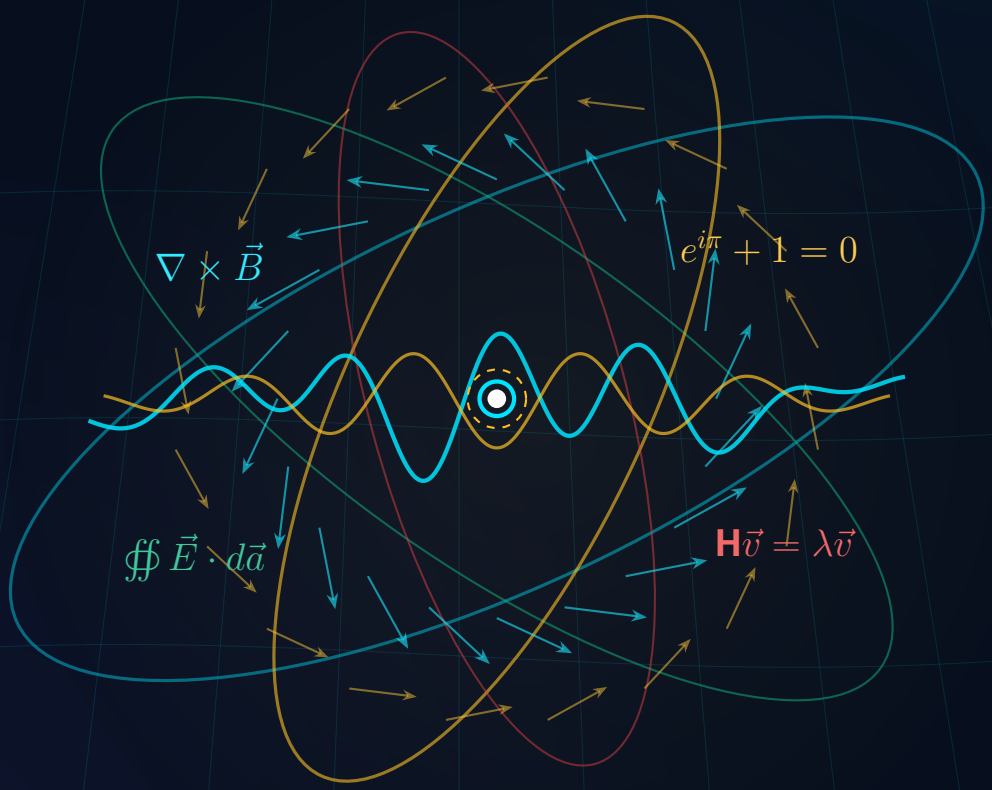
คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์
MATHEMATICS FOR PHYSICS

ฉบับมาตรฐานวิชาการและแบบจำลองการคำนวณเชิงตัวเลข

- ระบบพิกัดและเวกเตอร์
- อนุกรมและจำนวนเชิงซ้อน
- เมทริกซ์และค่าเจาะจง
- แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์

พร้อมภาพเวกเตอร์ TikZ คมชัด 100% และการจำลองระบบกายภาพด้วยภาษา Python



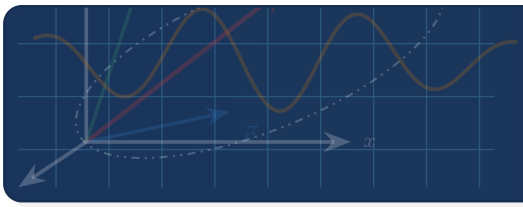
ชีวะ ทัศนา

คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์

(Mathematics for Physics)

ดร.ชีวะ ทัศนา

วท.บ. (ฟิสิกส์), วท.ม. (ฟิสิกส์), ปร.ด. (ฟิสิกส์)



คำนำ

ตำราวิชาการเรื่อง **คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ (Mathematics for Physics)** เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเอกสารประกอบการเรียนการสอนและการค้นคว้าวิจัยสำหรับนักศึกษาสาขาวิชาฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์กายภาพ และวิศวกรรมศาสตร์ โดยมีเป้าหมายเพื่อสร้างรากฐานทางคณิตศาสตร์ที่เข้มแข็งและเชื่อมโยงสู่ปรากฏการณ์ทางกายภาพอย่างเป็นรูปธรรม

โครงสร้างเนื้อหาครอบคลุมตั้งแต่ระบบพิกัดและการวิเคราะห์เวกเตอร์ อนุกรมจำนวนเชิงซ้อน พีชคณิตเชิงเส้น แคลคูลัสหลายมิติ ตลอดจนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและสอง โดยเน้นการอธิบายมโนทัศน์ (Conceptual Understanding) ควบคู่กับตัวอย่างการคำนวณจริงทางฟิสิกส์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษา คณาจารย์ และผู้สนใจใฝ่รู้ทุกท่าน หากมีข้อเสนอแนะประการใด ผู้เขียนขอน้อมรับด้วยความขอบคุณยิ่ง

ดร.ชีวะ ทัศนา
สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

แผนบริหารการสอนประจำวิชา

ข้อมูลทั่วไปของรายวิชา

- **รหัสและชื่อรายวิชา:** ฟิสิกส์ 2026 คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ (Mathematics for Physics)
- **จำนวนหน่วยกิต:** 3 หน่วยกิต (3-0-6)
- **หลักสูตรและประเภทของรายวิชา:** วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ หมวดวิชาเฉพาะด้าน
- **อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชาและผู้สอน:** ดร.ชีวะ ทัศนา
- **ภาคการศึกษา / ชั้นปีที่เรียน:** ภาคการศึกษาที่ 1 ชั้นปีที่ 2

คำอธิบายรายวิชา (Course Description)

ศึกษาและฝึกทักษะการคำนวณทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงสำหรับประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ ได้แก่ ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม การวิเคราะห์เวกเตอร์ เกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ เคิร์ล อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ การประมาณค่าในทางฟิสิกส์ จำนวนเชิงซ้อนและการสั่นฮาร์มอนิก เมทริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปร ตัวคูณลากรองจ์ ปริพันธ์หลายชั้น ทฤษฎีบทของเกาส์ ทฤษฎีบทของสโตกส์ ตลอดจนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและอันดับสองในการจำลองระบบกายภาพ

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ (Course Learning Outcomes: CLOs)

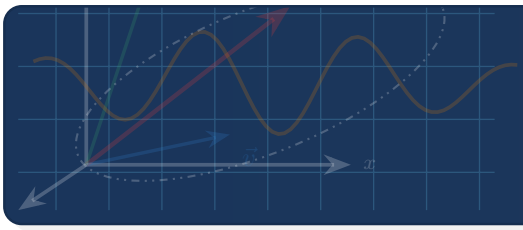
เมื่อสิ้นสุดการเรียนการสอนรายวิชานี้ นักศึกษาสามารถ:

1. **CLO 1:** อธิบายมโนทัศน์และหลักการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในกลศาสตร์ แม่เหล็กไฟฟ้า และควอนตัมฟิสิกส์ได้อย่างถูกต้อง

2. **CLO 2:** เลือกใช้ระบบพิกัดและตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์ในการตั้งสมการและแก้ปัญหาฟิสิกส์ได้อย่างเหมาะสม
3. **CLO 3:** แก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและสอง เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมการเคลื่อนที่และการสั่นของระบบกายภาพได้
4. **CLO 4:** เชื่อมโยงระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์เข้ากับการจำลองสถานการณ์ทางฟิสิกส์จริงได้อย่างมีวิจารณญาณ

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

- การประเมินระหว่างภาคเรียน (แบบฝึกหัดท้ายบทและโครงงานย่อย): ร้อยละ 60
- การสอบวัดผลปลายภาคเรียน: ร้อยละ 40



สารบัญ

คำนำ **i**

แผนบริหารการสอนประจำวิชา **ii**

สารบัญภาพ **ix**

สารบัญตาราง **xi**

1 ระบบพิกัดและการแปลงพิกัด **1**

1.1 บทนำและระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 1

1.2 ระบบพิกัดทรงกระบอก 2

1.3 ระบบพิกัดทรงกลมและการประยุกต์ในเทคโนโลยี GPS 4

1.3.1 การ ประยุกต์ ใช้ ใน ชีวิต ประจำ วัน: ระบบ พิกัด ภูมิศาสตร์ และดาวเทียม GPS 4

1.4 บทสรุปประจำบท 8

1.5 แบบฝึกหัดท้ายบท 8

1.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions) 9

1.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems) 9

2 เวกเตอร์และการวิเคราะห์เวกเตอร์ **10**

2.1 พีชคณิตเวกเตอร์และผลคูณหลายชั้น 10

2.1.1 ผลคูณจุดและผลคูณไขว้ 11

2.1.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (Scalar Triple Product) 11

2.1.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์สามชั้นและกฎ BAC-CAB 11

2.2 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์ 11

2.2.1 เกรเดียนต์ (Gradient) 13

2.2.2 ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) 13
2.2.3 เคิร์ล (Curl) 13
2.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และชีวิตประจำวัน 14
2.3.1 เซนเซอร์วัดความเร่งและเข็มทิศดิจิทัลในสมาร์ตโฟน (IMU) . . . 14
2.4 บทสรุปประจำบท 17
2.5 แบบฝึกหัดท้ายบท 17
2.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions) 17
2.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems) 17

3 อนุกรมพื้นฐานและการประมาณค่า 18
3.1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน 18
3.2 เทคนิคการประมาณค่าทางฟิสิกส์ 20
3.2.1 การประมาณค่ามุมเล็ก (Small Angle Approximation) 20
3.2.2 การกระจายทวินาม (Binomial Expansion) 20
3.3 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ 21
3.3.1 การแผ่รังสีของวัตถุดำและกฎของเรย์ลี-ยีนส์ 21
3.4 บทสรุปประจำบท 24
3.5 แบบฝึกหัดท้ายบท 24
3.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions) 24
3.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems) 24

4 จำนวนเชิงซ้อนและการประยุกต์ในฟิสิกส์ 25
4.1 พีชคณิตเชิงซ้อนและสูตรของออยเลอร์ 25
4.1.1 รูปเชิงขั้วและสูตรของออยเลอร์ (Euler’s Formula) 26
4.1.2 ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์และการหาราก 26
4.2 ฟังก์ชันวิเคราะห์และสมการโคชี-รีมันน์ 27
4.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ 28
4.3.1 ระเบียบวิธีเฟสเซอร์และวงจรกรองความถี่เสียง (Audio Filters) . 28
4.4 บทสรุปประจำบท 31
4.5 แบบฝึกหัดท้ายบท 31
4.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions) 31
4.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems) 32

5 เมทริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น 33
5.1 การดำเนินการของเมทริกซ์และการแปลงเชิงเส้น 33
5.1.1 การแปลงเชิงเส้นและการหมุนพิกัด (Rotation Matrices) 34
5.2 ปัญหาค่าเจาะจงและการแปลงทแยงมุม 34
5.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ 35
5.3.1 โหมดการสั่นสะเทือนของอาคารต้านแผ่นดินไหว (Coupled Oscillators) 35
5.4 บทสรุปประจำบท 39
5.5 แบบฝึกหัดท้ายบท 40
5.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions) 40
5.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems) 40

6 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปร 41
6.1 อนุพันธ์ย่อยและผลต่างรวม 41
6.1.1 นิยามของอนุพันธ์ย่อย 42
6.1.2 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงและทฤษฎีบทชวาร์ซ 42
6.1.3 ผลต่างรวม 43
6.2 อนุพันธ์ระบุทิศทางและเกรเดียนต์ 43
6.3 กฎลูกโซ่และอนุพันธ์สสารในฟิสิกส์ 44
6.4 การทดสอบอนุพันธ์อันดับสองและเมทริกซ์เฮสเซียน 45
6.5 การหาค่าขีดสุดภายใต้เงื่อนไขบังคับด้วยตัวคูณลากรองจ์ 46
6.5.1 หลักการตัวคูณลากรองจ์ 46
6.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ 46
6.6.1 การจัดการความร้อนในอาคารอัจฉริยะและไมโครชิป 46
6.6.2 การกระจายตัวแบบโบลต์ซมันน์ในกลศาสตร์สถิติ 47
6.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ 47
6.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท 52
6.9 แบบฝึกหัดท้ายบท 52

7 แคลคูลัสเชิงปริพันธ์และทฤษฎีบทการแปลง 53
7.1 ปริพันธ์ตามเส้นและงานในกลศาสตร์ 53
7.1.1 นิยามของปริพันธ์ตามเส้น 54
7.1.2 ทฤษฎีบทมูลฐานของปริพันธ์ตามเส้นและสนามอนุรักษ์ 54
7.2 ปริพันธ์หลายชั้นและการแปลงตัวแปรด้วยจาโคเบียน 55
7.3 ปริพันธ์ตามพื้นผิวและฟลักซ์ทางฟิสิกส์ 56

7.4 ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์ 56
7.5 ทฤษฎีบทของสโตกส์และทฤษฎีบทของกรีน 57
7.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ 58
7.6.1 การคำนวณฟลักซ์รังสีอาทิตย์บนแผงโซลาร์เซลล์ 58
7.6.2 แรงยกอากาศพลศาสตร์และทฤษฎีบทคัตตา-จูคอฟสกี 58
7.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ 59
7.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท 63
7.9 แบบฝึกหัดท้ายบท 63

8 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง 64
8.1 ธรรมชาติของสมการเชิงอนุพันธ์ในฟิสิกส์ 64
8.2 สมการแบบแยกตัวแปรได้ 65
8.2.1 กฎการเย็นตัวของนิวตัน 65
8.3 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งและตัวประกอบปริพันธ์ 66
8.4 สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงและฟังก์ชันศักย์ 67
8.5 สมการไม่เป็นเชิงเส้นแบบแบร์นูลลี 67
8.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ 68
8.6.1 การตกภายใต้แรงต้านอากาศและความเร็วปลาย 68
8.6.2 การชาร์จแบตเตอรี่รถยนต์ไฟฟ้าและวงจร RC 68
8.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ 69
8.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท 72
8.9 แบบฝึกหัดท้ายบท 73

9 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองและการสั่นพ้อง 74
9.1 สมการเชิงเส้นอันดับสองสัมประสิทธิ์คงที่ 74
9.1.1 หลักการซ้อนทับและรอนสเกียน 75
9.1.2 สมการลักษณะเฉพาะและรูปแบบผลเฉลย 75
9.2 การสั่นแบบฮาร์มอนิกหน่วงในกลศาสตร์และวงจรไฟฟ้า 76
9.2.1 ความสมนัยกับวงจรไฟฟ้า RLC แบบอนุกรม 77
9.3 การสั่นถูกบังคับและปรากฏการณ์การสั่นพ้อง 77
9.4 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ 79
9.4.1 ลูกตุ้มปรับจูนมวลในอาคารระฟ้าไทเป 101 79
9.4.2 การสร้างภาพด้วยเรโซแนนซ์แม่เหล็กนิวเคลียร์ 79
9.5 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ 79

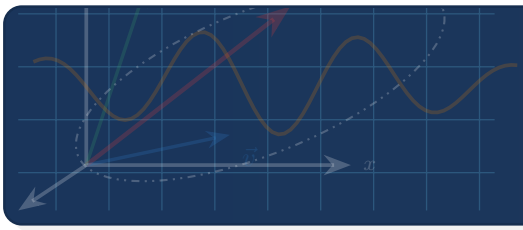
9.6 สรุปสาระสำคัญประจำบท 83
9.7 แบบฝึกหัดท้ายบท 84

ก สูตรคณิตศาสตร์และเอกลักษณ์เวกเตอร์พื้นฐาน 85
ก.1 ตัวดำเนินการในระบบพิกัดต่าง ๆ 85
ก.1.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z) 85
ก.1.2 ระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) 85
ก.1.3 ระบบพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ) 86
ก.2 เอกลักษณ์ผลคูณเวกเตอร์ 86

บรรณานุกรม 87

ดัชนีสืบค้นคำสำคัญ 88

ประวัติผู้เขียน 90



สารบัญภาพ

1.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) และเวกเตอร์ฐานหนึ่งหน่วย 3

1.2 ระบบพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ) แสดงมุมเชิงขั้ว θ และมุมทิศราบ ϕ 4

2.1 ทิศทางของแรงแม่เหล็กลอเรนซ์ตามกฎผลคูณไขว้และกฎมือขวา 12

2.2 การแสดงภาพเชิงกายภาพของไดเวอร์เจนซ์ (แหล่งกำเนิด) และเคิร์ล (การหมุนวน) 14

3.1 การเปรียบเทียบฟังก์ชัน $\sin x$ กับพหุนามประมาณค่าเทย์เลอร์ที่อันดับต่าง ๆ 19

4.1 แผนภาพอาร์กอนด์ (Argand Diagram) แสดงเวกเตอร์เฟสเซอร์หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω 26

4.2 วงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอย่างง่าย (First-Order RC Low-Pass Filter) . . 29

5.1 แบบจำลองการสั่นของระบบมวลเชื่อมคู่สองตัว (Coupled Oscillator Model) 36

6.1 เส้นระดับอุณหภูมิ (Isotherms) แสดงเวกเตอร์เกรเดียนต์ ∇T ที่ตั้งฉากกับเส้นระดับเสมอ และฟลักซ์ความร้อน $\vec{q} = -k\nabla T$ ไหลในทิศทางลดลงของอุณหภูมิ 44

