

Skript zur Vorlesung  
Analysis I  
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2023/24

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein  
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aussagenlogik</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mengen</b>	<b>4</b>
2.1	Eigenschaften von Mengen . . . . .	4
2.2	Operationen mit Mengen . . . . .	4
2.3	Quantoren . . . . .	6
2.4	Kartesisches Produkt und Relationen . . . . .	6
2.5	Funktionen . . . . .	8
2.6	Geordnete Mengen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Die Axiome der Reellen Zahlen</b>	<b>10</b>
3.1	Algebraische Axiome . . . . .	10
3.2	Die Anordnungsaxiome . . . . .	12
3.3	Das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Die natürlichen Zahlen <math>\mathbb{N}</math> und vollständige Induktion</b>	<b>16</b>
4.1	Induktive Mengen . . . . .	16
4.2	Vollständige Induktion . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Summe, Produkt, Wurzeln</b>	<b>20</b>
5.1	Summenzeichen, Produktzeichen . . . . .	20
5.2	Binomischer Lehrsatz . . . . .	20
5.3	Bernoullische Ungleichung . . . . .	22
5.4	Wurzeln . . . . .	23
5.5	Absolutbetrag . . . . .	23
<b>6</b>	<b>[*] Folgen und Grenzwerte</b>	<b>25</b>
6.1	Konvergenz . . . . .	25
6.2	Geometrische Bedeutung der Konvergenz . . . . .	25
6.3	Eigenschaften von Folgen und Konvergenzen . . . . .	26
6.4	[*] Monotone Konvergenz . . . . .	29
6.5	[*] Häufungswerte und Teilfolgen . . . . .	35
6.6	Größter und kleinster Häufungswert - Limes superior und Limes inferior . . . . .	37
6.7	Das Konvergenzkriterium von Cauchy . . . . .	41
6.8	[*] Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ . . . . .	43
6.9	[*] Reihen (und Konvergenz von Reihen) . . . . .	45

Alle mit [\*] markierten Kapitel sind noch nicht korrekturgelesen und bedürfen eventuell noch Änderungen.

# 1 Aussagenlogik

**Definition 1.0.1** (Aussage). Eine Aussage ist eine Behauptung sprachlich oder mittels Formeln, welche entweder wahr oder falsch ist.

**Beispiel 1.0.2** (Zulässige Aussagen).

- (i) Bielefeld existiert (w)
- (ii)  $2 + 2 = 5$  (f)
- (iii) Es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

**Definition 1.0.3** (Aussageform). Eine Aussage, die von mindestens einer Variablen abhängt, nennt sich Aussageform. Wir schreiben zum Beispiel  $H(x)$  für eine Aussage für die Variable  $x$ .

**Beispiel 1.0.4** (Mögliche Aussageformen).

- (i)  $H(x) :\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2 = 0)$
- (ii)  $G(x) :\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2)$

**Konzept 1.0.5** (Beweisstruktur).

$$\begin{array}{ccc} p & & q \\ \text{Voraussetzung} & \Rightarrow & \text{Behauptung} \\ \text{hinreichend für } q & & \text{notwendig für } p \end{array}$$

Beweis:  $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow r_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow r_n \Rightarrow q$ . ( $r_1, \dots, r_n$  sind bereits bekannte wahre Aussagen oder Axiome)

**Satz 1.0.6** (Regeln der Aussagenlogik). Seien  $p, q, r$  Aussagen. Dann sind folgende Aussagen wahr:

- (i)  $p \vee \neg p$  (Tertium non datur)
- $p \Rightarrow p$
- $\neg(p \wedge \neg p)$
- (ii)  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$  (Kommutativität)
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- (iii)  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$  (Assoziativität)
- $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- (iv)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  (De Morgan)
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- (v)  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$  (Definition der Implikation)
- (vi)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  (Definition der Äquivalenz)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- (vii)  $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$  (Transitivität)

## 2 Mengen

### 2.1 Eigenschaften von Mengen

**Notation 2.1.1** (Konkrete Beschreibung von Mengen). Eine Menge ist informell formuliert eine Ansammlung von Objekten. Um diese Objekte konkret anzugeben, schreiben wir  $M = \{1, 2, 3\}$ . Eine andere Möglichkeit, eine Menge anzugeben ist über die Eigenschaften der Elemente. Wir schreiben:  $M = \{x \mid H(x)\}$ . Das bedeutet, dass ein Element  $x$  genau dann ein Element der Menge ist, wenn  $H(x)$  gilt. Wir schreiben  $x \in M \Leftrightarrow H(x)$ .

**Beispiel 2.1.2** (Mengendeklaration über Aussagenform).

$$\begin{aligned} H(x) &:= (x^2 - 3x + 2 = 0) \\ \Rightarrow \{x \mid H(x)\} &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

**Definition 2.1.3** (Eigenschaften von Mengen). Allgemein gilt für Mengen:

1. 2 Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.
2. Die leere Menge ( $\emptyset$ ) ist die einzige Menge, die keine Elemente enthält
3. Wenn für jedes  $x \in A$  auch  $x \in B$  folgt, dann ist  $A$  eine Teilmenge von  $B$ . ( $A \subseteq B$ )
4. Ist  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ , dann nennen wir  $A$  eine echte Teilmenge von  $B$ . ( $A \subsetneq B$ )
5.  $A$  und  $B$  sind disjunkt, falls aus  $x \in A$  folgt, dass  $x \notin B$ .

**Bemerkung 2.1.4.** Allgemein gilt für zwei Mengen  $A$  und  $B$ , dass  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ .<sup>1</sup>

### 2.2 Operationen mit Mengen

**Definition 2.2.1** (Mengenoperationen). Seien  $A, B$  Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && \text{(Schnitt)} \\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && \text{(Vereinigung)} \\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} && \text{(Differenz)} \end{aligned}$$

$$\text{Wenn } A \subseteq M : A^C = A_M^C := M \setminus A \quad \text{(Komplement)}$$

Allgemein gilt:  $A$  und  $B$  disjunkt  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

**Visualisierung 2.2.2** (Darstellung von Mengen als Venn-Diagramm). Die Operationen auf zwei Mengen  $A$  und  $B$  lassen sich mittels eines Venn-Diagramms veranschaulichen:

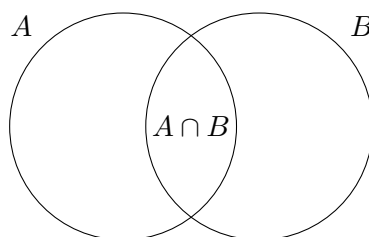


Abbildung 1: Schnittmenge zweier Mengen als Venn-Diagramm

<sup>1</sup>Diese Äquivalenz wird insbesondere in Beweisen häufig eingesetzt, indem durch das Zeigen, dass zwei Mengen gegenseitige Teilmengen sind, deren Gleichheit gezeigt wird.

## 2 Mengen

**Lemma 2.2.3** (Kommutativität des Schnitts).  $A \cap B = B \cap A$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.2.4** (Distributivität).  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

□

**Definition 2.2.5** (Familie von Mengen). Sei  $J$  eine Indexmenge mit  $J \neq \emptyset$ . Die Mengenfamilie ist gegeben durch Mengen  $A_j$  für jedes  $j \in J$ . Wir schreiben  $\{A_j\}_{j \in J}$

**Definition 2.2.6** (Schnitt und Vereinigung über mehrere Mengen). Für eine Mengenfamilie  $\{A_j\}_{j \in J}$  gilt:

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in J} A_j &:= \{x \mid \forall j \in J : x \in A_j\} \\ \bigcup_{j \in J} A_j &:= \{x \mid \exists j \in J : x \in A_j\} \end{aligned}$$

## 2.3 Quantoren

**Definition 2.3.1** (Quantoren). Wir definieren drei unterschiedliche Quantoren:

- (i)  $\forall$ : „Für alle“
- (ii)  $\exists$ : „Es existiert ein“
- (iii)  $\exists!$ : „Es existiert genau ein“

Es seien  $A, B$  Mengen und  $H(x, y)$  eine Aussageform mit  $x \in A$  und  $y \in B$ . Dann gilt:

$$\forall x \in A \exists y \in B : H(x, y) \Leftrightarrow \text{Für alle } x \in A \text{ existiert ein } y \in B, \text{ so dass } H(x, y) \text{ wahr ist}$$

**Folgerung 2.3.2** (Negation von Quantoren). Es seien  $A, B$  Mengen und  $H(x, y)$  Aussageform mit  $x \in A$  und  $y \in B$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in A : H(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in A : \neg H(x) \\ \neg(\exists x \in A : H(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in A : \neg H(x) \\ \neg(\forall x \in A \exists y \in B : H(x, y)) &\Leftrightarrow \exists x \in A : \neg(\exists y \in B : H(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A \forall y \in B : \neg H(x, y) \end{aligned}$$

**Definition 2.3.3** (Potenzmenge). Sei  $A$  eine Menge, so heißt  $\mathcal{P}(A) := \{N \mid N \subseteq A\}$  Potenzmenge von  $A$ . Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathcal{P}(A)$  heißt Mengensystem über  $A$ .

**Bemerkung 2.3.4** (Russels Paradoxon). Russel definiert:  $R := \{M \mid M \text{ ist Menge und } M \notin M\}$ . Falls  $R$  eine Menge, dann kann man fragen, ob  $R \in R$  oder nicht.

1. Fall:  $R \notin R \Rightarrow R \in R$  (Widerspruch)

2. Fall:  $R \in R \Rightarrow R \notin R$  (Widerspruch)

Lösung:  $R$  ist keine Menge, sondern eine Klasse

## 2.4 Kartesisches Produkt und Relationen

**Definition 2.4.1** (Tupel). Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Für  $x \in A$  und  $y \in B$  ist  $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$  das geordnete Paar oder Tupel bestehend aus  $a$  und  $b$ .

Zwei Tupel  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$  mit  $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$  sind genau dann gleich, wenn ihr jeweils erstes und zweites Element gleich ist:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

**Definition 2.4.2** (Kartesisches Produkt). Somit ist  $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$  wieder eine Menge genannt das Kartesische Produkt von  $A$  und  $B$ .

**Beispiel 2.4.3.**

$$\begin{aligned} M &:= \{1, 2, 3\} \\ N &:= \{3, 4\} \\ M \times N &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\} \end{aligned}$$

## 2 Mengen

**Definition 2.4.4** (Relation). Seien  $A, B$  Mengen. Eine Relation  $R = (A, B, G)$  besteht aus einer Menge  $A$ , einer Menge  $B$  und einer Menge  $G \subseteq A \times B$ .

$G$  ist der Graph von  $R$ , auch geschrieben als  $G_R$ . Ist  $(a, b) \in G$  so sagt man „ $a$  ist  $R$ -verwandt zu  $b$ “. Wir schreiben  $aRb$  (Infix-Schreibweise).

$A$  ist die Definitionsmenge von  $R$  und  $B$  ist die Zielmenge von  $R$ .

Seien  $R_1 = (A_1, B_1, G_1)$  und  $R_2 = (A_2, B_2, G_2)$  Relationen. Dann gilt:

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2 \wedge G_1 = G_2$$

Wir können eine Umkehrrelation  $R^{-1}$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} R^{-1} &:= (B, A, G_{R^{-1}}) \\ G_{R^{-1}} &:= \{(b, a) \mid (a, b) \in G_R\} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.4.5** (Kleiner-Relation). Es sei  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Wir definieren die Kleiner-Relation  $R = \{A, A, G_{<}\}$ .

Dann gilt:  $a_1 < a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in G_{<}$  und somit  $G_{<} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

**Definition 2.4.6** (Äquivalenzrelation). Sei  $R = (A, A, G)$  eine Relation. Dann definieren wir unterschiedliche Eigenschaften, die die Relation haben kann:

- (i)  $R$  ist reflexiv:  $\forall a \in A : aRa \quad (\forall a \in A : (a, a) \in G)$
- (ii)  $R$  ist symmetrisch:  $\forall a_1, a_2 \in A : a_1Ra_2 \Leftrightarrow a_2Ra_1$
- (iii)  $R$  ist transitiv:  $\forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_3 \Rightarrow a_1Ra_3$

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf  $A$ .

Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation und  $a_1Ra_2$  so nennt man  $a_1$  äquivalent zu  $a_2$  bezüglich  $R$ .

**Notation 2.4.7** (Äquivalenzklassen). Sei  $R$  Äquivalenzrelation auf  $A$ . Dann gilt:

$$[a]_R := \{b \in A \mid aRb\}$$

ist die Äquivalenzklasse von  $a$ . Wir schreiben auch  $a \sim_R b$  für  $aRb$  oder  $a = b$  modulo  $R$ .

**Beobachtung 2.4.8.** Allgemein gilt für Äquivalenzklassen damit:

- (i)  $\forall a \in A : [a]_R \neq \emptyset$
- (ii)  $aRa \Rightarrow a \in [a]_R$
- (iii)  $a_1, a_2 \in [a]_R \Rightarrow a_1 \sim_R a, a_2 \sim_R a \xRightarrow{\text{sym.}} a_1 \sim_R a, a \sim_R a_2 \xRightarrow{\text{trans.}} a_1 \sim_R a_2$

**Lemma 2.4.9.** Sei  $R$  Äquivalenzrelation auf  $A$ . Für  $a_1, a_2 \in A$  ist entweder  $[a_1]_R = [a_2]_R$  oder  $[a_1]_R \cap [a_2]_R = \emptyset$ .

*Beweis.* Da  $[a_1]_R, [a_2]_R \neq \emptyset$  reicht es zu zeigen, dass:  $[a_1]_R \cap [a_2]_R \neq \emptyset \Rightarrow [a_1]_R = [a_2]_R$ .

$$\begin{aligned} \text{Sei } b \in [a_1]_R \cap [a_2]_R \text{ und } c \in [a_1]_R \\ \Rightarrow b \sim_R a_1 \wedge c \sim_R a_1 \xRightarrow{\text{trans.}} c \sim_R b \end{aligned}$$

Da  $b \sim_R a_2$  muss nach der Transitivität gelten:

$$c \sim_R a_2 \Rightarrow [a_1]_R \subseteq [a_2]_R$$

Symmetrisch lässt sich argumentieren, dass  $[a_2]_R \subseteq [a_1]_R$ . □

**Korollar 2.4.10.** Es sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $A \neq \emptyset$ . Dann sind  $a_1, a_2 \in A$  entweder äquivalent oder sie gehören zu disjunkten Äquivalenzklassen.

**Definition 2.4.11** (Zerlegung einer Menge). Sei  $A \neq \emptyset$  eine Menge. Dann ist eine Zerlegung  $F = \{A_j\}_{j \in J}$ ,  $A_j \subseteq A$  mit folgenden Eigenschaften definiert:

1.  $\forall j \in J: A_j \neq \emptyset$
2.  $j_1, j_2 \in J, j_1 \neq j_2: A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$
3.  $\bigcup_{j \in J} A_j = A$

**Notation 2.4.12** (Quotient). Es sei  $R$  Äquivalenzrelation auf  $A$ .

$$F := \{[a]_R \mid a \in A\}$$

ist eine Zerlegung von  $A$  (bezüglich der Äquivalenzrelation  $R$ ). Wir schreiben  $F = A/R$ .  $A/R$  ist der „Quotient“ von  $A$  bezüglich  $R$

**Beispiel 2.4.13** (Restklassendefinition über Äquivalenzrelationen). Es sei  $A = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  und  $p \in \mathbb{N}$ .  $m, n \in \mathbb{N}_0$  seien genau dann äquivalent, wenn  $m = n + kp$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$R_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } m = n + kp\}$$

So definieren wir die Restklassen von  $\mathbb{N}_0$  bezüglich Division mit  $p$ .

$$m \in [j]_R \Leftrightarrow m = j + kp \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

## 2.5 Funktionen

**Bemerkung 2.5.1** (Moralische Definition einer Funktion). Gegeben Mengen  $A, B$ , eine Relation  $f$  von  $A$  nach  $B$ .  $f$  ist eine Funktion, wenn es jedem Element in  $A$  genau ein Element in  $B$  zuordnet.

**Notation 2.5.2** (Pfeilnotation). Wir schreiben  $f: A \rightarrow B$ ,  $a \mapsto f(a)$

**Folgerung 2.5.3.** Zu  $a \in A$  gibt es  $f(a) \in B \rightsquigarrow \text{Tupel}(a, f(a)) \in A \times B \Rightarrow \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

**Definition 2.5.4** (Funktion). Eine Relation  $R = (A, B, G_R)$  heißt Funktion (oder Abbildung), wenn

$$\forall a \in A \exists! b \in B : (a, b) \in G_f.$$

Wir setzen dann  $f(a) := b$

**Beispiel 2.5.5** (Mögliche Funktionen).

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}, & n &\mapsto 3n^2 + 7 \\ g: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, & n &\mapsto 3n^2 + 7 \\ h: [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, & n &\mapsto x^2 + 3x + 4 \\ j: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & n &\mapsto x^2 + 3x + 4 \end{aligned}$$



**Bemerkung 2.5.6.**  $f$  und  $g$  haben zwar die gleiche Funktionsvorschrift, sind aber dennoch unterschiedliche Funktionen, da diese wie Relationen auch über Definitionsmenge und Zielmenge definiert sind.

**Notation 2.5.7** (Bild und Urbild). Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} M \subseteq A : \quad & f(M) := \{b \in B \mid \exists x \in M : b = f(x)\} && \text{(Bild von } M \text{ unter } f) \\ N \subseteq B : \quad & f^{-1}(N) := \{a \in A \mid f(a) \in N\} && \text{(Urbild von } N \text{ unter } f) \end{aligned}$$

Außerdem ist das gesamte Bild von  $f$  definiert als

$$\text{Bild}(f) := f(A)$$

**Definition 2.5.8** (Einschränkungen von Funktionen). Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion und  $M \subseteq A$ . Dann ist die Einschränkung (oder Restriktion) von  $f$  auf  $M$  definiert als

$$f|_M : M \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$$

**Definition 2.5.9** (Besondere Eigenschaften von Funktionen). Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

- (i)  $f$  ist injektiv, falls  $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ .
- (ii)  $f$  ist surjektiv, falls  $\text{Bild}(f) = B$
- (iii)  $f$  ist bijektiv, falls es injektiv und surjektiv ist

## 2.6 Geordnete Mengen

**Definition 2.6.1** (Ordnungsrelation und teilweise geordnete Menge). Es sei  $A$  eine Menge und  $R$  eine Relation auf  $A$ .  $R$  heißt Ordnungsrelation (geschrieben „ $\prec$ “), falls

- (i)  $\forall a \in A : a \prec a$  (Reflexivität)
- (ii)  $\forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_3 \Rightarrow a_1 \prec a_3$  (Transitivität)
- (iii)  $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$  (Antisymmetrie)

$(A, \prec)$  heißt **teilweise** geordnete Menge. Nicht alle Paare  $a_1, a_2$  müssen vergleichbar sein.

**Notation 2.6.2.** Wir schreiben  $a_1 \prec a_2$  als  $a_1 R a_2$  oder  $(a_1, a_2) \in G_R$ .

**Definition 2.6.3** (Kette).  $T \subseteq A$  heißt Kette (oder geordnete Menge), falls

$$a_1, a_2 \in T \Rightarrow a_1 \prec a_2 \vee a_2 \prec a_1$$

**Beispiel 2.6.4** (Ordnungsrelation). Ordnungsrelation auf  $\mathcal{P}(A)$ :

$$M, N \subseteq A \quad M \prec N, \text{ falls } M \subseteq N$$

Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$ :

$$(\mathbb{N}, \prec) : n \prec m, \text{ falls } n \text{ teilt } m$$

2 und 3 sind dabei nicht vergleichbar, aber 2 und 4 sind vergleichbar.

### 3 Die Axiome der Reellen Zahlen

Es gibt eine Menge  $\mathbb{R}$ , genannt Reelle Zahlen, die 3 Gruppen von Axiomen erfüllt:

1. Algebraische Axiome
2. Anordnungsaxiome
3. Das Vollständigkeitsaxiom

#### 3.1 Algebraische Axiome

In  $\mathbb{R}$  gibt es 2 Operationen:

1. Addition „+“
2. Multiplikation „ $\cdot$ “

**Folgerung 3.1.1.**  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$  und  $a \cdot b \in \mathbb{R}$

**Definition 3.1.2** (Eigenschaften eines Körpers).

- (I.1)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  *Assoziativität der Addition*
- (I.2)  $a + b = b + a$  *Kommutativität der Addition*
- (I.3) Es gibt genau eine Zahl genannt Null, geschrieben 0, mit  $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$  *Existenz eines neutralen Elements der Addition*
- (I.4)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} : a + b = 0$ , geschrieben  $b = -a$  *Existenz eines inversen Elements der Addition*
- (I.5)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  *Assoziativität der Multiplikation*
- (I.6)  $a \cdot b = b \cdot a$  *Kommutativität der Multiplikation*
- (I.7)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  gibt es ein eindeutiges  $b \neq 0$  mit  $a \cdot b = 1$ . Wir schreiben  $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$  *Existenz eines inversen Elements der Multiplikation*
- (I.8) Es gibt genau eine Zahl Eins, geschrieben 1, die von 0 verschieden ist, mit  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$  *Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation*
- (I.9)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  *Distributivität*

Jede Menge  $\mathbb{K}$ , welche (I.1) bis (I.9) erfüllt, heißt **Körper**.

**Bemerkung 3.1.3.** Dass die Eindeutigkeit von 0 und 1 durch die Axiome gefordert wird, ist nicht unbedingt erforderlich.<sup>2</sup>

**Bemerkung 3.1.4.** Das inverse Element bezüglich Addition und Multiplikation ist eindeutig.

*Beweis.* Annahme:  $a + b = 0$  und  $a + b' = 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow b + 0 &= b + (a + b') = b' + (a + b) = b' + 0 \\ \Rightarrow b &= b'\end{aligned}$$

□

---

<sup>2</sup>Seien  $0, 0'$  neutrale Elemente bezüglich der Addition.  $\Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$

**Notation 3.1.5.**

$$a - b := a + (-b) \quad (\text{Differenz})$$

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \quad (\text{Quotient})$$

**Satz 3.1.6** (Abgeleitete Regeln). Es gilt (I.10)

$$-(-a) = a \quad (1)$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \quad (2)$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad (3)$$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1} \quad (4)$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad (5)$$

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \quad (6)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad (7)$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad (8)$$

(I.11) Ist  $a \cdot b = 0$  so ist mindestens eine der Zahlen  $a$  oder  $b$  gleich Null.

*Beweis zu (I.10.5).* Zu zeigen:  $a \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0 \\ \Rightarrow (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) &= a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \\ \Rightarrow a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot 0 + 0 &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot 0 &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

*Beweis zu (I.11).* Sei  $a \cdot b = 0$ .

Ist  $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

Ist  $b \neq 0$ , so gilt analog, dass  $a = 0$ .  $\square$

**Übung 3.1.7.** Beweisen Sie die verbleibenden Regeln aus (I.10).

**Satz 3.1.8** (Regeln des Bruchrechnens). (I.12) Es gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad b, d \neq 0 \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b, d \neq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad b, c, d \neq 0 \quad (3)$$

**Übung 3.1.9.** Beweisen Sie Satz 3.1.8.

### 3.2 Die Anordnungsaxiome

Allgemein gilt:  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b \vee a \neq b$ .

