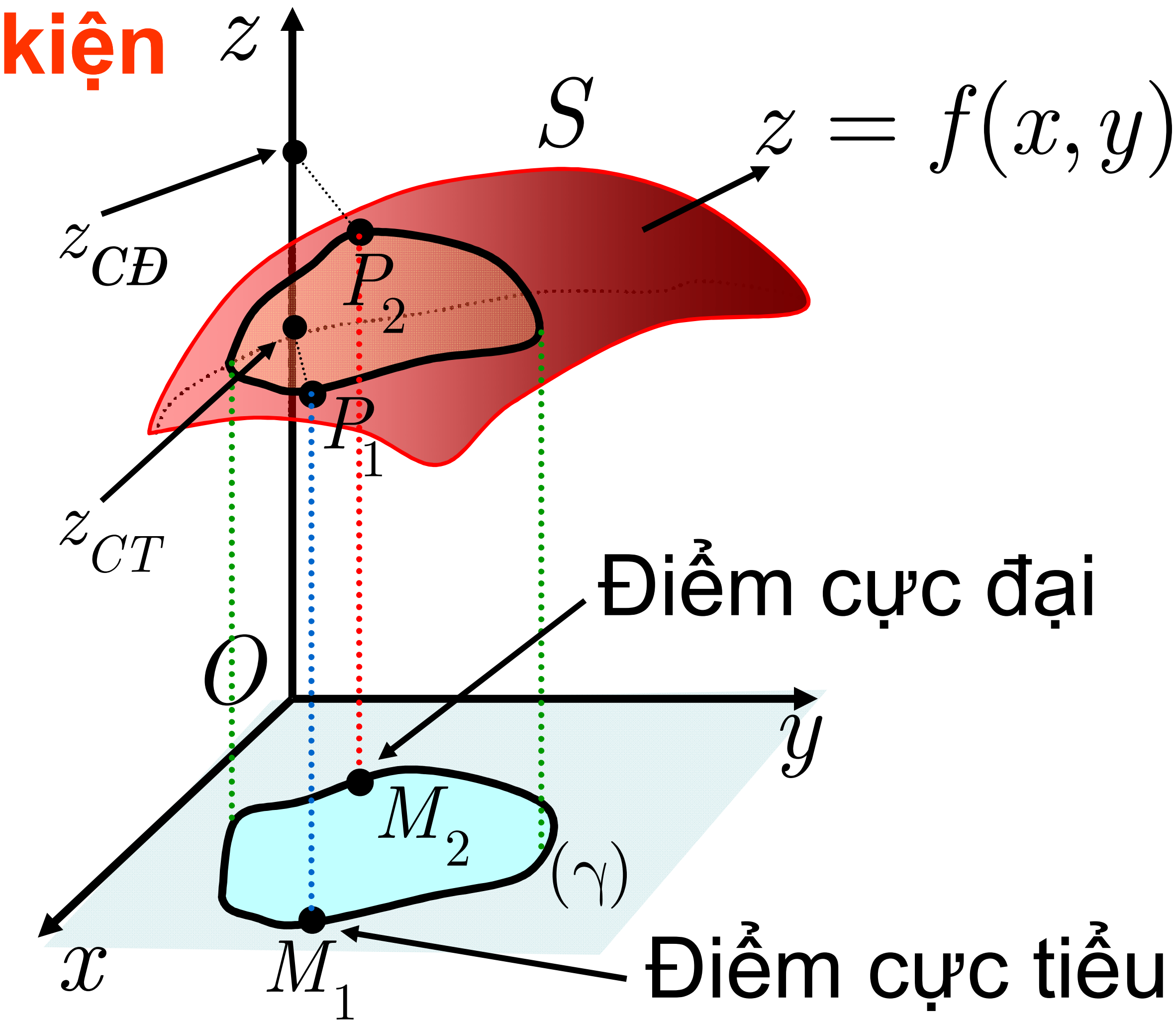
3.3. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

(*cực trị vướng*)

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ thuộc đường cong $(\gamma): \varphi(x,y)=0.$

Nếu tại điểm M_0, hàm $f(x,y)$ đạt cực trị thì ta nói M_0 là điểm ***cực trị có điều kiện*** của $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0.$

Cực trị có điều kiện



3.3.1. Phương pháp khử

- **Bước 1.** Từ pt $\varphi(x, y) = 0$, ta giải y theo x (hoặc x theo y) và thế vào hàm số $z = f(x, y)$.
- **Bước 2.** Tìm cực trị của hàm 1 biến $z = f(x, y(x))$.

