Skript zur Vorlesung
Analysis I
bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2023/24

Dieses Skript ist inoffiziell. Es besteht kein
Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.

Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

Definition 1.0.1 (Aussage)**.** Eine Aussage ist eine Behauptung sprachlich oder mittels Formeln, welche entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel 1.0.2 (Zulässige Aussagen)**.**

(i) Bielefeld existiert (w)

(ii) $2 + 2 = 5$ (f)

(iii) Es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

Definition 1.0.3 (Aussageform)**.** Eine Aussage, die von mindestens einer Variablen abhängt, nennt sich Aussageform. Wir schreiben zum Beispiel $H(x)$ für eine Aussage für die Variable x.

Beispiel 1.0.4 (Mögliche Aussageformen)**.**

(i) $H(x) :\Leftrightarrow \big(x^2 - 3x + 2 = 0\big)$

(ii) $G(x) :\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 2)$

Konzept 1.0.5 (Beweisstruktur)**.**

$$\begin{array}{rcr} p & & q \\ \text{Vorraussetzung} & \Rightarrow & \text{Behauptung} \\ \text{hinreichend für } q & & \text{notwendig für } p \end{array}$$

Beweis: $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow r_3 \Rightarrow \;\ldots \Rightarrow r_n \Rightarrow q$. ($r_1, \ldots, r_n$ sind bereits bekannte wahre Aussagen oder Axiome)

Satz 1.0.6 (Regeln der Aussagenlogik)**.** Seien p, q, r Aussagen. Dann sind folgende Aussagen wahr:

(i) $p \vee \neg p$ (Tertium non datur)
$p \Rightarrow p$
$\neg(p \wedge \neg p)$

(ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (Kommutativität)
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

(iii) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (Assoziativität)
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$

(iv) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (De Morgan)
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

(v) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (Definition der Implikation)

(vi) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (Definition der Äquivalenz)
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(vii) $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ (Transitivität)

2 Mengen

2.1 Eigenschaften von Mengen

Notation 2.1.1 (Konkrete Beschreibung von Mengen)**.** Eine Menge ist informell formuliert eine Ansammlung von Objekten. Wenn wir diese Objekte konkret angeben, schreiben wir $M = \{1, 2, 3\}$.
Eine andere Möglichkeit, eine Menge anzugeben ist über die Eigenschaften der Elemente. Wir schreiben: $M = \{x|\ H(x)\}$. Das bedeutet, dass ein Element x genau dann ein Element der Menge ist, wenn $H(x)$ gilt. Wir schreiben $x \in M \Leftrightarrow H(x)$.

Beispiel 2.1.2 (Mengendeklaration über Aussagenform)**.**

$$\begin{aligned} H(x) &\coloneqq (x^2 - 3x + 2 = 0) \\ \Rightarrow\ \{x|\ H(x)\} &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

Definition 2.1.3 (Eigenschaften von Mengen)**.** Allgemein gilt für Mengen:

1. 2 Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.
2. Die leere Menge ($\varnothing$) ist die einzige Menge, die keine Elemente enthält
3. Wenn für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ folgt, dann ist A eine Teilmenge von B. ($A \subseteq B$)
4. Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, dann nennen wir A eine echte Teilmenge von B. ($A \subsetneq B$)
5. A und B sind disjunkt, falls aus $x \in A$ folgt, dass $x \notin B$.

Bemerkung 2.1.4. Allgemein gilt für zwei Mengen A und B, dass $A \subseteq B \land B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.[1]

2.2 Operationen mit Mengen

Definition 2.2.1. Seien A, B Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cap B &\coloneqq \{x|\ x \in A \land x \in B\} \\ A \cup B &\coloneqq \{x|\ x \in A \lor x \in B\} \\ A \setminus B &\coloneqq \{x|\ x \in A \land x \notin B\} \end{aligned}$$

$$\text{Wenn } A \subseteq M : A^C = A^C_M \coloneqq M \setminus A$$

Allgemein gilt: A und B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

Visualisierung 2.2.2 (Darstellung von Mengen als Venn-Diagramm)**.** Die Operationen auf zwei Mengen A und B lassen sich mittels eines Venn-Diagramms veranschaulichen:

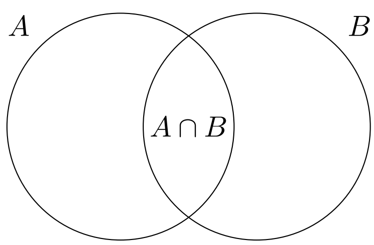

Abbildung 1: Schnittmenge zweier Mengen als Venn-Diagramm

[1]Diese Äquivalenz wird insbesondere in Beweisen häufig eingesetzt, indem durch das Zeigen, dass zwei Mengen gegenseitige Teilmenge sind, deren Gleichheit gezeigt wird.

Lemma 2.2.3. $A \cap B = B \cap A$

Beweis.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x|\ x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x|\ x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow\ (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

□

Definition 2.2.5 (Familie von Mengen)**.** Sei J eine Indexmenge mit $J \neq \varnothing$. Die Mengenfamilie ist gegeben durch Mengen A_j für jedes $j \in J$. Wir schreiben $\{A_j\}_{j \in J}$

Definition 2.2.6 (Schnitt und Vereinigung über mehrere Mengen)**.** Für eine Mengenfamilie $\{A_j\}\ j \in J$ gilt:

$$\bigcap_{j \in J} A_j \coloneqq \{x|\ \forall j \in J : x \in A_j\}$$

$$\bigcup_{j \in J} A_j \coloneqq \{x|\ \exists j \in J : x \in A_j\}$$

2.3 Quantoren

Definition 2.3.1 (Quantoren)**.** Wir definieren drei unterschiedliche Quantoren:

(i) $\forall$: „Für alle“

(ii) $\exists$: „Es existiert ein“

(iii) $\exists!$: „Es existiert genau ein“

Es seien A, B Mengen und $H(x, y)$ eine Aussageform mit $x \in A$ und $y \in B$. Dann gilt:

$$\forall x \in A\ \exists y \in B : H(x, y) \Leftrightarrow \text{Für alle } x \in A \text{ existiert ein } y \in B\text{, so dass } H(x, y) \text{ wahr ist}$$

Folgerung 2.3.2 (Negation von Quantoren)**.** Es seien A, B Mengen und $H(x, y)$ Aussageform mit $x \in A$ und $y \in B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg\left(\forall x \in A : H(x)\right) &\Leftrightarrow \exists x \in A : \neg H(x) \\ \neg\left(\exists x \in A : H(x)\right) &\Leftrightarrow \forall x \in A : \neg H(x) \\ \neg\left(\forall x \in A\ \exists y \in B : H(x, y)\right) &\Leftrightarrow \exists x \in A : \neg\left(\exists y \in B : H(x, y)\right) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A\ \forall y \in B : \neg H(x, y) \end{aligned}$$

Definition 2.3.3 (Potenzmenge)**.** Sei A eine Menge, so heißt $\mathcal{P}(A) := \{N |\ N \subseteq A\}$ Potenzmenge von A. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt Mengensystem über A.

Bemerkung 2.3.4 (Russels Paradoxon)**.** Russel definiert: $R := \{M |\ M \text{ ist Menge und } M \notin M\}$
Falls R eine Menge, dann kann man fragen, ob $R \in R$ oder nicht.
1. Fall: $R \notin R \Rightarrow R \in R$ (Widerspruch)
2. Fall: $R \in R \Rightarrow R \notin R$ (Widerspruch)
Lösung: R ist keine Menge, sondern eine Klasse

2.4 Kartesisches Produkt und Relationen

Definition 2.4.1 (Tupel)**.** Seien A und B Mengen. Für $x \in A$ und $y \in B$ ist $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$ das geordnete Paar oder Tupel bestehend aus a und b.

Zwei Tupel (a_1, b_1) und (a_2, b_2) mit $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ sind genau dann gleich, wenn ihr jeweils erstes und zweites Element gleich ist:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Definition 2.4.2 (Kartesisches Produkt)**.** So ist $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ wieder eine Menge genannt das Kartesische Produkt von A und B.