Ist  $a \neq b$ , besteht eine Anordnung „ $<$ “, die verlangt, dass genau eine der Relationen  $a < b$  oder  $b < a$  gilt. Das heißt  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der Aussagen  $a < b, b < a, a = b$

Diese Anordnung genügt folgenden Axiomen:

**Axiom 3.2.1** (Anordnungsaxiome).

(II.1)  $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$  (Transitivität)

(II.2)  $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(II.3)  $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

**Notation 3.2.2.**

- $a < b$ :  $a$  ist (echt) kleiner als  $b$
- $b > a$ :  $b$  ist größer als  $a$
- $a \leq b$ :  $a = b$  oder  $a < b$
- $a \in \mathbb{R}$  ist positiv, wenn  $a > 0$ ; negativ, wenn  $a < 0$ ; nicht-negativ, wenn  $a \geq 0$ ; nicht-positiv, wenn  $a \leq 0$

**Beispiel 3.2.3.**  $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} a &< b \\ \Rightarrow 0 &= a + (-a) < b + (-a) = b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b - a &> 0 \\ \Rightarrow a &< a + (b - a) = b \end{aligned}$$

□

**Satz 3.2.4** (Aus den Anordnungsaxiomen abgeleitete Regeln).

(II.4)  $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

(II.5)  $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$  und  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

(II.6)  $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

(II.7)  $a < b \wedge c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

(II.8)  $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$  und  $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

(II.9)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$  (Insbesondere  $1 > 0$ )

(II.10)  $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(II.11)  $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

(II.12)  $a^2 < b^2 \wedge a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a < b$

### 3 Die Axiome der Reellen Zahlen

*Beweis.*

$$(II.4) \text{ Sei } a < b \Rightarrow 0 = a + (-a) \stackrel{(II.2)}{<} b + (-a) = b - a.$$

$$\text{Ist } b - a > 0 \stackrel{(II.2)}{\Rightarrow} a < a + (b - a) = b$$

$$(II.5) \text{ Setze } b := 0 \text{ in (II.4)} \Rightarrow b - a = -a > 0.$$

2ter Teil: Ersetze  $a$  durch  $-a$  in (II.5). ( $a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Leftrightarrow -(-a) > 0 \Leftrightarrow a > 0$ )

$$(II.6) \text{ (II.6) folgt aus (II.5), da } a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow (-a) - (-b) > 0 \Leftrightarrow -b < -a$$

$$(II.7) \text{ Sei } a < b \wedge c < d \stackrel{(II.2)}{\Rightarrow} a + c < b + c \wedge b + c < b + d \stackrel{(II.1)}{\Rightarrow} a + c < b + d$$

$$(II.8) \text{ } a, b > 0 \stackrel{(II.3)}{\Rightarrow} ab > 0 \cdot b = 0 \text{ und } a, b < 0 \stackrel{(II.5)}{\Rightarrow} -a, -b > 0 \Rightarrow (-a)(-b) > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

Umkehrung: Sei  $ab > 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$ . Wäre  $a > 0 \wedge b < 0 \stackrel{(II.5)}{\Rightarrow} -b > 0$ . Wie gerade gezeigt folgt  $a(-b) > 0 \Rightarrow -ab > 0 \stackrel{(II.5)}{\Rightarrow} ab < 0$  (Widerspruch zur Annahme).

Genauso zeigt man, dass die Annahme  $a < 0 \wedge b > 0$  falsch ist.  
(Zweite Behauptung lässt sich analog zeigen).

$$(II.9) \text{ } a \neq 0 \Leftrightarrow a > 0 \vee a < 0 \stackrel{(II.8)}{\Rightarrow} a^2 = a \cdot a > 0. \text{ Ferner ist } 1 \neq 0 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 1 > 0$$

$$(II.10) \text{ Sei } c < 0 \Rightarrow -c > 0 \text{ und aus } a < b \text{ folgt } (-c) \cdot a < (-c) \cdot b \Rightarrow -c \cdot a < -c \cdot b \Rightarrow c \cdot b < c \cdot a$$

$$(II.11) \text{ } a \cdot a^{-1} = 1 > 0 \text{ (falls } a \neq 0) \stackrel{(II.8)}{\Rightarrow} a^{-1} > 0 \text{ sofern } a > 0 \text{ ist und aus } a^{-1} > 0 \text{ folgt } a > 0$$

$$(II.12) \text{ Sei } a^2 < b^2, a > 0, b > 0. \text{ Angenommen } a < b \text{ ist falsch, d.h. } a \geq b \Rightarrow a^2 \geq a \cdot a \geq a \cdot b \geq b \cdot b = b^2 \Rightarrow a^2 \geq b^2 \text{ (Widerspruch)}$$

□

### 3.3 Das Vollständigkeitsaxiom

**Axiom 3.3.1** (Vollständigkeitsaxiom). Jede nicht-leere Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , welche nach oben beschränkt ist, besitzt eine kleinste obere Schranke, genannt das Supremum von  $M$ .

**Notation 3.3.2** (Supremum). Das Supremum einer Menge  $M$  schreiben wir als  $\sup M$

**Definition 3.3.3** (Beschränktheit von Mengen). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ .

- (i)  $M$  heißt **nach oben beschränkt**, falls ein  $k \in \mathbb{R}$  existiert mit  $\forall x \in M : x \leq k$ . Jede solche Zahl  $k$  heißt obere Schranke von  $M$ .
- (ii)  $M$  heißt **nach unten beschränkt**, falls ein  $k \in \mathbb{R}$  existiert mit  $\forall x \in M : x \geq k$ . Jede solche Zahl  $k$  heißt untere Schranke von  $M$ .
- (iii)  $M$  heißt **beschränkt**, falls ein  $k \geq 0$  existiert mit  $-k \leq x \leq k \quad \forall x \in M$

**Definition 3.3.4** (Kleinste obere und größte untere Schranke). Eine Zahl  $k \in \mathbb{R}$  heißt kleinste obere (größte untere) Schranke, falls

1. es eine obere (untere) Schranke ist und
2. es keine kleinere obere (größere untere) Schranke für  $M$  gibt

**Folgerung 3.3.5.** Allgemein gilt

$$x \leq k \Leftrightarrow -k \leq -x$$

das heißt für eine Menge  $M \neq \emptyset$  gilt

$$\begin{aligned} & k \text{ ist eine obere Schranke für } M \\ \Leftrightarrow & -k \text{ ist eine untere Schranke für } -M := \{-x \mid x \in M\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & k \text{ ist kleinste obere Schranke für } M \\ \Leftrightarrow & -k \text{ ist die größte untere Schranke für } -M \end{aligned}$$

Das heißt das Anordnungsaxiom ist äquivalent zum *Anordnungsaxiom*<sup>-1</sup> (Jede nicht-leere Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , welche nach unten beschränkt ist, besitzt eine größte untere Schranke, genannt das Infimum von  $M$ . Wir schreiben  $\inf M$ ).

**Beispiel 3.3.6.**

$$\begin{aligned} M &:= [0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ \sup M &= 1 \quad \inf M = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &:= (0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\} \\ \sup A &= 1 \quad \inf A = 0 \end{aligned}$$

**Notation 3.3.7.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$

Wir schreiben  $\sup M < \infty$ , falls  $M$  nach oben beschränkt ist, andernfalls setzen wir

$$\sup M := \infty$$

Falls  $M$  nach unten beschränkt ist, schreiben wir  $\inf M > -\infty$ , andernfalls setzen wir

$$\inf M := -\infty$$

**Satz 3.3.8** (Eigenschaften des Supremums). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$

- (i) Ist  $\sup M < \infty$ , so folgt  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M$  mit  $\sup(M) - \varepsilon < x$
- (ii) Ist  $\sup M = \infty$ , so gilt  $\forall k \geq 0 \exists x \in M$  mit  $x > k$

*Beweis.*

1. Wir setzen  $a := \sup M$ . Sei  $a < \infty$ . Wäre (i) falsch, so folgt  $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in M : a - \varepsilon > x$ . Das heißt  $a - \varepsilon$  ist eine obere Schranke für  $M$ . Aber  $a - \varepsilon < a$ ; (Widerspruch)
2. Ist  $a = \infty$ , so hat  $M$  keine obere Schranke. Nach Def. folgt für jedes  $k \in \mathbb{R}$  existiert ein  $x \in M : x > k$  □

**Satz 3.3.9** (Eigenschaften des Infimums). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$

- (i) Ist  $\inf M > -\infty$ , so folgt  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M$  mit  $x < \inf(M) + \varepsilon$
- (ii) Ist  $\inf M = -\infty$ , so gilt  $\forall k \geq 0 \exists x \in M$  mit  $x < -k$

*Beweis.* Wende Satz 3.3.8 auf  $-M := \{-x \mid x \in M\}$  an und beachte  $\sup(-M) = \inf(M)$  □

**Definition 3.3.10** (Maximum und Minimum). Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$   
 $m \in M$  heißt größtes Element von  $M$  (Maximum), geschrieben  $\max M$ , falls  $x \leq m \forall x \in M$ .  
 Entsprechend:  $m \in M$  heißt kleinstes Element von  $M$  (Minimum), geschrieben  $\min M$ , falls  $x \geq m \forall x \in M$

**Beispiel 3.3.11.** Sei  $M$  beschränkt,  $M \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} M &:= \{x \mid 0 \leq x < 1\} \\ \sup M &= 1 \\ \inf M &= \min M = 0 \\ M &\text{ hat kein Maximum} \end{aligned}$$

## 4 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

Frage: Was sind die natürlichen Zahlen? (zum Beispiel  $1, 2 := 1 + 1, 3 := 2 + 1, 4 := 3 + 1$ , usw.)

### 4.1 Induktive Mengen

**Definition 4.1.1** (Induktive Menge). Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls

1.  $1 \in A$  und
2. Ist  $x \in A$  so ist auch  $x + 1 \in A$

**Beispiel 4.1.2.**

$$\begin{aligned} [0, \infty) &= \{x \mid x \geq 0\} \text{ und} \\ [1, \infty) &= \{x \mid x \geq 1\} \text{ sind induktiv} \end{aligned}$$

**Beobachtung 4.1.3** (Schnittmengen von induktiven Mengen). Ist  $J \neq \emptyset$  Indexmenge und  $A_j$  induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$  für jedes  $j \in J$ . Dann folgt daraus:  $A := \bigcap_{j \in J} A_j$  ist induktiv. Anders formuliert: Beliebige Schnittmengen von induktiven Mengen sind induktiv.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall j \in J : x \in A_j \\ &\Rightarrow x + 1 \in A_j \quad \forall j \in J \\ &\Rightarrow x + 1 \in \left( \bigcap_{j \in J} A_j \right) = A \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 4.1.4** (Definition von  $\mathbb{N}$ ). Sei  $\bar{f} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist induktiv}\}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \text{kleinste induktive Teilmenge von } \mathbb{R} \\ &:= \bigcap_{A \in \bar{f}} A \end{aligned}$$

d. h.  $\mathbb{N} \subseteq A$ , falls  $A$  induktiv ist.

**Satz 4.1.5** (Induktionsprinzip). Ist  $M \subseteq \mathbb{N}$  induktiv  $\Rightarrow M = \mathbb{N}$

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $M \subseteq \mathbb{N}$  und aus der Definition von  $\mathbb{N}$  als Schnitt aller induktiven Teilmengen von  $\mathbb{R}$  ist auch  $\mathbb{N} \subseteq M \Rightarrow \mathbb{N} = M$ .  $\square$



## 4.2 Vollständige Induktion

**Satz 4.2.1** (Induktionsbeweis). Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $B_n$  gegeben derart, dass folgendes gilt:

1.  $B_1$  ist wahr.
2. Aus der Annahme, dass  $B_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) wahr ist folgt, dass  $B_{n+1}$  wahr ist.

Dann ist  $B_n$  wahr  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Definiere:  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid B_n \text{ ist wahr}\} \subseteq \mathbb{N}$ .

Zu zeigen:  $M = \mathbb{N}$ . Also reicht es nach Satz 4.1.5 zu zeigen, dass  $M$  induktiv ist.

1.  $1 \in \mathbb{N}$ , da  $B_1$  wahr ist.
2. Ist  $n \in M$  dann ist  $B_n$  wahr  $\Rightarrow B_n + 1$  ist wahr  $\Rightarrow n + 1 \in M \Rightarrow M$  ist induktiv  $\Rightarrow M = \mathbb{N}$  □

**Bemerkung 4.2.2** (Starke Induktion). Die starke Induktion ist eine Variante der vollständigen Induktion. Bei dieser beweist man folgendes:

1.  $B_1$  ist wahr.
2. für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  ist wahr  $\Rightarrow B_{n+1}$  ist wahr.

