

## 圆题选

1. (原创) 已知  $\odot O: x^2 + y^2 = 4$  和直线  $l: 3x + 4y - 12 = 0$ .  $P, Q$  在  $\odot O$  上,  $M$  在  $l$  上, 且  $\angle POQ = \frac{2}{3}\pi$ , 求  $(|PM| + |QM|)_{\min}$
2. 已知  $\odot O: x^2 + y^2 = 4$  和直线  $l: 3x + 4y - 12 = 0$ .  $P, Q$  在  $\odot O$  上,  $M$  在  $l$  上, 且  $\angle POQ = \frac{2}{3}\pi$ , 求  $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QM}|_{\min}$
3. 【圆的方程、定值问题】已知以点  $C\left(t, \frac{2}{t}\right)$  为圆心的圆与  $x$  轴交于点  $O, A$ , 与  $y$  轴交于点  $O, B$ , 其中  $O$  为坐标原点.
  - (1) 求证:  $\triangle OAB$  的面积为定值;
  - (2) 设直线  $y = -2x + 4$  与  $\odot C$  交于点  $M, N$ , 若  $|OM| = |ON|$ , 求  $\odot C$  的方程
4. 【圆的方程、定值问题】已知点  $G(5, 4)$  和  $\odot C_1: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$ . 过点  $G$  动直线  $l$  与  $C_1$  相交于  $E, F$  两点, 线段  $EF$  的中点为  $C$ , 且  $C$  在  $\odot C_2$  上.
  - (1) 若直线  $mx + ny - 1 = 0 (mn > 0)$  经过点  $G(5, 4)$ , 求  $mn$  的最大值.
  - (2) 求  $\odot C_2$  的方程.
  - (3) 若过点  $A(1, 0)$  的直线  $l_1$  与  $\odot C_2$  相交于  $P, Q$  两点, 线段  $PQ$  的中点为  $M$ .  $l_1$  与  $l_2: x + 2y + 2 = 0$  的交点为  $N$ , 求证:  $|AM| \cdot |AN|$  为定值.
5. 【圆的最值】点  $M(x, y)$  在曲线  $C: x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0$  上运动,  $t = x^2 + y^2 + 12x - 12y - 150 - a$ , 且  $t$  的最大值为  $b$ , 若  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , 则  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b}$  的最小值为?
6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $O_1: x^2 + y^2 = 1$ ,  $O_2: (x-4)^2 + y^2 = 4$ , 动点  $P$  在直线  $x + \sqrt{3}y - b = 0$  上, 过点  $P$  分别作圆  $O_1, O_2$  的切线, 切点分别为  $A, B$ , 若满足  $PB = 2PA$  的点  $P$  有且只有两个, 则实数  $b$  的取值范围是?

## 椭圆题选

1. 已知椭圆方程为  $x^2 + \frac{y^2}{8} = 1$ , 射线  $y = 2\sqrt{2}x (x \geq 0)$  与椭圆的交点为  $M$ , 过  $M$  作倾斜角互补的两条直线, 分别与椭圆交于  $A$ 、 $B$  两点(异于  $M$ ).

(1) 求证直线  $AB$  的斜率为定值;

(2) 求  $\triangle AMB$  面积的最大值.

7. 已知  $O$  为坐标原点, 点  $E$ 、 $F$  的坐标分别为  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$ , 点  $A$ 、 $P$ 、 $Q$  运动时满足  $|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{EF}|$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QF}$ ,  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ ,  $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{EP}$ ,

(1) 求动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程;

(2) 设  $M$ 、 $N$  是  $C$  上两点, 若  $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OE}$ , 求直线  $MN$  的方程.

域代码已更改

域代码已更改

(2013·重庆育才中学月考) 已知椭圆中心在原点, 焦点在  $y$  轴上, 长轴长为 6, 离心率为  $\frac{4}{5}$ .

(1) 求椭圆方程;

(2) 设椭圆在  $y$  轴的正半轴上的焦点为  $M$ , 又点  $A$  和点  $B$  在椭圆上, 且  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ , 求线段  $AB$  所在直线的方程.