Beispiel 2.4.3.

$$\begin{aligned} M &:= \{1, 2, 3\} \\ N &:= \{3, 4\} \\ M \times N &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\} \end{aligned}$$

Definition 2.4.4 (Relation)**.** Seien A, B Mengen. Eine Relation $R = (A, B, G)$ besteht aus einer Menge A, einer Menge B und einer Menge $G \subseteq A \times B$.
G ist der Graph von R, auch geschrieben als G_R. Ist $(a, b) \in G$ so sagt man „a ist R-verwandt zu b“. Wir schreiben aRb (Infix-Schreibweise).
A ist die Definitionsmenge von R und B ist die Zielmenge von R.

Seien $R_1 = (A_1, B_1, G_1)$ und $R_2 = (A_2, B_2, G_2)$ Relationen. Dann gilt:

$$R_1 = R_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \wedge B_1 = B_2 \wedge G_1 = G_2$$

Wir können eine Umkehrrelation R^{-1} wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} R^{-1} &\coloneqq (B, A, G_{R^{-1}}) \\ G_{R^{-1}} &\coloneqq \{(b, a) \mid \ (a, b) \in G_R\} \end{aligned}$$

Beispiel 2.4.5 (Kleiner-Relation)**.** Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Wir definieren die Kleiner-Relation $R = \{A, A, G_<\}$.
Dann gilt: $a_1 < a_2 \Leftrightarrow \ (a_1, a_2) \in G_<$ und somit $G_< = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Definition 2.4.6 (Äquivalenzrelation)**.** Sei $R = (A, A, G)$ eine Relation. Dann gilt:

(i) R ist reflexiv: $\ \forall a \in A : aRa \quad (\forall a \in A : (a, a) \in G)$

(ii) R ist symmetrisch: $\ \forall a_1, a_2 \in A : a_1 R a_2 \Leftrightarrow a_2 R a_1$

(iii) R ist transitiv: $\ \forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3$

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf A.
Ist R eine Äquivalenzrelation und $a_1 R a_2$ so nennt man a_1 äquivalent zu a_2 bezüglich R.

Notation 2.4.7 (Äquivalenzklassen)**.** Sei R Äquivalenzrelation auf A. Dann gilt:

$$[a]_R \coloneqq \{b \in A \mid \ aRb\}$$

ist die Äquivalenzklasse von a. Wir schreiben auch $a \sim R_b$ für aRb oder $a = b$ modulo R.

Beobachtung 2.4.8. Allgemein gilt für Äquivalenzklassen damit:

(i) $\forall a \in A : [a]_R \neq \varnothing$

(ii) Reflexivität: $aRa \Rightarrow a \in [a]_R$

(iii) $a_1, a_2 \in [a]_R \Rightarrow a_1 \sim_R a, a_2 \sim_R a \overset{\text{sym.}}{\Rightarrow} a_1 \sim_R a, a \sim_R a_2 \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} a_1 \sim_R a_2$

Lemma 2.4.9. Sei R Äquivalenzrelation auf A. Für $a_1, a_2 \in A$ ist entweder $[a_1]_R = [a_2]_R$ oder $[a_1]_R \cap [a_2]_R = \varnothing$.

Beweis. Da $[a_1]_R$, $[a_2]_R \neq \varnothing$ reicht es zu zeigen, dass: $[a_1]_R \cap [a_2]_R \neq \varnothing \Rightarrow [a_1]_R = [a_2]_R$.

$$\begin{gathered} \text{Sei } b \in [a_1]_R \cap [a_2]_R \text{ und } c \in [a_1]_R \\ \Rightarrow b \sim_R a_1 \wedge c \sim_R a_1 \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} c \sim_R b \end{gathered}$$

Da $b \sim_R a_2$ muss nach der Transitivität gelten:

$$c \sim_R a_2 \Rightarrow [a_1]_R \subseteq [a_2]_R$$

Symmetrisch lässt sich argumentieren, dass $[a_2]_R \subseteq [a_1]_R$. $\square$

Korollar 2.4.10. Es sei R eine Äquivalenzrelation auf $A \neq \varnothing$. Dann sind $a_1, a_2 \in A$ entweder äquivalent oder sie gehören zu disjunkten Äquivalenzklassen.

Definition 2.4.11 (Zerlegung einer Menge)**.** Sei $A \neq \varnothing$ Menge. Dann ist eine Zerlegung $F = \{A_j\}_{j \in J}, A_j \subseteq A$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

1. $\forall j \in J : A_j \neq \varnothing$
2. $j_1, j_2 \in J, j_1 \neq j_2 : A_{j1} \cap A_{j2} = \varnothing$
3. $\bigcup_{j \in J} A_j = A$

Notation 2.4.12 (Quotient)**.** Es sei R Äquivalenzrelation auf A.

$$F := \{[a]_R |\ a \in A\}$$

ist eine Zerlegung von A (bezüglich der Äquivalenzrelation R). Wir schreiben $F = A/R$. A/R ist der „Quotient“ von A bezüglich R

Beispiel 2.4.13 (Restklassendefinition über Äquivalenzrelationen)**.** Es sei $A = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ und $p \in \mathbb{N}$. $m, n \in \mathbb{N}_0$ seien genau dann äquivalent, wenn $m = n + kp$ für ein $k \in \mathbb{Z}$:

$$R_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 |\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } m = n + kp\}$$

So definieren wir die Restklassen von $\mathbb{N}_0$ bezüglich Division mit p.

$$m \in [j]_R \Leftrightarrow m = j + kp \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

2.5 Funktionen

Bemerkung 2.5.1 (Moralische Definition einer Funktion)**.** Gegeben Mengen A, B, eine Relation f von A nach B. f ist eine Funktion, wenn es jedem Element in A genau ein Element in B zuordnet.

Notation 2.5.2 (Pfeilnotation)**.** Wir schreiben $f : A \to B, \quad a \mapsto f(a)$

Folgerung 2.5.3. Zu $a \in A$ gibt es $f(a) \in B \rightsquigarrow$ Tupel$(a, f(a)) \in A \times B \Rightarrow \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$

Definition 2.5.4 (Funktion)**.** Eine Relation $R = (A, B, G_R)$ heißt Funktion (oder Abbildung), wenn

$$\forall a \in A\ \exists! b \in B : (a, b) \in G_f.$$

Wir setzen dann $f(a) := b$

Beispiel 2.5.5 (Mögliche Funktionen)**.**

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto 3n^2 + 7 \\ g &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto 3n^2 + 7 \\ h &: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x^2 + 3x + 4 \\ j &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x^2 + 3x + 4 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5.6. f und g haben zwar die gleiche Funktionsvorschrift, sind aber dennoch unterschiedliche Funktionen, da diese wie Relationen auch über Definitionsmenge und Zielmenge definiert sind.

Notation 2.5.7 (Bild und Urbild)**.** Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gilt

$$\begin{array}{lll} M \subseteq A: & f(M) \coloneqq \{b \in B \mid \exists x \in M : b = f(x)\} & \text{(Bild von } M \text{ unter } f) \\ N \subseteq B: & f^{-1}(N) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \in N\} & \text{(Urbild von } N \text{ unter } f) \end{array}$$

Außerdem ist das gesamte Bild von f definiert als

$$Bild(f) \coloneqq f(A)$$

Definition 2.5.8 (Einschränkungen von Funktionen)**.** Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion und $M \subseteq A$. Dann ist die Einschränkung (oder Restriktion) von f auf M definiert als

$$f|_M\colon M \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

Definition 2.5.9 (Besondere Eigenschaften von Funktionen)**.** Es sei $f\colon A \to B$ eine Funktion.

(i) f ist injektiv, falls $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

(ii) f ist surjektiv, falls $Bild(f) = B$

(iii) f ist bijektiv, falls es injektiv und surjektiv ist

2.6 Geordnete Mengen

Definition 2.6.1 (Ordnungsrelation und teilweise geordnete Menge)**.** Es sei A eine Menge und R eine Relation auf A. R heißt Ordnungsrelation (geschrieben „$\prec$“), falls

(i) $\forall a \in A : a \prec a$ (Reflexivität)

(ii) $\forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_3 \Rightarrow a_1 \prec a_3$ (Transitivität)

(iii) $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \prec a_2 \wedge a_2 \prec a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$ (Antisymmetrie)

$(A, \prec)$ heißt **teilweise** geordnete Menge. Nicht alle Paare a_1, a_2 müssen vergleichbar sein.