**Beispiel 4.2.3.** Zu zeigen ist:  $B_n : n < 2^n$

*Beweis.*

I-Anfang  $B_1$  ist wahr, da  $1 < 2^1 = 2$

I-Schritt Induktionsannahme  $B_n$  ist wahr für ein  $n = k$ , d.h.  $k < 2^k$ . Und Schluß zu zeigen:  
 $k + 1 < 2^{k+1} \Rightarrow 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k \geq k + 1$  □

**Übung 4.2.4.** Zeigen Sie, dass  $2k \geq k + 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

**Beispiel 4.2.5** (Gaußsche Summenformel). Zu zeigen:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis.*  $B_n : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

I-Anfang  $B_1 : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

I-Schritt  $B_n$  ist wahr für ein  $k \in \mathbb{N}$ , d.h.  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= (k + 1) \cdot \left( \frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Also ist  $B_n$  wahr für  $n = k + 1$ . Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt  $\forall n \in \mathbb{N} : B_n$  ist wahr, d.h.  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  □

**Satz 4.2.6** (Eigenschaften von  $\mathbb{N}$ ).

1.  $n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2.  $n + m \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
3.  $n \cdot m \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
4. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt entweder  $n = 1$  oder  $n - 1 \in \mathbb{N}$
5.  $(n - m) \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$

*Beweis (1.)*

I-Anfang  $n \geq 1$  gilt für  $n = 1$

I-Schritt Nach Anfang:  $n \geq 1$  ist wahr für ein  $n = k$ .

Da  $k + 1 > k \Rightarrow k + 1 > k \geq 1 \Rightarrow k + 1 \geq 1$

□

*Beweis (2.)* Fixiere  $m \in \mathbb{N}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Behauptung:  $B_n : m + n \in \mathbb{N}$

I-Anfang  $B_1 : m + 1 \in \mathbb{N}$ , da  $\mathbb{N}$  induktiv ist.

I-Schritt Nach Anfang:  $B_n$  ist wahr für  $n = k$ , d.h.  $(m + k) \in \mathbb{N}$ . Somit für  $k + 1 : m + (k + 1) = (m + k) + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow B_n$  ist wahr  $\forall n \in \mathbb{N}$

□

*Beweis (3.)* Fixiere  $m \in \mathbb{N}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Behauptung:  $B_n : m \cdot n \in \mathbb{N}$

I-Anfang  $B_1 : m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$

I-Schritt Nach Anfang:  $B_n$  ist wahr für  $n = k$ , d.h.  $m \cdot (k + 1) = mk + m \in \mathbb{N}$  gilt nach Satz 2.

□

*Beweis (4.)*  $B_n : n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$

I-Anfang  $B_1 : 1 = 1$

I-Schritt Nehmen an, für ein  $n = k$  ist  $G_k$  wahr. Also ist entweder (a)  $k = 1$  oder (b)  $(k - 1) \in \mathbb{N}$ . Für  $n = k + 1$  gilt dann im Fall (a):  $(k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N}$

Im Fall (b):  $(k + 1) - 1 = (k - 1) + 1$  und es gilt  $(k - 1) \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt, dass  $(k - 1) + 1 \in \mathbb{N}$ , da  $\mathbb{N}$  induktiv ist.

□

*Beweis (5.)*  $B_n : n - m \in \mathbb{N}$  für jedes  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$

I-Anfang  $B_1$  leere Behauptung, da kein  $m$  existiert, mit  $m < 1$  (nach (1.)).

I-Schritt  $B_n$  wahr für ein  $n = k$ . Das heißt  $k - 1 \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$  mit  $m < k$ .

Zu zeigen:  $(k + 1) - m \in \mathbb{N} \quad \forall m < k + 1$ . Ist  $m = 1 \Rightarrow m - 1 = 0$  und  $(k + 1) - m = k + 1 - m = k \in \mathbb{N}$ .

Ist  $m > 1 \xRightarrow{(4.)} m - 1 \in \mathbb{N}$ . Da  $m < k + 1 \Rightarrow m - 1 < k \Rightarrow (k + 1) - m = k - (m - 1) \in \mathbb{N}$  (nach Annahme).

□

**Korollar 4.2.7.** Es gibt kein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 < n < 1$ . Ferner gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$  gibt es keine natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n < m < n + 1$  oder mit  $n - 1 < m < n$ .

**Übung 4.2.8.** Beweisen Sie das vorherige Korollar.

**Notation 4.2.9** (Zahlenmengen).

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -\mathbb{N} &:= \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \mathbb{Z} &:= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} && \text{(Menge der ganzen Zahlen)} \\ \mathbb{Q} &:= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} && \text{(Menge der rationalen Zahlen)} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} &&& \text{(Irrationale Zahlen)}\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.2.10.** Sei für  $n \in \mathbb{Z}$   $B_n$  eine Aussage und  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt  $(\forall n \geq n_0 : B_n) \Leftrightarrow (B_{n_0} \text{ ist wahr}) \wedge (\text{Ist } B_n \text{ wahr für } n \geq n_0 \text{ so ist auch } B_{n+1} \text{ wahr})$

**Satz 4.2.11.**  $n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$  und  $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

*Beweis.* Folgt aus Satz 4.2.6 mit  $-(-a) = a$   $a > 0 \Rightarrow -a < 0$  □

**Satz 4.2.12** (Satz von Archimedes).  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$ . (Das heißt  $\mathbb{N}$  ist eine nach oben unbeschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ )

*Beweis.* Angenommen die Aussage ist falsch. Das heißt  $\exists x \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
(Vollständ.)  
 $\Rightarrow a := \sup \mathbb{N}$  existiert und  $n < a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es gilt  $a + 1 > a \Rightarrow a - 1 < a$ , das heißt  $a - 1$  ist keine obere Schranke für  $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a - 1 < n \Rightarrow a < n + 1 \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zu  $a$  ist obere Schranke für  $\mathbb{N}$ . □

**Korollar 4.2.13.**  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : -n < x$

*Beweis.* Wende vorherigen Satz auf  $-x$  an.  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : -x < n \Rightarrow x > -n$  □

**Satz 4.2.14** (Wohlordnungsprinzip für  $\mathbb{N}$ ). Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.

*Beweis.* Sei  $M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \emptyset$ . Es gilt  $\inf \mathbb{N} = 1 \Rightarrow a = \inf M \geq 1 > -\infty$ . Zu zeigen:  $a \in M$ .

Annahme:  $a \notin \mathbb{N} \Rightarrow a < m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Satz 3.3.9 besagt, dass  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in M : m < a + \varepsilon$ .

1) Wähle  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists m \in M : m < a + 1$ .

2) Wähle  $\varepsilon = a - m \Rightarrow \exists m' \in M : m' < a + \varepsilon = m$ . Das heißt  $m', m \in M$  mit  $a < m' < m < a + 1$

$\Rightarrow 0 < m - m' < 1 \stackrel{(5.)}{\Rightarrow} m - m' \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zu Korollar 4.2.7 □

## 5 Summe, Produkt, Wurzeln

### 5.1 Summenzeichen, Produktzeichen

**Definition 5.1.1.** Seien  $m \leq n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \leq k \leq n$ , sei  $a_k \in \mathbb{R}$ . Dann setzt man:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $n < m$  setzt man  $\prod_{k=m}^n a_k = 1$ .

**Definition 5.1.2** (Fakultät). Sei  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

und wir definieren

$$0! = 1$$

Alternativ lässt sich rekursiv definieren:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

**Satz 5.1.3.** Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer  $n$ -elementigen Menge  $\{A_1, \dots, A_n\}$  ist gleich  $n!$ .

Wenn wir beispielsweise die Menge  $\{1, 2, 3\}$  betrachten. Mögliche Anordnungen:  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 3, 2\}$ ,  $\{2, 1, 3\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$ ,  $\{3, 2, 1\}$ . Somit gibt es 6 Möglichkeiten, was  $3!$  entspricht.

*Induktionsbeweis.*

I-Anfang  $n = 1$ , es gibt eine Anordnung  $\{A_1\}$  und es gilt  $1! = 1$

I-Schritt Die Gesamtzahl aller Anordnungen von  $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$  ist gleich

$$\begin{aligned} &(n+1) \cdot [\text{Gesamtzahl von Anordnungen von } \{A_1, \dots, A_n\}] \\ &\stackrel{\text{I-Ann}}{=} (n+1) \cdot n! = (n+1)! \end{aligned} \quad \square$$

### 5.2 Binomischer Lehrsatz

**Definition 5.2.1** (Binomialkoeffizient). Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  setzt man:

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (n \text{ über } k)$$

**Bemerkung 5.2.2** (Spezielle Binomialkoeffizienten).  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$

**Satz 5.2.3.** Die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $\{A_1, \dots, A_n\}$  ist gleich  $\binom{n}{k}$ .

**Hilfsatz 5.2.4.**  $\forall k, n \in \mathbb{N}$  gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot [n-k+k]}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{n}{k} \end{aligned} \quad \square$$

*Beweis von Satz 5.2.3 (Induktion nach  $n$ ).*

I-Anfang  $n = 1, \{A_1\}$ . Wenn  $k = 0$ , dann gibt es eine Möglichkeit und es gilt  $\binom{1}{0} = 1$ . Wenn  $k = 1$ , gibt es auch eine Möglichkeit und es gilt  $\binom{1}{1} = 1$ .

I-Schritt  $n \rightarrow n+1$

Die Behauptung sei für  $M_n = \{A_1, \dots, A_n\}$  schon bewiesen. Wir betrachten  $M_{n+1} = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ . Für  $k = 0$  und  $k = n+1$  ist die Behauptung offensichtlich.

Für  $1 \leq k \leq n$  gehört jede  $k$ -elementige Teilmenge von  $M_{n+1}$  zu genau einer der folgenden Klassen:

1.  $T_0$  besteht aus  $k$ -elementigen Teilmengen, die  $A_{n+1}$  nicht enthalten.
2.  $T_1$  besteht aus denjenigen Teilmengen, die  $A_{n+1}$  enthalten.

In  $T_0$  gibt es nach Induktionsannahme  $\binom{n}{k}$  Elemente.

In  $T_1$  gibt es  $\binom{n}{k-1}$  Elemente<sup>3</sup>.

Insgesamt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \stackrel{5.2.4}{=} \binom{n+1}{k} \quad \square$$

**Satz 5.2.5** (Binomischer Lehrsatz). Sei  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

**Beispiel 5.2.6** (Folgerung der binomischen Formel aus dem binomischen Lehrsatz). Es sei  $n = 2$ . Es gilt  $\binom{2}{0} = 1$ ,  $\binom{2}{1} = 2$ ,  $\binom{2}{2} = 1$ . Daraus folgt:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

*Beweis von Satz 5.2.5.*

IA:  $n = 0$

$$\begin{aligned} (x+y)^0 &= 1 \\ \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k} &= \binom{0}{0} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Wir wissen, dass  $A_{n+1}$  bereits ein Element der Teilmenge ist. Damit müssen wir noch  $k-1$  aus  $n$  Elemente auswählen. Die Formel dafür folgt aus der Induktionsannahme

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \\
 (x+y)^n \cdot x &\stackrel{\text{I-An}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \cdot x \\
 &= 1 \cdot x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k \\
 (x+y)^n \cdot y &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} & (l := k+1) \\
 &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n+1-l} \cdot y^l \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k \\
 \Rightarrow (x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + y^{n+1} \\
 &\stackrel{5.2.4}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k \quad \square
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.2.7.** Sei  $x > 0$ , dann gilt  $(1+x)^n = 1 + \underbrace{\binom{n}{1}x}_{n \cdot x} + \underbrace{\sum \dots}_{>0} > 1 + n \cdot x$

### 5.3 Bernoullische Ungleichung

**Satz 5.3.1.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > -1$ . Dann gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

*Beweis.* Wir verwenden vollständige Induktion:

I-Anfang  $n = 1 \Rightarrow 1 + a = 1 + a$

I-Schritt  $n \rightarrow n + 1$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \stackrel{\text{I-Ann}}{\geq} (1+na) \cdot (1+a) = 1 + na + a + na^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a \quad \square$$

## 5.4 Wurzeln

**Satz 5.4.1** (Existenz und Eindeutigkeit der Quadratwurzel). Für jedes  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ , gibt es genau ein  $x > 0$ , so dass  $x^2 = c$  ist.