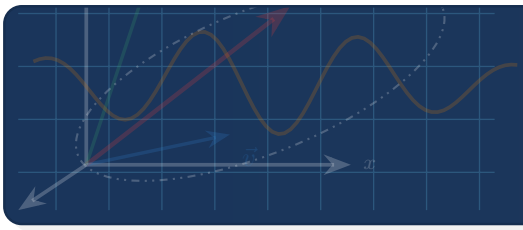
7.1 ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์: ผลรวมของแหล่งกำเนิดภายในปริมาตร V $(\nabla \cdot \vec{F})$ เท่ากับฟลักซ์สุทธิที่พุ่งข้ามพื้นผิวปิด ∂V 56

7.2 ทฤษฎีบทของสโตกส์: การไหลเวียนตามแนววงปิด $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เท่ากับฟลักซ์ของเคิร์ล $(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a}$ ที่ทะลุผ่านพื้นผิวเปิด S ใด ๆ ที่มีขอบเขตเป็น C 57

8.1 กราฟความเร็วตามเวลาของวัตถุที่ตกภายใต้แรงต้านอากาศ ลู่เข้าสู่ความเร็วปลาย v_{term} โดยมีค่าคงที่เวลา $\tau = m/k$ 68

9.1 เปรียบเทียบพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นหน่วง 3 รูปแบบ: หน่วง ยิ่งยวด (Overdamped), หน่วง วิกฤต (Critically Damped) และ หน่วงน้อย (Underdamped) 76

9.2 เส้นโค้งการสั่นพ้อง (Resonance Curves) แสดงแอมพลิจูดของการสั่น เทียบกับความถี่แรงขับ ω สำหรับค่าความหน่วงต่าง ๆ ยิ่งความหน่วงน้อย ยอดกราฟจะยิ่งสูงและแคบลง 78



สารบัญตาราง

1.1 ความสัมพันธ์และสูตรการแปลงพิกัดระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ทรงกระบอก และทรงกลม 5

1.2 ตารางสรุปเปรียบเทียบคุณลักษณะของระบบพิกัดเชิงตั้งฉากทั้ง 3 ระบบ . 8

2.1 การดำเนินการคูณเวกเตอร์ ความหมายเชิงเรขาคณิต และการประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ 12

2.2 สรุปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์หลักและเอกลักษณ์สำคัญ 17

3.1 การกระจายอนุกรมกำลัง รัศมีการลู่เข้า และตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ 20

3.2 การกระจายอนุกรมที่ใช้บ่อยที่สุดในฟิสิกส์ 24

4.1 รูปแบบการแทนจำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการทางพีชคณิต 27

4.2 ตารางสรุปการแทนปริมาณทางฟิสิกส์ด้วยจำนวนเชิงซ้อน 32

5.1 เมทริกซ์พิเศษในฟิสิกส์ คุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ และบทบาททางกายภาพ 35

5.2 ตารางสรุปประเภทของเมทริกซ์พิเศษในฟิสิกส์ 39

6.1 แนวคิดอนุพันธ์หลายตัวแปร นิยามคณิตศาสตร์ และความหมายเชิงกายภาพ 43

6.2 สรุปสูตรและแนวคิดสำคัญในแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปร 52

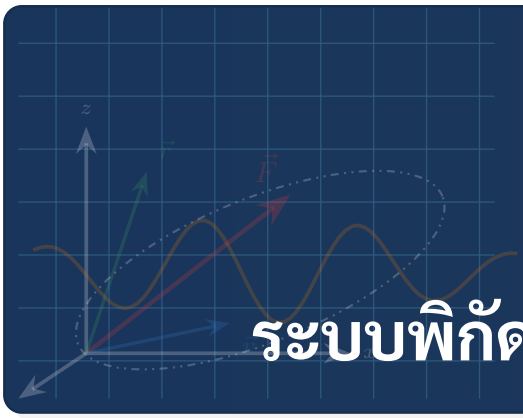
7.1 การเปรียบเทียบประเภทของปริพันธ์ในฟิสิกส์ ชิ้นส่วนเชิงอนุพันธ์ และตัวอย่างการประยุกต์ 55

7.2 สรุปทฤษฎีบทการแปลงเชิงปริพันธ์และบทบาทในฟิสิกส์ 63

8.1 แบบจำลองระบบฟิสิกส์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและค่าคงที่เวลา 66

8.2 สรุปรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและวิธีหาผลเฉลย 72

9.1 การเปรียบเทียบสภาวะการแกว่งแบบหน่วง 3 สภาวะ และการประยุกต์ใช้ 76
9.2 สรุปพารามิเตอร์และสภาวะต่าง ๆ ของสมการการสั่นอันดับสอง 83



บทที่ 1

ระบบพิกัดและการแปลงพิกัด

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. อธิบายความหมาย นิยามเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลมได้อย่างลึกซึ้ง
2. คำนวณตัวประกอบสเกล (Scale Factors) สัมประสิทธิ์เมตริก การกระจัดเชิงอนุพันธ์ พื้นที่ และปริมาตรเชิงอนุพันธ์ในแต่ละระบบพิกัดได้
3. แปลงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง เวกเตอร์ความเร็ว และเวกเตอร์แรงข้ามระบบพิกัดได้อย่างถูกต้อง
4. ประยุกต์ใช้เรขาคณิตพิกัดทรงกลมในการคำนวณตำแหน่งพิกัดภูมิศาสตร์และระบบกำหนดตำแหน่งบนโลกผ่านดาวเทียม (GPS) ได้

1.1 บทนำและระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ในวิชาฟิสิกส์ การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ แรง และสนามทางกายภาพจำเป็นต้องอาศัยกรอบอ้างอิงเฉื่อย (Inertial Reference Frame) และระบบพิกัดที่เหมาะสม การเลือกพิกัดที่สอดคล้องกับสมมาตร (Symmetry) ของระบบจะช่วยลดความซับซ้อนของสมการเชิงอนุพันธ์ลงได้อย่างมหาศาล

ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System) หรือพิกัดฉาก (x, y, z) เป็นระบบพิกัดพื้นฐานที่สุด ประกอบด้วยแกน 3 แกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันตามกฎมือขวา โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยประจำแกนคือ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ซึ่งมีสมบัติตั้งฉากปรกติ (Orthonormal

Property):

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } i = j \\ 0 & \text{เมื่อ } i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (Position Vector) $\vec{r}$ ชี้จากจุดกำเนิด $O(0,0,0)$ ไปยังจุดใด ๆ $P(x,y,z)$:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.2}$$

เวกเตอร์การกระจัดเชิงอนุพันธ์ (Differential Displacement):

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \tag{1.3}$$

และกำลังสองของระยะทางเชิงอนุพันธ์ (Line Element Squared):

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.4}$$

ปริมาตรเชิงอนุพันธ์ (Differential Volume Element) ในพิกัดคาร์ทีเซียน:

$$dV = dx\,dy\,dz \tag{1.5}$$

นิยามที่ 1.1 ตัวประกอบสเกลและพิกัดโค้งเชิงตั้งฉาก

ในระบบพิกัดโค้งเชิงตั้งฉากใด ๆ (u_1, u_2, u_3) ระยะทางเชิงอนุพันธ์กำหนดโดย:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \tag{1.6}$$

โดยที่ปริมาณ $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|$ เรียกว่า **ตัวประกอบสเกล (Scale Factors)** หรือ Lame Coefficients และปริมาตรเชิงอนุพันธ์คือ:

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3 \tag{1.7}$$

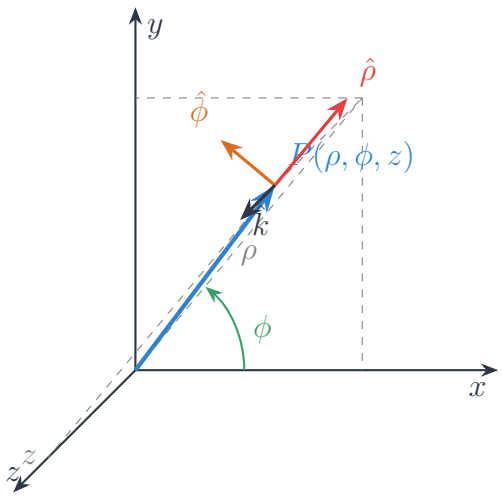
สำหรับพิกัดคาร์ทีเซียน ตัวประกอบสเกลคือ $h_x = h_y = h_z = 1$

1.2 ระบบพิกัดทรงกระบอก

สำหรับปัญหาที่มีสมมาตรรอบแกน (Axial Symmetry) เช่น สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำรอบเส้นลวดตรงยาว กระแสการไหลของของไหลในท่อทรงกระบอก หรือการหมุนรอบแกนของวัตถุแข็งเกร็ง การใช้พิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) ช่วยให้การแก้สมการมีความสะดวกอย่างยิ่ง

พิกัดทรงกระบอกประกอบด้วย

- ρ คือ ระยะทางตั้งฉากจากแกน z ถึงจุดสังเกต ($\rho \geq 0$)



ภาพที่ 1.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) และเวกเตอร์ฐานหนึ่งหน่วย

- ϕ คือ มุมทิศราบ (Azimuthal Angle) วัดจากแกน $+x$ ในระนาบ xy $(0 \leq \phi < 2\pi)$
- z คือ ความสูงตามแนวแกนดิ่ง $(-\infty < z < \infty)$

สมการแปลงพิกัดระหว่างคาร์ทีเซียนและทรงกระบอก:

$$x = \rho \cos \phi \tag{1.8}$$
$$y = \rho \sin \phi \tag{1.9}$$
$$z = z \tag{1.10}$$

ในทางกลับกัน:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z \tag{1.11}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัดทรงกระบอกสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียนดังนี้

$$\hat{\rho} = \cos \phi \, \hat{i} + \sin \phi \, \hat{j} \tag{1.12}$$
$$\hat{\phi} = -\sin \phi \, \hat{i} + \cos \phi \, \hat{j} \tag{1.13}$$
$$\hat{k} = \hat{k} \tag{1.14}$$

ตัวประกอบสเกลคำนวณได้เป็น:

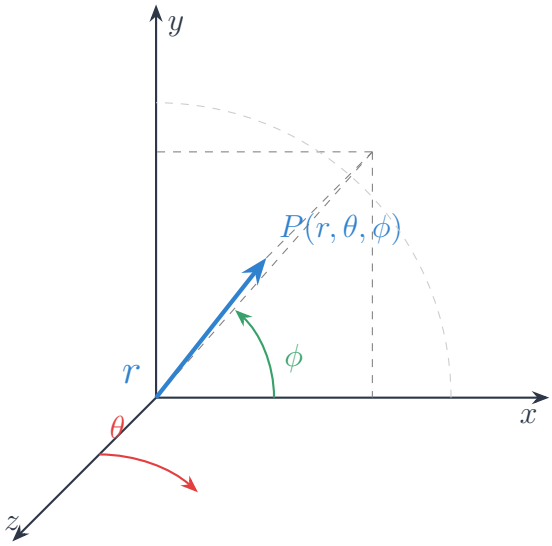
$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1 \tag{1.15}$$

ระยะทางเชิงอนุพันธ์และปริมาตรเชิงอนุพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \tag{1.16}$$
$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \tag{1.17}$$

1.3 ระบบพิกัดทรงกลมและการประยุกต์ในเทคโนโลยี GPS

ปัญหาทางฟิสิกส์ที่มีสมมาตรเชิงทรงกลม (Spherical Symmetry) เช่น แรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน แรงทางไฟฟ้าสถิตของคูลอมบ์ อะตอมไฮโดรเจน หรือการแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากสายอากาศรอบทิศทาง ล้วนอธิบายได้กระชับที่สุดในพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)



ภาพที่ 1.2 ระบบพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ) แสดงมุมเชิงขั้ว θ และมุมทิศราบ ϕ

ความสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียน:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{1.18}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{1.19}$$
$$z = r \cos\theta \tag{1.20}$$

โดยที่ $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, และ $0 \leq \phi < 2\pi$ ตัวประกอบสเกลในพิกัดทรงกลม:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta \tag{1.21}$$

ทำให้ได้องค์ประกอบระยะทางเชิงอนุพันธ์และปริมาตรเชิงอนุพันธ์:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \tag{1.22}$$
$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{1.23}$$

1.3.1 การ ประยุกต์ ใช้ ใน ชีวิต ประจำ วัน: ระบบ พิกัด ภูมิศาสตร์ และ ดาวเทียม GPS

ระบบพิกัดบนพื้นผิวโลกที่มนุษย์ใช้งานในชีวิตประจำวัน (ผ่าน Google Maps หรือนาฬิกา Smartwatch) อาศัยระบบพิกัดทรงกลมดัดแปลง:

ตารางที่ 1.1 ความสัมพันธ์และสูตรการแปลงพิกัดระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ทรงกระบอก และทรงกลม

ระบบพิกัดเป้าหมาย	สูตรการแปลงจากพิกัดคาร์ทีเซียน	สูตรการแปลงกลับสู่พิกัดคาร์ทีเซียน
พิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan(y/x)$ $z = z$	$x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ $z = z$
พิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arccos\left(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ $\phi = \arctan(y/x)$	$x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$

- **ละติจูด (Latitude, λ):** วัดจากระนาบศูนย์สูตรขึ้นเหนือ $(+)$ หรือลงใต้ $(-)$ โดยสัมพันธ์กับมุมเชิงขั้ว θ ตามสมการ:

$$\theta = 90^\circ - \lambda = \frac{\pi}{2} - \lambda \tag{1.24}$$

- **ลองจิจูด (Longitude, Φ):** วัดจากเส้นเมริเดียนปฐม (กรีนิช) ไปทางทิศตะวันออก (0° ถึง 360° หรือ -180° ถึง $+180^\circ$) ซึ่งตรงกับมุมทิศราบ ϕ โดยตรง

ระบบนำทางด้วยดาวเทียม GPS (Global Positioning System) ทำงานโดยการรับสัญญาณเวลาจากดาวเทียมอย่างน้อย 4 ดวงเพื่อระบุตำแหน่งของผู้ใช้ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนยึดตามโลก (Earth-Centered, Earth-Fixed: ECEF) แล้วแปลงกลับมาเป็น ละติจูด, ลองจิจูด และระดับความสูง (WGS84 Ellipsoid)

ตัวอย่าง ที่ 1.1 การ คำนวณ ระยะ ทาง วงกลม ใหญ่ ระหว่าง สอง เมือง บน โลก (Great Circle Distance)

โจทย์: จง หา ระยะ ทาง ที่ สั้น ที่สุด ตาม แนว ผิว โลก (Great Circle Distance) ระหว่างกรุงเทพมหานคร (ละติจูด 13.75° N, ลองจิจูด 100.50° E) กับกรุงลอนดอน (ละติจูด 51.50° N, ลองจิจูด 0.12° W) กำหนดรัศมีเฉลี่ยของโลก $R = 6,371$ km

PICTURE (การจำลองแบบกายภาพ): กำหนดจุดศูนย์กลางโลกอยู่ที่จุดกำเนิด เมืองทั้งสองอยู่บนผิวทรงกลมรัศมี R มีเวกเตอร์ตำแหน่งหนึ่งหน่วย $\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง $\Delta\sigma$ จะเป็นตัวกำหนดระยะทางบนผิวโค้งตามสูตร $d = R\Delta\sigma$

SOLVE (การคำนวณเชิงสัญลักษณ์และตัวเลข): 1. แปลงละติจูดเป็นมุมเชิงขั้ว

θ:

$$\theta_1 = 90^\circ - 13.75^\circ = 76.25^\circ, \quad \phi_1 = 100.50^\circ \tag{1.25}$$
$$\theta_2 = 90^\circ - 51.50^\circ = 38.50^\circ, \quad \phi_2 = -0.12^\circ \tag{1.26}$$

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยระบุตำแหน่งของแต่ละเมืองในพิกัดคาร์ทีเซียน:

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k} \tag{1.27}$$

3. หามุมระหว่างเวกเตอร์จากผลคูณจุด $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \cos(\Delta\sigma)$:

$$\cos(\Delta\sigma) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{1.28}$$

แทนค่าเชิงตัวเลข:

$$\cos(\Delta\sigma) = \cos(76.25^\circ)\cos(38.50^\circ) + \sin(76.25^\circ)\sin(38.50^\circ)\cos(100.62^\circ) \tag{1.29}$$
$$= (0.2377)(0.7826) + (0.9713)(0.6225)(-0.1843) \tag{1.30}$$
$$= 0.1860 - 0.1114 = 0.0746 \tag{1.31}$$
$$\Delta\sigma = \arccos(0.0746) \approx 1.496\,\text{rad} \quad (85.72^\circ) \tag{1.32}$$

4. คำนวณระยะทางจริงบนผิวโลก:

$$d = R\Delta\sigma = (6,371\,\text{km}) \times (1.496\,\text{rad}) \approx 9,531\,\text{km} \tag{1.33}$$

CHECK (การตรวจสอบความสมเหตุสมผล): ระยะทางเส้นทางบินตรงกรุงเทพฯ-ลอนดอน ในความเป็นจริงอยู่ที่ประมาณ $9,530 - 9,550$ km ผลการคำนวณด้วยเรขาคณิตพิกัดทรงกลมมีความแม่นยำสูงมาก ■