Notation 2.6.2. Wir schreiben $a_1 \prec a_2$ als $a_1 R a_2$ oder $(a_1, a_2) \in G_R$.

Definition 2.6.3 (Kette)**.** $T \subseteq A$ heißt Kette (oder geordnete Menge), falls

$$a_1, a_2 \in T \Rightarrow a_1 \prec a_2 \vee a_2 \prec a_1$$

Beispiel 2.6.4 (Ordnungsrelation)**.** Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(A)$:

$$M, N \subseteq A \quad M \prec N, \text{ falls } M \subseteq N$$

Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$:

$$(\mathbb{N}, \prec) : n \prec m, \text{ falls } n \text{ teilt } m$$

2 und 3 sind dabei nicht vergleichbar, aber 2 und 4 sind vergleichbar.

3 Die Axiome der Reellen Zahlen

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, genannt Reelle Zahlen, die 3 Gruppen von Axiomen erfüllt:

1. Algebraische Axiome
2. Anordnungsaxiome
3. Das Vollständigkeitsaxiom

3.1 Algebraische Axiome

In $\mathbb{R}$ gibt es 2 Operationen:

1. Addition „+“
2. Multiplikation „·“

Folgerung 3.1.1. $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Definition 3.1.2 (Eigenschaften eines Körpers)**.**

(I.1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *Assoziativität der Addition*

(I.2) $a + b = b + a$ *Kommutativität der Addition*

(I.3) Es gibt genau eine Zahl genannt Null, geschrieben 0, mit $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ *Existenz eines neutralen Elements der Addition*

(I.4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! b \in \mathbb{R} : a + b = 0$, geschrieben $b = -a$ *Existenz eines inversen Elements der Addition*

(I.5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *Assoziativität der Multiplikation*

(I.6) $a \cdot b = b \cdot a$ *Kommutativität der Multiplikation*

(I.7) $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gibt es ein eindeutiges $b \neq 0$ mit $a \cdot b = 1$. Wir schreiben $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$ *Existenz eines inversen Elements der Multiplikation*

(I.8) Es gibt genau eine Zahl Eins, geschrieben 1, die von 0 verschieden ist, mit $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ *Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation*

(I.9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *Distributivität*

Jede Menge $\mathbb{K}$, welche (I.1) bis (I.9) erfüllt, heißt **Körper**.

Bemerkung 3.1.3. Dass die Eindeutigkeit von 0 und 1 durch die Axiome gefordert wird, ist nicht unbedingt erforderlich.[2]

Bemerkung 3.1.4. Das inverse Elemente bezüglich Addition und Multiplikation ist eindeutig.

Beweis. Annahme: $a + b = 0$ und $a + b' = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b + 0 = b + \big(a + b'\big) = b' + (a + b) = b' + 0 \\ &\Rightarrow b = b' \end{aligned}$$

□

[2]Seien $0, 0'$ neutrale Elemente bezüglich der Addition. $\Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$

Notation 3.1.5.

$$a - b := a + (-b) \qquad \text{(Differenz)}$$

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \qquad \text{(Quotient)}$$

Satz 3.1.6 (Abgeleitete Regeln)**.** Es gilt
(I.10)

$$-(-a) = a \qquad (1)$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b) \qquad (2)$$

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a \qquad (3)$$

$$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1} \qquad (4)$$

$$a \cdot 0 = 0 \qquad (5)$$

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \qquad (6)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \qquad (7)$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \qquad (8)$$

(I.11) Ist $a \cdot b = 0$ so ist mindestens eine der Zahlen a oder b gleich Null.

Beweis zu (I.10.5). Zu zeigen: $a \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0 \\ \Rightarrow\ (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) &= a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \\ \Rightarrow a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot 0 + 0 &= 0 \\ \Rightarrow a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$ □

Beweis zu (I.11). Sei $a \cdot b = 0$.
Ist $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} = 0 = 0$
Ist $b \neq 0$, so gilt analog, dass $a = 0$. □

Übung 3.1.7. Beweisen Sie die verbleibenden Regeln aus (I.10).

Satz 3.1.8 (Regeln des Bruchrechnens)**.**
(I.12) Es gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \qquad b, d \neq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad b, d \neq 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad b, c, d \neq 0 \qquad (3)$$

Übung 3.1.9. Beweisen Sie Satz 3.1.8.

3.2 Die Anordnungsaxiome

Allgemein gilt: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a = b \vee a \neq b$.
Ist $a \neq b$, besteht eine Anordnung „$<$“, die verlangt, dass genau eine der Relationen $a < b$ oder $b < a$ gilt. Das heißt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen $a < b, b < a, a = b$
Diese Anordnung genügt folgenden Axiomen:

Axiom 3.2.1 (Anordnungsaxiome)**.**

(II.1) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

(II.2) $a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$

(II.3) $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

Notation 3.2.2.

- $a < b$: a ist (echt) kleiner als b
- $b > a$: b ist größer als a
- $a \leq b$: $a = b$ oder $a < b$
- $a \in \mathbb{R}$ ist positiv, wenn $a > 0$; negativ, wenn $a < 0$; nicht-negativ, wenn $a \geq 0$; nicht-positiv, wenn $a \leq 0$

Beispiel 3.2.3. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Beweis.

$$\begin{aligned} &a < b \\ &\Rightarrow 0 = a + (-a) < b + (-a) = b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &b - a > 0 \\ &\Rightarrow a < a + (b - a) = b \end{aligned}$$

□

Satz 3.2.4 (Aus den Anordnungsaxiomen abgeleitete Regeln)**.**

(II.4) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

(II.5) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ und $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

(II.6) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$

(II.7) $a < b \wedge c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

(II.8) $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$ und $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

(II.9) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad$ (Insbesondere $1 > 0$)

(II.10) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(II.11) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

(II.12) $a^2 < b^2 \wedge a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a < b$

Beweis.

(II.4) Sei $a < b \Rightarrow 0 = a + (-a) \overset{\text{(II.2)}}{<} b + (-a) = b - a$.
Ist $b - a > 0 \overset{\text{(II.2)}}{\Rightarrow} a < a + (b - a) = b$

(II.5) Setze $b := 0$ in (II.4) $\Rightarrow b - a = -a > 0$.
2ter Teil: Ersetze a durch $-a$ in (II.5). $(a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Leftrightarrow -(-a) > 0 \Leftrightarrow a > 0)$

(II.6) (II.6) folgt aus (II.5), da $a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow (-a) - (-b) > 0 \Leftrightarrow -b < -a$

(II.7) Sei $a < b \wedge c < d \overset{\text{(II.2)}}{\Rightarrow} a + c < b + c \wedge b + c < b + d \overset{\text{(II.1)}}{\Rightarrow} a + c < b + d$

(II.8) $a, b > 0 \overset{\text{(II.3)}}{\Rightarrow} ab > 0 \cdot b = 0$ und $a, b < 0 \overset{\text{(II.5)}}{\Rightarrow} -a, -b > 0 \Rightarrow (-a)(-b) > 0 \Rightarrow ab > 0$.
Umkehrung: Sei $ab > 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$. Wäre $a > 0 \wedge b < 0 \overset{\text{(II.5)}}{\Rightarrow} -b > 0$. Wie gerade gezeigt folgt $a(-b) > 0 \Rightarrow -ab > 0 \overset{\text{(II.5)}}{\Rightarrow} ab < 0$ (Widerspruch zur Annahme).
Genauso zeigt man, dass die Annahme $a < 0 \wedge b > 0$ falsch ist.
(Zweite Behauptung lässt sich analog zeigen).

(II.9) $a \neq 0 \Leftrightarrow a > 0 \vee a < 0 \overset{\text{(II.8)}}{\Rightarrow} a^2 = a \cdot a > 0$. Ferner ist $1 \neq 0 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 1 > 0$

(II.10) Sei $c < 0 \Rightarrow -c > 0$ und aus $a < b$ folgt $(-c) \cdot a < (-c) \cdot b \Rightarrow -c \cdot a < -c \cdot b \Rightarrow c \cdot b < c \cdot a$

(II.11) $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$ (falls $a \neq 0$) $\overset{\text{(II.8)}}{\Rightarrow} a^{-1} > 0$ sofern $a > 0$ ist und aus $a^{-1} > 0$ folgt $a > 0$

(II.12) Sei $a^2 < b^2, a > 0, b > 0$. Angenommen $a < b$ ist falsch, d.h. $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq a \cdot a \geq a \cdot b \geq b \cdot b = b^2 \Rightarrow a^2 \geq b^2$ (Widerspruch)

$\square$

3.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Axiom 3.3.1 (Vollständigkeitsaxiom)**.** Jede nicht-leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, welche nach oben beschränkt ist, besitzt eine kleinste obere Schranke, genannt das Supremum von M.