*Beweis. Eindeutigkeit*

$$x_1 > 0, x_2 > 0: (x_1)^2 = (x_2)^2 = c \Rightarrow 0 = ((x_1)^2 - (x_2)^2) = (x_1 - x_2) \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} \Rightarrow x_1 = x_2$$

*Existenz.* Wir definieren  $M := \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0, z^2 \leq c\}$ . Dann gilt  $0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

$M$  ist beschränkt, weil  $(1+c)^2 = 1 + 2c + c^2 > c$ ,  $z \in M \Rightarrow z < 1 + c$

Somit  $\exists \sup M$  und wir definieren  $x := \sup M$ . Zu zeigen:  $x^2 = c$

Wir nehmen an, dass  $x^2 < c$  und setzen  $\varepsilon := \min \left\{ 1, \frac{c-x^2}{2x+1} \right\} \Rightarrow 0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow \varepsilon^2 < \varepsilon$

$$(x + \varepsilon)^2 = x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < x^2 + \varepsilon(2x + 1) \leq x^2 + c - x^2 = c$$

$$\Rightarrow x + \varepsilon \in M \text{ (Widerspruch)} \Rightarrow x^2 \geq c$$

Wir nehmen an, dass  $x^2 > c$ ,  $\varepsilon := \min \left\{ \frac{x^2 - c}{2x}, \frac{x}{2} \right\}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $x - \varepsilon \geq x - \frac{x}{2} > 0$

$$(x - \varepsilon)^2 = x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > x^2 - 2x\varepsilon \geq x^2 - x^2 + c \Rightarrow (x - \varepsilon)^2 > c \Rightarrow x \neq \sup M \text{ (Widerspruch)}$$

$$\Rightarrow x^2 = c \quad \square$$

**Bemerkung 5.4.2.**  $x = \sqrt{c}$ ,  $x = c^{\frac{1}{2}}$ ,  $x$  ist die Quadratwurzel von  $c$

**Satz 5.4.3** (Existenz und Eindeutigkeit der Wurzel). Für  $n \in \mathbb{N}$  und für jedes  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \geq 0$  gibt es genau ein  $x \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $x^n = c$ .

*Beweis. Eindeutigkeit*

$$x_1 > 0, x_2 > 0, (x_1)^n - (x_2)^n = c, 0 = ((x_1)^n - (x_2)^n) = (x_1 - x_2) \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} (x_1)^{n-k-1} \cdot (x_2)^k \right) \\ \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \square$$

Die Existenz ist Aufgabe auf dem Übungsblatt.

**Definition 5.4.4** (Spezielle Potenzen).  $m, n \in \mathbb{N}$   $x^{\frac{m}{n}} := \left( x^{\frac{1}{n}} \right)^m$ ,  $x^0 = 1$ ,  $0^m = 0$  mit  $m \neq 0$ ,  $0^0 = 1$

## 5.5 Absolutbetrag

**Definition 5.5.1** (Betrag).  $|a| := \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

**Satz 5.5.2** (Eigenschaften des Betrags).

$$(i) \quad |a| \geq 0, |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$(ii) \quad |\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|, \forall \lambda, a \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

*Beweis von (iii).*

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \\ &\Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 5.5.3** (Geometrische Betrachtung des Betrags). Man nennt  $|a - b|$  den Abstand zweier Punkte  $a, b \in \mathbb{R}$  auf der Zahlengerade.

**Satz 5.5.4** (Eigenschaften von Differenzen im Betrag).

- (i)  $|a - b| \geq 0, |a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$
- (ii)  $|a - b| = |b - a|$
- (iii)  $|a - b| \leq |a - c| + |b - c| \quad \forall c \in \mathbb{R}$

*Beweis von (iii).*

$$|a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b| = |a - c| + |b - c| \quad \square$$

**Satz 5.5.5.**  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |a| &= |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \\ \Rightarrow |a| - |b| &\leq |a - b| \\ |b| - |a| &\leq |b - a| = |a - b| \\ \Rightarrow |a - b| &\geq ||a| - |b|| \quad \square \end{aligned}$$

**Folgerung 5.5.6.**

- (i)  $|a - b| \geq |a| - |b|$
- (ii)  $|a + b| = |a - (-b)| \geq |a| - |-b|$

**Bemerkung 5.5.7.** Durch Induktion leitet man her, dass:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \quad a_i \in \mathbb{R}$$



## 6 [\*] Folgen und Grenzwerte

### 6.1 Konvergenz

**Definition 6.1.1** (Reelle Folge). Eine reelle Folge ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alternative Notation:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_1, a_2, \dots)$

**Beispiel 6.1.2.**  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$   $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

**Definition 6.1.3** (Konvergenzkriterium). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0$$

$a$  heißt Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

**Beispiel 6.1.4** (Nachweis von Konvergenz). Es sei

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$$

wir definieren  $\varepsilon$  und  $n_0$

$$\varepsilon > 0, \quad n_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$$

und wenden das Konvergenzkriterium an

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| 1 + \frac{(-1)^n}{2n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| < \frac{|(-1)^n|}{\left| \frac{2}{2\varepsilon} \right|} = \varepsilon \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 1 \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.1.5** („Fast alle Elemente“). Wir sagen, dass fast alle Element der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Eigenschaft (E) haben, wenn es höchstens eine endliche Anzahl von  $a_n$  existiert, die die Eigenschaft (E) nicht erfüllen.

**Definition 6.1.6** (Alternativ formuliertes Konvergenzkriterium). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, dann heißt diese Folge konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0$  und für fast alle  $a_n$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$

**Definition 6.1.7** (Nullfolge). Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

**Definition 6.1.8** (Divergenz). Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

**Definition 6.1.9** ( $\varepsilon$ -Umgebung). Für  $\varepsilon > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  versteht man unter der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  das Intervall  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

### 6.2 Geometrische Bedeutung der Konvergenz

#### Visualisierung 6.2.1.



Abbildung 2: Geometrische Darstellung einer konvergenten Folge und ihrer  $\varepsilon$ -Umgebung

### 6.3 Eigenschaften von Folgen und Konvergenzen

**Definition 6.3.1** (Beschränktheit von Folgen). Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt nach oben beschränkt, falls es ein  $k \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq k \quad (k \text{ ist obere Schranke für } (a_n)_n)$$

Beschränktheit nach unten wird analog definiert.

$(a_n)_n$  heißt beschränkt, falls ein  $k \geq 0$  existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: -k \leq a_n \leq k \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq k$$

**Satz 6.3.2.** Jede konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

*Beweis.* Sei  $a$  der Grenzwert von  $(a_n)_n$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ).

Das heißt für  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<1} + |a| < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze  $k := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|) \geq 0$

$$\Rightarrow |a_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

**Satz 6.3.3** (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Der Grenzwert einer konvergenten Folge  $(a_n)_n$  ist eindeutig.

*Beweis.* Annahme:  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  mit  $a \neq b$ . Dann gilt o.B.d.A., dass  $a < b$ .

Wir setzen  $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ .

$$\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}: |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} = b - \varepsilon$$

$$\forall n \geq N: a_n > b - \varepsilon = \frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow a_n < \frac{b+a}{2} < a_n \quad \forall n \geq N \quad (\text{Widerspruch}) \quad \square$$

**Satz 6.3.4** (Eigenschaften von konvergenten Folgen). Seien  $(x_n)_n, (y_n)_n$  konvergente reelle Folgen mit  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

(a)  $x_n + y_n \rightarrow a + b$  ( $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$ ).

(b)  $x_n \cdot y_n \rightarrow a \cdot b$  ( $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$ ).

(c)  $\lambda \cdot y_n \rightarrow \lambda \cdot b$  ( $\lim(\lambda \cdot y_n) = \lambda \cdot \lim y_n$ ). ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

(d) Ist  $b \neq 0$ , so ist  $y_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\frac{x_n}{y_n}$  ist für fast alle  $n$  definiert und

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}.$$

(e)  $|x_n| \rightarrow |a|$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|$ )

(f) Ist  $x_n \leq y_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

*Beweis.*

(a) Nach Satz 5.5.4 gilt

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Aufgrund der Konvergenz der Folgen gilt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

Wir wählen  $N = \max(N_1, N_2)$

$$\Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(b) Umformen, um eine passende Ungleichung zu erreichen

$$\begin{aligned} x_n \cdot y_n - ab &= (x_n - a + a) \cdot y_n - ab \\ &= (x_n - a) \cdot y_n + a \cdot y_n - ab \\ &= (x_n - a) \cdot y_n + a \cdot (y_n - b) \\ \Rightarrow |x_n \cdot y_n - ab| &= |(x_n - a) \cdot y_n + a \cdot (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b| \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.2 ist  $y_n$  beschränkt

$$\exists k \geq 0 : |y_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach der Konvergenz der Folgen gilt außerdem

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1, N_2 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)} \quad \forall n \geq N_1 \\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq N_2 \\ \Rightarrow \forall n \geq \max(N_1, N_2) : |x_n \cdot y_n - ab| &\leq \frac{\varepsilon}{2(k+1)} \cdot k + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(c) Setze  $y_n = \lambda \rightarrow \lambda$  und verwende (b)

(d) Wir wählen  $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$

$$\exists N \in \mathbb{N} : |y_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N.$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N : |y_n| &= |y_n - b + b| = |b + (y_n - b)| \\ &\geq |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_n \neq 0$  für fast alle  $n$  und somit  $\frac{x_n}{y_n}$  wohldefiniert für fast alle  $n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten den Spezialfall  $x_n = 1$

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{y_n \cdot b} \right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n| \cdot |b|}.$$

Wir wissen schon, dass  $\exists N_1: |y_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1$

$$\Rightarrow \forall n \geq N_1: \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} \leq \frac{2 \cdot |y_n - b|}{|b| \cdot |b|}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: |y_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max(N_1, N_2): \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Jetzt wenden wir (b) an und dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \lim x_n \cdot \lim \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

(e) Wir zeigen mit der Umkehrung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} ||x_n| - |a|| &\stackrel{\text{Dreiecks.}}{\leq} |x_n - a| \\ &\Rightarrow |x_n| \rightarrow |a| \end{aligned}$$

(f) Angenommen  $a > b$ . Wir wählen  $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ .

$$\Rightarrow \exists N_1: |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \exists N_2: |y_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

Für  $n \geq \max(N_1, N_2)$  folgt

$$\begin{aligned} x_n &> a - \varepsilon = a + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon > y_n \\ &\Rightarrow x_n > y_n \end{aligned}$$

□

**Satz 6.3.5** (Sandwich Satz). Seien  $(a_n)_n$ ,  $(b_n)_n$ ,  $(c_n)_n$  Folgen mit  $\lim a_n = a$ ,  $\lim (b_n - a_n) = 0$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt, dass  $(c_n)_n$  und  $(b_n)_n$  jeweils gegen  $a$  konvergieren.

*Beweis.*

1. Schritt:  $\lim b_n = a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $a_n \rightarrow a$ ,  $\exists N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$   
 $0 \leq b_n - a_n$  ist Nullfolge  $\Rightarrow \exists N_2 : |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= |b_n - a_n + a_n - a| \\ &\leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq \max(N_1, N_2) \end{aligned}$$

2. Schritt:  $\lim c_n = a$ .

$$\begin{aligned} \lim a_n = a &= \lim b_n \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1, N_2 : &|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \\ &\text{und } |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \\ a - \varepsilon < a_n &< a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \\ a - \varepsilon < b_n &< a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

Auch gilt  $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_3$  und wir definieren  $N := \max(N_1, N_2, N_3)$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Das heißt  $|c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ . Das heißt  $\lim c_n = a$

□

## 6.4 [\*] Monotone Konvergenz

Wir sind bisher immer davon ausgegangen, dass wir den Grenzwert einer Folge bereits kennen. Das folgende Unterkapitel beschäftigt sich damit, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, wenn deren Grenzwert nicht bekannt ist.