2. 已知椭圆 的长、短轴端点分别为  $A$ 、 $B$ , 从椭圆上一点  $M$  (在  $x$  轴上方)

向  $x$  轴作垂线, 恰好通过椭圆的左焦点  $F_1$ , .

(1) 求椭圆的离心率  $e$ ;

(2) 设  $Q$  是椭圆上任意一点,  $F_1$ 、 $F_2$  分别是左、右焦点,

求  $\angle F_1 Q F_2$  的取值范围.

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的长、短轴端点分别为  $A$ 、 $B$ , 从椭圆上一点  $M$  (在  $x$  轴上方) 向  $x$  轴作垂线, 恰好通过椭圆的左焦点  $F_1$ ,  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{OM}$ .

(1) 求椭圆的离心率  $e$ ;

(2) 设  $Q$  是椭圆上任意一点,  $F_1$ 、 $F_2$  分别是左、右焦点, 求  $\angle F_1 Q F_2$  的取值范围.

3.

7. 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$  的左、右焦点, 过  $F_1$  的直线  $l$  与  $E$  相交于 A, B 两点, 且  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等差数列.

(1) 求  $|AB|$ ;

(2) 若直线  $l$  的斜率为 1, 求实数  $b$  的值.

8. 设  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于 A, B 两点, 直线  $l$  的倾斜角为  $60^\circ$ ,  $F_1$  到直线  $l$  的距离为  $2\sqrt{3}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的焦距;

(II) 如果  $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$ , 求椭圆  $C$  的方程.

(本小题满分12分)

设  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于 A, B 两点, 直线  $l$  的倾斜角为  $60^\circ$ ,  $F_1$  到直线  $l$  的距离为  $2\sqrt{3}$ .

(I) 求椭圆  $C$  的焦距;

(II) 如果  $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$ , 求椭圆  $C$  的方程.

9. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的焦点在  $x$  轴上, 其右顶点

$(a, 0)$  关于直线  $x - y + 4 = 0$  的对称点在直线

$x = -\frac{a^2}{c}$  上 ( $c$  为半焦距长).

(I) 求椭圆的方程;

(Ⅱ)过椭圆左焦点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点,交直线

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

于点 C. 设 O 为坐标原点, 且

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB},$$

求  $\triangle OAB$  的面积.

椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的焦点在 x 轴上, 其右顶点  $(a, 0)$  关于直线  $x - y + 4 = 0$  的对称点在直线  $x = -\frac{a^2}{c}$  上 (c 为半焦距长).

(I) 求椭圆的方程;

(Ⅱ) 过椭圆左焦点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点, 交直线  $x = -\frac{a^2}{c}$  于点 C. 设 O 为坐标原点, 且  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$ , 求  $\triangle OAB$  的面积.

如图, 已知  $F(2, 0)$  为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

的右焦点, AB 为椭圆的通径

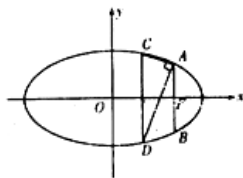
(过焦点且垂直于长轴的弦), 线段 OF 的垂直平分线与椭圆相交于两点 C、

D, 且  $\angle CAD = 90^\circ$ .

(I) 求椭圆的方程;

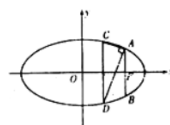
(Ⅱ) 设过点 F 斜率为  $k (k \neq 0)$  的直线 l 与椭圆相交于两点 P、Q. 若

存在一定点  $E(m, 0)$ , 使得 x 轴上的任意一点 (异于点 E、F) 到直线



EP、EQ 的距离相等,求 m 的值.

如图,已知  $F(2, 0)$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点, AB 为椭圆的通径(过焦点且垂直于长轴的弦), 线段 OF 的垂直平分线与椭圆相交于两点 C、D, 且  $\angle CAD = 90^\circ$ .