Notation 3.3.2 (Supremum)**.** Das Supremum einer Menge M schreiben wir als $\sup M$

Definition 3.3.3 (Beschränktheit von Mengen)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \varnothing$.

(i) M heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall x \in M : x \leq k$. Jede solche Zahl k heißt obere Schranke von M.

(ii) M heißt **nach unten beschränkt**, falls ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall x \in M : x \geq k$. Jede solche Zahl k heißt untere Schranke von M.

(iii) M heißt beschränkt, falls ein $k \geq 0$ existiert mit $-k \leq x \leq k \quad \forall x \in M$

Definition 3.3.4 (Kleinste obere und größte untere Schranke)**.** Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt kleinste obere (größte untere) Schranke, falls

1. es eine obere (untere) Schranke ist und
2. es keine kleinere obere (größere untere) Schranke für M gibt

Folgerung 3.3.5. Allgemein gilt

$$x \leq k \Leftrightarrow -k \leq -x$$

das heißt für eine Menge $M \neq \varnothing$ gilt

$$\begin{aligned} &k \text{ ist eine obere Schranke für } M \\ \Leftrightarrow\ &-k \text{ ist eine untere Schranke für } -M := \{-x|\ x \in M\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &k \text{ ist kleinste obere Schranke für M} \\ \Leftrightarrow\ &-k \text{ ist die größte untere Schranke für } -M \end{aligned}$$

Das heißt das Anordnungsaxiom ist äquivalent zum *Anordnungsaxiom*$^{-1}$ (Jede nicht-leere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, welche nach unten beschränkt ist, besitzt eine größte untere Schranke, genannt das Infimum von M. Wir schreiben $\inf M$).

Beispiel 3.3.6.

$$\begin{aligned} M = [0,1] &= \{x|\ 0 \leq x \leq 1\} \\ \sup M = 1 &\qquad \inf M = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = (0,1) &= \{x|\ 0 < x < 1\} \\ \sup A = 1 &\qquad \inf A = 0 \end{aligned}$$

Notation 3.3.7. Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \varnothing$
Wir schreiben $\sup M < \infty$, falls M nach oben beschränkt ist, andernfalls setzen wir

$$\sup M := \infty$$

Falls M nach unten beschränkt ist, schreiben wir $\inf M > -\infty$, andernfalls setzen wir

$$\inf M := -\infty$$

Satz 3.3.8. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

(1) Ist $\sup M < \infty$, so folgt $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M$ mit $\sup(M) - \varepsilon < x$

(2) Ist $\sup M = \infty$, so gilt $\forall k \geq 0\ \exists x \in M$ mit $x > k$

Beweis.

1. Wir setzen $a := \sup M$. Sei $a < \infty$. Wäre (1) falsch, so folgt $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in M : a - \varepsilon > x$. Das heißt $a - \varepsilon$ ist eine obere Schranke für M. Aber $a - \varepsilon < a$; (Widerspruch)

2. Ist $a = \infty$, so hat M keine obere Schranke. Nach Def. folgt für jedes $k \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in M : x > k$ □

Satz 3.3.9. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

1. Ist $\inf M > -\infty$, so folgt $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M$ mit $x < \inf(M) + \varepsilon$

2. Ist $\inf M = -\infty$, so gilt $\forall k \geq 0\ \exists x \in M$ mit $x < -k$

Beweis. Wende Satz 3.3.8 auf $-M := \{-x \mid x \in M\}$ an und beachte $\sup(-M) = \inf(M)$ □

Definition 3.3.10 (Maximum und Minimum)**.** Es sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \varnothing$
$m \in M$ heißt größtes Element von M (Maximum), geschrieben $\max M$, falls $x \leq m\ \forall x \in M$.
Entsprechend: $m \in M$ heißt kleinstes Element von M (Minimum), geschrieben $\min M$, falls $x \geq m\ \forall x \in M$

Beispiel 3.3.11. Sei M beschränkt, $M \neq \varnothing$

$$\begin{aligned} M &:= \{x \mid 0 \leq x < 1\} \\ \sup M &= 1 \\ \inf M &= \min M = 0 \\ M &\text{ hat kein Maximum} \end{aligned}$$

4 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und vollständige Induktion

Frage: Was sind die natürlichen Zahlen? (zum Beispiel 1, $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1$, usw.)

4.1 Induktive Mengen

Definition 4.1.1 (Induktive Menge)**.** Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

1. $1 \in A$ und
2. Ist $x \in A$ so ist auch $x+1 \in A$

Beispiel 4.1.2.

$$\begin{aligned}[0,\infty) &= \{x \mid x \geq 0\} \text{ und} \\ [1,\infty) &= \{x \mid x \geq 1\} \text{ sind induktiv}\end{aligned}$$

Beobachtung 4.1.3 (Schnittmengen von induktiven Mengen)**.** Ist $J \neq \varnothing$ Indexmenge und A_j induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ für jedes $j \in J$. Dann folgt daraus: $A := \bigcap_{j\in J} A_j$ ist induktiv. Anders formuliert: Beliebige Schnittmengen von induktiven Mengen sind induktiv.

Beweis.

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall j \in J : x \in A_j \\ &\Rightarrow x+1 \in A_j \quad \forall j \in J \\ &\Rightarrow x+1 \in \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = A \end{aligned}$$ □

Definition 4.1.4 (Definition von $\mathbb{N}$)**.** Sei $\bar{f} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist induktiv}\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \text{kleinste induktive Teilmenge von } \mathbb{R} \\ &:= \bigcap_{A\in\bar{f}} A\end{aligned}$$

d. h. $\mathbb{N} \subseteq A$, falls A induktiv ist.

Satz 4.1.5 (Induktionsprinzip)**.** Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ induktiv $\Rightarrow M = \mathbb{N}$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und aus der Definition von $\mathbb{N}$ als Schnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{N} \subseteq M \Rightarrow \mathbb{N} = M$. □

4.2 Vollständige Induktion

Satz 4.2.1 (Induktionsbeweis)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage B_n gegeben derart, dass folgendes gilt:

1. B_1 ist wahr.
2. Aus der Annahme, dass B_n $(n \in \mathbb{N})$ wahr ist folgt, dass B_{n+1} wahr ist.

Dann ist B_n wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Definiere: $M \coloneqq \{n \in \mathbb{N} |\ B_n \text{ ist wahr}\} \subseteq \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $M = \mathbb{N}$. Also reicht nach Satz 4.1.5 zu zeigen, dass M induktiv ist.

1. $1 \in \mathbb{N}$, da B_1 wahr ist.

2. Ist $n \in M$ dann ist B_n wahr $\Rightarrow$ $B_n + 1$ ist wahr $\Rightarrow$ $n + 1 \in M \Rightarrow$ M ist induktiv $\Rightarrow$ $M = \mathbb{N}$ □

Bemerkung 4.2.2 (Starke Induktion)**.** Die starke Induktion ist eine Variante der vollständigen Induktion. Sie ist definiert durch:

1. B_1 ist wahr.

2. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ ist wahr $\Rightarrow$ B_{n+1} ist wahr.

Beispiel 4.2.3. Zu zeigen ist: $B_n : n < 2^n$

Beweis.
I-Anfang B_1 ist wahr, da $1 < 2^1 = 2$
I-Schritt Induktionsannahme B_n ist wahr für ein $n = k$, d.h. $k < 2^k$. Und Schluß zu zeigen: $k + 1 < 2^{k+1} \Rightarrow 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k \geq k + 1$ □

Übung 4.2.4. Zeigen Sie, dass $2k \geq k + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 4.2.5 (Gaußsche Summenformel)**.** Zu zeigen: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. $B_n : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
I-Anfang $B_1 : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$
I-Schritt B_n ist wahr für ein $k \in \mathbb{N}$, d.h. $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \cdot \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} \end{aligned}$$

Also ist B_n wahr für $n = k+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $\forall n \in \mathbb{N}:$ B_n ist wahr, d.h. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ □

Satz 4.2.6 (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)**.**

1. $n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

2. $n + m \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

3. $n \cdot m \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt entweder $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$

5. $(n - m) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

Beweis (1.)
I-Anfang $n \geq 1$ gilt für $n = 1$
I-Schritt Nach Anfang: $n \geq 1$ ist wahr für ein $n = k$.
Da $k + 1 > k \Rightarrow k + 1 > k \geq 1 \Rightarrow k + 1 \geq 1$ □

Beweis (2.) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: $B_n : m + n \in \mathbb{N}$

I-Anfang $B_1 : m + 1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv ist.