**Definition 6.4.1** (Monotonie). Eine reelle Folge  $(a_n)_n$  heißt

- (i) monoton wachsend, wenn  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) streng monoton wachsend, wenn  $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) monoton fallend, wenn  $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iv) streng monoton fallend, wenn  $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir nennen  $(a_n)_n$  (streng) monoton, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

**Satz 6.4.2** (Monotone Konvergenz). Eine monoton wachsende Folge  $(a_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(a_n)_n$  nach oben beschränkt ist.

Und eine monoton fallende Folge  $(a_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn sie nach unten beschränkt ist.

**Lemma 6.4.3** (Hilfaussage für monotone Konvergenz). Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge besitzt eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_n$  nach oben beschränkt und  $S := \{c \in \mathbb{R} \mid a_n \leq c \ \forall n\} \neq \emptyset^4$ .

Dann ist  $S$  nach unten beschränkt, da  $a_1 \leq c \ \forall c \in S$

$\Rightarrow a := \inf S$  existiert

Behauptung:  $a$  ist obere Schranke für  $(a_n)_n$ , das heißt  $a \in S$ .

Angenommen  $a \notin S$  ( $a$  ist keine obere Schranke)

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_{n_0} > a$ .

Wir setzen  $\varepsilon := a_{n_0} - a > 0$ . Und  $\exists c \in S: c < a + \varepsilon = a + a_{n_0} - a = a_{n_0}$ . Widerspruch zu  $c \in S$ .

Das heißt  $a$  ist obere Schranke für  $(a_n)_n$ . □

*Beweis von Satz 6.4.2.* Angenommen  $(a_n)_n$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt.

$$a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

$$\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$  keine obere Schranke für  $(a_n)_n$  mehr.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: a_N \geq a - \varepsilon$$

Sei  $n \geq N$ . Dann gilt:

$$a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \dots \leq a_{N+k} = a_n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: a - \varepsilon < a_n$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$
□

*Alternativer Beweis.* <sup>5</sup>

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge mit  $a_n = f(n), f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{N})$  nach oben beschränkt

$$a := \sup(f(\mathbb{N})) \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
□

---

<sup>4</sup>Folgt aus der Beschränktheit

<sup>5</sup>Dieser Beweis bezieht sich laut Vorlesung auf Lemma 14, welches allerdings nicht existiert. Gemeint ist vermutlich Satz 14 (hier Satz 6.4.2) oder Lemma 15 (hier Lemma 6.4.3)

**Beispiel 6.4.4.**

1. Berechnen von  $\sqrt{c}$  für  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} x^2 = c &\Leftrightarrow x = \frac{c}{x} \quad x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{c}{x} \right) \end{aligned}$$

Folge  $x_n$ : Wählen  $x_0 > 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}} \right)$

Behauptung 1:  $x_n \geq \sqrt{c} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew.:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{c}{x_0} \right)$$

haben AGM<sup>6</sup>:  $\forall a, b \geq 0: ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Setzen  $x = \sqrt{a}$  und  $y = \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{ab} \leq \frac{ab}{2}$

$$\begin{aligned} (x_1)^2 &\geq \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{c}{x_0} \right)^2 \geq x_0 \cdot \frac{c}{x_0} = c \\ x_1 &\geq \sqrt{c} \end{aligned}$$

Falls

Behauptung 2:  $(x_n)_n$  ist monoton fallend.

*Beweis*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

haben für  $n \geq 1$ :  $(x_n)^2 = \left( \frac{1}{2} \left( x_{n+1} + \frac{c}{x_{n+1}} \right) \right)^2 \geq c$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_n \geq \frac{c}{x_n} \\ &\Rightarrow x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n \end{aligned}$$

Nach dem Satz der monotonen Konvergenz ist  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  entspricht??  $\geq \sqrt{c}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$

$$\begin{aligned} x &= \lim x_n = \lim \frac{1}{2} \left( x_{n+1} + \frac{c}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{c}{x} \right) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{c} \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Arithmetisch-geometrisches Mittel

2.  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \geq N: \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

(geg.  $\varepsilon > 0$  nach  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{N}$ )

Ähnlich funktioniert  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.  $x_n := \frac{1+2+3+\dots+n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$

Bew:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow x_n = \frac{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

4. Sei  $0 \leq q < 1$ .  $x_n := q^n \rightarrow 0$

Bew: Ist  $q = 0 \Rightarrow x_n = 0^n = 0 \rightarrow 0$ .

Also sei  $0 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$

$$h := \frac{1}{q} - 1 > 0 \quad \frac{1}{q} = 1 + h, \quad q = \frac{1}{1+h}$$

$$\Rightarrow x_n = q^n \leq \left( \frac{1}{1+h} \right)^n = \frac{1}{(1+h)^n}$$

Nach Bernoulli:  $(1+h)^n \geq 1 + nh$

$$\Rightarrow q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \rightarrow 0$$

5. Sei  $-1 < q < 1 \Rightarrow x_n := q^n \rightarrow 0$ . (Übung)

6. Sei  $a > 0$ ,  $x_n := a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$

Bew: 1. Fall  $a = 1 \Rightarrow x_n = 1$

2. Fall  $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{a}{n}} = 1$

$$h_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \text{ und } a + h_n = a^{\frac{a}{n}}$$

$$q = (a + h_n)^n \geq 1 + ab_1 \geq a_{b1}$$

$$\Rightarrow h_n < \frac{a}{n}$$

$$\left| a^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = h_n < \frac{a}{n} \Rightarrow \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$$

3. Fall  $0 < a < 1$

$$b = \frac{1}{a} > 1$$

$$\Rightarrow \lim b^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$= \lim \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$$

7.  $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$

$$n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n^n} > 1 \quad h_n := n^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow n = \left( n^{\frac{1}{n}} \right)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n > n \cdot h_n \Rightarrow h_n \leq \frac{h}{n} = 1$$



Aber: Binomialsatz

$$\begin{aligned}
 (1+h_n)^n &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (h_n)^k}_{\geq 0} \geq \binom{n}{0} \cdot (h_n)^0 \binom{n}{1} \cdot (h_n)^1 + \binom{n}{2} \cdot (h_n)^2 \\
 &= 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n+1)}{2} (h_n)^2 \\
 &> \frac{n(n+1)}{2} \cdot h_n^2 \\
 \Rightarrow h_n^2 &< \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} \\
 0 < h_n &< \sqrt{\frac{2}{n+1}} \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \lim h_n &= 0 \Leftrightarrow \lim n^{\frac{1}{n}} = 1
 \end{aligned}$$

**Definition 6.4.5.** Eine reelle Folge  $(x_n)_n$  strebt gegen unendlich, falls  $\forall k \geq 0 \exists N \in \mathbb{N}: x_n \geq k \quad \forall n > N$   
 $(\Leftrightarrow \forall k \geq 0$  ist  $x_n < k$  für endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ ).  
 $(x_n)_n$  strebt gegen  $-\infty$ , falls  $(-x_n)_n$  gegen  $\infty$  strebt.

$x_n = n$  divergiert gegen  $\infty$

**Satz 6.4.6.** Falls  $x_n \rightarrow \infty$  folgt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ .

Ist  $(x_n)_n$  Nullfolge mit  $x_n > 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \infty$

Falls  $x_n < 0$  für fast alle  $n$ , so folgt  $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$

*Beweis.* Sei  $x_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: x_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N \\
 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \text{ das heißt } \frac{1}{x_n} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

(Rest Übung) □

**Beispiel 6.4.7.**  $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$  (Sogar  $\forall k \in \mathbb{N}: \frac{n^k}{2^n} \rightarrow 0$ )

*Beweis.* Zu zeigen:  $x_n = \frac{2^n}{n} \rightarrow \infty$

$$2^n = (1+1)^n =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{2^n}{n} \geq \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow \infty, \frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \quad \square$$

**Beispiel 6.4.8** (Die Eulersche Zahl).

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$a_n < a_{n+1} \text{ und } b_n > b_{n+1} \quad \forall n$$

*Beweis.* Sei  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\
 &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^n \\
 &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
 &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\
 &\geq \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\
 &???
 \end{aligned}$$

Mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt:

$$\Rightarrow a_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n < b_{n+1} < \dots < b_1$$

$$\Rightarrow e := \lim a_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ existiert}$$

$$b := \lim b_n \text{ existiert, sogar } b = e \text{ Da } 1 < \frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

$$1 = \lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n} = \frac{b}{e} \Rightarrow b = e$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

□

## 6.5 [\*] Häufungswerte und Teilfolgen

Wir möchten eine Folge  $(a_n)_n$  „massieren“.

$$a_n = f(n), \quad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Wir wollen die Folgeglieder umordnen oder auch beliebige weglassen. Wie machen wir das und wie lässt sich das ausdrücken?

**Definition 6.5.1** (Umordnung). Sei  $(a_n)_n$  eine reelle Folge. Eine Umordnung ist gegeben durch eine Bijektion

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ b_n &:= a_{\sigma(n)} \end{aligned} \quad (\text{Umordnung von } a_n)$$

**Definition 6.5.2** (Ausdünnung). Es sei  $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend

$$b_n := a_{\kappa(n)} \quad (\text{Teilfolge von } a_n)$$

**Satz 6.5.3** (Konvergenz von Teilfolgen und Umordnungen). Für jede konvergente reelle Folge  $(a_n)_n$  konvergiert jede Umordnung und jede Teilfolge gegen den selben Grenzwert.

*Beweis*<sup>7</sup>. Sei  $a_n$  konvergent gegen  $a$  und  $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  monoton wachsend ( $\kappa(n+1) > \kappa(n)$ ).  
 $\Rightarrow \kappa(j) \geq j \quad \forall j \in \mathbb{N}$ <sup>8</sup>

$$b_j := a_{\kappa(j)}$$

$a_n \rightarrow a$ , das heißt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \forall j \geq N : a - \varepsilon < a_{\kappa(j)} < a + \varepsilon \quad \forall j \geq N \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} a_{\kappa(j)} = a \quad \text{d.h.} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = a \end{aligned}$$

Für Umordnung: Sei  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Bijektion.

$$b_j := a_{\sigma(j)}$$

Wir haben  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  und betrachten das Urbild

$$A := \sigma^{-1}(\{1, 2, 3, \dots, N\}) \subseteq \mathbb{N}$$

$A$  hat endlich viele Elemente

$$\begin{aligned} L &:= \max(\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \dots, \sigma^{-1}(N)) \\ j \geq L &\Rightarrow \sigma(j) \geq N \\ &\Rightarrow \forall j \geq L : a - \varepsilon < a_{\sigma(j)} < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} a_{\sigma(j)} = a \end{aligned}$$

□

<sup>7</sup>Nachtrag vom 28. November 2023.

<sup>8</sup>Lässt sich per Induktion nachweisen

**Übung 6.5.4.** Weisen Sie nach, dass sich der Grenzwert einer Folge nicht verändert, wenn man endlich viele Elemente ändert.

**Definition 6.5.5** (Häufungswert). Sei  $(a_n)_n$  reelle Folge. Eine reelle Zahl  $a$  heißt Häufungswert (oder Häufungspunkt) von  $a_n$ , falls  $\forall \varepsilon > 0$  unendlich viele  $a_n$  in  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  liegen. Das heißt:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n$$

Das heißt  $\forall L \in \mathbb{N} \exists n > L: a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

**Beispiel 6.5.6.**

1.  $a_n = \frac{1}{n}$  hat Häufungswert 0
2.  $a_n = (-1)^n$  hat Häufungswerte 1, -1
3.  $a_n = n$  hat keinen Häufungswert
4.  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat Häufungswerte 1, -1

**Satz 6.5.7** (Häufungswertkriterium über Teilfolgen). Eine reelle Zahl  $a$  ist genau dann Häufungswert einer Folge  $(a_n)_n$ , wenn eine Teilfolge von  $a_n$  existiert, die gegen  $a$  konvergiert.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $a$  sei Häufungswert von  $a_n$ . Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \forall L \in \mathbb{N} \exists n > L: a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

- 1) Wir wählen  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}: a - 1 < a_{n_1} < a + 1$
- 2) Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{2}, L = n_1 + 1 \Rightarrow \exists n_2 > L > n_1: a - \frac{1}{2} < a_{n_2} < a + \frac{1}{2}$
- 3) Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow \exists n_3 > n_2: a - \frac{1}{3} < a_{n_3} < a + \frac{1}{3}$
- $j$ ) Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{j+1} \Rightarrow \exists n_{j+1} > n_j: a - \frac{1}{j+1} < a_{n_{j+1}} < a + \frac{1}{j+1} \Rightarrow n_j < n_{j+1} \forall j \in \mathbb{N}$

Wir definieren  $\kappa(j) := n_j$  und  $b_j := a_{\kappa(j)}$  ist eine Teilfolge.