การจำลองด้วย Python คำนวณระยะทางวงกลมใหญ่บนทรงกลมโลก

```python
import numpy as np

R_earth = 6371.0  # รัศมีเฉลี่ยของโลก (km)
# พิกัดละติจูด
    ลองจิจูด -: กรุงเทพฯ (13.75N, 100.50E), ลอนดอน (51.50N, 0.12W)
lat1, lon1 = 13.75, 100.50
lat2, lon2 = 51.50, -0.12

# แปลงเป็นมุมเชิงขั้ว theta (Colatitude) และมุมทิศราบ phi (Azimuth) ใน
    หน่วยเรเดียน
th1, ph1 = np.radians(90.0 - lat1), np.radians(lon1)
th2, ph2 = np.radians(90.0 - lat2), np.radians(lon2)

# คำนวณมุมรองรับส่วนโค้ง delta_sigma จากผลคูณจุดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
cos_sigma = np.cos(th1)*np.cos(th2) + np.sin(th1)*np.sin(th2)*
    np.cos(ph1 - ph2)
delta_sigma = np.arccos(cos_sigma)
dist_km = R_earth * delta_sigma

print(f"มุมรองรับจุดศูนย์กลาง: {np.degrees(delta_sigma):.2f} องศา")
print(f"ระยะทางวงกลม
    ใหญ่ (Great-Circle Distance): {dist_km:.2f} กิโลเมตร")
```

ตัวอย่างที่ 1.2 การคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกตันหมุนรอบแกน

โจทย์: ทรงกระบอกตันมวล M รัศมี R ความยาว L มีความหนาแน่นสม่ำเสมอ จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนสมมาตร z

SOLVE: ในพิกัดทรงกระบอก ระยะห่างจากแกนหมุนคือ ρ ปริมาตรเชิงอนุพันธ์คือ $dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$ และความหนาแน่นเชิงปริมาตร $\sigma = M/(\pi R^2 L)$:

$$I_z = \iiint \rho^2 dm = \sigma \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^3\, d\rho \tag{1.34}$$

$$= \sigma \cdot [z]_{-L/2}^{L/2} \cdot [\phi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \sigma \cdot L \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \tag{1.35}$$

$$= \left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right) \cdot \left(\frac{\pi L R^4}{2}\right) = \frac{1}{2} M R^2 \tag{1.36}$$

CHECK: หน่วยของโมเมนต์ความเฉื่อยคือ $[MR^2] = \mathrm{kg\,m^2}$ สอดคล้องกับค่ามาตรฐานในตารางกลศาสตร์ของแข็ง ■

การจำลองด้วย Python อินทิเกรตเชิงตัวเลขโมเมนต์ความเฉื่อยพิกัดทรงกระบอก

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import tplquad

M, R, L = 5.0, 0.4, 1.2  # มวล (kg), รัศมี (m), ความยาว (m)
density = M / (np.pi * R**2 * L)

# ปริพันธ์สามชั้น: \int dz \int dphi \int (rho_density * rho^3) drho
num_I, _ = tplquad(
    lambda rho, phi, z: density * (rho**3),
    -L/2, L/2, 0, 2*np.pi, 0, R
)
exact_I = 0.5 * M * R**2
print(f"ผลเชิงตัวเลข (Numerical):  {num_I:.5f} kg*m^2")
print(f"ผลแม่นตรง (Analytical):  {exact_I:.5f} kg*m^2")
```

1.4 บทสรุปประจำบท

ตารางที่ 1.2 ตารางสรุปเปรียบเทียบคุณลักษณะของระบบพิกัดเชิงตั้งฉากทั้ง 3 ระบบ

คุณลักษณะ	คาร์ทีเซียน	ทรงกระบอก	ทรงกลม
พิกัดตำแหน่ง	(x, y, z)	(ρ, ϕ, z)	(r, θ, ϕ)
ขอบเขตตัวแปร	$-\infty < x, y, z < \infty$	$\rho \geq 0, \phi \in [0, 2\pi)$	$r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$
ตัวประกอบ สเกล (h_1, h_2, h_3)	$(1, 1, 1)$	$(1, \rho, 1)$	$(1, r, r\sin\theta)$
ระยะ ทาง เชิงอนุพันธ์ ds^2	$dx^2 + dy^2 + dz^2$	$d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$	$dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$
ปริมาตร เชิงอนุพันธ์ dV	$dx\, dy\, dz$	$\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$	$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$
สมมาตร ที่ เหมาะสม	ระนาบ กล่อง ลูกบาศก์	ทรงกระบอก เส้นลวด ท่อ	ทรงกลม จุดประจุ ดาราศาสตร์

1.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

1.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions)

1. เหตุใดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{\rho}$ และ $\hat{\phi}$ ในพิกัดทรงกระบอก จึงไม่เป็นเวกเตอร์คงที่เมื่อเทียบกับเวลาและตำแหน่ง ต่างจาก $\hat{i}, \hat{j}$ ในพิกัดคาร์ทีเซียน

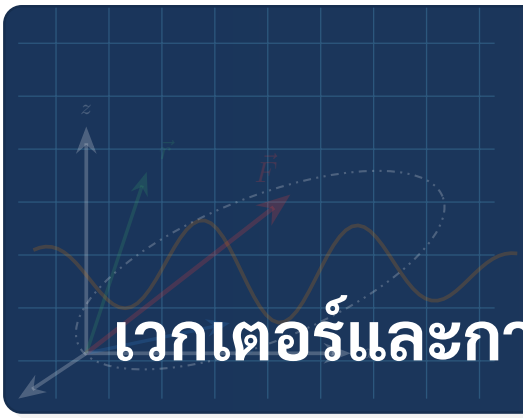
2. ในระบบนำทาง GPS หากโลกเป็นทรงรี (Oblate Spheroid) ที่แป้นตรงขั้ว จะส่งผลกระทบต่อการแปลงพิกัดอย่างไรเมื่อเทียบกับแบบจำลองทรงกลมสมบูรณ์

1.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems)

1. จงแปลงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ ให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) และพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)

2. จงคำนวณหาปริมาตรของรูปทรงกรวยตัน (Cone) ที่มีความสูง H และรัศมีฐาน R โดยการอินทิเกรตในระบบพิกัดทรงกระบอก

3. กำหนดความหนาแน่นประจุของก้อนเมฆรูปทรงกลมรัศมี R มีค่าแปรผันตามระยะทาง $\rho_e(r) = \rho_0(1 - r^2/R^2)$ จงคำนวณประจุไฟฟ้าสุทธิทั้งหมด Q_{total} ภายในก้อนเมฆ



บทที่ 2

เวกเตอร์และการวิเคราะห์เวกเตอร์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. ดำเนินการทางพีชคณิตเวกเตอร์ขั้นสูง รวมถึงผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้นและผลคูณเชิงเวกเตอร์สามชั้นได้อย่างถูกต้อง
2. อธิบายความหมายทางกายภาพของเกรเดียนต์ ไดเวอร์เจนซ์ และเคิร์ล ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลง ฟลักซ์ และสภาพการหมุนวนได้
3. ประยุกต์ใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์เพื่อจัดรูปและแก้สมการทางแม่เหล็กไฟฟ้าและกลศาสตร์ได้
4. อธิบายหลักการทำงานของเซนเซอร์วัดความเร่งและเข็มทิศดิจิทัลในสมาร์ตโฟน (IMU) และแรงลอเรนซ์ในเครื่องเร่งอนุภาคได้

2.1 พีชคณิตเวกเตอร์และผลคูณหลายชั้น

ปริมาณทางฟิสิกส์ส่วนใหญ่จัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ เช่น การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง แรง โมเมนตัม สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก การเข้าใจการดำเนินการคูณเวกเตอร์หลายชั้นจึงเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษากลศาสตร์และแม่เหล็กไฟฟ้า

2.1.1 ผลคูณจุดและผลคูณไขว้

กำหนดเวกเตอร์ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.1}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta\, \hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

2.1.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (Scalar Triple Product)

ผลคูณ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ มีความหมายทางเรขาคณิตคือ **ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelepiped)** ที่มีด้านทั้งสามสร้างขึ้นโดยเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

สมบัติการสลับหมุนเวียน (Cyclic Permutation):

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{2.4}$$

2.1.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์สามชั้นและกฎ BAC-CAB

ผลคูณ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบของ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เสมอ สอดคล้องกับเอกลักษณ์:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{2.5}$$

เอกลักษณ์นี้มีบทบาทอย่างยิ่งในการพิสูจน์การเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุในสนามแม่เหล็ก และการกระจายตัวของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

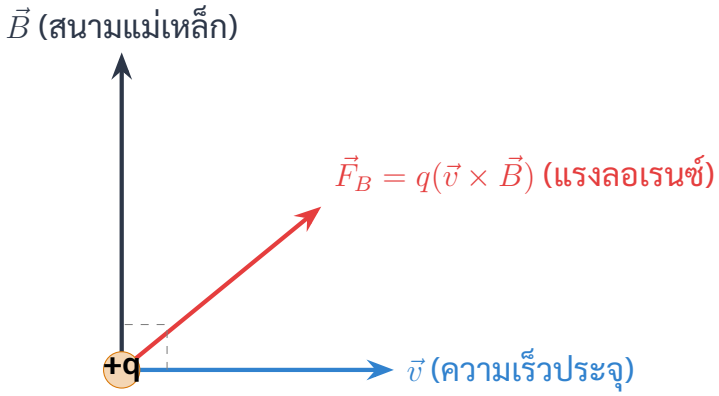
2.2 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์

ตัวดำเนินการแนบลา ∇ (Del Operator) เป็นตัวดำเนินการอนุพันธ์เวกเตอร์เชิงเส้น ในพิกัดคาร์ทีเซียน:

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.6}$$

ตารางที่ 2.1 การดำเนินการคูณเวกเตอร์ ความหมายเชิงเรขาคณิต และการประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์

การดำเนินการ	ความหมายเชิงเรขาคณิต	ตัวอย่างการประยุกต์ในฟิสิกส์
$\vec{A}\cdot\vec{B}$ (Dot Product)	การฉายเวกเตอร์ / วัดความขนาน	งาน $W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$, ฟลักซ์ $\Phi=\vec{E}\cdot\vec{A}$
$\vec{A}\times\vec{B}$ (Cross Product)	พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน / เวกเตอร์ตั้งฉาก	ทอร์ก $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$, แรงลอเรนซ์ $\vec{F}_B=q(\vec{v}\times\vec{B})$
$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$	ปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน	การเลี้ยวเบนของผลึก (Reciprocal Lattice)
$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$	เวกเตอร์บนระนาบ $(\vec{B},\vec{C})$ (BAC-CAB)	เวกเตอร์พอยน์ติง $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$



ภาพที่ 2.1 ทิศทางของแรงแม่เหล็กลอเรนซ์ตามกฎผลคูณไขว้และกฎมือขวา

2.2.1 เกรเดียนต์ (Gradient)

เมื่อ ∇ กระทำกับสนามสเกลาร์ $\psi(x, y, z)$ จะได้สนามเวกเตอร์:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \tag{2.7}$$

ความหมายทางกายภาพ: เวกเตอร์เกรเดียนต์จะชี้ไปในทิศทางที่ค่าของ ψ มีอัตราการเพิ่มขึ้นเร็วที่สุด และขนาดของมัน $|\nabla\psi|$ แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดต่อหน่วยระยะทาง ตัวอย่างเช่น แรงในสนามอนุรักษ์ $\vec{F} = -\nabla U$ โดยที่แรงจะชี้ไปยังทิศทางที่พลังงานศักย์ลดลงเร็วที่สุด

2.2.2 ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence)

เมื่อ ∇ ดอทกับสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.8}$$

ความหมายทางกายภาพ: ไดเวอร์เจนซ์วัดอัตราการไหลออกสุทธิของสนามต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร:

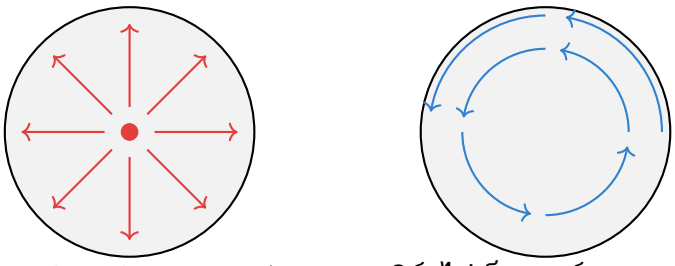
- $\nabla \cdot \vec{A} > 0$: จุดนั้นเป็น **แหล่งกำเนิด (Source)** เช่น ประจุบวกในสนามไฟฟ้า
- $\nabla \cdot \vec{A} < 0$: จุดนั้นเป็น **หลุมดูด (Sink)** เช่น ประจุลบในสนามไฟฟ้า
- $\nabla \cdot \vec{A} = 0$: สนามมีสภาพ **โซลีนอยดัล (Solenoidal)** ไม่มีการสะสม เช่น สนามแม่เหล็ก $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (ไม่มีขั้วแม่เหล็กเดี่ยว)

2.2.3 เคิร์ล (Curl)

เมื่อ ∇ ครอสกับสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

ความหมายทางกายภาพ: เคิร์ลวัดแนวโน้มในการหมุนวน (Circulation / Vorticity) ของสนามรอบจุดหนึ่ง ๆ หากสนามเวกเตอร์ใดมี $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$ เรียกว่า **สนามไร้การหมุน (Irrotational)** หรือสนามอนุรักษ์



(ก) ไดเวอร์เจนซ์บวก ($\nabla \cdot \vec{A} > 0$) (ข) เคิร์ลไม่เป็นศูนย์ ($\nabla \times \vec{A} \neq \vec{0}$)

ภาพที่ 2.2 การแสดงภาพเชิงกายภาพของไดเวอร์เจนซ์ (แหล่งกำเนิด) และเคิร์ล (การหมุนวน)

2.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และชีวิตประจำวัน

2.3.1 เซนเซอร์วัดความเร่งและเข็มทิศดิจิทัลในสมาร์ตโฟน (IMU)

สมาร์ตโฟนในยุคปัจจุบันบรรจุหน่วยวัดความเฉื่อย (Inertial Measurement Unit: IMU) ซึ่งประกอบด้วยเซนเซอร์ความเร่ง 3 แกน (Accelerometer) และเซนเซอร์สนามแม่เหล็ก 3 แกน (Magnetometer):

$$\vec{a}_{\text{measured}} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad \vec{B}_{\text{earth}} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \tag{2.10}$$

ระบบปฏิบัติการใช้ผลคูณไขว้ $\vec{a} \times \vec{B}$ เพื่อสร้างเวกเตอร์ชี้ไปทางทิศตะวันออก จากนั้นใช้ผลคูณไขว้ซ้ำอีกครั้งเพื่อสร้างเวกเตอร์ชี้ทิศเหนือทางภูมิศาสตร์ ทำให้หน้าจอสมาร์ตโฟนสามารถปรับทิศทางของแผนที่และการแสดงผลได้อย่างแม่นยำ

ตัวอย่าง ที่ 2.1 การ คำนวณ การ เคลื่อนที่ ของ อิเล็กตรอน ใน สนาม แม่ เหล็ก สม่ำเสมอ

โจทย์: อิเล็กตรอนประจุ $q = -e$ มวล m ถูกยิงด้วยความเร็ว $\vec{v} = v_0\hat{i}$ เข้าไปในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ $\vec{B} = B_0\hat{k}$ จงหาสมการการเคลื่อนที่ รัศมีความโค้ง และคาบการโคจร (Cyclotron Period)

PICTURE: ความเร็ว อยู่ใน ระนาบ xy ส่วน สนาม แม่ เหล็ก ชี้ ตาม แกน $+z$ แรงลอเรนซ์ $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ จะตั้งฉากกับความเร็วตลอดเวลา ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบ xy

SOLVE: 1. คำนวณแรงแม่เหล็ก:

$$\vec{F}_B = -e(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) \times (B_0\hat{k}) = -e\left(-v_xB_0\hat{j} + v_yB_0\hat{i}\right) = -eB_0v_y\hat{i} + eB_0v_x\hat{j} \tag{2.11}$$

2. ใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_B$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -eB_0v_y \tag{2.12}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = eB_0 v_x \tag{2.13}$$

3. นิยามความถี่ไซโคลตรอน $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ จะได้สมการตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0 \tag{2.14}$$

4. แรงแม่เหล็กทำหน้าที่เป็นแรงสู่ศูนย์กลาง $F_c = \frac{mv^2}{R} = evB_0$:

$$R = \frac{mv}{eB_0} \tag{2.15}$$

และคาบการโคจรคือ:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB_0} \tag{2.16}$$

CHECK: คาบการโคจร T ไม่ขึ้นกับความเร็ว v หรือรัศมี R ซึ่งเป็นหลักการทำงานสำคัญของเครื่องเร่งอนุภาคไซโคลตรอน (Cyclotron Accelerator) ■

การจำลองด้วย Python หาผลเฉลยวิติการเคลื่อนที่ของอนุภาคประจุในสนามแม่เหล็ก

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

q, m, B0 = 1.6e-19, 9.11e-31, 0.05  # อิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็ก 0.05 T
v0 = 2.0e6  # ความเร็วต้น 2 x 10^6 m/s ตามแนวแกน x

# ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง: dx/dt = vx, dy/dt = vy, dv/dt = (q/m)(v x B)
def lorentz_ode(t, state):
    x, y, vx, vy = state
    ax = (q / m) * (vy * B0)
    ay = (q / m) * (-vx * B0)
    return [vx, vy, ax, ay]

T_exact = 2 * np.pi * m / (q * B0)
sol = solve_ivp(lorentz_ode, [0, T_exact], [0, 0, v0, 0], t_eval=np.linspace(0, T_exact, 100))

R_exact = m * v0 / (q * B0)
R_sim = np.max(sol.y[1]) / 2.0
print(f"คาบการโคจร T: {T_exact*1e9:.3f} ns | รัศมีไซโคลตรอน: {R_exact*1e3:.3f} mm")
```