I-Schritt Nach Anfang: B_n ist wahr für $n = k$, d.h. $(m+k) \in \mathbb{N}$. Somit für $k+1 : m+(k+1) = (m+k)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ B_n ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ □

Beweis (3.) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: $B_n : m \cdot n \in \mathbb{N}$

I-Anfang $B_1 : m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$

I-Schritt Nach Anfang: B_n ist wahr für $n = k$, d.h. $m \cdot (k+1) = mk + m \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 2. □

Beweis (4.) $B_n : n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$

I-Anfang $B_1 : 1 = 1$

I-Schritt Nehmen an, für ein $n = k$ ist G_k wahr. Also ist entweder (a) $k = 1$ oder (b) $(k-1) \in \mathbb{N}$.
Für $n = k+1$ gilt dann im Fall (a): $(k+1) - 1 = k \in \mathbb{N}$
Im Fall (b): $(k+1) - 1 = (k-1) + 1$ und es gilt $(k-1) \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $(k-1)+1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv ist. □

Beweis (5.) $B_n : n - m \in \mathbb{N}$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

I-Anfang B_1 leere Behauptung, da kein m existiert, mit $m < 1$ (nach (1.)).

I-Schritt B_n wahr für ein $n = k$. Das heißt $k - 1 \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}$ mit $m < k$.
Zu zeigen: $(k+1) - m \in \mathbb{N}\ \forall m < k+1$. Ist $m = 1 \Rightarrow m - 1 = 0$ und $(k+1) - m = k + 1 - m = k \in \mathbb{N}$.
Ist $m > 1 \overset{(4.)}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$. Da $m < k+1 \Rightarrow m-1 < k \Rightarrow (k+1) - m = k - (m-1) \in \mathbb{N}$ (nach Annahme). □

Korollar 4.2.7. Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 1$. Ferner gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es keine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n+1$ oder mit $n - 1 < m < n$.

Übung 4.2.8. Beweisen Sie dies.

Notation 4.2.9 (Zahlenmengen)**.**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}_0 &\coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\} \\
-\mathbb{N} &\coloneqq \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
\mathbb{Z} &\coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} && \text{(Menge der ganzen Zahlen)} \\
\mathbb{Q} &\coloneqq \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} && \text{(Menge der rationalen Zahlen)} \\
&\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} && \text{(Irrationale Zahlen)}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4.2.10. Sei für $n \in \mathbb{Z}$ B_n eine Aussage und $n_0 \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $(\forall n \geq n_0 : B_n) \Leftrightarrow$ (B_n ist wahr) $\wedge$ (Ist B_n wahr für $n \geq n_0$ so ist auch B_{n+1} wahr)

Satz 4.2.11. $n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ und $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Beweis. Folgt aus Satz 4.2.6 mit $-(-a) = a \quad a > 0 \Rightarrow -a < 0$ □

Satz 4.2.12 (Satz von Archimedes)**.** $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$. (Das heißt $\mathbb{N}$ ist eine nach oben unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$)

Beweis. Angenommen die Aussage ist falsch. Das heißt $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\overset{\text{(Vollständ.)}}{\Rightarrow} a := \sup \mathbb{N}$ existiert und $n < a \ \forall n \in \mathbb{N}$
Es gilt $a + 1 > a \Rightarrow a - 1 < a$, das heißt $a - 1$ ist keine obere Schranke für $\mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a - 1 < n \Rightarrow a < n + 1 \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu a ist obere Schranke für $\mathbb{N}$. ☐

Korollar 4.2.13. $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}\colon -n < x$

Beweis. Wende vorherigen Satz auf $-x$ an. $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\colon -x < n \Rightarrow x > -n$ ☐

Satz 4.2.14 (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)**.** Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \varnothing$. Es gilt $\inf \mathbb{N} = 1 \Rightarrow a = \inf M \geq 1 > -\infty$. Zu zeigen: $a \in M$.
Annahme: $a \notin \mathbb{N} \Rightarrow a < m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
Satz 3.3.9 besagt, dass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in M : m < a + \varepsilon$.
1) Wähle $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists m \in M : m < a + 1$.
2) Wähle $\varepsilon = a - m :\Rightarrow \exists m' \in M : m' < a + \varepsilon = m$. Das heißt $m', m \in M$ mit $a < m' < m < a + 1$
$\Rightarrow 0 < m - m' < 1 \overset{(5.)}{\Rightarrow} m - m' \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu Korollar 4.2.7 ☐

5 Summe, Produkt, Wurzeln

5.1 Summenzeichen, Produktzeichen

Definition 5.1.1. Seien $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, $m \leq k \leq n$, sei $a_k \in \mathbb{R}$.
Dann setzt man:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$, $n < m$ setzt man $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

Definition 5.1.2 (Fakultät)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

und wir definieren

$$0! = 1$$

Alternativ lässt sich rekursiv definieren:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

Satz 5.1.3. Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist gleich $n!$.
Wenn wir beispielsweise die Menge $\{1, 2, 3\}$ betrachten. Mögliche Anordnungen: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$. Somit gibt es 6 Möglichkeiten, was 3! entspricht.

Induktionsbeweis.
I-Anfang $n = 1$, es gibt eine Anordnung $\{A_1\}$ und es gilt $1! = 1$

I-Schritt Die Gesamtzahl aller Anordnungen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ ist gleich

$$\begin{aligned} &(n+1) \cdot [\text{Gesamtzahl von Anordnungen von } \{A_1, \ldots, A_n\}] \\ \overset{\text{I-Ann}}{=} &(n+1) \cdot n! = (n+1)! \end{aligned}$$

□

5.2 Binomischer Lehrsatz

Definition 5.2.1 (Binomialkoeffizient)**.** Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ setzt man:

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (n \text{ über } k)$$

Bemerkung 5.2.2 (Spezielle Binomialkoeffizienten)**.** $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

Satz 5.2.3. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ist gleich $\binom{n}{k}$.

Hilfsatz 5.2.4. $\forall k, n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot [n-k+k]}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \overset{\text{Def.}}{=} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 5.2.3 (Induktion nach n).

I-Anfang $n = 1$, $\{A_1\}$. Wenn $k = 0$, dann gibt es eine Möglichkeit und es gilt $\binom{1}{0} = 1$. Wenn $k = 1$, gibt es auch eine Möglichkeit und es gilt $\binom{1}{1} = 1$.

I-Schritt $n \to n+1$
Die Behauptung sei für $M_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$ schon bewiesen. Wir betrachten $M_n + 1 = \{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$. Für $k = 0$ und $k = n + 1$ ist die Behauptung offensichtlich.
Für $1 \leq k \leq n$ gehört jede k-elementige Teilmenge von M_{n+1} zu genau einer der folgenden Klassen:

1. T_0 besteht aus k-elementigen Teilmengen, die A_{n+1} nicht enthalten.
2. T_1 besteht aus denjenigen Teilmengen, die A_{n+1} enthalten.