VD7. Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ thỏa mãn điều kiện $xy = 1$.

Giải. Ta có: $xy = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow z = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

$$z' = 2x - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right. .$$

Lập BBT của hàm $z = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, ta được:

$z = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại $M_1(-1; -1)$, $M_2(1; 1)$.

3.3.2. Phương pháp nhân tử Lagrange

- **Bước 1.** Lập hàm phụ (*hàm Lagrange*)

$$\boxed{L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)}$$

- **Bước 2.** Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ pt

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y) = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Giả sử $f(x,y)$ có n điểm dừng $M_k(x_k, y_k)$ ứng với λ_k $(k = 1, \ldots, n)$.

- **Bước 3.** Tính các vi phân:

$$d^2L(x,y) = L''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y)dxdy + L''_{y^2}(x,y)dy^2$$

$$d\varphi(x,y) = \varphi'_x(x,y)dx + \varphi'_y(x,y)dy.$$

- **Bước 4.** Tại điểm $M_k(x_k, y_k)$ ứng với λ_k, ta giải:

$$\varphi'_x(M_k)dx + \varphi'_y(M_k)dy = 0 \Rightarrow dy \text{ theo } dx$$

(hoặc ngược lại).

Sau đó, thay vào $d^2L(M_k)$ (chú ý $dx^2 + dy^2 > 0$).

Kết luận:

1) nếu $d^2L(M_k) > 0$ thì $f(x,y)$ *đạt cực tiểu* tại M_k;

2) nếu $d^2L(M_k) < 0$ thì $f(x,y)$ *đạt cực đại* tại M_k.

- **Chú ý**

- Trường hợp $d^2L(M_k) = 0$ trong chương trình ta không xét.
- Nếu từ vi phân $d^2L(x,y)$ mà ta có thể kết luận được cực trị thì không cần phải tính $d\varphi(x,y)$.

VD8. Tìm điểm cực trị của hàm số $f(x,y) = 2x + y$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Giải.

- Hàm Lagrange: $x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5$

$$\Rightarrow L(x,y) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

- Tìm điểm dừng, ta có:

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x,y) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \\ y = -1. \end{cases}$$

Suy ra hàm số có hai điểm dừng:

$M_1(2;1)$ với $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ và $M_2(-2;-1)$ với $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

- Tính vi phân:

$$d^2L(x,y) = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

- Tại điểm $M_1(2;1)$ với $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$, ta có:

$d^2L(M_1) = -(dx^2 + dy^2) < 0 \Rightarrow M_1$ là điểm cực đại.

- Tại điểm $M_2(-2;-1)$ với $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$, ta có:

$d^2L(M_2) = dx^2 + dy^2 > 0 \Rightarrow M_2$ là điểm cực tiểu.

VD9. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 = 3x + 4y$.

Giải. Ta có: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y$

$$\Rightarrow L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 3x - 4y).$$

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 2x + \lambda(2x - 3) = 0 \quad (1) \\ L'_y(x, y) = 2y + \lambda(2y - 4) = 0 \quad (2) \\ \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0 \ (3). \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = \dfrac{3\lambda}{2(1+\lambda)}$, $y = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda}$, thay vào (3)

ta được 2 điểm dừng:

$M_1(0;\ 0)$ với $\lambda_1 = 0$ và $M_2(3;\ 4)$ với $\lambda_2 = -2$.