ตัวอย่างที่ 2.2 การพิสูจน์สนามไฟฟ้าเป็นสนามอนุรักษ์

โจทย์: กำหนดสนามไฟฟ้าของจุดประจุ Q ณ จุดกำเนิดคือ $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ จงพิสูจน์ว่า $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

SOLVE: สังเกตว่า $\hat{r} = \vec{r}/r$ ดังนั้น $\vec{E} = \frac{kQ}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ หาเคิร์ลตามแนวแกน z:

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kQy}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kQx}{r^3}\right) \tag{2.17}$$

ใช้กฎลูกโซ่โดยที่ $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ และ $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kQy}{r^3}\right) = kQy\left(-\frac{3}{r^4}\frac{x}{r}\right) = -\frac{3kQxy}{r^5} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kQx}{r^3}\right) = kQx\left(-\frac{3}{r^4}\frac{y}{r}\right) = -\frac{3kQxy}{r^5} \tag{2.19}$$

เมื่อนำมาลบกันจะได้ $(\nabla \times \vec{E})_z = 0$ และในทำนองเดียวกันสำหรับแกน x และ y:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \tag{2.20}$$

CHECK: เนื่องจาก $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ ทุกจุด (ยกเว้นที่ $r = 0$) สนามไฟฟ้าสถิตจึงเป็นสนามอนุรักษ์ และสามารถนิยามฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าสเกลาร์ $V = kQ/r$ ที่ทำให้ $\vec{E} = -\nabla V$ ได้เสมอ ■

การจำลองด้วย Python ตรวจสอบเคิร์ลของสนามไฟฟ้าสถิตด้วย SymPy

```python
import sympy as sp

x, y, z, k, Q = sp.symbols('x y z k Q', real=True)
r = sp.sqrt(x**2 + y**2 + z**2)

# นิยามองค์ประกอบสนามไฟฟ้า E = kQ/r^3 * (x, y, z)
Ex = k * Q * x / r**3
Ey = k * Q * y / r**3
Ez = k * Q * z / r**3

# คำนวณองค์ประกอบของ Curl(E)
curl_x = sp.diff(Ez, y) - sp.diff(Ey, z)
curl_y = sp.diff(Ex, z) - sp.diff(Ez, x)
curl_z = sp.diff(Ey, x) - sp.diff(Ex, y)

print("Curl E_x =", sp.simplify(curl_x))
print("Curl E_y =", sp.simplify(curl_y))
print("Curl E_z =", sp.simplify(curl_z))
print("ยืนยันสนามไฟฟ้าสถิตเป็นสนามอนุรักษ์: Curl = 0 ทุกแกน")
```

2.4 บทสรุปประจำบท

ตารางที่ 2.2 สรุปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เวกเตอร์หลักและเอกลักษณ์สำคัญ

การดำเนินการ	รูปแบบคณิตศาสตร์	ความหมายทางฟิสิกส์
เกรเดียนต์	$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_i$	ทิศทางและอัตราการเพิ่มขึ้นสูงสุดของสเกลาร์
ไดเวอร์เจนซ์	$\nabla \cdot \vec{A} = \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$	อัตราการไหลออกสุทธิ / ความหนาแน่นของแหล่งกำเนิด
เคิร์ล	$\nabla \times \vec{A} = \det[\hat{e}_i, \partial_j, A_k]$	ความหนาแน่นของการหมุนวนรอบจุด
เอกลักษณ์ 1	$\nabla \times (\nabla\psi) = \vec{0}$	เกรเดียนต์ไม่มีการหมุนวน (สนามอนุรักษ์)
เอกลักษณ์ 2	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$	เส้นสนามของเคิร์ลเป็นวงปิดต่อเนื่องเสมอ

2.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

2.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions)

1. หากสนามแม่เหล็กมีไดเวอร์เจนซ์เป็นศูนย์เสมอ ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$) สิ่งนี้บอกอะไรเกี่ยวกับเส้นแรงแม่เหล็กและการมีอยู่ของขั้วแม่เหล็กเดี่ยว (Magnetic Monopole)

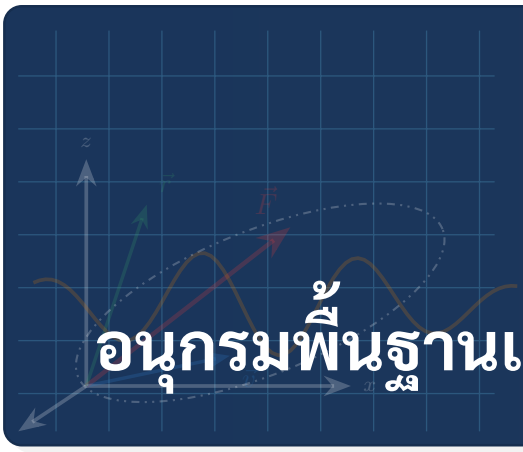
2. ในพายุไซโคลน เหตุใดลมจึงหมุนวนทวนเข็มนาฬิกาในซีกโลกเหนือ จงอธิบายด้วยความสัมพันธ์ของแรงโคริออลิสและเคิร์ลของสนามความเร็ว

2.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems)

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

2. กำหนดสนามเวกเตอร์ $\vec{v} = (y^2)\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + (2yz)\hat{k}$ จงตรวจสอบว่าสนามนี้เป็นสนามอนุรักษ์หรือไม่ หากเป็น จงหาฟังก์ชันศักย์สเกลาร์ ϕ ที่สอดคล้องกับ $\vec{v} = \nabla\phi$

3. อนุภาคประจุ $q = 2\,\mu$C เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) \times 10^5$ m/s ในบริเวณที่มีทั้งสนามไฟฟ้า $\vec{E} = 5 \times 10^3\,\hat{k}$ V/m และสนามแม่เหล็ก $\vec{B} = 0.2\,\hat{i}$ T จงหาขนาดและทิศทางของแรงลอเรนซ์รวมสุทธิ



บทที่ 3

อนุกรมพื้นฐานและการประมาณค่า

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. อธิบายทฤษฎีบทการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ อนุกรมแมคลอริน และรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลังได้
2. เลือกใช้การประมาณค่ามุมเล็ก การกระจายทวินาม และอนุกรมกำลังเพื่อสร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ได้อย่างเหมาะสม
3. ประเมินขอบเขตความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าทางกายภาพโดยใช้พจน์เศษเหลือลากรองจ์ได้
4. เชื่อมโยงการประมาณค่าเข้ากับปรากฏการณ์จริง เช่น การแผ่รังสีของวัตถุดำ และการแกว่งของลูกตุ้มมุมกว้างได้

3.1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

ในวิชาฟิสิกส์ ปัญหาทางกายภาพจำนวนมากไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงในรูปปิด (Exact Analytical Closed Form) ได้ การประมาณค่าฟังก์ชันที่ซับซ้อนรอบจุดสมดุล (Equilibrium Point) ด้วยพหุนามจึงเป็นเครื่องมือที่มีพลังมหาศาล

หากฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับในย่านใกล้เคียงของจุด $x = a$

ฟังก์ชันดังกล่าวสามารถกระจายในรูป **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+R_n(x) \quad (3.1)$$

โดยที่ $R_n(x)$ คือ พจน์เศษเหลือลากรองจ์ (Lagrange Remainder):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{สำหรับบางค่า } \xi \in [a,x] \quad (3.2)$$

เมื่อจุดศูนย์กลางการกระจายอยู่ที่จุดกำเนิด $a = 0$ เราจะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin Series)**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad (3.3)$$

อนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันพื้นฐานสำคัญ:

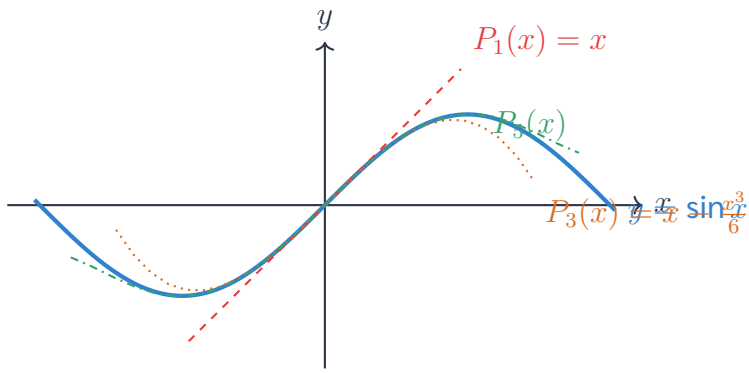
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty) \quad (3.4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (|x| < \infty) \quad (3.5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (|x| < \infty) \quad (3.6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1) \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1) \quad (3.8)$$



การลู่เข้าของพหุนามเทย์เลอร์อันดับ 1, 3, 5 สู่ฟังก์ชันจริง $\sin x$

ภาพที่ 3.1 การเปรียบเทียบฟังก์ชัน $\sin x$ กับพหุนามประมาณค่าเทย์เลอร์ที่อันดับต่าง ๆ

ตารางที่ 3.1 การกระจายอนุกรมกำลัง รัศมีการลู่เข้า และตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์

ฟังก์ชัน $f(x)$	**พจน์ แรก ของ การก ระ จาย** $(x \approx 0)$	**ช่วงลู่เข้า**	**การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์**
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$	การแจกแจงโบลต์ซมันน์, กฎของพลังค์
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$	การสั่นแบบฮาร์มอนิก, ลูกตุ้มมุมกว้าง
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$	$\lvert x\rvert < \infty$	พลังงานศักย์รอบจุดสมดุลเสถียร
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$	$-1 < x \leq 1$	เอนโทรปี, กระบวนการไอโซเทอร์มัล
$(1+x)^p$	$1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \cdots$	$\lvert x\rvert < 1$	สัมพัทธภาพพิเศษ $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

3.2 เทคนิคการประมาณค่าทางฟิสิกส์

3.2.1 การประมาณค่ามุมเล็ก (Small Angle Approximation)

สำหรับการเคลื่อนที่แบบแกว่งกวัด เช่น ลูกตุ้มนาฬิกา หรือการเลี้ยวเบนของแสง เมื่อมุมเบี่ยงเบน $\theta \ll 1$ rad (เช่น $\theta < 10^\circ \approx 0.17$ rad):

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \approx \theta \tag{3.9}$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{3.10}$$

$$\tan\theta \approx \theta + \frac{\theta^3}{3} \approx \theta \tag{3.11}$$

3.2.2 การกระจายทวินาม (Binomial Expansion)

สำหรับการกระจายฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลัง n ใด ๆ (ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{3.12}$$

ในทางฟิสิกส์ เมื่อ $|x| \ll 1$ เราสามารถตัดพจน์อันดับสองขึ้นไปทิ้งได้:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x \tag{3.15}$$

3.3 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์

3.3.1 การแผ่รังสีของวัตถุดำและกฎของเรย์ลี-ยีนส์

กฎการแผ่รังสีของมักซ์ พลังค์ (Planck's Radiation Law) อธิบายความหนาแน่นพลังงานเชิงสเปกตรัมของวัตถุดำ:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{3.16}$$

ในย่านความยาวคลื่นยาว ($\lambda \gg hc/k_B T$) หรืออุณหภูมิสูง กำหนดให้ $x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \ll 1$ กระจายพจน์เอกซ์โพเนนเชียลในอนุกรมเทย์เลอร์: $e^x \approx 1 + x$:

$$e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx \left(1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1 = \frac{hc}{\lambda k_B T} \tag{3.17}$$

แทนกลับลงในสมการของพลังค์:

$$u(\lambda, T) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)} = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \tag{3.18}$$

ซึ่งก็คือ **กฎของเรย์ลี-ยีนส์ (Rayleigh-Jeans Law)** ตามฟิสิกส์ดั้งเดิม แสดงให้เห็นว่าทฤษฎีควอนตัมของพลังค์ลู่เข้าสู่ฟิสิกส์ดั้งเดิมได้อย่างสมบูรณ์แบบตามหลักความสอดคล้อง (Correspondence Principle)

ตัวอย่างที่ 3.1 การคำนวณคาบของลูกตุ้มนาฬิกาที่มุมกว้าง

โจทย์: สมการไม่เชิงเส้นของลูกตุ้มความยาว L คือ $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ จงประมาณค่าคาบการแกว่งเมื่อมุมเริ่มต้น θ_0 มีค่าไม่เล็กมาก โดยประมาณ $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$

PICTURE: สำหรับมุมเล็ก คาบคือ $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ แต่เมื่อมุมกว้างขึ้น การประมาณพจน์ถัดไปของอนุกรมจะทำให้คาบยาวขึ้น

SOLVE: จากการวิเคราะห์อินทิกรัลอิลลิปติก (Elliptic Integral) ของการอนุรักษ์พลังงาน:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{3.19}$$

การกระจายในอนุกรมกำลังของ $\sin(\theta_0/2)$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots\right] \tag{3.20}$$

เมื่อมุม θ_0 อยู่ในหน่วยเรเดียน และประมาณ $\sin(\theta_0/2) \approx \theta_0/2$:

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \tag{3.21}$$

หากมุมกว้าง $\theta_0 = 30^\circ = \pi/6 \approx 0.5236$ rad:

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{(0.5236)^2}{16}\right) = T_0(1 + 0.0171) = 1.0171\,T_0 \tag{3.22}$$

CHECK: คาบเพิ่มขึ้นประมาณ 1.7% เมื่อแกว่งที่มุม 30° ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองจริงว่าลูกตุ้มที่แกว่งมุมกว้างจะเดินช้าลงเล็กน้อย ■

การจำลองด้วย Python เปรียบเทียบคาบลูกตุ้มมุมกว้างกับอินทิกรัลอิลลิปติก

```python
import numpy as np
from scipy.special import ellipk

L, g = 1.0, 9.80665  # ความยาวลูกตุ้ม 1 m
T0 = 2 * np.pi * np.sqrt(L / g)

theta0_deg = np.array([5, 15, 30, 45, 60])
theta0_rad = np.radians(theta0_deg)

# 1. การประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์: T/T0 \approx 1 + (theta0^2)/16
approx_ratio = 1 + (theta0_rad**2) / 16.0

# 2. ผลเฉลยแม่นตรง: T/T0 = (2/pi) * K(sin^2(theta0/2))
k_param = np.sin(theta0_rad / 2.0)**2
exact_ratio = (2.0 / np.pi) * ellipk(k_param)

print("มุม องศา() | ผลประมาณเทย์เลอร์ | ผลเฉลยแม่นตรง (Elliptic) | ความคลาดเคลื่อน (%)")
for deg, app, ex in zip(theta0_deg, approx_ratio, exact_ratio):
    err = abs(app - ex) / ex * 100
    print(f"    {deg:2d}      |       {app:.5f}      |          {ex:.5f}          |        {err:.3f}%")
```

ตัวอย่างที่ 3.2 การประมาณผลต่างพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่ระดับความสูง h เหนือผิวโลก

โจทย์: พลังงานศักย์โน้มถ่วงสัมบูรณ์คือ $U(r) = -G\frac{Mm}{r}$ จงแสดงว่าที่ระดับความสูง $h \ll R_E$ เหนือผิวโลก ผลต่างพลังงานศักย์จะลดรูปลงเหลือ $\Delta U \approx mgh$

SOLVE: กำหนดรัศมีโลก R_E และระยะห่างจากศูนย์กลางโลก $r = R_E + h$:

$$\Delta U = U(R_E+h) - U(R_E) = -GMm\left(\frac{1}{R_E+h} - \frac{1}{R_E}\right) = \frac{GMm}{R_E}\left(1 - \frac{1}{1+h/R_E}\right) \tag{3.23}$$

เนื่องจาก $h/R_E \ll 1$ ใช้การกระจายทวินาม $(1+x)^{-1} \approx 1 - x + x^2$:

$$1 - \left(1 - \frac{h}{R_E}\right) = \frac{h}{R_E} \tag{3.24}$$

แทนกลับลงในสมการ:

$$\Delta U \approx \frac{GMm}{R_E}\left(\frac{h}{R_E}\right) = \left(\frac{GM}{R_E^2}\right)mh \tag{3.25}$$

จากนิยามความเร่งโน้มถ่วงที่ผิวโลก $g = \frac{GM}{R_E^2} \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$:

$$\Delta U \approx mgh \tag{3.26}$$

CHECK: ผลลัพธ์กลับคืนสู่สูตรพลังงานศักย์พื้นฐานของนิวตันที่ใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสมบูรณ์แบบ ■

การจำลองด้วย Python เปรียบเทียบการกระจายทวินามพลังงานศักย์โน้มถ่วง

```python
import numpy as np

G = 6.6743e-11     # ค่าคงที่โน้มถ่วงสากล (m^3 kg^-1 s^-2)
M_E = 5.972e24     # มวลของโลก (kg)
R_E = 6.371e6      # รัศมีของโลก (m)
m = 100.0          # มวลวัตถุ 100 kg
g = G * M_E / (R_E**2)

altitudes_km = np.array([1, 10, 50, 100, 400])  # ระดับความสูง 1 km ถึงสถานีอวกาศ ISS

for h_km in altitudes_km:
    h = h_km * 1e3
    exact_dU = G * M_E * m * (1.0/R_E - 1.0/(R_E + h))
    approx_dU = m * g * h
    diff_pct = (approx_dU - exact_dU) / exact_dU * 100
    print(f"h = {h_km:3d} km | แม่นตรง: {exact_dU/1e6:7.2f} MJ | ประมาณ mgh: {approx_dU/1e6:7.2f} MJ | ค่าต่าง: {diff_pct:.2f}%")
```