In T_0 gibt es nach Induktionsannahme $\binom{n}{k}$ Elemente.
In T_1 gibt es $\binom{n}{k-1}$ Elemente[3].
Insgesamt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{5.2.4}{=} \binom{n+1}{k}$$

□

Satz 5.2.5 (Binomischer Lehrsatz)**.** Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Beispiel 5.2.6 (Folgerung der binomischen Formel aus dem binomischen Lehrsatz)**.** Es sei $n = 2$. Es gilt $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$. Daraus folgt:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Beweis von Satz 5.2.5.
IA: $n = 0$

$$(x+y)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k} = \binom{0}{k} \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

[3]Wir wissen, dass A_{n+1} bereits ein Element der Teilmenge ist. Damit müssen wir noch $k-1$ aus n Elemente auswählen. Die Formel dafür folgt aus der Induktionsannahme

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \\
(x+y)^n \cdot x &\overset{\text{I-An}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \cdot x \\
&= 1 \cdot x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k \\
(x+y)^n \cdot y &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^{k+1} && (l := k+1) \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \cdot x^{n+1-l} \cdot y^l \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k+1} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k + y^{n+1} \\
&\overset{5.2.4}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{n+1-k} \cdot y^k
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 5.2.7. Sei $x > 0$, dann gilt $(1+x)^n = 1 + \underbrace{\binom{n}{1} x}_{n \cdot x} + \underbrace{\sum \ldots}_{>0} > 1 + n \cdot x$

5.3 Bernoullische Ungleichung

Satz 5.3.1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Dann gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion:

I-Anfang $\quad n = 1 \Rightarrow 1 + a = 1 + a$

I-Schritt $\quad n \to n+1$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \overset{\text{I-Ann}}{\geq} (1+na) \cdot (1+a) = 1 + na + a + na^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a$$

□

5.4 Wurzeln

Satz 5.4.1. Für jedes $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, gibt es genau ein $x > 0$, so dass $x^2 = c$ ist.

Beweis. Eindeutigkeit
$x_1 > 0$, $x_2 > 0$: $(x_1)^2 = (x_2)^2 = c \Rightarrow 0 = ((x_1)^2 - (x_2)^2) = (x_1 - x_2) \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} \Rightarrow x_1 = x_2$

Existenz
Wir definieren $M := \left\{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0, z^2 \leq c\right\}$. Dann gilt $0 \in M \Rightarrow M \neq \varnothing$

M ist beschränkt, weil $(1+c)^2 = 1 + 2c + c^2 > c, \quad z \in M \Rightarrow z < 1 + c$
Somit $\exists \sup M$ und wir definieren $x := \sup M$. Zu zeigen: $x^2 = c$

Wir nehmen an, dass $x^2 < c$ und setzen $\varepsilon := \min\left\{1, \frac{c-x^2}{2x+1}\right\} \Rightarrow 0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow \varepsilon^2 < \varepsilon$
$(x+\varepsilon)^2 = x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < x^2 + \varepsilon\,(2x+1) \leq x^2 + c - x^2 = c$
$\Rightarrow x + \varepsilon \in M$ (Widerspruch) $\Rightarrow x^2 \geq c$

Wir nehmen an, dass $x^2 > c$, $\varepsilon := \min\left\{\frac{x^2-c}{2x}, \frac{x}{2}\right\}$, $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon \geq x - \frac{x}{2} > 0$
$(x-\varepsilon)^2 = x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > x^2 - 2x\varepsilon \geq x^2 - x^2 + c \Rightarrow (x-\varepsilon)^2 > c \Rightarrow x \neq \sup M$ (Widerspruch)

$\Rightarrow x^2 = c$ □

Bemerkung 5.4.2. $x = \sqrt{c}$, $x = c^{\frac{1}{2}}$, x ist die Quadratwurzel von c

Satz 5.4.3. Für $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ gibt es genau ein $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, so dass $x^n = c$.

Beweis. Eindeutigkeit
$x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $(x_1)^n - (x_2)^n = c$, $0 = ((x_1)^n - (x_2)^n) = (x_1 - x_2) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x_1)^{n-k+1} \cdot (x_2)^k\right)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ □

Die Existenz ist Aufgabe auf dem Übungsblatt.

Definition 5.4.4 (Spezielle Potenzen)**.** $m, n \in \mathbb{N} \quad x^{\frac{m}{n}} := \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n$, $x^0 = 1$, $0^m = 0$ mit $m \neq 0$, $0^0 = 1$

5.5 Absolutbetrag

Definition 5.5.1 (Betrag)**.** $|a| := \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

Satz 5.5.2 (Eigenschaften des Betrags)**.**

(i) $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(ii) $|\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$, $\forall \lambda, a \in \mathbb{R}$

(iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis von (iii).

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 \\ &\Rightarrow\ |a+b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$ □

Definition 5.5.3 (Geometrische Betrachtung des Betrags)**.** Man nennt $|a-b|$ den Abstand zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengerade.

Satz 5.5.4 (Eigenschaften von Differenzen im Betrag)**.**

(i) $|a-b| \geq 0$, $|a-b| = 0 \Leftrightarrow a = b$

(ii) $|a-b| = |b-a|$

(iii) $|a-b| \leq |a-c| + |b-c| \; \forall c \in \mathbb{R}$

Beweis von (iii).

$$|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b| = |a-c| + |b-c| \qquad \square$$

Satz 5.5.5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis.

$$\begin{aligned} |a| = |a-b+b| &\leq |a-b| + |b| \\ \Rightarrow \; |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| - |a| &\leq |b-a| = |a-b| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; |a-b| \geq ||a| - |b|| \qquad \square$$

Folgerung 5.5.6.

(i) $|a-b| \geq |a| - |b|$

(ii) $|a+b| = |a-(-b)| \geq |a| - |-b|$

Bemerkung 5.5.7. Durch Induktion leitet man her, dass:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad a_i \in \mathbb{R}$$

6 Folgen und Grenzwerte

6.1 Konvergenz

Definition 6.1.1 (Reelle Folge)**.** Eine reelle Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Alternative Notation: $(a_n)\, n \in \mathbb{N}$, $(a_1, a_2, \dots)$

Beispiel 6.1.2. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1 \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

Definition 6.1.3 (Konvergenzkriterium)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0$$

a heißt Grenzwert von $(a_n)\, n \in \mathbb{N}$ und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Beispiel 6.1.4 (Nachweis von Konvergenz)**.** Es sei

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}$$

wir definieren ε und n_0

$$\varepsilon > 0, \quad n_0 = \frac{1}{2\varepsilon}$$

und wenden das Konvergenzkriterium an

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{2n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| < \frac{|(-1)^n|}{\left|\frac{2}{2\varepsilon}\right|} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Bemerkung 6.1.5 („Fast alle Elemente“)**.** Wir sagen, dass fast alle Element der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Eigenschaft (E) haben, wenn es höchstens eine endliche Anzahl von a_n existiert, die die Eigenschaft (E) nicht erfüllen.

Definition 6.1.6 (Alternativ formuliertes Konvergenzkriterium)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann heißt diese Folge konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ und fast alle a_n gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

Definition 6.1.7 (Nullfolge)**.** Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

Definition 6.1.8 (Divergenz)**.** Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

Definition 6.1.9 (ε-Umgebung)**.** Für $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ versteht man unter der ε-Umgebung von a das Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

6.2 Geometrische Bedeutung der Konvergenz

Visualisierung 6.2.1.

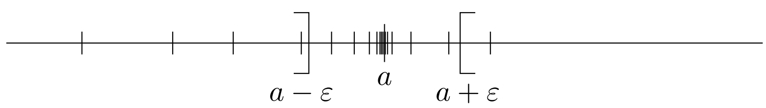

Abbildung 2: Geometrische Darstellung einer konvergenten Folge und ihrer ε-Umgebung

6.3 Eigenschaften von Folgen und Konvergenzen

Definition 6.3.1 (Beschränktheit von Folgen)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ heißt nach oben beschränkt, falls es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq k \qquad (k \text{ ist obere Schranke für } (a_n)_n)$$

Beschränktheit nach unten wird analog definiert.
$(a_n)_n$ heißt beschränkt, falls ein $k \geq 0$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon -k \leq a_n \leq k \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leq k$$

Satz 6.3.2. Jede konvergente Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt.

Beweis. Sei a der Grenzwert von $(a_n)_n$ $\quad(\lim_{n\to\infty} a_n = a)$.
Das heißt für $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\colon |a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N$
$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<1} + |a| < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$
Setze $k := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|) \geq 0$
$\Rightarrow |a_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ □

Satz 6.3.3 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_n$ ist eindeutig.

