《高等电力网络分析》

作业三 2023.10.16

《高等电力网络分析》第二版 习题3—1，3—2，3—5，3—7，3—9，3—12

3.1 编写对称稀疏矩阵的因子分解的计算程序并用例 3.4 的结果验证程序的正确性。

3.2 编写利用对称稀疏矩阵的因子表进行前代回代的计算程序并用例 3.5 的结果验证所编程序的正确性。

3.5 给定电力网络中各支路两端节点号，采用 Tinney-1 和 Tinney-2 方法编程对该网络进行节点优化编号，给出新节点号和老节点号对照表。用附录 B 列出的 IEEE 14 母线和 30 母线系统验证。

3.7 对例 3.4 形成的 **A** 矩阵的因子表，用连续回代法计算其逆矩阵。如果只需要用到 **A** 的逆中对应于矩阵 **A** 中非零元素位置上的值，试用稀疏阻抗矩阵法计算这些元素，并分析哪些计算步骤可以省略。

3.9 稀疏阻抗矩阵包括了节点阻抗矩阵中的部分元素，这些元素和节点导纳矩阵中非零元素的位置相对应。为了计算这些元素，需要计算出因子表矩阵中非零元素相对应位置上的阻抗矩阵元素。用有向因子图说明其中的原因。

3.12 试分析稀疏结构对称但数值不对称的矩阵的图上因子分解过程。

注：稀疏阻抗矩阵可参考课本 47-49 页

<u>其中，3-1、3-2、3-5 需要提供代码，3-7 的编程为选做。</u>

<u>3-7、3-9、3-12 均为论述题。</u>

<u>作业提交截止日期：10 月 21 日 23：59</u>

例 3.4　对图 3.5(a)所示的 **A** 矩阵其赋权有向 A 图如图 3.5(b)所示。试对它进行图上因子分解并求出其赋权有向因子图。

解　按节点号由小到大的顺序进行计算。

(1) 对节点①的运算。它发出两条边(1,2)和(1,4)。规格化运算和消去运算的过程如下：

$$a_{12} = a_{12}/a_{11} = -1/2 = -0.5$$

$$a_{14} = a_{14}/a_{11} = -1/2 = -0.5$$

$$a_{22} = a_{22} - a_{12}^2 a_{11} = 2 - (-0.5)^2 \times 2 = 1.5$$

$$a_{44} = a_{44} - a_{14}^2 a_{11} = 4 - (-0.5)^2 \times 2 = 3.5$$

$$a_{24} = a_{24} - a_{12} a_{14} a_{11} = 0 - (-0.5) \times (-0.5) \times 2 = -0.5$$

为清晰起见，将和节点①相连的边(1,2)、(1,4)和自边用虚线表示，示于图 3.5(c)。

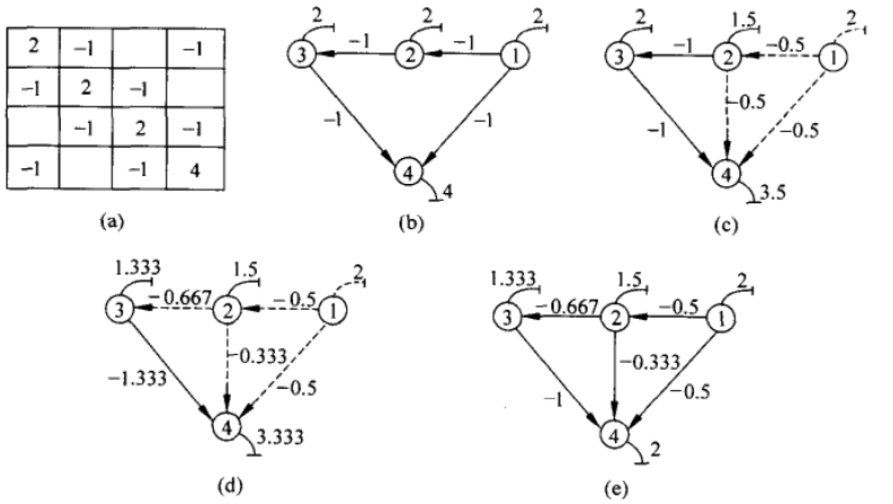

图 3.5　图上因子分解的例

(a) **A** 矩阵；(b) 赋权有向 A 图；(c) 对节点①因子分解；(d) 对节点②因子分解；(e) 对节点③因子分解

(2) 对节点②的运算。它发出的边有两条，为(2,3)和(2,4)。规格化运算和消去运算过程如下：

$$a_{23} = a_{23}/a_{22} = (-1)/1.5 = -0.667$$

$$a_{24} = a_{24}/a_{22} = (-0.5)/1.5 = -0.333$$

$$a_{33} = a_{33} - a_{23}^2 a_{22} = 2 - (-0.667)^2 \times 1.5 = 1.333$$

$$a_{44} = a_{44} - a_{24}^2 a_{22} = 3.5 - (-0.333)^2 \times 1.5 = 3.333$$

$$a_{34} = a_{34} - a_{23} a_{24} a_{22} = -1 - (-0.667) \times (-0.333) \times 1.5 = -1.333$$