3.4 บทสรุปประจำบท

ตารางที่ 3.2 การกระจายอนุกรมที่ใช้บ่อยที่สุดในฟิสิกส์

ฟังก์ชัน	พหุนามประมาณค่า ($\lvert x\rvert \ll 1$)	การประยุกต์ในฟิสิกส์
$(1+x)^n$	$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$	พลังงานจลน์สัมพัทธภาพ, ศักย์โน้มถ่วง
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6}$	การแกว่งของลูกตุ้ม, การแทรกสอดเลี้ยวเบน
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	ทฤษฎีบทการกระจัดเล็ก, พลังงานศักย์สมดุล
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	การแผ่รังสีวัตถุดำ, ทฤษฎีจลน์ของก๊าซเอนโทรปี, การคำนวณงานในกระบวนการไอโซเทอร์มัล
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2}$	

3.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

3.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions)

1. เหตุใดในวิชาฟิสิกส์ จุดสมดุลเสถียร (Stable Equilibrium) จึงสามารถประมาณพลังงานศักย์รอบจุดนั้นให้มีรูปพาราโบลา $U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ ได้เสมอ อธิบายด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

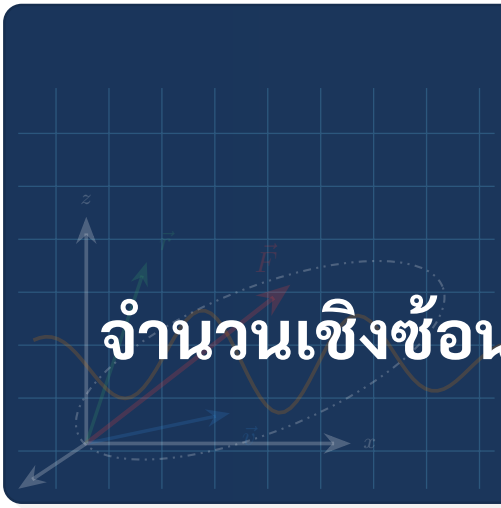
2. ในการคำนวณการเลี้ยวเบนของแสงผ่านสลิตเดี่ยว มุม θ ต้องมีค่าประมาณเท่าใดจึงจะทำให้ความคลาดเคลื่อนของการประมาณ $\sin\theta \approx \theta$ ไม่เกิน 1%

3.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems)

1. การหดตัวของความยาวเชิงสัมพัทธภาพคือ $L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ จงใช้การกระจายทวินามหาการเปลี่ยนแปลงความยาวเชิงสัมพัทธ์ $\Delta L/L_0$ ของเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง $v = 1,000\,\mathrm{m/s}$

2. จงหากระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของศักย์ไฟฟ้าบนแกน z จากไดโพลไฟฟ้า $V(z) = \frac{kq}{z-d/2} - \frac{kq}{z+d/2}$ เมื่อ $z \gg d$ โดยกระจายจนถึงพจน์ $1/z^3$

3. ฟังก์ชันความจุความร้อนตามแบบจำลองของไอน์สไตน์คือ $C_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T}-1)^2}$ จงแสดงว่าที่อุณหภูมิสูง $T \gg \theta_E$ ความจุความร้อนจะลู่เข้าสู่กฎของดูลงและเปอตีต์ $C_V \approx 3R$



บทที่ 4

จำนวนเชิงซ้อนและการประยุกต์ในฟิสิกส์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. ดำเนินการทางพีชคณิตเชิงซ้อน การแปลงรูปเชิงขั้ว และการหารากของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของออยเลอร์และเดอมัวฟวร์ได้
2. อธิบายสมบัติของฟังก์ชันวิเคราะห์และสมการโคชี-รีมันน์ในระนาบเชิงซ้อนได้
3. ใช้ ระเบียบ วิธี เฟส เซอร์ (Phasor Method) ใน การ แก้ ปัญหา วงจรไฟฟ้ากระแสสลับและคลื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ
4. ประยุกต์ใช้อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนในการออกแบบวงจรกรองความถี่เสียง (Audio Filters) และการเคลือบผิวเลนส์ลดแสงสะท้อนได้

4.1 พีชคณิตเชิงซ้อนและสูตรของออยเลอร์

จำนวนเชิงซ้อน z นิยามในรูปส่วนจริงและส่วนจินตภาพ:

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

โดยที่หน่วยจินตภาพ $i = \sqrt{-1}$ สอดคล้องกับ $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ สังยุคเชิงซ้อน (Complex Conjugate) ของ z คือ $z^* = x - iy$ ซึ่งส่งผลให้:

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{4.2}$$

4.1.1 รูปเชิงขั้วและสูตรของออยเลอร์ (Euler's Formula)

ผ่านการกระจายอนุกรมแมคลอรินของ $e^u, \cos\theta, \sin\theta$ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้ค้นพบสูตรที่งดงามและทรงพลังที่สุดสูตรหนึ่งในคณิตศาสตร์:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.3}$$

ทำให้ จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สามารถ เขียนใน รูป เลขชี้กำลัง เชิง ขั้ว (Polar Exponential Form):

$$z = re^{i\theta} \tag{4.4}$$

โดยที่:

- ขนาด (Modulus): $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- อาร์กิวเมนต์ (Argument): $\theta = \arg(z) = \arctan(y/x)$

4.1.2 ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์และการหาราก

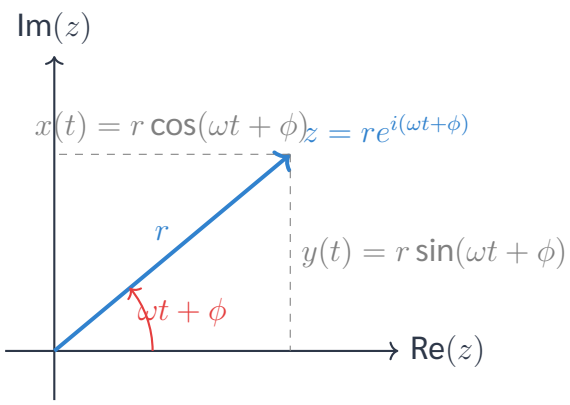
สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \iff (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \tag{4.5}$$

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน $z = re^{i\theta}$:

$$z^{1/n} = r^{1/n}\exp\left[i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.6}$$

รากทั้ง n รากจะกระจายตัวอย่างสมมาตรเป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าบนวงกลมรัศมี $r^{1/n}$ ในระนาบเชิงซ้อน (Argand Plane)



ภาพที่ 4.1 แผนภาพอาร์กอนด์ (Argand Diagram) แสดงเวกเตอร์เฟสเซอร์หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω

ตารางที่ 4.1 รูปแบบการแทนจำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการทางพีชคณิต

รูปแบบการแทน	**สัญลักษณ์และโครงสร้าง**	**จุดเด่นและการประยุกต์**
รูปแบบคาร์ทีเซียน	$z = x + iy$	สะดวกสำหรับการบวกและการลบ ($z_1 \pm z_2$)
รูปแบบเชิงขั้ว	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	แสดงความสัมพันธ์ตรีโกณมิติชัดเจน
รูปแบบเลขชี้กำลังออยเลอร์	$z = re^{i\theta}$	สะดวกสำหรับการคูณ หาร ยกกำลัง และเฟสเซอร์
การ ดำเนิน การสำคัญ	**สูตรการคำนวณ**	**พฤติกรรมทางเรขาคณิต**
การคูณ	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$	ขยายขนาดด้วย r_2 และหมุนมุมทวนเข็มด้วย θ_2
สังยุคเชิงซ้อน	$z^* = x - iy = re^{-i\theta}$	การสะท้อนข้ามแกนจริง
ขนาดและมอดุลัส	$\lvert z\rvert = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2+y^2}$	ระยะทางจากจุดกำเนิดถึงจุด z ในระนาบเชิงซ้อน

4.2 ฟังก์ชันวิเคราะห์และสมการโคชี-รีมันน์

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function)** ณ จุด z_0 ก็ต่อเมื่ออนุพันธ์ $f'(z)$ มีค่าและไม่ขึ้นกับทิศทางการเข้าสู่จุดนั้น:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{4.7}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.1 สมการโคชี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann Equations)

เงื่อนไข จำเป็น และ เพียง พอที่ ทำให้ $f(z) = u + iv$ เป็น ฟังก์ชัน วิเคราะห์ คือ อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u และ v ต้องมีความต่อเนื่องและสอดคล้องกับ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.8}$$

ผลลัพธ์ สำคัญ ตาม มา คือ ทั้ง u และ v จะ ต้อง สอดคล้อง กับ สมการ ลา ปลา ซ (Laplace's Equation):

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{4.9}$$

นั่นคือ u และ v เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic Functions) ซึ่งใช้แก้ปัญหาการกระจายศักย์ไฟฟ้าสถิตและการไหลของของไหลอุดมคติใน 2 มิติได้อย่างแม่นยำ

4.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

4.3.1 ระเบียบวิธีเฟสเซอร์และวงจรกรองความถี่เสียง (Audio Filters)

ในระบบเสียงระดับมืออาชีพ เช่น ลำโพง 2 ทาง หรือ 3 ทาง สัญญาณเสียงประกอบด้วยความถี่ผสม $20\,\text{Hz} - 20\,\text{kHz}$ วงจรตัดแบ่งความถี่ (Audio Crossover Filter) จะแยกความถี่ต่ำส่งไปยังวูฟเฟอร์ (Woofer) และความถี่สูงส่งไปยังทวีตเตอร์ (Tweeter)

เมื่อแรงดันไฟฟ้ากระตุ้นด้วยรูปคลื่นไซน์ $v(t) = V_0 \cos(\omega t) = \text{Re}\{\tilde{V} e^{i\omega t}\}$ อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนของตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุคือ:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \tag{4.10}$$

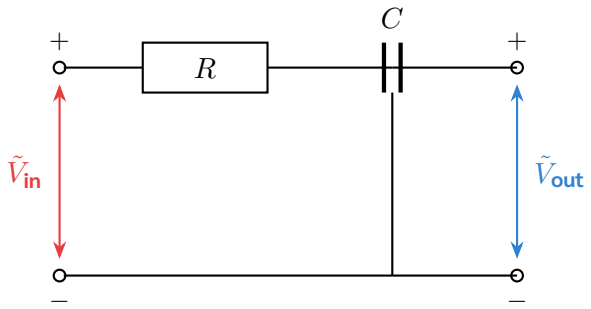
ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) ของวงจร RC Low-Pass Filter:

$$H(\omega) = \frac{\tilde{V}_{\text{out}}}{\tilde{V}_{\text{in}}} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \tag{4.11}$$

ขนาดของอัตราขยาย (Magnitude Gain):

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \tag{4.12}$$

โดยที่ $\omega_c = \frac{1}{RC}$ คือ ความถี่คัตออฟ (Cutoff Frequency) ซึ่งที่ความถี่นี้กำลังของสัญญาณจะลดลงครึ่งหนึ่ง ($-3\,\text{dB}$)



ภาพที่ 4.2 วงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอย่างง่าย (First-Order RC Low-Pass Filter)

ตัวอย่างที่ 4.1 การคำนวณการแทรกสอดของคลื่นสองขบวนด้วยเฟสเซอร์

โจทย์: คลื่นเสียงสองขบวนมีความถี่เท่ากันเคลื่อนที่มาพบกัน ณ จุดหนึ่ง มีสมการ $y_1(t) = 3\cos(\omega t)$ และ $y_2(t) = 4\cos(\omega t + \pi/2)$ จงหาแอมพลิจูดสุทธิ A_{total} และมุมเฟสเริ่มต้น δ ของคลื่นรวม

PICTURE: ใช้การแทนด้วยเวกเตอร์เฟสเซอร์ในระนาบเชิงซ้อน $\tilde{y}_1 = 3e^{i(0)} = 3$ และ $\tilde{y}_2 = 4e^{i\pi/2} = 4i$

SOLVE: 1. รวมเฟสเซอร์ในระนาบเชิงซ้อน:

$$\tilde{y}_{\text{total}} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 3 + 4i \tag{4.13}$$

2. แปลงกลับเป็นรูปเชิงขั้ว $A_{\text{total}}e^{i\delta}$:

$$A_{\text{total}} = |\tilde{y}_{\text{total}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \tag{4.14}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.927\,\text{rad} \quad (53.13^\circ) \tag{4.15}$$

3. สัญญาณคลื่นรวมจริงตามเวลา:

$$y_{\text{total}}(t) = \text{Re}\{\tilde{y}_{\text{total}}e^{i\omega t}\} = 5\cos(\omega t + 0.927) \tag{4.16}$$

CHECK: ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเนื่องจากคลื่นทั้งสองมีเฟสต่างกัน $\pi/2$ (ตั้งฉากกันในระนาบเชิงซ้อน): $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ตรงกันอย่างแม่นยำและรวดเร็วกว่าการใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติทั่วไปมาก ■

การ จำลอง ด้วย Python การ รวม คลื่น ด้วย เฟส เซอร์ เชิงซ้อน และ พล็อต สัญญาณเวลา

```python
import numpy as np

# นิยามพารามิเตอร์ของคลื่น
omega = 2 * np.pi * 100  # ความถี่เชิงมุม 100 Hz
t = np.linspace(0, 0.02, 500)  # เวลา 2 คาบ

# เฟสเซอร์เชิงซ้อน: y1 = 3 + 0j, y2 = 0 + 4j
z1 = 3.0 + 0.0j
z2 = 0.0 + 4.0j
z_total = z1 + z2

# คำนวณแอมพลิจูดสุทธิและมุมเฟส
A_total = np.abs(z_total)
phi_deg = np.degrees(np.angle(z_total))
print(f"แอมพลิจูดสุทธิ A_total: {A_total:.4f}")
print(f"มุมเฟสเริ่มต้น: {phi_deg:.2f} องศา ({np.angle(z_total):.4f} rad)")

# สัญญาณคลื่นรวมจริงตามเวลา Re{z_total * exp(i*omega*t)}
y_total = np.real(z_total * np.exp(1j * omega * t))
```

ตัวอย่างที่ 4.2 การออกแบบสารเคลือบเลนส์ลดแสงสะท้อน (Anti-Reflective Coating)

โจทย์: แสงความยาวคลื่น $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$ (แสงสีเขียว-เหลืองที่ดวงตามนุษย์ไวที่สุด) ตกกระทบผิวเลนส์แก้วที่มีดัชนีหักเห $n_g = 1.50$ จงหาความหนาขั้นต่ำ d ของสารเคลือบแมกนีเซียมฟลูออไรด์ ($n_c = 1.38$) ที่ทำให้แสงสะท้อนหักล้างกันหมดสิ้น

SOLVE: แสงสะท้อนเกิดขึ้นที่ 2 รอยต่อ: 1. รอยต่ออากาศ-สารเคลือบ ($n_{\text{air}} = 1.0 < n_c$): เกิดการกลับเฟส π 2. รอยต่อสารเคลือบ-แก้ว ($n_c = 1.38 < n_g = 1.50$): เกิดการกลับเฟส π เนื่องจากเกิดการกลับเฟสเท่ากันทั้งสองรอยต่อ เงื่อนไขการแทรกสอดแบบหักล้างกัน (Destructive Interference) จึงขึ้นกับผลต่างทางเดินเชิงแสง $2n_c d$:

$$2n_c d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.17}$$

ความหนาขั้นต่ำสุดเลือกที่ $m = 0$:

$$d = \frac{\lambda_0}{4n_c} = \frac{550\,\text{nm}}{4(1.38)} = \frac{550}{5.52} \approx 99.6\,\text{nm} \tag{4.18}$$

CHECK: ความหนาของฟิล์มบางระดับ $\sim 100\,\text{nm}$ (หนึ่งในสี่ของความยาวคลื่นในตัวกลาง) เป็นสเปกมาตรฐานในการเคลือบเลนส์แว่นตาและเลนส์กล้องถ่ายรูปเพื่อกำจัดการสะท้อนแสง ■

การจำลองด้วย Python การสะท้อนของสารเคลือบเลนส์บาง (Thin-Film Reflectance)

```python
import numpy as np

# ดัชนีหักเห
n0 = 1.00  # อากาศ
n1 = 1.38  # สารเคลือบ MgF2
n2 = 1.50  # เนื้อแก้ว Substrate
lambda_design = 550e-9  # ความยาวคลื่นเป้าหมาย (m)

# คำนวณความหนาฟิล์มเคลือบควอเตอร์เวฟ (Quarter-Wave Coating)
d = lambda_design / (4 * n1)
print(f"ความหนาขั้นต่ำที่เหมาะสม d = {d * 1e9:.2f} nm")

# จำลองการสะท้อนตลอดช่วงแสงขาว (400 - 700 nm)
wavelengths = np.linspace(400e-9, 700e-9, 300)
delta = 2 * np.pi * n1 * d / wavelengths
r1 = (n0 - n1) / (n0 + n1)
r2 = (n1 - n2) / (n1 + n2)

# สัมประสิทธิ์การสะท้อนรวม (Reflectance)
R = (r1**2 + r2**2 + 2*r1*r2*np.cos(2*delta)) / (1 + r1**2 *
    r2**2 + 2*r1*r2*np.cos(2*delta))
idx_min = np.argmin(R)
print(f"การสะท้อนขั้นต่ำ: {R[idx_min]*100:.3f}% ที่ lambda = {
    wavelengths[idx_min]*1e9:.1f} nm")
```