Beweis. Annahme: $a_n \to a$ und $a_n \to b$ mit $a \neq b$. Dann gilt o.B.d.A., dass $a < b$.
Wir setzen $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$.

$$\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$
$$\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$
$$\Rightarrow \forall n \geq N\colon a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} = b - \varepsilon$$
$$\forall n \geq N : a_n > b - \varepsilon = \frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow a_n < \frac{b+a}{2} < a_n \quad \forall n \geq N \qquad \text{(Widerspruch)}$$ □

Satz 6.3.4 (Eigenschaften von konvergenten Folgen)**.** Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ konvergente reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

(a) $x_n + y_n \to a + b \quad (\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n)$.

(b) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b \quad (\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n)$.

(c) $\lambda \cdot y_n \to \lambda \cdot b \quad (\lim(\lambda \cdot y_n) = \lambda \cdot \lim y_n)$. $(\lambda \in \mathbb{R})$

(d) Ist $b \neq 0$, so ist $y_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{x_n}{y_n}$ ist für fast alle n definiert und $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$.

(e) $|x_n| \to |a| \quad (\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n|)$

(f) Ist $x_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} x_n \leq b = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Beweis.

(a) Nach Satz 5.5.4 gilt

$$|x_n + y_n - (a + b)| = |x_n - a + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Aufgrund der Konvergenz der Folgen gilt

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : |y_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

Wir wählen $N = \max(N_1, N_2)$

$$\Rightarrow |(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(b) Umformen, um eine passende Ungleichung zu erreichen

$$\begin{aligned} x_n \cdot y_n - ab &= (x_n - a + a) \cdot y_n - ab \\ &= (x_n - a) \cdot y_n + a \cdot y_n - ab \\ &= (x_n - a) \cdot y_n + a \cdot (y_n - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_n \cdot y_n - ab| &= |(x_n - a) \cdot y_n + a \cdot (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b| \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.2 ist y_n beschränkt

$$\exists k \geq 0\colon\ |y_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach der Konvergenz der Folgen gilt außerdem

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1, N_2\colon\ |x_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2(k+1)} \quad \forall n \geq N_1 \\ |y_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max(N_1, N_2) : |x_n \cdot y_n - ab| \leq \frac{\varepsilon}{2(k+1)} \cdot k + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \leq \varepsilon$$

(c) Setze $y_n = \lambda \to \lambda$ und verwende (b)

(d) Wir wählen $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon\ |y_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N\colon \qquad |y_n| &= |y_n - b + b| = |b + (y_n - b)| \\ &\geq |b| - |y_r - b| > |b| - \frac{|b|}{2} + \frac{|b|}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_n \neq 0$ für fast alle n und somit $\frac{x_n}{y_n}$ wohldefiniert für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten den Spezialfall $x_n = 1$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{y_n \cdot b}\right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n| \cdot |b|}.$$

Wir wissen schon, dass $\exists N_1\colon\ |y_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq N_1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \forall n \geq N_1 : \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| &\leq \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} \leq \frac{2 \cdot |y_n - b|}{|b| \cdot |b|} \\
\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\colon\ |y_n - b| &< \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon \\
\Rightarrow \forall n \geq \max(N_1, N_2) : \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| &< \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir (b) an und dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = \lim x_n \cdot \lim \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

(e) Wir zeigen mit der Umkehrung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
||x_n| - |a|| &\overset{\text{Dreiecks.}}{\leq} |x_n - a| \\
&\Rightarrow |x_n| \to |a|
\end{aligned}$$

(f) Angenommen $a > b$. Wir wählen $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \exists N_1 : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \\
\Rightarrow \exists N_2 : |y_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2
\end{aligned}$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ folgt

$$\begin{aligned}
x_n > a - \varepsilon = a + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon > y_n \\
\Rightarrow x_n > y_n
\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.5 (Sandwich Satz)**.** Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ Folgen mit $\lim a_n = a$, $\lim (b_n - a_n) = 0$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann folgt, dass $(c_n)_n$ und $(b_n)_n$ jeweils gegen a konvergieren.

Beweis.
1. Schritt: $\lim b_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$, $\exists N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$
$0 \leq b_n - a_n$ ist Nullfolge $\Rightarrow \exists N_2 : |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= |b_n - a_n + a_n - a| \\ &\leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq \max(N_1, N_2) \end{aligned}$$

2. Schritt: $\lim c_n = a$.

$$\begin{aligned} \lim a_n &= a = \lim b_n \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1, N_2 \colon & \; |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \\ & \text{und } |b_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \\ & a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \\ & a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

Auch gilt $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq N_3$ und wir definieren $N \coloneqq \max(N_1, N_2, N_3)$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Das heißt $|c_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Das heißt $\lim c_n = a$ □

6.4 Monotone Konvergenz

Wir sind bisher immer davon ausgegangen, dass wir den Grenzwert einer Folge bereits kennen. Das folgende Unterkapitel beschäftigt sich damit, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, wenn deren Grenzwert nicht bekannt ist.

Definition 6.4.1 (Monotonie)**.** Eine reelle Folge $(a_n)_n$ heißt

(i) monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wir nennen $(a_n)_n$ (streng) monoton, falls sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Satz 6.4.2 (Monotone Konvergenz)**.** Eine monoton wachsende Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_n$ nach oben beschränkt ist.
Und eine monoton fallende Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Lemma 6.4.3 (Hilfaussage für monotone Konvergenz)**.** Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge besitzt eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke.

Beweis. Sei $(a_n)_n$ nach oben beschränkt und $S \coloneqq \{c \in \mathbb{R} | \ a_n \leq c \ \forall n\} \neq \varnothing$[4].
Dann ist S nach unten beschränkt, da $a_1 \leq c \quad \forall c \in S$
$\Rightarrow a \coloneqq \inf S$ existiert

Behauptung: a ist obere Schranke für $(a_n)_n$, das heißt $a \in S$.

Angenommen $a \notin S$ (a ist keine obere Schranke)
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon a_{n_0} > a$.
Wir setzen $\varepsilon \coloneqq a_{n_0} - a > 0$. Und $\exists c \in S \colon c < a + \varepsilon = a + a_{n_0} - a = a_{n_0}$. Widerspruch zu $c \in S$.

Das heißt a ist obere Schranke für $(a_n)_n$. □

Beweis von Satz 6.4.2. Angenommen $(a_n)_n$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt.

$$\begin{aligned} &a \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \\ \Rightarrow\ &a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$ keine obere Schranke für $(a_n)_n$ mehr.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \colon a_N \geq a - \varepsilon$$

Sei $n \geq N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots \leq a_{N+k} = a_n \\ \Rightarrow\ &\forall n \geq N : a - \varepsilon < a_n \\ \Rightarrow\ &|a_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$
□

Alternativer Beweis. [5]
Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = f(a), f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$Bild(f) = f(\mathbb{N})$ nach oben beschränkt
$a \coloneqq \sup\left(f\left(\mathbb{N}\right)\right) \geq a_n \quad \forall n$ □

[4]Folgt aus der Beschränktheit
[5]Dieser Beweis bezieht sich laut Vorlesung auf Lemma 14, welches allerdings nicht existiert. Gemeint ist vermutlich Satz 14 (hier Satz 6.4.2) oder Lemma 15 (hier Lemma 6.4.3)

Beispiel 6.4.4.