将和节点②相连的边(2,3)和(2,4)以及自边用虚线表示，画在图 3.5(d)。

(3) 对节点③的运算。它发出的边只有一条，为(3,4)。规格化运算和消去运算是

$$a_{34} = a_{34}/a_{33} = -1.333/1.333 = -1$$

$$a_{44} = a_{44} - a_{34}^2 a_{33} = 3.333 - (-1)^2 \times 1.333 = 2$$

将和节点③相连的边(3,4)用虚线表示，最后也将和节点④相连的自边用虚线表示。这时图上的因子分解全部完成，再将虚线改为实线，得到图 3.5(e)所示的赋权有向因子图，并可以写出其因子表如下：

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.5 & 1 & & \\ & -0.667 & 1 & \\ -0.5 & -0.333 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1.5 & & \\ & & 1.333 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & & -0.5 \\ & 1 & -0.667 & -0.333 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

分析以上介绍的图上因子分解过程可以看到：每步操作在图上都是对某节点 p 发出的边以及这些边所夹的边进行的，这实际上和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 p 行的非零元相对应。图上因子分解所进行的操作都是有效操作，是稀疏矩阵因子分解需要进行的最基本的操作。整个过程并未涉及任何无效操作，例如未涉及任何和零元的乘法运算。这是因为矩阵中的零元，在赋权有向 A 图中没有边与之对应。在图上进行因子分解，可以使读者对稀疏矩阵的作用机理有一个更为形象，更为直观的理解和认识，并确保编写出正确、高效、简练的计算程序。

例 3.5 在例 3.4 中的赋权有向因子图上进行前代回代。已知独立矢量是 $\boldsymbol{b} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

解 在图 3.6(a)中画出赋权有向因子图和点位，只有节点②的点位为 1，其余都是 0。

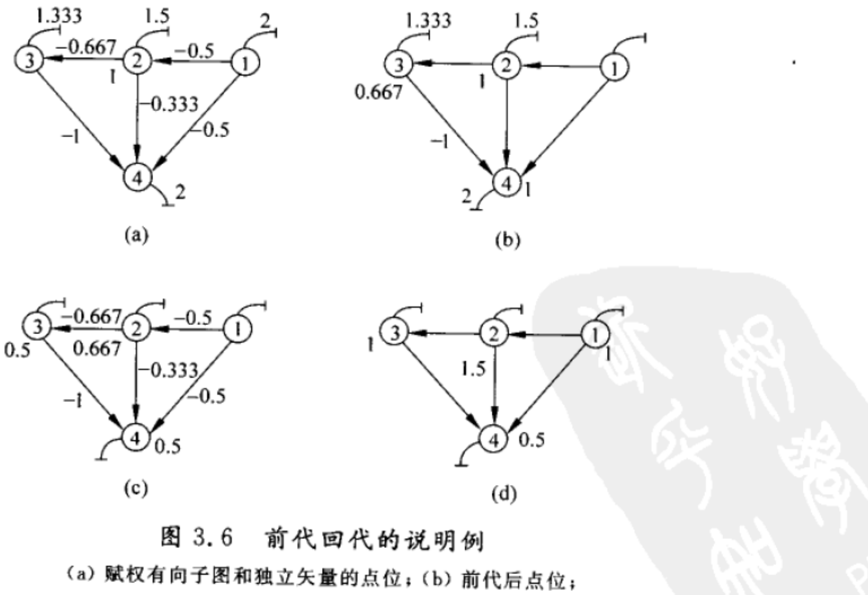

图 3.6 前代回代的说明例

(a) 赋权有向子图和独立矢量的点位；(b) 前代后点位；

(c) 规格化后点位；(d) 回代后点位

(1) 前代过程。按节点号由小到大顺序搜索点位不是零的节点进行运算。节点①点位为零不用计算。对节点②进行前代运算。节点②发出两条边，即(2,3)和(2,4)。利用式(3-16)有

$$e_3 = e_3 - u_{23}e_2 = 0-(-0.667)\times 1 = 0.667$$

$$e_4 = e_4 - u_{24}e_2 = 0-(-0.333)\times 1 = 0.333$$

再做节点③，它只发出一条边(3,4)，则

$$e_4 = e_4 - u_{34}e_3 = 0.333-(-1)\times 0.667 = 1$$

前代结束后点位示于图 3.6(b)。节点②，③，④的点位不等于零。

(2) 规格化过程。点①的点位是零，只需利用式(3-17)对点②，③和④规格化，有

$$e_2 = e_2/d_{22} = 1/1.5 = 0.667$$

$$e_3 = e_3/d_{33} = 0.667/1.333 = 0.5$$

$$e_4 = e_4/d_{44} = 1/2 = 0.5$$

规格化后的点位示于图 3.6(c)。

(3) 回代过程。按节点号由大到小做。以节点④为收点的边有三条，为(3,4)，(2,4)，(1,4)。用式(3-18)修正指向节点④的边的发点的点位，有

$$e_3 = e_3 - u_{34}e_4 = 0.5-(-1)\times 0.5 = 1$$

$$e_2 = e_2 - u_{24}e_4 = 0.667-(-0.333)\times 0.5 = 0.834$$

$$e_1 = e_1 - u_{14}e_4 = 0-(-0.5)\times 0.5 = 0.25$$

以节点③为收点的边只有一条(2,3)，修正发点②的点位

$$e_2 = e_2 - u_{23}e_3 = 0.834-(-0.667)\times 1 = 1.5$$

以节点②为收点的边只有一条(1,2)，修正发点①的点位

$$e_1 = e_1 - u_{12}e_2 = 0.25-(-0.5)\times 1.5 = 1$$

最后的点位如图 3.6(d)所示。这组点位就是前代回代的结果

$$\boldsymbol{x} = [1 \quad 1.5 \quad 1 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$$