4.4 บทสรุปประจำบท

4.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

4.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions)

1. เหตุใดการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ของการสั่นสะเทือนให้อยู่ในระนาบเชิงซ้อนจึงช่วยเปลี่ยนกระบวนการหาอนุพันธ์ให้เป็นการคูณด้วยพีชคณิตธรรมดา

2. อธิบายความหมายเชิงกายภาพของอิมพีแดนซ์ส่วนจินตภาพ (Reactance, X) เปรียบเทียบกับส่วนจริง (Resistance, R) ในแง่การถ่ายเทพลังงานและการสูญเสียพลังงานความร้อน

ตารางที่ 4.2 ตารางสรุปการแทนปริมาณทางฟิสิกส์ด้วยจำนวนเชิงซ้อน

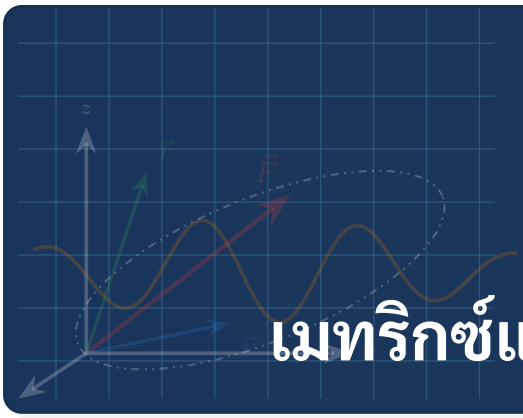
ปริมาณทางกายภาพ	รูปฟังก์ชันจริง	รูปเชิงซ้อน (เฟสเซอร์)
การสั่นฮาร์มอนิก	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$	$\tilde{x}(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)}$
อนุพันธ์ อันดับ หนึ่ง (ความเร็ว)	$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$	$\tilde{v}(t) = i\omega\tilde{x}(t)$
อนุพันธ์ อันดับ สอง (ความเร่ง)	$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$	$\tilde{a}(t) = -\omega^2\tilde{x}(t)$
ตัวต้านทาน	$v = iR$	$Z_R = R$
ตัวเหนี่ยวนำ	$v = L\frac{di}{dt}$	$Z_L = i\omega L$ (แรงดันนำหน้ากระแส $90°$)
ตัวเก็บประจุ	$i = C\frac{dv}{dt}$	$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ (แรงดันตามหลังกระแส $90°$)

4.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems)

1. จงหารากที่ 4 ทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน $z = -16$ และวาดแผนภาพแสดงตำแหน่งรากในระนาบเชิงซ้อน

2. วงจรไฟฟ้า RL อนุกรมต่อกับแหล่งกำเนิด $v(t) = 100\cos(1000t)$ V โดยที่ $R = 30\,\Omega$ และ $L = 40$ mH จงหากระแสไฟฟ้าในรูปเฟสเซอร์ $\tilde{I}$ และกระแสจริงตามเวลา $i(t)$

3. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกหรือไม่ หากเป็น จงหาฟังก์ชันคู่สังยุค $v(x, y)$ ที่ทำให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์



บทที่ 5

เมทริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. ดำเนินการทางพีชคณิตของเมทริกซ์ การหาดีเทอร์มิแนนต์ ทรานสโพส และเมทริกซ์ผกผันได้อย่างคล่องแคล่ว
2. ประยุกต์ใช้เมทริกซ์การหมุนใน 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับกลศาสตร์การหมุน และระบบกราฟิกเสมือน (AR/VR) ได้
3. คำนวณค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง และแปลงเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปทแยงมุม (Diagonalization) ได้
4. วิเคราะห์โหมดการสั่นสะเทือนปกติ (Normal Modes) ของระบบอนุภาคเชื่อมคู่ เช่น การสั่นสะเทือนของอาคารต้านแผ่นดินไหวได้

5.1 การดำเนินการของเมทริกซ์และการแปลงเชิงเส้น

เมทริกซ์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีบทบาทกว้างขวางที่สุดในฟิสิกส์ยุคใหม่ ตั้งแต่กลศาสตร์ดั้งเดิม กลศาสตร์ควอนตัม ไปจนถึงทฤษฎีสัมพัทธภาพและปัญญาประดิษฐ์

เมทริกซ์ **A** ขนาด $m \times n$ คือตารางตัวเลขที่มี m แถวและ n หลัก:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

5.1.1 การแปลงเชิงเส้นและการหมุนพิกัด (Rotation Matrices)

การแปลงเชิงเส้นใน $\mathbb{R}^2$ หรือ $\mathbb{R}^3$ สามารถเขียนแทนด้วยการคูณเมทริกซ์กับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}' = \mathbf{R}\vec{r}$ การหมุนเวกเตอร์ในระนาบ xy ทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุม θ:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

เมทริกซ์การหมุนมีสมบัติเป็น **เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix)** นั่นคือ $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ และ $\det(\mathbf{R}) = +1$ ซึ่งมีสมบัติอนุรักษ์ความยาวของเวกเตอร์และมุมระหว่างเวกเตอร์

5.2 ปัญหาค่าเจาะจงและการแปลงทแยงมุม

สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้นที่แทนด้วยเมทริกซ์จัตุรัส **A** ขนาด $n \times n$ เวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{v}$ ที่เมื่อถูกแปลงด้วย **A** แล้วยังคงชี้ในแนวทิศทางเดิม (เพียงแต่ขนาดถูกขยายหรือหดตัวด้วยสเกลาร์ λ) เรียกว่า **เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector)** และสเกลาร์ λ เรียกว่า **ค่าเจาะจง (Eigenvalue)**:

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = \vec{0} \tag{5.3}$$

สมการจะมีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) ก็ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ ซึ่งเรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation)**:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{5.4}$$

ทฤษฎีบทที่ 5.1 ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (Spectral Theorem)

ในกลศาสตร์ควอนตัม ตัวสังเกตได้ทางกายภาพ (Physical Observables) เช่น พลังงาน ($\hat{H}$) โมเมนตัม ($\hat{p}$) หรือสปิน ($\hat{S}$) จะแทนด้วยเมทริกซ์หรือตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน ($\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$):

1. ค่าเจาะจงทุกค่าเป็นจำนวนจริงเสมอ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) ซึ่งเป็นค่าที่วัดได้จริงในห้องปฏิบัติการ
2. เวกเตอร์เจาะจงที่สอดคล้องกับค่าเจาะจงที่ต่างกัน จะตั้งฉากกันแบบออร์โธกอนัล: $\vec{v}_i^\dagger \vec{v}_j = 0$ เมื่อ $i \neq j$
3. เมทริกซ์ **H** สามารถแปลงทแยงมุมได้เสมอโดยเมทริกซ์ยูนิตารี **U**: $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

ตาราง ที่ 5.1 เม ทริกซ์ พิเศษ ใน ฟิสิกส์ คุณสมบัติ ทาง คณิตศาสตร์ และ บทบาท ทาง กายภาพ

ประเภทเมทริกซ์	เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์	บทบาทและการประยุกต์ในฟิสิกส์
เม ทริกซ์ สมมาตร (Symmetric)	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$	เทนเซอร์ความเฉื่อย **I**, เมทริกซ์ความเค้น-ความเครียด
เม ทริกซ์ เชิง ตั้ง ฉาก (Orthogonal)	$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$	การหมุนพิกัด 3D, การแปลงลอเรนซ์ในกาล-อวกาศ
เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (Hermitian)	$\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^*)^T = \mathbf{H}$	ฮามิลโทเนียน $\hat{H}$, ตัวดำเนินการที่วัดได้ในควอนตัม
เมทริกซ์ยูนิตารี (Unitary)	$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$	ตัวดำเนินการวิวัฒนาการตามเวลา $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$

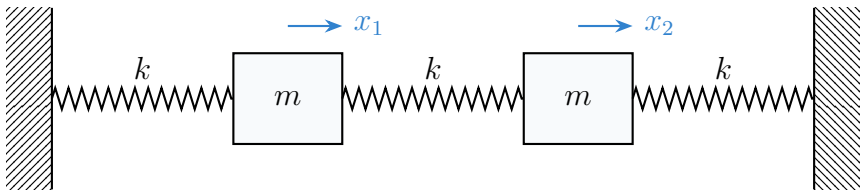
5.3 การประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

5.3.1 โหมดการสั่นสะเทือนของอาคารต้านแผ่นดินไหว (Coupled Oscillators)

ในการออกแบบโครงสร้างอาคารสูงต้านแผ่นดินไหว อาคาร 2 ชั้นสามารถจำลองเป็นมวล 2 ก้อน (m_1, m_2) เชื่อมต่อด้วยเสาที่มีสภาพยืดหยุ่นเสมือนสปริงค่าคงที่ (k_1, k_2, k_3)

สมการการเคลื่อนที่ตามกฎของนิวตัน:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \tag{5.5}$$



ภาพที่ 5.1 แบบจำลองการสั่นของระบบมวลเชื่อมคู่สองตัว (Coupled Oscillator Model)

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2 \tag{5.6}$$

จัดในรูปสมการเมทริกซ์:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

สมมติผลเฉลยในรูปฮาร์มอนิก $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{i\omega t}$ จะได้ $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2\vec{x}$ นำไปสู่ปัญหาค่าเจาะจง:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{k} \tag{5.8}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 การหาความถี่ธรรมชาติและโหมดปกติของระบบมวลคู่

โจทย์: จงหาความถี่ธรรมชาติ ω_1, ω_2 และเวกเตอร์โหมดปกติของระบบมวลเชื่อมคู่ที่มีเมทริกซ์ $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

SOLVE: 1. ตั้งสมการลักษณะเฉพาะ:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \tag{5.9}$$

แก้ออกมาได้ค่าเจาะจง 2 ค่า:

$$2 - \lambda = \pm 1 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \tag{5.10}$$

2. หาความถี่ธรรมชาติของระบบ:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\lambda_1} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.11}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\lambda_2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{5.12}$$

3. หาเวกเตอร์เจาะจงสำหรับแต่ละโหมด:

- สำหรับ $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_2 \implies \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- สำหรับ $\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = -v_2 \implies \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

CHECK (การตีความทางกายภาพ):

- **โหมดที่ 1 (Symmetric Mode, $\omega_1 = \sqrt{k/m}$):** มวลทั้งสองแกว่งไปในทิศทางเดียวกันพร้อมกัน สปริงตัวกลางไม่ยืดหด
- **โหมดที่ 2 (Anti-symmetric Mode, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$):** มวลทั้งสองแกว่งสวนทางกัน สปริงตัวกลางถูกบีบและยืดอย่างรุนแรง ทำให้ความถี่สูงกว่า■

การจำลองด้วย Python การแก้ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของระบบมวลสปริงคู่

```python
import numpy as np

# กำหนดเมทริกซ์สัมประสิทธิ์สติฟเนส K
K = np.array([[2.0, -1.0],
              [-1.0, 2.0]])

# คำนวณหาค่าเจาะจง (Eigenvalues) และเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvectors)
eigenvals, eigenvecs = np.linalg.eig(K)

# เรียงลำดับโหมดจากความถี่ต่ำไปสูง
sort_idx = np.argsort(eigenvals)
eigenvals = eigenvals[sort_idx]
eigenvecs = eigenvecs[:, sort_idx]

for i, (val, vec) in enumerate(zip(eigenvals, eigenvecs.T), start=1):
    omega_ratio = np.sqrt(val)
    print(f"โหมดที่ {i}: lambda = {val:.2f}, ความถี่สัมพัทธ์ omega/omega_0 = {omega_ratio:.4f}")
    print(f"  เวกเตอร์โหมด (Normalized): [{vec[0]:.4f}, {vec[1]:.4f}]")
```

ตัวอย่างที่ 5.2 การคำนวณการสลับทัศนียภาพในระบบ AR/VR ด้วยเมทริกซ์ 3D

โจทย์: จุดวัตถุเสมือนในโลก 3 มิติ มีพิกัด $\vec{P} = (1, 0, 0)^T$ ผู้ใช้สวมแว่นตาเสมือนจริงหันศีรษะหมุนรอบแกน z ทำมุม 90° และก้มศีรษะหมุนรอบแกน x ทำมุม 90° จงหาพิกัดใหม่ของจุดวัตถุในมุมมองของผู้ใช้

SOLVE: เมทริกซ์การหมุนรอบแกน z ด้วยมุม $\theta_z = 90°$:

$$\mathbf{R}_z(90°) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

และเมทริกซ์การหมุนรอบแกน x ด้วยมุม $\theta_x = 90°$:

$$\mathbf{R}_x(90°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

การหมุนรวมแบบต่อเนื่อง (Compound Rotation):

$$\mathbf{R}_{\text{total}} = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

พิกัดใหม่ของวัตถุ:

$$\vec{P}' = \mathbf{R}_{\text{total}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

CHECK: จุดเดิมอยู่บนแกน $+x$ เมื่อหมุนรอบแกน z ไป $90°$ จะย้ายไปแกน $+y$ และเมื่อหมุนรอบแกน x ต่ออีก $90°$ แกน $+y$ จะหมุนขึ้นไปเป็นแกน $+z$ สอดคล้องกับการคำนวณเชิงเรขาคณิตโดยตรง ■

การจำลองด้วย Python การแปลงพิกัด 3 มิติและการหมุนต่อเนื่องในระบบ AR/VR

```python
import numpy as np

def rot_z(deg):
    rad = np.radians(deg)
    return np.array([[np.cos(rad), -np.sin(rad), 0],
                     [np.sin(rad),  np.cos(rad), 0],
                     [0,            0,           1]])

def rot_x(deg):
    rad = np.radians(deg)
    return np.array([[1, 0,            0],
                     [0, np.cos(rad), -np.sin(rad)],
                     [0, np.sin(rad),  np.cos(rad)]])

# เวกเตอร์พิกัดวัตถุเริ่มต้น
P = np.array([1.0, 0.0, 0.0])

# คำนวณเมทริกซ์การแปลงสภาพรวม (R_x * R_z)
R_total = rot_x(90) @ rot_z(90)
P_prime = R_total @ P

print("เมทริกซ์การหมุนรวม R_total:")
print(np.round(R_total, 2))
print(f"พิกัดใหม่ในมุมมองผู้ใช้ P': {np.round(P_prime, 2)}")
```

5.4 บทสรุปประจำบท

ตารางที่ 5.2 ตารางสรุปประเภทของเมทริกซ์พิเศษในฟิสิกส์

ประเภทเมทริกซ์	เงื่อนไขคณิตศาสตร์	การประยุกต์สำคัญในฟิสิกส์
สมมาตร (Symmetric)	$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$	เทนเซอร์ความเฉื่อย, เมทริกซ์ความเค้น
เชิงตั้งฉาก (Orthogonal)	$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$	การหมุนระบบพิกัดในกลศาสตร์ดั้งเดิม
เฮอร์มิเชียน (Hermitian)	$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$	ตัวดำเนินการทางควอนตัม (แฮมิลโทเนียน)
ยูนิตารี (Unitary)	$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$	วิวัฒนาการตามเวลาของฟังก์ชันคลื่นควอนตัม

5.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

5.5.1 คำถามเชิงแนวคิด (Conceptual Questions)

1. เหตุใดผลคูณของการหมุนใน 3 มิติจึงไม่มีสมบัติการสลับที่ ($\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$) จงอธิบายเปรียบเทียบกับการหมุนใน 2 มิติ

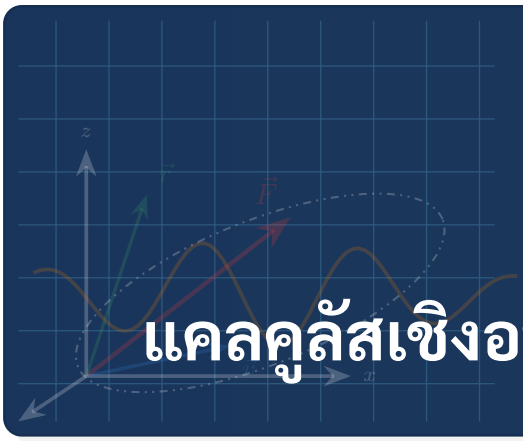
2. ในกลศาสตร์ควอนตัม หากตัวดำเนินการสองตัวไม่สลับที่กัน ($[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$) สิ่งนี้ส่งผลต่อความแม่นยำในการวัดค่าทางกายภาพตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์กอย่างไร

5.5.2 โจทย์การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Problems)

1. จงหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ พร้อมทั้งหาเมทริกซ์ $\mathbf{P}$ ที่ทำให้ $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

2. กำหนดระบบลูกตุ้มคู่ขนาดเล็ก จงตั้งสมการเมทริกซ์ของความเร่งและหาความถี่การแกว่งในโหมดปกติ

3. จงแสดงว่าเมทริกซ์เพาลี $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์คอมมิวเทเตอร์ $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$



บทที่ 6

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปร

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. อธิบายความหมายเชิงเรขาคณิตและกายภาพของอนุพันธ์ย่อย อนุพันธ์ระบุทิศทาง และผลต่างรวมได้
2. คำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่ด้วยกฎลูกโซ่และอนุพันธ์สสาร (Material Derivative) ได้
3. จำแนกจุดวิกฤตของฟังก์ชันศักย์พลังงานโดยใช้เมทริกซ์เฮสเซียน (Hessian Matrix) ได้
4. แก้ปัญหาค่าขีดสุดภายใต้เงื่อนไขบังคับทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ด้วยวิธีตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange Multipliers) ได้