Từ vi phân $d^2L(x, y) = (2 + 2\lambda)(dx^2 + dy^2)$, ta có:

- $d^2L(M_1) > 0 \Rightarrow M_1(0;\ 0)$ là điểm cực tiểu.
- $d^2L(M_2) < 0 \Rightarrow M_2(3;\ 4)$ là điểm cực đại.

▪ Chú ý

- Trong ví dụ 9, nếu ta thay $x^2 + y^2 = 3x + 4y$ vào $z = x^2 + y^2$ thì $z = 3x + 4y$ và
$$L(x, y) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 3x - 4y).$$
Giải tương tự như trên, ta có hai điểm dừng:
$M_1(0;\, 0)$ với $\lambda_1 = 1$ và $M_2(3;\, 4)$ với $\lambda_2 = -1$.

  Kết quả tìm được không thay đổi nhưng nhân tử λ đã thay đổi.

- Khi ta thay $\varphi(x, y) = 0$ bởi một phương trình tương đương thì nhân tử λ sẽ thay đổi nhưng không làm thay đổi kết quả của bài toán.

VD10. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 10x + 40y$ thỏa điều kiện $\sqrt{xy} = 20$.

Giải. Biến đổi:

$$\sqrt{xy} = 20 \Leftrightarrow xy = 400 \Rightarrow \varphi(x,y) = xy - 400$$

$$\Rightarrow L(x,y) = 10x + 40y + \lambda(xy - 400).$$

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 10 + \lambda y = 0 \\ L'_y(x,y) = 40 + \lambda x = 0 \\ \varphi(x,y) = xy - 400 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(40;\,10),\, \lambda_1 = -1 \\ M_2(-40;-10),\, \lambda_2 = 1. \end{array}\right.$$

Vi phân:

$$d^2L(x,y) = 2\lambda dxdy \text{ và } d\varphi(x,y) = ydx + xdy.$$

- Tại $M_1(40;\,10)$ ứng với $\lambda_1 = -1$, ta có:

$$d\varphi(M_1) = 0 \Rightarrow dx = -4dy \Rightarrow d^2L(M_1) = 8dy^2 > 0$$

$\Rightarrow M_1(40;\,10)$ là điểm cực tiểu của $f(x,y)$.

- Tại $M_2(-40;-10)$ ứng với $\lambda_2 = 1$, ta có:

$$d\varphi(M_2) = 0 \Rightarrow dx = -4dy \Rightarrow d^2L(M_2) = -8dy^2 < 0$$

$\Rightarrow M_2(-40;-10)$ là điểm cực đại của $f(x,y)$.

VD11. Tìm điểm cực trị của $z = xy$ thỏa điều kiện

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Giải. Biến đổi: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 8 = 0$

$$\Rightarrow L(x, y) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 8).$$

Ta có:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x, y) = x + 8\lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = x^2 + 4y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ \lambda = -\dfrac{x}{8y} \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}.$$

Suy ra hàm số có 4 điểm dừng:

- $M_1(2;1)$ và $M_2(-2;-1)$ ứng với $\lambda = -\dfrac{1}{4}$,
- $M_3(-2;1)$ và $M_4(2;-1)$ ứng với $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

Vi phân:

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 8\lambda dy^2,\ d\varphi(x,y) = 2xdx + 8ydy.$$

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

- Tại $M_1(2;\,1)$ và $M_2(-2;-1)$, với $\lambda = -\dfrac{1}{4}$ ta có:

$$d^2L(M_{1,2}) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2.$$

Mặt khác: $d\varphi(M_{1,2}) = 0 \Leftrightarrow dx = -2dy \neq 0$

$$\Rightarrow d^2L(M_{1,2}) = -8dy^2 < 0.$$

$\Rightarrow M_1(2;\,1)$ và $M_2(-2;-1)$ là hai điểm cực đại.

- Tương tự

$M_3(-2;\,1)$ và $M_4(2;-1)$ là hai điểm cực tiểu.

……………………………Hết……………………………