1. Berechnen von $\sqrt{c}$ für $c > 0$.

$$\begin{aligned} x^2 = c \Leftrightarrow x &= \frac{c}{x} \qquad x > 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \end{aligned}$$

Folge x_n: Wählen $x_0 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right)$
Behauptung 1: $x_n \geq \sqrt{c} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Bew.:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c}{x_0}\right)$$

haben AGM[6]: $\forall a, b \geq 0$: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Setzen $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$, $\sqrt{ab} \leq \frac{ab}{2}$

$$\begin{aligned} (x_1)^2 \geq \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{c}{x_0}\right)^2 \geq x_0 \cdot \frac{c}{x_0} = c \\ x_1 \geq \sqrt{c} \end{aligned}$$

Falls

Behauptung 2: $(x_n)_n$ ist monoton fallend.
Beweis

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

haben für $n \geq 1$: $(x_n)^2 = \left(\frac{1}{2}(x_{n+1} + \frac{c}{x_{n+1}})\right)^2 \geq c$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_n \geq \frac{c}{x_n} \\ &\Rightarrow x_{n+1} \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(x_n + x_n\right) = x_n \end{aligned}$$

Nach dem Satz der monotonen Konvergenz ist $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ entspricht?? $\geq \sqrt{c}$
$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$

$$\begin{aligned} x = \lim x_n = \lim \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{c}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{c} \end{aligned}$$

[6] Arithmetisch-geometrisches Mittel

2. $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \geq N\colon \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$
$$\text{(geg. } \varepsilon > 0 \text{ nach } n \in \mathbb{N},\ N > \tfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \tfrac{1}{N}\text{)}$$

   Ähnlich funktioniert $x_n = \frac{1}{\sqrt{c}}$

3. $x_n \coloneqq \frac{1+2+3+\cdots+n}{2} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$
   Bew: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \Rightarrow x_n = \frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$

4. Sei $0 \leq q < 1$. $x_n \coloneqq q^n \to 0$
   Bew: Ist $q = 0 \Rightarrow x_n = 0^n = 0 \to 0$.
   Also sei $0 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1$
   $h \coloneqq \frac{1}{q} - 1 > 0 \quad \frac{1}{q} = 1 + h,\ q = \frac{1}{1+h}$
   $\Rightarrow x_n = q^n \leq \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)}^n$
   Nach Bernoulli: $(1 + h)^n \geq 1 + nh$
   $\Rightarrow q^n = \frac{1}{()}$

5. Sei $-1 < q < 1 \Rightarrow x_n \coloneqq q^n \to 0$. (Übung)

6. Sei $a > 0$, $x_n \coloneqq a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \to 1$
   Bew: 1. Fall $a = 1 \Rightarrow x_n = 1$
   2. Fall $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{a}{n}} = 1$
   $h_m = a^{\frac{1}{m}} - 1 > 0$ und $a + h_m = a^{\frac{a}{m}}$
   $q = (a + b_n)^n \geq 1 + ab_1 \geq a_{b1}$
   $\Rightarrow h_n < \frac{a}{n}$
   $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| = h_n < \frac{a}{n} \Rightarrow \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$
   3. Fall $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{a} > 1 \\ \Rightarrow \lim b^{\frac{1}{n}} &= 1 \\ &= \lim \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \qquad \Rightarrow \lim a^{\frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

7. $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$

$$n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n^n} > 1 \qquad h_n \coloneqq n^{\frac{1}{n}} - 1$$
$$\Rightarrow n = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n > n \cdot h_n \Rightarrow h_n \leq \frac{h}{n} = 1$$

Aber: Binomialsatz

$$(1+h_n)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (h_n)^k}_{\geq 0} \geq \binom{n}{0} \cdot (h_n)^0 \binom{n}{1} \cdot (h_n)^1 + \binom{n}{2} \cdot (h_n)^2$$
$$= 1 + n \cdot h_n + \frac{n \cdot (n+1)}{2} (h_n)^2$$
$$> \frac{n(n+1)}{2} \cdot h_n^2$$
$$\Rightarrow h_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$
$$0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$$
$$\Rightarrow \lim h_n = 0 \Leftrightarrow \lim n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Definition 6.4.5. Eine reelle Folge $(x_n)_n$ strebt gegen unendlich, falls $\forall k \geq 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon x_n \geq k \quad \forall n > N$
($\Leftrightarrow \forall k \geq 0$ ist $x_n < k$ für endlich viele $n \in \mathbb{N}$).
$(x_n)_n$ strebt gegen $-\infty$, falls $(-x_n)_n$ gegen ∞ strebt.

$x_n = n$ divergiert gegen ∞

Satz 6.4.6. Falls $x_n \to \infty$ folgt $\frac{1}{x_n} \to 0$.
Ist $(x_n)_n$ Nullfolge mit $x_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\frac{1}{x_n} \to \infty$
Falls $x < 0$ für fast alle n, so folgt $\frac{1}{x_n} \to -\infty$

Beweis. Sei $x_n \to \infty$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon x_n > \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N$
$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, das heißt $\frac{1}{x_n} \to 0$
(Rest Übung) □

Beispiel 6.4.7. $\frac{n}{2^n} \to 0$ (Sogar $\forall k \in \mathbb{N}\colon \frac{n^k}{2^n} \to 0$)

Beweis. Zu zeigen: $x_n = \frac{2^n}{n} \to \infty$
$2^n = (1+1)^n =$
$sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
$\Rightarrow x_n = \frac{2^n}{n} \geq \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{1} = \frac{1}{2}(n+1)$
$\Rightarrow x_n \to \infty$, $\frac{1}{x_n} \to 0$ □

Beispiel 6.4.8 (Die Eulersche Zahl)**.**

$$a_n \coloneqq (1 + \frac{1}{n})^n$$
$$b_n \coloneqq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$
$$\Rightarrow a_n b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Behauptung:

$$a_n < a_{n+1} \text{ und } b_n > b_{n+1} \quad \forall n$$

Beweis. Sei $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(n+1)\cdot}{n}\right. \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&\geq \frac{n}{n-1} \cdot \left(1-\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1} \quad \forall n \geq 2
\end{aligned}
$$

???

Mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < b_{n+1} < \cdots < b_1 \\
&\Rightarrow e := \lim a_n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ existiert}
\end{aligned}
$$

$b := \lim b_n$ existiert, sogar $b = e$Da $1 < \frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

$$1 = \lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim b_n}{\lim a_n} = \frac{b}{e} \Rightarrow b = e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

□

6.5 Häufungswerte und Teilfolgen

Wir möchten eine Folge $(a_n)_n$ „massieren".

$$a_n = f(n), \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Wir wollen die Folgeglieder umordnen oder auch beliebige weglassen. Wie machen wir das und wie lässt sich das ausdrücken?

Definition 6.5.1 (Umordnung)**.** Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Eine Umordnung ist gegeben durch eine Bijektion

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$b_n \coloneqq a_{\sigma(n)} \qquad \text{(Umordnung von } a_n)$$

Definition 6.5.2 (Ausdünnung)**.** Es sei $\kappa : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend

$$b_n \coloneqq a_{\kappa(n)} \qquad \text{(Teilfolge von } a_n)$$

Satz 6.5.3 (Konvergenz von Teilfolgen und Umordnungen)**.** Für jede konvergente reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert jede Umordnung und jede Teilfolge gegen den selben Grenzwert.

Beweis. [7] □

Definition 6.5.4 (Häufungswert)**.** Sei $(a_n)_n$ reelle Folge. Eine reelle Zahl a heißt Häufungswert (oder Häufungspunkt) von a_n, falls $\forall \varepsilon > 0$ unendlich viele a_n in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen. Das heißt:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ für unendlich viele } n$$

Das heißt $\forall L \in \mathbb{N}\ \exists n > L\colon a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Beispiel 6.5.5.

1. $a_n = \frac{1}{n}$ hat Häufungswert 0
2. $a_n = (-1)^n$ hat Häufungswerte 1, -1
3. $a_n = n$ hat keinen Häufungswert
4. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat Häufungswerte 1, -1

Satz 6.5.6 (Häufungswertkriterium über Teilfolgen)**.** Eine reelle Zahl a ist genau dann Häufungswert einer Folge $(a_n)_n$, wenn eine Teilfolgen von a_n existiert, die gegen a konvergiert.

Beweis. „$\Rightarrow$": a sei Häufungswert von a_n. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall L \in \mathbb{N}\ \exists n > L\colon a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

1) Wir wählen $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\colon a - 1 < a_{n_1} < a + 1$

2) Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $L = n_1 + 1 \Rightarrow \exists n_2 > L > n_1\colon a - \frac{1}{2} < a_{n_2} < a + \frac{1}{2}$

3) Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow \exists n_3 > n_2\colon a - \frac{1}{3} < a_{n_3} < a + \frac{1}{3}$

j) Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{j+1} \Rightarrow \exists n_{j+1} > n_j\colon a - \frac{1}{j+1} < a_{n_{j+1}} < a + \frac{1}{j+1} \qquad \Rightarrow n_j < n_{j+1} \forall j \in \mathbb{N}$

Wir definieren $\kappa(j) \coloneqq n_j$ und $b_j \coloneqq a_{\kappa(j)}$ ist eine Teilfolge.
„$\Leftarrow$": Es gilt $a - \frac{1}{j} < b_j < a + \frac{1}{j}$ und nach dem □

[7] Wurde in der Vorlesung am 23. November aus Zeitgründen nicht mehr ausgeführt.