6.1 อนุพันธ์ย่อยและผลต่างรวม

ในระบบกายภาพส่วนใหญ่ ปริมาณที่สนใจมักขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระหลายตัวแปรพร้อมกัน เช่น การกระจายตัวของอุณหภูมิในห้อง $T(x, y, z, t)$ ความดันของก๊าซอุดมคติ $P(V, T)$ หรือพลังงานศักย์โน้มถ่วงและไฟฟ้าสถิต $V(x, y, z)$ การทำความเข้าใจพฤติกรรมของระบบจึงจำเป็นต้องอาศัยแคลคูลัสหลายตัวแปร (Multivariable Calculus)

6.1.1 นิยามของอนุพันธ์ย่อย

อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง โดยสมมติให้ตัวแปรอิสระที่เหลือทั้งหมดมีค่าคงที่ สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x, y)$ อนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y นิยามโดย:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{6.2}$$

ในเชิงเรขาคณิต $\frac{\partial f}{\partial x}$ คือความชันของเส้นสัมผัสพื้นผิว $z = f(x, y)$ บนระนาบที่ขนานกับแกน x ($y =$ คงที่)

6.1.2 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงและทฤษฎีบทชวาร์ซ

อนุพันธ์ย่อยอันดับสองสามารถหาได้จากการดำเนินการซ้ำ โดยมีทฤษฎีบทสำคัญคือ **ทฤษฎีบทชวาร์ซ (Schwarz's Theorem / Clairaut's Theorem)** ซึ่งระบุว่า หากอนุพันธ์ย่อยผสมมีความต่อเนื่อง ลำดับการหาอนุพันธ์จะสลับที่กันได้เสมอ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{6.3}$$

ทฤษฎีบทที่ 6.1 ความสัมพันธ์ของแมกซ์เวลล์ในอุณหพลศาสตร์

ในอุณหพลศาสตร์ พลังงานภายใน U เอนโทรปี S ปริมาตร V อุณหภูมิ T และความดัน P สัมพันธ์กันตามกฎข้อที่หนึ่ง:

$$dU = TdS - PdV \tag{6.4}$$

เนื่องจาก U เป็นฟังก์ชันสภาวะ (State Function) ผลต่าง dU จึงเป็นผลต่างแท้จริง (Exact Differential) จากทฤษฎีบทชวาร์ซ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tag{6.5}$$

ทำให้ได้หนึ่งใน **ความสัมพันธ์ของแมกซ์เวลล์ (Maxwell Relations)**:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tag{6.6}$$

ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักในการคำนวณคุณสมบัติทางความร้อนของสสารที่ไม่สามารถวัดได้โดยตรงในห้องปฏิบัติการ

6.1.3 ผลต่างรวม

เมื่อตัวแปรอิสระทุกตัวแปรเกิดการเปลี่ยนแปลงไปพร้อมกัน การเปลี่ยนแปลงสุทธิของฟังก์ชันจะอธิบายด้วย **ผลต่างรวม (Total Differential)**:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\vec{r} \tag{6.7}$$

หากนิพจน์ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ สามารถเขียนในรูป df ของฟังก์ชันสเกลาร์ f ได้ จะเรียกว่าเป็นผลต่างแม่นตรง (Exact Differential) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ เท่านั้น (เทียบเท่ากับเงื่อนไขที่สนามเวกเตอร์เป็นสนามอนุรักษ์ $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$)

6.2 อนุพันธ์ระบุทิศทางและเกรเดียนต์

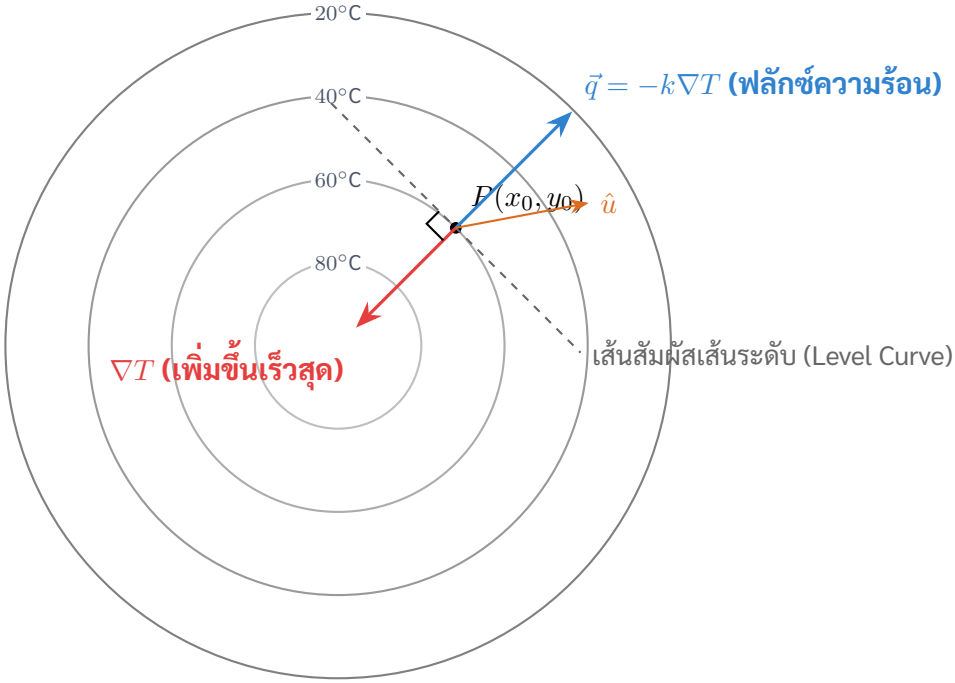
อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ ไม่จำเป็นต้องเกิดขึ้นตามแนวแกนพิกัดหลักเสมอไป การวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ใด ๆ นิยามผ่าน **อนุพันธ์ระบุทิศทาง (Directional Derivative)**:

$$D_{\hat{u}}f = \lim_{s\to 0}\frac{f(\vec{r}+s\hat{u}) - f(\vec{r})}{s} = \nabla f \cdot \hat{u} = |\nabla f|\cos\theta \tag{6.8}$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์เกรเดียนต์ ∇f กับเวกเตอร์ทิศทาง $\hat{u}$

ตาราง ที่ 6.1 แนวคิด อนุพันธ์ หลาย ตัวแปร นิยาม คณิตศาสตร์ และ ความ หมาย เชิงกายภาพ

แนวคิด	นิยามทางคณิตศาสตร์	ความหมายและบทบาททางฟิสิกส์
อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x_i}$ (x_j คงที่)	ความชันตามแนวแกน, ความจุความร้อน $C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$
ผลต่างรวม df	$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \nabla f \cdot d\vec{r}$	การเปลี่ยนแปลงสุทธิ, กฎข้อที่ 1 อุณหพลศาสตร์
อนุพันธ์ ระบุทิศทาง $D_{\hat{u}}f$	$\nabla f \cdot \hat{u} = \lvert\nabla f\rvert\cos\theta$	อัตราการเปลี่ยนในทิศทาง $\hat{u}$ ใด ๆ
เกรเดียนต์ ∇f	$\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$	ทิศทางเพิ่มขึ้นเร็วสุด, แรงอนุรักษ์ $\vec{F} = -\nabla V$
อนุพันธ์สสาร $\frac{D\rho}{Dt}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho$	อัตราการเปลี่ยนแปลงตามการไหลของของไหล



ภาพที่ 6.1 เส้นระดับอุณหภูมิ (Isotherms) แสดงเวกเตอร์เกรเดียนต์ ∇T ที่ตั้งฉากกับเส้นระดับเสมอ และฟลักซ์ความร้อน $\vec{q} = -k\nabla T$ ไหลในทิศทางลดลงของอุณหภูมิ

จากสมการ $D_{\hat{u}}f = |\nabla f| \cos\theta$ นำไปสู่ข้อสรุปสำคัญทางกายภาพ 3 ประการ:

1. **อัตรา การ เปลี่ยนแปลง สูงสุด:** เกิด ขึ้น เมื่อ $\hat{u}$ ชี้ ใน ทิศทาง เดียว กับ ∇f ($\theta = 0, \cos\theta = 1$) โดยมีอัตราการเพิ่มขึ้นสูงสุดเท่ากับขนาด $|\nabla f|$
2. **อัตราการเปลี่ยนแปลงลดลงเร็วที่สุด:** เกิดขึ้นเมื่อ $\hat{u}$ ชี้ในทิศตรงข้ามกับ ∇f ($\theta = \pi$) อัตราการเปลี่ยนแปลงคือ $-|\nabla f|$
3. **ทิศทางที่ฟังก์ชันมีค่าคงที่:** เกิดขึ้นเมื่อ $\hat{u}$ ตั้งฉากกับ ∇f ($\theta = \pi/2, \cos\theta = 0$) นั่นคือ เวกเตอร์เกรเดียนต์ ∇f จะตั้งฉากกับเส้นระดับ (Level Curve) หรือพื้นผิวระดับ (Equipotential Surface) $f(x, y, z) = C$ เสมอ

6.3 กฎลูกโซ่และอนุพันธ์สสารในฟิสิกส์

หากตัวแปร x, y, z เปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์อื่น เช่น ตำแหน่งของอนุภาคของไหล ที่ เคลื่อนที่ ไป ตาม เวลา $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ อัตรา การ เปลี่ยนแปลง ของปริมาณทางกายภาพ $f(x, y, z, t)$ ที่สังเกตได้จากตัวอนุภาคจะขึ้นอยู่กับทั้งการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในตัวเอง (Local change) และการเปลี่ยนแปลงอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งใหม่ (Convective change)

ทฤษฎีบทที่ 6.2 อนุพันธ์สสารหรืออนุพันธ์คอนเวกทีฟ

ในกลศาสตร์ของไหลและฟิสิกส์ความต่อเนื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณ f ตามการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคของไหล เรียกว่า **อนุพันธ์สสาร (Material / Substantial Derivative)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{Df}{Dt}$:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)f \tag{6.9}$$

โดยที่ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ คือความเร็วของของไหล ตัวอย่างเช่น หาก f คือเวกเตอร์ความเร็วของไหล $\vec{v}$ ความเร่งของกลุ่มอนุภาคคือ:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \tag{6.10}$$

ซึ่งเป็นพจน์สำคัญทางด้านซ้ายของสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation)

6.4 การทดสอบอนุพันธ์อันดับสองและเมทริกซ์เฮสเซียน

การจำแนกจุดวิกฤต (Critical Points) ของฟังก์ชันหลายตัวแปรว่าจุดใดเป็นจุดต่ำสุดเฉพาะที่ (Local Minimum) จุดสูงสุดเฉพาะที่ (Local Maximum) หรือจุดอานม้า (Saddle Point) มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบกลศาสตร์และเคมีเชิงฟิสิกส์

จุดวิกฤต $\vec{r}_0$ ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เกิดขึ้นเมื่อ:

$$\nabla f(\vec{r}_0) = \vec{0} \iff \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{6.11}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดวิกฤต:

$$f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \approx f(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta y\end{pmatrix}\mathbf{H}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} \tag{6.12}$$

โดยที่ **H** คือ **เมทริกซ์เฮสเซียน (Hessian Matrix)**:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

พิจารณาดีเทอร์มิแนนต์ $D = \det(\mathbf{H}) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$:

1. หาก $D > 0$ และ $f_{xx} > 0$: จุดวิกฤตเป็น **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (Local Minimum)** ระบบอยู่ในสมดุลเสถียร (Stable Equilibrium) เช่น ก้นหลุมพลังงานศักย์

2. หาก $D > 0$ และ $f_{xx} < 0$: จุดวิกฤตเป็น **จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (Local Maximum)** ระบบอยู่ในสมดุลไม่เสถียร (Unstable Equilibrium)

3. หาก $D < 0$: จุดวิกฤตเป็น **จุดอานม้า (Saddle Point)** ซึ่งเป็นตัวแทนของสถานะเปลี่ยนผ่าน (Transition State) และแนวกั้นพลังงานกระตุ้นในปฏิกิริยาเคมี

4. หาก $D = 0$: การทดสอบสรุปผลไม่ได้ ต้องพิจารณาอนุพันธ์อันดับสูงกว่า

6.5 การหาค่าขีดสุดภายใต้เงื่อนไขบังคับด้วยตัวคูณลากรองจ์

ในทางวิศวกรรมและฟิสิกส์ ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) มักมีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เสมอ เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกบังคับให้อยู่บนพื้นผิวทรงกลม หรือการหาการกระจายอนุภาคที่ทำให้เอนโทรปีสูงสุดภายใต้เงื่อนไขว่าพลังงานรวมและจำนวนอนุภาคต้องคงที่

6.5.1 หลักการตัวคูณลากรองจ์

ต้องการหาค่าขีดสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย $f(x, y, z)$ ภายใต้สมการเงื่อนไข $g(x, y, z) = 0$ ที่จุดขีดสุด เส้นระดับของ f จะต้องสัมผัสกับพื้นผิวเงื่อนไข $g = 0$ ส่งผลให้เวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชันทั้งสองต้องขนานกัน:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \tag{6.14}$$

โดยที่ λ คือ **ตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange Multiplier)** ระบบสมการนี้ประกอบด้วย 4 ตัวแปร (x, y, z, λ) และ 4 สมการ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}, \quad g(x, y, z) = 0 \tag{6.15}$$

หากมีหลายเงื่อนไขบังคับ เช่น $g_1(\vec{r}) = 0$ และ $g_2(\vec{r}) = 0$ สมการจะขยายเป็น:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \tag{6.16}$$

6.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

6.6.1 การจัดการความร้อนในอาคารอัจฉริยะและไมโครชิป

ตามกฎการนำความร้อนของฟูริเยร์ (Fourier's Law of Heat Conduction) ฟลักซ์ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ $\vec{q}$ (W/m^2) สัมพันธ์โดยตรงกับเกรเดียนต์ของอุณหภูมิ:

$$\vec{q} = -k \nabla T \tag{6.17}$$

โดยที่ k คือสภาพนำความร้อนของวัสดุ เครื่องหมายลบแสดงว่าความร้อนจะไหลจากบริเวณอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณอุณหภูมิต่ำเสมอ การออกแบบระบบระบายความร้อนของโปรเซสเซอร์คอมพิวเตอร์และอาคารประหยัดพลังงานจะใช้การคำนวณ ∇T เพื่อหาตำแหน่งที่มีความร้อนสะสมสูงสุด (Thermal Hotspots) และออกแบบฮีตซิงก์หรือฉนวนกันความร้อนให้ตรงจุด

6.6.2 การกระจายตัวแบบโบลต์ซมันน์ในกลศาสตร์สถิติ

ในระบบก๊าซที่มี N อนุภาคและพลังงานรวม E การจัดเรียงตัวของอนุภาคที่มีความน่าจะเป็นสูงสุดคือสภาวะที่เอนโทรปีของข้อมูล $S = -k_B \sum p_i \ln p_i$ มีค่าสูงสุด ภายใต้เงื่อนไขบังคับ 2 ประการ:

$$g_1 = \sum_i p_i - 1 = 0 \quad \text{และ} \quad g_2 = \sum_i p_i \epsilon_i - E = 0 \tag{6.18}$$

การใช้ตัวคูณลากรองจ์สองตัว (α, β) สำหรับฟังก์ชัน S:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left[-k_B \sum p_i \ln p_i - \alpha\left(\sum p_i - 1\right) - \beta\left(\sum p_i \epsilon_i - E\right)\right] = 0 \tag{6.19}$$

นำไปสู่กฎการกระจายตัวแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์ (Maxwell-Boltzmann Distribution) อันโด่งดัง:

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta \epsilon_i} \quad \left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right) \tag{6.20}$$

ซึ่งเป็นรากฐานของฟิสิกส์เชิงความร้อนยุคใหม่

6.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

ตัวอย่างที่ 6.1 การคำนวณฟลักซ์ความร้อนและการกระจายอุณหภูมิบนแผ่นวงจรอิเล็กทรอนิกส์

โจทย์: การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นวงจรพิมพ์ไมโครคอนโทรลเลอร์ขนาด 2 มิติ อธิบายด้วยฟังก์ชัน:

$$T(x, y) = 30 + 50e^{-(x^2+2y^2)} \quad (^\circ\text{C}) \tag{6.21}$$

เมื่อ x, y มีหน่วยเป็นเซนติเมตร (cm) กำหนดให้สภาพนำความร้อนของแผ่นวงจรคือ $k = 1.5$ W/(m · K)

1. จงหาเกรเดียนต์ของอุณหภูมิ ∇T ที่ตำแหน่ง $P(1, 1)$ cm
2. อุณหภูมิจะเพิ่มขึ้นเร็วที่สุดในทิศทางใด และมีอัตราการเพิ่มขึ้นเท่าใด

3. จงคำนวณหาเวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อน $\vec{q}$ ณ จุด $P(1,1)$

PICTURE: จุดกำเนิด $(0,0)$ คือตำแหน่งของชิปประมวลผลซึ่งมีอุณหภูมิสูงสุด $80°$C เส้นระดับอุณหภูมิมีลักษณะเป็นวงรีตามสมการ $x^2 + 2y^2 = C$ เวกเตอร์เกรเดียนต์ชี้พุ่งเข้าสู่จุดกำเนิด ในขณะที่ฟลักซ์ความร้อนไหลพุ่งออกจากชิปไปสู่ขอบวงจร