„ $\Leftarrow$ “: Es gilt  $a - \frac{1}{j} < b_j < a + \frac{1}{j}$  und nach dem

□

## 6.6 Größter und kleinster Häufungswert - Limes superior und Limes inferior

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte reelle Folge.

$$x_n := \sup_{l \geq n} a_l$$

ist monoton fallend, weil

$$\sup_{l \geq n} a_l = \max(a_n, \sup_{l \geq n+1} a_l) \geq \sup_{l \geq n+1} a_l = x_{n+1}$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

$$\stackrel{6.4.2}{\Rightarrow} x = \lim x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{l \geq n} a_l = \inf_{l \geq n} \sup_{l \geq n} a_l$$

existiert.

Genauso:  $y_n := \inf_{l \geq n} a_l \Rightarrow y_n < y_{n+1}$  und  $y_n$  ist nach oben beschränkt und damit existiert:

$$y = \lim y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{l \geq n} a_l = \sup_{l \geq n} \inf_{l \geq n} a_l$$

**Definition 6.6.1** (Limes superior und inferior). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte reelle Folge.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{l \geq n} a_l = \inf_{l \geq n} \sup_{l \geq n} a_l \quad (\text{Limes superior})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{l \geq n} a_l = \sup_{l \geq n} \inf_{l \geq n} a_l \quad (\text{Limes inferior})$$

Damit gilt außerdem

$$\begin{aligned} y_n < x_n \quad \inf_{l \geq n} a_l &\leq \sup_{l \geq n} a_l \\ \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= - \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

**Beispiel 6.6.2.**

$$\begin{aligned} a_n = (-1)^n &\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= - \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

## 6.6 Größter und kleinster Häufungswert - Limes superior und Limes inferior

**Lemma 6.6.3** (Charakterisierung von  $\limsup$  und  $\liminf$ ). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte reelle Folge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a^* = \limsup a_n &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \text{ist } a_n < a^* + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ \text{und } a_n > a^* - \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \end{array} \\ a_* = \liminf a_n &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \text{ist } a_n > a_* - \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ \text{und } a_n < a_* + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \end{array} \end{aligned}$$

*Beweis für ersten Teil des Lemmas, zweiter analog. „ $\Rightarrow$ “:*

$$a^* = \limsup a_n = \inf_{n \rightarrow \infty} \sup_{l \geq n} a_l$$

Angenommen  $\exists \varepsilon > 0: a_l \geq a^* + \varepsilon$  für unendlich viele  $l$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sup_{l \geq n} a_l \geq a^* + \varepsilon \\ &\Rightarrow a^* = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{l \geq n} a_l \geq a^* + \varepsilon \quad (\text{Widerspruch}) \end{aligned}$$

Angenommen  $\exists \varepsilon > 0: a_n \leq a^* - \varepsilon$  für fast alle  $n$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sup_{l \geq n} a_l \leq a^* - \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow a^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{l \geq n} a_l \leq a^* - \varepsilon_0 \quad (\text{Widerspruch}) \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $a^* \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0: a_n < a^* + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ &\quad a_n > a^* - \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: a_l < a^* + \varepsilon \quad \forall l \geq k \\ &\Rightarrow \forall n \geq k: \sup_{l \geq n} a_l \leq a^* + \varepsilon \\ &\quad \sup_{l \geq n} a_l > a^* - \varepsilon \\ &\Rightarrow \forall n \geq k: a^* - \varepsilon < \sup_{l \geq n} a_l \leq a^* + \varepsilon \\ &\Rightarrow a^* - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{l \geq n} a_l \leq a^* + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow \limsup a_n = a^* \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 6.6.4** (Eigenschaften von  $\limsup$  und  $\liminf$ ). Sei  $a_n$  eine beschränkte reelle Folge und  $H(a_n)$  die Menge der Häufungspunkte von  $a_n$ . Dann gilt

$$\limsup a_n, \liminf a_n \in H(a_n) \quad (1)$$

Insbesondere ist  $H(a_n) \neq \emptyset$ . Ferner ist

$$\forall x \in H(a_n): \liminf a_n \leq x \leq \limsup a_n \quad (2)$$

Beweis von (1).

$$\begin{aligned}
 a^* &:= \limsup a_n \\
 &\stackrel{6.6.3}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0: a_n < a^* + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\
 &\quad a_n > a^* - \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \\
 &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: a^* - \varepsilon < a_n < a^* + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n \\
 &\Rightarrow a^* \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_n \quad \square
 \end{aligned}$$

Analog lässt sich der Beweis auch für  $\liminf a_n$  führen.

Beweis von (2). Sei  $a$  Häufungswert von  $(a_n)_n$ . Annahme:  $a > a^* := \limsup a_n$ :

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n$$

Wähle  $\varepsilon = \frac{a - a^*}{2}$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow a - \frac{a - a^*}{2} < a_n < a + \frac{a - a^*}{2} \\
 &\Rightarrow a_n > a - \frac{a - a^*}{2} = \frac{a + a^*}{2} = a^* + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n
 \end{aligned}$$

Widerspruch zu Lemma 6.6.3

$$\Rightarrow a \leq \limsup a_n \quad \square$$

Mit  $-a_n$  lässt sich analog zeigen, dass  $a \geq \liminf a_n \quad \forall$  Häufungspunkte  $a$  von  $(a_n)_n$ .

**Notation 6.6.5** (Limes superior/inferior von unbeschränkten Folgen). Es sei  $a_n$  nicht nach oben beschränkt. Dann setzen wir

$$\limsup a_n := +\infty$$

Ist  $a_n$  nicht nach unten beschränkt. Dann setzen wir

$$\liminf a_n := -\infty$$

**Korollar 6.6.6** (Konvergenzkriterium nach limes superior und limes inferior). Eine reelle Folge  $a_n$  konvergiert genau dann, wenn  $a_n$  beschränkt ist und  $\limsup a_n = \liminf a_n$ .

Beweis. „ $\Rightarrow$ “:

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

$a_n$  konvergiert gegen  $a$  genau dann, wenn  $H(a_n) = \{a\}$

$$\Rightarrow \liminf a_n = a = \limsup a_n$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\liminf a_n = \limsup a_n = a$

$$\stackrel{6.6.3}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0: a_n < a + \varepsilon \text{ für fast alle } n$$

und  $a_n > a - \varepsilon$  für fast alle  $n$

$$\Rightarrow \lim a_n = a \quad \square$$

**Übung 6.6.7.** Zeigen Sie: Wenn  $\liminf$  und  $\limsup$  als reelle Zahlen existieren, dann ist die Folge beschränkt.

**Satz 6.6.8** (Satz von Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte reelle Folge  $a_n$  besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

## 6.6 Größter und kleinster Häufungswert - Limes superior und Limes inferior

*Beweis.*  $a^* := \limsup a_n$  ist ein Häufungspunkt von  $a_n$  nach Satz 6.6.4. □

**Korollar 6.6.9.** Jede beschränkte reelle Folge  $a_n$  hat eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Nach Satz 6.6.8 ist  $H(a_n) \neq \emptyset$  und nach Satz 6.5.7 gibt es zu jedem Häufungspunkt eine konvergente Teilfolge. □



## 6.7 Das Konvergenzkriterium von Cauchy

**Definition 6.7.1** (Cauchy-Folge). Eine reelle Folge  $a_n$  heißt Cauchy-Folge, falls

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \\ & (\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N) \end{aligned}$$

**Lemma 6.7.2.** Jede konvergente reelle Folge  $a_n$  ist eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Es sei  $(a_n)_n \rightarrow a$  eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow & \text{Sei } n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \\ & \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 6.7.3.** Jede reelle Cauchy-Folge ist beschränkt.

*Beweis.* Es sei  $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \exists N: |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N \\ \Rightarrow & \forall n, m \geq N: |a_n| = |a_n - a_m + a_m| \\ & \leq |a_n - a_m| + |a_m| \\ & < 1 + |a_m| \end{aligned}$$

Da wir  $m = N$  wählen können, gilt

$$\Rightarrow \forall n \geq N: |a_n| < 1 + |a_N|$$

Es gibt eine Schranke ab dem  $N$ -ten Folgenglied und damit gilt

$$\Rightarrow |a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|) \quad \square$$

**Lemma 6.7.4.** Eine reelle Cauchy-Folge  $a_n$  konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat.

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “: Klar, weil nach Satz 6.5.3 jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $b_j$  eine Teilfolge von  $a_n$  mit  $b_j = a_{n_j}$  und  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$

Es sei  $a := \lim b_j$ . Behauptung:  $\lim a_n = a$

Wir wissen:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N}: |a - a_{n_j}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq N_1 \\ & \exists N_2 \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq n \geq N_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & |a_n - a| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \\ & \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \end{aligned}$$

Wir wählen  $j \geq \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 6.7.5.** Jede reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Folgt direkt aus Lemma 6.7.2

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge  $\xRightarrow{\text{Lemma 6.7.3}}$   $(a_n)_n$  ist beschränkt  $\xRightarrow{\text{Satz 6.6.8}}$   $(a_n)_n$  hat eine konvergente Teilfolge  $\xRightarrow{\text{Lemma 6.7.4}}$   $(a_n)_n$  ist konvergent  $\square$

6.8 [\*] Dichtigkeit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ 

Wir kennen bereits folgende Mengen:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{Rationale Zahlen})$$

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}, \text{ da } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (\text{Irrationale Zahlen})$$

**Bemerkung 6.8.1** (Größenvergleich der irrationalen und rationalen Zahlen).  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist sehr viel größer als  $\mathbb{Q}$ . (Wird später noch behandelt)

**Definition 6.8.2** (Dichte Teilmenge). Sei  $A \subseteq B (\subseteq \mathbb{R})$ .  $A$  heißt dicht in  $B$ , falls

$$\forall b \in B \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n \in A \forall n \in \mathbb{N}) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

Das heißt für jedes  $b \in B$  existiert eine Folge in  $A$ , die gegen  $b$  konvergiert.

**Notation 6.8.3.** Statt  $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \in A$  schreiben wir auch  $(a_n)_n \subseteq A$ .

Wir wollen nun zeigen, dass  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist. Ziel:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

**Lemma 6.8.4** (Zwischenwerte von reellen Zahlen).

(i)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  mit  $y - x > 1 \exists m \in \mathbb{Z}$  mit  $x < m < y$

(ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  mit  $y > x \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y$

*Beweis.*

(i) Sei  $y > x + 1$ . Wir definieren

$$A := \{p \in \mathbb{Z} \mid p > x\} \subseteq \mathbb{Z}$$

$A$  ist nach unten beschränkt und nach Satz 4.2.12 gilt  $A \neq \emptyset$ . Nach Satz 4.2.14 erweitert auf  $\mathbb{Z}$  folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m := \min(A) \text{ existiert, } m \in A \\ &\Rightarrow m - 1 \notin A, \quad m - 1 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x < m, \quad m - 1 \leq x \\ &\Rightarrow m \leq x + 1 < x + (y - x) = y \\ &\Rightarrow x < m < y \end{aligned}$$

(ii) Sei  $y > x \Leftrightarrow y - x > 0$

$$\begin{aligned} &\stackrel{4.2.12}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: n \cdot (y - x) > 1 \\ &\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{Z}: nx < m < ny \\ &\Leftrightarrow x < \frac{m}{n} < y \\ &\text{Wähle } q = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

□

**Folgerung 6.8.5** (Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ ). Anwendung:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists (a_n)_n \in \mathbb{Q}$  mit  $q_n \rightarrow x$

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  wähle  $y = x + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{Lemma 6.8.4}}{\Rightarrow} \exists q_n \in \mathbb{Q}: x < q_n < y = x + \frac{1}{n} \\ x < q_n < x + \frac{1}{n} \quad (\rightarrow x) \end{aligned}$$

Nach dem Sandwich-Satz (6.3.5) gilt

$$\Rightarrow q_n \rightarrow x$$

□

**Lemma 6.8.6.**  $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \exists m_n \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{m_n - 1}{n} \leq x < \frac{m_n}{n}$$

**Übung 6.8.7.** Beweisen Sie das vorherige Lemma.

*Hinweis:* Betrachte  $A_n := \{p \in \mathbb{Z} \mid p > nx\} \subseteq \mathbb{Z}$ . Behauptung:  $m_n := \min A_n$  ermöglicht den Beweis.