(I) 求椭圆的方程;

(II) 设过点 F 斜率为  $k (k \neq 0)$  的直线 l 与椭圆相交于两点 P、Q. 若存在一定点  $E(m, 0)$ , 使得 x 轴上的任意一点 (异于点 E、F) 到直线 EP、EQ 的距离相等, 求 m 的值.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

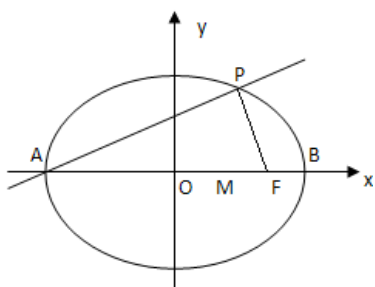
4. 点 A、B 分别是椭圆

长轴的左、右焦点, 点 F 是椭圆

的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方,  $PA \perp PF$ .

(1) 求 P 点的坐标;

(2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于  $|MB|$ , 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



10. 【参数范围】椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右顶点是  $A(a, 0)$ , 其上存在一点 P 使

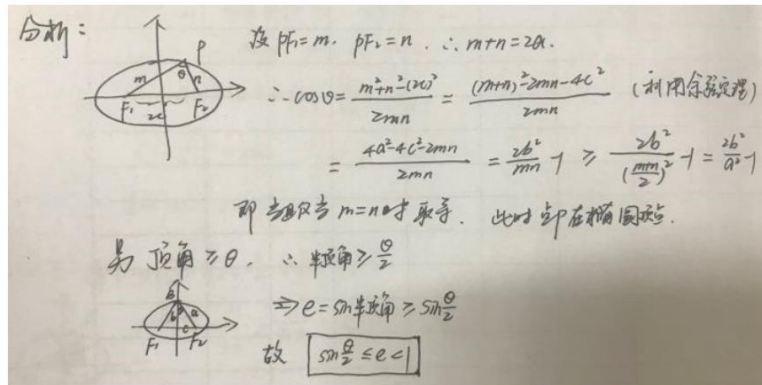
$\angle APO = \frac{\pi}{2}$ , 求椭圆离心率的取值范围.

### 本篇重点总结圆锥曲线中离心率的求法

#### • 利用顶角建立不等式求离心率的范围

问你哦：若椭圆上一动点P， $\angle F_1PF_2$  何时取最大值？

直觉你会猜P在上、下顶点的时候取最大值，恭喜你猜对了，那为啥捏？



所以有  $\angle F_1PF_2 \in [0, \text{顶角}]$ ,  $\sin \frac{\theta}{2} \leq e < 1$ .

比如，椭圆上存在点P，使得  $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ ，求离心率范围。

看一眼就知道  $\sin \frac{120^\circ}{2} \leq e < 1$ ，直接秒杀。

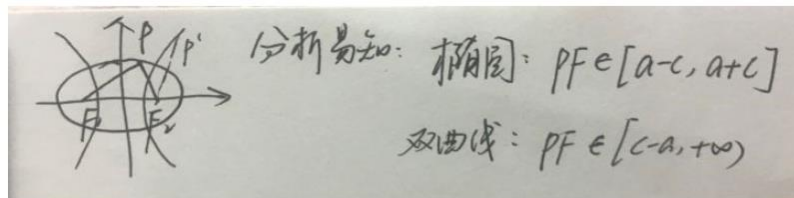
例1：椭圆，满足向量  $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$  的点M总在椭圆内部，则椭圆离心率的范围是？

分析：翻译过来就是，在椭圆上不存在使得  $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$  的点M。如果存在，那么满足

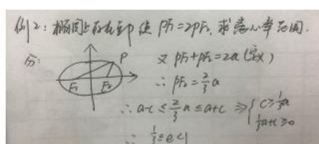
$\sin \frac{90^\circ}{2} \leq e < 1$ 。所以不存在的话，得到  $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

• 利用焦半径求离心率的范围

焦半径：圆锥曲线上的点到焦点的距离。



一起看看怎么用吧



步骤：先根据条件写出焦半径的表达式，再利用不等关系求出离心率范围。

再看一个

已知 $F_1, F_2$ 分别是椭圆的左右焦点，其右准线与 $x$ 轴交于点 $A$ ，在椭圆上存在点 $P$ 满足线段 $AP$ 的垂直平分线过点 $F_2$ ，则椭圆的离心率的取值范围是\_\_\_\_\_。

