

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12) ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Ημερομηνία ανάρτησης:	Σάββατο	7 Οκτωβρίου 2023
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής:	Τετάρτη	13 Δεκεμβρίου 2023
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	Πέμπτη	21 Δεκεμβρίου 2023

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **1ης** εργασίας αναφέρονται στα:

- **Κεφάλαιο 1** (Πίνακες – Ορίζουσες – Γραμμικά Συστήματα)
- **Κεφάλαιο 2** (Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάσταση)
- **Κεφάλαιο 3** (Χώροι εσωτερικού γινομένου),
- **Κεφάλαιο 4** (Γραμμικοί μετασχηματισμοί),
- **Κεφάλαιο 5** (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων)

του συγγράμματος του ΕΑΠ **“Γραμμική Άλγεβρα”** των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** (στο study.eap.gr):

• **Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό:**

Κεφάλαιο 1 (Εισαγωγικές Έννοιες), **Κεφάλαιο 2** (Γραμμικά Συστήματα), **Κεφάλαιο 3** (Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα), **Κεφάλαιο 4** (Ορίζουσες), **Κεφάλαιο 5** (Οι χώροι \mathbb{R}^n), **Κεφάλαιο 6** (Διανυσματικοί χώροι), **Κεφάλαιο 7** (Βάση και Διάσταση), **Κεφάλαιο 8** (Γραμμικές Απεικονίσεις), **Κεφάλαιο 9** (Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα), **Κεφάλαιο 10** (Διαγωνιοποίηση), **Κεφάλαιο 11** (Τετραγωνικές Μορφές).

• **Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό** από Γραμμική Άλγεβρα:

Σύνολα Αριθμών, Συναρτήσεις, Πίνακες, Οι Χώροι \mathbb{R}^n , Διανυσματικοί Χώροι Διανυσματικοί χώροι, Γραμμικές απεικονίσεις, Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, Διαγωνιοποίηση, Τετραγωνικές μορφές.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να σας βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση:

- της άλγεβρα πινάκων και των κλιμακωτών μορφών,
- της μεθόδου επίλυσης γραμμικών συστημάτων,
- του υπολογισμού και των βασικών ιδιοτήτων των οριζουσών,
- των κριτηρίων αντιστρεψιμότητας πινάκων και του υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα,
- των εννοιών του διανυσματικού χώρου και υποχώρου,
- της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων, των συνόλων γεννητόρων, των βάσεων και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου,
- των εννοιών της ορθογωνιότητας διανυσμάτων, του ορθογωνίου συμπληρώματος υποχώρου και της προβολής διανύσματος σε υπόχωρο,
- της μεθόδου Gram-Schmidt για τη εύρεση ορθοκανονικής βάσης υποχώρου,
- της σύνδεσης ορθοκανονικών βάσεων και ορθογώνιων πινάκων,
- της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ διανυσματικών χώρων,
- του πίνακα αναπαράστασης, του πυρήνα, της εικόνας, του βαθμού και της μηδενικότητας μιας γραμμικής απεικόνισης,
- των εννοιών του μονομορφισμού, του επιμορφισμού και του ισομορφισμού,
- των χαρακτηριστικών μεγεθών (ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) γραμμικής απεικόνισης,
- των κριτηρίων διαγωνιοποίησης πινάκων,
- της χρήσης της διαγωνιοποίησης στον υπολογισμό δυνάμεων διαγωνιοποιήσιμων πινάκων,
- των χαρακτηριστικών μεγεθών πινάκων ειδικού τύπου (π.χ. συμμετρικών πινάκων),
- των τετραγωνικών μορφών και της σύνδεσής τους με τις κωνικές τομές.

Άσκηση 1 (Μον. 25)

α) (μον.15) Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω :

- i) ο πίνακας AA^T , ii) ο πίνακας $(D^T D)^{-1} D^T$, iii) η ορίζουσα $\det(C)$,
 iv) ο πίνακας $B^2 - 2B - 2I_2$, v) $\text{rank}(A^T A)$.

β) (μον. 10) Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & c \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3c+9 \\ c+3 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα, εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου c , το σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση.**Άσκηση 2** (Μον. 25)

α)

i) (μον.4) Να δείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\},$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + 2z = 0\},$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^3 .ii) (μον.8) Να βρεθεί η βάση και διάσταση των υποχώρων του \mathbb{R}^3 : U , V , $U \cap V$, $U + V$.iii) (μον.3) Ισχύει ότι $U \oplus V = \mathbb{R}^3$;β) Έστω ο διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\},$$

i) (μον. 4) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του U .ii) (μον. 3) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος U^\perp του U .iii) (μον. 3) Υπολογίστε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $u = (1, 2, 1)$ επί των U^\perp , U .**Άσκηση 3** (Μον. 25)α) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με τύπο

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 + x_3, x_1 - x_2, 3x_1 - 5x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3).$$

i) (μον. 10) Βρείτε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της f καθώς και τις διαστάσεις τους.ii) (μον. 5) Εξετάστε αν η f είναι «1-1» ή «επί».β) Έστω γραμμική απεικόνιση $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με την ιδιότητα

$$g(1, 2) = (2, 1), \quad g(2, -1) = (-1, 2).$$

i) (μον. 5) Να βρεθεί ο αναλυτικός τύπος της g .ii) (μον. 5) Ελέγξτε αν η g είναι «1-1» και στην περίπτωση που είναι να βρεθεί η αντίστροφη απεικόνιση.

Άσκηση 4 (Μον. 25)

Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- α) (μον. 6) Να γράψετε τον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A ως συνάρτηση των πινάκων I, A, A^2 κάνοντας χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.
- β) (μον. 8) Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .
- γ) (μον. 6) Να υπολογίσετε ορθογώνιο πίνακα $Q \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $Q^T A Q = J$, όπου $J \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ είναι διαγώνιος πίνακας.
- δ) (μον. 5) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{2023} .