**Bemerkung 6.8.8** (Siehe Walter: Analysis 1, Kapitel 3.8 und 4.8). Sei  $a > 0$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ existiert}$$

Da  $a^n := \prod_{j=1}^n a$   $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$   $a^0 := 1$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$a^m$  definiert  $\forall m \in \mathbb{Z}$

Definiere:  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Check Wohldefiniertheit. Das heißt ist  $q = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$  muss gelten

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m_2} = a^{\frac{m_1}{n_1}} = a^{\frac{m_2}{n_2}} = \left(a^{\frac{1}{n_2}}\right)^{m_2}$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  wähle  $a_n \in \mathbb{Q}, q_n \rightarrow x$  und definiere

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}$$

Check:  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}, a^x b^x = (ab)^x, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$  usw.

## 6.9 [\*] Reihen (und Konvergenz von Reihen)

Bedeutung von endlichen Summen ist klar.

Frage: Gegeben eine reelle Folge  $a_n$ . Was ist  $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ ?

**Definition 6.9.1** (Reihen als Partialsummen). Das Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{Sei } a_n \text{ eine reelle Folge})$$

wird folgendermaßen verwendet:

a) Es steht für die Folge der Partialsummen:

$$s_n := \sum_{j=1}^n a_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert, falls der Grenzwert der Partialsummen  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert. Wir setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

c) Konvergiert  $(s_n)_n$  nicht, so heißt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent. Falls  $s_n$  bestimmt divergiert so setzen wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &:= \infty && (\text{Wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n &:= -\infty && (\text{Wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty) \end{aligned}$$

**Satz 6.9.2** (Monotone Konvergenz für Reihen). Sei  $a_n$  eine reelle Folge mit  $\forall n: a_n \geq 0$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  genau dann, wenn die Folge der Partialsummen  $s_n$  nach oben beschränkt ist.

*Beweis.* Betrachte

$$s_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^n a_j + a_{n+1} \geq \sum_{j=1}^n a_j = s_n$$

und wende Satz 6.4.2 an. □

**Korollar 6.9.3.** Für eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit  $a_n \geq 0$  gilt entweder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 6.9.2. □

**Bemerkung 6.9.4.** Oft hat man Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$$s_n := \sum_{j=0}^n a_j \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

oder

$$s_n := a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad (n \in \mathbb{N})$$

Sofern ein Limes existiert, gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim s_n$$

Allgemein für  $v \in \mathbb{Z}$   $a_v, a_{v+1}, a_{v+2}, \dots$

$$\sum_{n=v}^{\infty} a_n = a_v + a_{v+1} + \dots$$

$$s_n := \sum_{j=v}^n a_j \text{ def. Folge } (s_n)_{n \geq v}$$

**Beispiel 6.9.5** (Geometrische Folge und Reihe).<sup>9</sup>

$$q \neq 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{Ist } |q| < 1: \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ konvergiert und } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad (\text{geometrische Reihe})$$

Zum Beispiel  $q = \frac{1}{2}$

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\Leftrightarrow (1 - q) \cdot \sum_{j=0}^n q^j = 1 - q^{n+1}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$= \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

---

<sup>9</sup>Wir setzen  $0^0 = 1$

Das heißt es sollte gelten

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dass dieser Zusammenhang gelten muss, lässt sich einfach veranschaulichen. Die linke Seite der Gleichung kann als Summe über Teilflächen des Einheitsquadrats<sup>10</sup> visualisiert werden.

Erst wird eine Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel (usw.) des Quadrats hinzugefügt. Der zurückbleibende Flächeninhalt ist immer genauso groß wie das zuletzt hinzugefügte Stück. Dieser Term wird durch den rechten Teil der Gleichung beschrieben.

*Beweis der Reihenformel.*

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{j=0}^n q^j \\ q \cdot s_n &= q \cdot \sum_{j=0}^n q^j = \sum_{j=0}^n q^{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} q^j && \text{(Indexshift)} \\ \Rightarrow (1-q) \cdot s_n &= s_n - q \cdot s_n = \sum_{j=0}^n q^j - \sum_{j=1}^{n+1} q^j && \text{(Reißverschlusssumme)} \\ &= q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \\ \Rightarrow s_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} && \square \end{aligned}$$

*Beweis der Konvergenz für  $|q| < 1$ .*

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} && \text{(Weil } |q| < 1) \\ \stackrel{6.3.4}{\Rightarrow} \lim s_n &= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} && \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 6.9.6.** Ist  $|q| \geq 1$ , dann ist  $1 + \underbrace{q}_{\geq 1} + \underbrace{q^2}_{\geq 1} + \underbrace{q^3}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{q^n}_{\geq 1} \geq 1 + n \rightarrow \infty$ .

---

<sup>10</sup>Original: „Kuchen“

**Beispiel 6.9.7** (Harmonische Reihe).

$$s_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$(s_n)_n$  ist monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt. Das heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=n+1}^n \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow s_2 - s_1 &\geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow s_2 &\geq s_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \\ s_4 - s_2 &\geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow s_4 &\geq s_2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ s_8 - s_4 &\geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow s_8 &\geq s_4 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \\ \text{Induktion} \Rightarrow s_{(2^j)} &> \frac{j}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Also ist  $s_{(2^j)}$  nicht nach oben beschränkt  $\Rightarrow (s_n)_n$  nicht nach oben beschränkt.

$$\stackrel{6.4.2}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \quad \square$$

**Satz 6.9.8.** Seien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergente Reihen. Dann ist

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n)$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{j=1}^n a_n \quad t_n := \sum_{j=1}^n b_n \\ d_n &:= \sum_{j=1}^n (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^n a_n + \mu \cdot \sum_{n=1}^n b_n \\ &= \lambda \cdot s_n + \mu \cdot t_n \rightarrow \lambda \cdot s + \mu \cdot t \end{aligned} \quad (\text{Mit } s \text{ und } t \text{ als Limes})$$

$\square$



**Satz 6.9.9** (Majoranten-Kriterium). Gegeben zwei Folgen  $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{so konvergiert auch} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und es gilt

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^n a_j & t_n &= \sum_{j=1}^n b_j \\ \Rightarrow s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \geq s_n \\ t_{n+1} &= t_n + b_{n+1} \geq t_n \\ \Rightarrow (s_n)_n, (t_n)_n &\text{ sind monoton wachsend} \end{aligned}$$

Mit der Konvergenz von  $(t_n)_n$  und  $(t_n)_n$  monoton wachsend folgt mit Satz 6.9.2

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (t_n)_n \text{ ist beschränkt} \\ &\Rightarrow \exists M \geq 0: t_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq a_n \leq b_n &\Rightarrow 0 \leq s_n \leq t_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (s_n)_n \text{ ist nach oben beschränkt und monoton wachsend} \\ &\stackrel{6.9.2}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ existiert} \\ s &:= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{aligned} \quad \square$$

Außerdem gilt:

$$t_n - s_n = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \geq 0$$

**Satz 6.9.10** (Minoranten-Kriterium). Sei  $0 \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  und

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \infty \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\text{ divergiert auch bestimmt gegen } \infty \end{aligned}$$

*Beweis.*

$$t_n = \sum_{j=1}^n b_n \quad s_n = \sum_{j=1}^n a_n$$

Analog zum Beweis des Majoranten-Kriteriums gilt:

$$(s_n)_n, (t_n)_n \text{ sind monoton wachsend und } t_n \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann lässt sich folgern

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty &\Leftrightarrow (t_n)_n \text{ wächst über alle Grenzen} \\ &\Rightarrow (s_n)_n \text{ wächst über alle Grenzen} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\end{aligned}\quad \square$$

**Beispiel 6.9.11** (Anwendung des Minoranten-Kriteriums). Es sei

$$a_n \geq \frac{c}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (c > 0)$$

Nach Minorantenkriterium und der Divergenz der harmonischen Reihe gilt

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

**Beispiel 6.9.12** (Anwendung des Majoranten-Kriteriums). Es sei wieder  $c > 0$ . Dann folgt aus

$$0 \leq a_n \leq c \cdot q^n \wedge 0 \leq q < 1$$

nach Majoranten-Kriterium und dem Konvergenzkriterium der geometrischen Reihe, dass

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad (b_n = c \cdot q^n)$$

**Bemerkung 6.9.13** (Abgeschwächtes Majoranten-Kriterium). Die Konvergenz/Divergenz von Reihen (und Folgen) ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden (Folgeglieder) abändert. Für das Majoranten-Kriterium reicht also, dass  $0 \leq a_n \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

Das gleiche gilt analog für das Minoranten-Kriterium

**Satz 6.9.14** (Cauchyscher Verdichtungssatz). Sei  $(a_n)_n$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{(2^n)} \text{ konvergiert} \end{aligned} \quad (\text{Verdichtete Reihe})$$

*Beweis.* 1. Schritt. Zu zeigen:  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \dots \text{geq} a_{n+l} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. Schritt:

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{j=0}^n a_j \\ t_n &:= \sum_{\nu=0}^n 2^\nu \cdot a_{2^\nu} \end{aligned}$$

Jedes  $n \in \mathbb{N}$  können wir eindeutig schreiben als  $n = 2^\nu + l$  mit  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq l \leq 2^\nu$ . Sei  $1 \leq n < 2^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=0}^n a_j = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \\ &\leq a_0 + \sum_{j=1}^{2^k-1} a_j = a_0 + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left( \sum_{l=0}^{2^\nu-1} \underbrace{a_{2^\nu+l}}_{\leq a_{2^\nu}} \right) \\ &\leq a_0 + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left( \sum_{l=0}^{2^\nu-1} a_{2^\nu} \right) \\ &= a_0 + \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu \cdot a_{2^\nu} \\ &= a_0 + t_{k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n < 2^k \text{ gilt } s_n \leq a_0 + t_{k-1}.$$

Angenommen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu} \text{ konvergent} \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t \text{ existiert} \\ \Rightarrow s_n \leq a_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} t_{k-1} = a_0 + t \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Da  $s_n \leq s_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent}$$

Umgekehrt: Sei  $n \geq 2^k$

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{j=0}^n a_j \geq \sum_{j=0}^{2^n} a_j \\
 &= \sum_{\nu=0}^k \left( \sum_{l=0}^{2^\nu-1} \underbrace{a_{2^\nu+l}}_{\geq a_{2^\nu+1}} \right) \\
 &\geq \sum_{\nu=0}^k \left( \sum_{l=0}^{2^\nu-1} a_{2^\nu+1} \right) = \sum_{\nu=0}^k 2^\nu \cdot a_{2^\nu+1} \\
 &= \sum_{\nu=1}^{k+1} 2^{\nu-1} a_{2^\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k+1} 2^\nu a_{2^\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\nu=0}^{k+1} 2^\nu a_{2^\nu} - a_0 \right) = t_{k+1} - a_0 \\
 \Rightarrow t_k &\leq t_{k+1} \leq s_n + a_0 \quad \forall 2^k \geq n \\
 \Rightarrow t_k &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + a_0 = s + a_0 < \infty
 \end{aligned}$$

sofern  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert

Da  $t_k < t_{k+1}$  konvergiert, konvergiert auch  $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \cdot a_{2^\nu}$  □

**Beispiel 6.9.15.**

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n^\alpha} \\
 2^n \cdot a_{2^n} &= \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \frac{2^n}{2^{n \cdot \alpha}} \\
 &= 2^{n - n \cdot \alpha} = 2^{(1-\alpha) \cdot n} = \dots
 \end{aligned}$$