SOLVE: 1. แปลงหน่วยและหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $T(x,y)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 50e^{-(x^2+2y^2)}(-2x) = -100xe^{-(x^2+2y^2)} \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 50e^{-(x^2+2y^2)}(-4y) = -200ye^{-(x^2+2y^2)} \tag{6.23}$$

ที่จุด $P(1,1)$ cm ค่าพจน์เอ็กซ์โพเนนเชียลคือ $e^{-(1+2)} = e^{-3} \approx 0.049787$:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -100(1)e^{-3} \approx -4.98°\text{C/cm} = -498°\text{C/m} \tag{6.24}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -200(1)e^{-3} \approx -9.96°\text{C/cm} = -996°\text{C/m} \tag{6.25}$$

ดังนั้น เวกเตอร์เกรเดียนต์คือ:

$$\nabla T = -498\hat{i} - 996\hat{j} \quad (\text{K/m}) \tag{6.26}$$

2. ทิศทางที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นเร็วที่สุดคือทิศของ ∇T:

$$\hat{u}_{\text{max}} = \frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \frac{-498\hat{i} - 996\hat{j}}{\sqrt{(-498)^2 + (-996)^2}} = \frac{-1\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \approx -0.447\hat{i} - 0.894\hat{j} \tag{6.27}$$

(ชี้เข้าหาชิปประมวลผลที่จุดศูนย์กลาง) และอัตราการเพิ่มขึ้นสูงสุดคือ:

$$|\nabla T| = \sqrt{(-498)^2 + (-996)^2} = 498\sqrt{5} \approx 1113.6 \text{ K/m} \tag{6.28}$$

3. ฟลักซ์ความร้อนตามกฎของฟูริเยร์ $\vec{q} = -k\nabla T$:

$$\vec{q} = -1.5(-498\hat{i} - 996\hat{j}) = 747\hat{i} + 1494\hat{j} \quad (\text{W/m}^2) \tag{6.29}$$

CHECK: หน่วยของ ∇T คือ K/m เมื่อคูณกับ k (W/(m · K)) ได้หน่วยเป็น W/m^2 ซึ่งถูกต้องสำหรับฟลักซ์พลังงาน ทิศทางของฟลักซ์ความร้อนเป็นบวก ($\vec{q}$ ชี้ออกจากจุดกำเนิด) สอดคล้องกับหลักการทางฟิสิกส์ที่ความร้อนต้องไหลออกจากบริเวณร้อนไปสู่บริเวณเย็น ■

การจำลองด้วย Python การคำนวณเกรเดียนต์อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนฟูริเยร์ 2 มิติ

```python
import numpy as np

# กำหนดพิกัดและค่าสภาพนำความร้อน
x, y = 1.0, 1.0   # cm
k = 1.5           # W/(m*K)

# คำนวณอนุพันธ์ย่อยเชิงวิเคราะห์
exp_factor = np.exp(-(x**2 + 2 * y**2))
dT_dx_cm = -100.0 * x * exp_factor  # C/cm
dT_dy_cm = -200.0 * y * exp_factor  # C/cm

# แปลงเป็นหน่วยมาตรฐาน SI (K/m โดยการคูณ 100)
grad_T = np.array([dT_dx_cm, dT_dy_cm]) * 100.0
grad_mag = np.linalg.norm(grad_T)
u_max = grad_T / grad_mag

# ฟลักซ์ความร้อนตามกฎฟูริเยร์ q = -k * grad(T)
q_flux = -k * grad_T

print(f"เกรเดียนต์อุณหภูมิ grad(T): [{grad_T[0]:.2f}, {grad_T[1]:.2f}] K/m")
print(f"อัตราการเพิ่มอุณหภูมิสูงสุด: {grad_mag:.2f} K/m ในทิศทาง [{u_max[0]:.3f}, {u_max[1]:.3f}]")
print(f"เวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อน q: [{q_flux[0]:.2f}, {q_flux[1]:.2f}] W/m^2")
```

ตัวอย่างที่ 6.2 การหาขนาดถังบรรจุสารเคมีความดันสูงที่ประหยัดต้นทุนที่สุดด้วยตัวคูณลากรองจ์

โจทย์: ถังบรรจุของเหลวทรงกระบอกปิดหัวท้ายด้วยแผ่นโลหะเรียบ ต้องมีปริมาตรบรรจุภายในคงที่ $V_0 = 2\pi$ m^3 หากต้นทุนแผ่นโลหะทำผิวข้างเท่ากับ $C_1 = 100$ บาท/m^2 และต้นทุนแผ่นโลหะปิดหัวท้ายหนาพิเศษเท่ากับ $C_2 = 200$ บาท/m^2 จงหารัศมี r และความสูง h ของถังที่ทำให้ต้นทุนวัสดุรวมต่ำที่สุด

PICTURE: ถังทรงกระบอกรัศมี r สูง h มีปริมาตร $V = \pi r^2 h$ พื้นที่ผิวข้างคือ $A_{\text{side}} = 2\pi rh$ และพื้นที่ฝาหัวท้าย 2 ด้านคือ $A_{\text{ends}} = 2\pi r^2$

SOLVE: กำหนดฟังก์ชันต้นทุนรวม $C(r, h)$:

$$C(r,h) = C_1(2\pi rh) + C_2(2\pi r^2) = 100(2\pi rh) + 200(2\pi r^2) = 200\pi rh + 400\pi r^2 \tag{6.30}$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับปริมาตร $g(r,h) = \pi r^2 h - 2\pi = 0$ หรือเขียนย่อเป็น $r^2 h - 2 = 0$ ใช้สมการตัวคูณลากรองจ์ $\nabla C = \lambda \nabla g$:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} \implies 200\pi h + 800\pi r = \lambda(2rh) \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h} = \lambda \frac{\partial g}{\partial h} \implies 200\pi r = \lambda(r^2) \tag{6.32}$$

จากสมการที่ (6.32) เนื่องจาก $r \neq 0$ จะได้ λ:

$$\lambda = \frac{200\pi r}{r^2} = \frac{200\pi}{r} \tag{6.33}$$

นำ λ ไปแทนในสมการที่ (6.31):

$$200\pi h + 800\pi r = \left(\frac{200\pi}{r}\right)(2rh) = 400\pi h \tag{6.34}$$

จัดรูปสมการ:

$$800\pi r = 200\pi h \implies h = 4r \tag{6.35}$$

แทนความสัมพันธ์ $h = 4r$ ลงในเงื่อนไขปริมาตร $r^2 h = 2$:

$$r^2(4r) = 2 \implies 4r^3 = 2 \implies r^3 = \frac{1}{2} \implies r = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.7937 \text{ m} \tag{6.36}$$

จะได้ความสูงที่เหมาะสมที่สุด:

$$h = 4r = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 2^{5/3} \approx 3.1748 \text{ m} \tag{6.37}$$

CHECK: ปริมาตรรวม: $V = \pi r^2 h = \pi(2^{-2/3})(2^{5/3} \cdot 1) = \pi 2^1 = 2\pi$ m^3 ตรงตามเงื่อนไขบังคับอย่างแม่นยำ และสัดส่วน $h = 4r$ แสดงให้เห็นว่าเนื่องจากฝาหัวท้ายมีราคาแพงเป็น 2 เท่า ระบบจึงปรับสัดส่วนให้ถังมีความสูงมากขึ้นเพื่อลดพื้นที่หน้าตัดหัวท้ายลง ■

การจำลองด้วย Python การหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) ของรูปทรงถังบรรจุด้วย SciPy

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize

# นิยามฟังก์ชันต้นทุนรวม C(r, h)
def cost_func(x):
    r, h = x[0], x[1]
    return 200 * np.pi * r * h + 400 * np.pi * r**2

# เงื่อนไขบังคับปริมาตร: pi * r^2 * h - 2*pi = 0
constraint = {'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.pi * x[0]**2 * x[1] - 2 * np.pi}
bounds = [(0.1, 10.0), (0.1, 10.0)]

# แก้ปัญหาด้วย Numerical Optimization
res = minimize(cost_func, x0=[1.0, 2.0], bounds=bounds, constraints=constraint)
r_opt, h_opt = res.x

print(f"ผลลัพธ์เชิงตัวเลข: r = {r_opt:.4f} m, h = {h_opt:.4f} m")
print(f"ผลลัพธ์เชิงวิเคราะห์: r = {2**(-1/3):.4f} m, h = {4 * 2**(-1/3):.4f} m")
print(f"สัดส่วนความสูงต่อรัศมี h/r: {h_opt/r_opt:.4f} ทฤษฎี( = 4.0000)")
print(f"ต้นทุนวัสดุต่ำสุด: {res.fun:.2f} บาท")
```

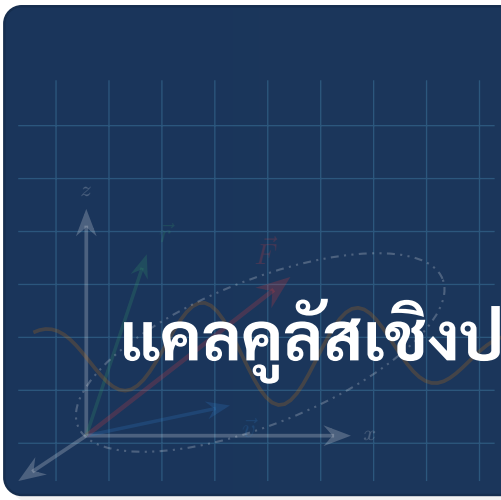
6.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท

ตารางที่ 6.2 สรุปสูตรและแนวคิดสำคัญในแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์หลายตัวแปร

หัวข้อ / แนวคิด	สูตร / ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์	การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์
ผลต่างรวม	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$	งาน พลังงาน ฟังก์ชันสภาวะ อุณหพลศาสตร์
อนุพันธ์ระบุทิศทาง	$D_{\hat{u}}f = \nabla f \cdot \hat{u} = \lvert\nabla f\rvert \cos\theta$	อัตราการเปลี่ยนความดันและสนามความเร็ว
อนุพันธ์สสาร	$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)f$	ความเร่งของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์
เมทริกซ์เฮสเซียน	$\mathbf{H}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$	การจำแนกเสถียรภาพสมดุลและจุดอานม้า
ตัวคูณลากรองจ์	$\nabla f = \sum_k \lambda_k \nabla g_k$	กลศาสตร์ลากรางจ์ การกระจายตัวสถิติ

6.9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. **ระดับพื้นฐาน:** กำหนดสนามศักย์ไฟฟ้าสถิต $V(x, y, z) = 2x^2y - 3y^2z + xz^2$ (โวลต์)
   (a) จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสองผสม $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ และ $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ เพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีบทชวาร์ซ
   (b) จงหาสนามไฟฟ้า $\vec{E} = -\nabla V$ ที่ตำแหน่ง $(1, 2, -1)$ m
   (c) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้าที่จุดดังกล่าวในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
2. **ระดับประยุกต์:** พลังงานศักย์ของโมเลกุลในสองมิติอธิบายโดย $U(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (อิเล็กตรอนโวลต์, eV)
   (a) จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของระบบ
   (b) ใช้เมทริกซ์เฮสเซียนในการจำแนกประเภทของจุดวิกฤตแต่ละจุด (จุดต่ำสุด สมดุลไม่เสถียร หรือสถานะเปลี่ยนผ่าน)
3. **ระดับก้าวหน้า:** อนุภาคกำลังเคลื่อนที่บนพื้นผิวทรงรี $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$ ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงซึ่งมีฟังก์ชันพลังงานศักย์ $V(x, y, z) = mgz$ จงใช้ระเบียบวิธีตัวคูณลากรองจ์เพื่อหาตำแหน่งจุดสูงสุดและต่ำสุดที่อนุภาคสามารถเคลื่อนที่ไปถึงได้



บทที่ 7

แคลคูลัสเชิงปริพันธ์และทฤษฎีบทการแปลง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. คำนวณปริพันธ์ตามเส้น ปริพันธ์ตามพื้นผิว และปริพันธ์ตามปริมาตรในระบบพิกัดต่าง ๆ ได้
2. แปลงตัวแปรในปริพันธ์หลายชั้นโดยใช้จาโคเบียน (Jacobian Determinant) ได้อย่างถูกต้อง
3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์ (Gauss's Divergence Theorem) ในการคำนวณฟลักซ์และประจุไฟฟ้าได้
4. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes' Theorem) เชื่อมโยงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและการไหลวนในพลศาสตร์ของไหลได้

7.1 ปริพันธ์ตามเส้นและงานในกลศาสตร์

ในวิชาฟิสิกส์ การเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของแรง $\vec{F}(\vec{r})$ ไปตามเส้นทางโค้ง C ก่อให้เกิดปริมาณทางกายภาพที่สำคัญยิ่งคือ **งาน (Work)** ซึ่งคำนวณได้จากปริพันธ์ตามเส้น (Line Integral) ของสนามเวกเตอร์

7.1.1 นิยามของปริพันธ์ตามเส้น

ให้เส้นทางเดิน C ในปริภูมิสามมิติกำหนดโดยเวกเตอร์ตำแหน่งตามพารามิเตอร์เวลา $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ เมื่อ $t_1 \leq t \leq t_2$ ปริพันธ์ตามเส้นของแรง $\vec{F}$ นิยามโดย:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt \tag{7.1}$$

โดยที่ $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ จะได้ทฤษฎีบทงาน-พลังงานจลน์ (Work-Energy Theorem):

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(v^2)\, dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta K \tag{7.2}$$

7.1.2 ทฤษฎีบทมูลฐานของปริพันธ์ตามเส้นและสนามอนุรักษ์

หากแรง $\vec{F}$ เป็นสนามอนุรักษ์ (Conservative Field) จะมีฟังก์ชันพลังงานศักย์สเกลาร์ $U(\vec{r})$ ซึ่ง $\vec{F} = -\nabla U$ ส่งผลให้ปริพันธ์ตามเส้นไม่ขึ้นกับเส้นทางเดิน แต่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเท่านั้น:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla U \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U \tag{7.3}$$

นำไปสู่กฎการอนุรักษ์พลังงานกลรวม $\Delta K + \Delta U = 0 \iff E_{\text{mech}} =$ คงที่

ทฤษฎีบทที่ 7.1 เงื่อนไขความเท่าเทียมกันของสนามอนุรักษ์

สำหรับสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่นิยามบนโดเมนที่เชื่อมโยงแบบเชิงเดี่ยว (Simply Connected Domain) ข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกประการ:

1. $\vec{F}$ เป็นสนามอนุรักษ์ ($\vec{F} = -\nabla U$)
2. ปริพันธ์ตามเส้นจากจุด A ไปยังจุด B เป็นอิสระจากเส้นทางเดิน
3. ปริพันธ์ตามเส้นรอบวงปิดใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์เสมอ:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{7.4}$$

4. เคิร์ลของสนามเวกเตอร์เป็นศูนย์ทุกจุดในบริเวณนั้น: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

7.2 ปริพันธ์หลายชั้นและการแปลงตัวแปรด้วยจาโคเบียน

การคำนวณมวลรวมของวัตถุที่มีความหนาแน่นไม่สม่ำเสมอ $\rho(\vec{r})$ จุดศูนย์กลางมวล หรือโมเมนต์ความเฉื่อย จำเป็นต้องหาปริพันธ์ตามปริมาตร:

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{7.5}$$

เมื่อ ทำการ เปลี่ยน ตัวแปร จาก พิกัด ฉาก (x, y, z) ไป สู่ ระบบ พิกัด เส้น โค้ง เชิง ตั้ง ฉาก (u_1, u_2, u_3) ชิ้นส่วนปริมาตรจะถูกขยายหรือหดตัวด้วย **ดีเทอร์มิแนนต์ของจาโคเบียน (Jacobian Determinant)**:

$$dV = dx\, dy\, dz = |J|\, du_1\, du_2\, du_3 \tag{7.6}$$

โดยที่ดีเทอร์มิแนนต์จาโคเบียนนิยามเป็น:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1 h_2 h_3 \tag{7.7}$$

- ในระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z): $J = \rho \implies dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$
- ในระบบพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ): $J = r^2 \sin\theta \implies dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

ตารางที่ 7.1 การเปรียบเทียบประเภทของปริพันธ์ในฟิสิกส์ ชิ้นส่วนเชิงอนุพันธ์ และตัวอย่างการประยุกต์

ประเภทปริพันธ์	สัญลักษณ์	ชิ้นส่วนอนุพันธ์	ตัวอย่างการประยุกต์ในฟิสิกส์
ปริพันธ์ตามเส้น	$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$	งานกลศาสตร์ W, ความต่างศักย์ V
ปริพันธ์วงปิด	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$	$d\vec{r} = \hat{t}ds$	กฎของแอมแปร์ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enc}}$
ปริ พันธ์ ตาม พื้นผิว	$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$	$d\vec{a} = \hat{n}da$	ฟลักซ์ไฟฟ้า Φ_E, ฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_B
ปริพันธ์ผิวปิด	$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a}$	$d\vec{a} = \hat{n}_{\text{out}}da$	กฎของเกาส์ $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$
ปริ พันธ์ ตาม ปริมาตร	$\iiint_V \rho\, dV$	$dV = \lvert J\rvert du_1 du_2 du_3$	มวลรวม, ประจุรวม, โมเมนต์ความเฉื่อย

7.3 ปริพันธ์ตามพื้นผิวและฟลักซ์ทางฟิสิกส์

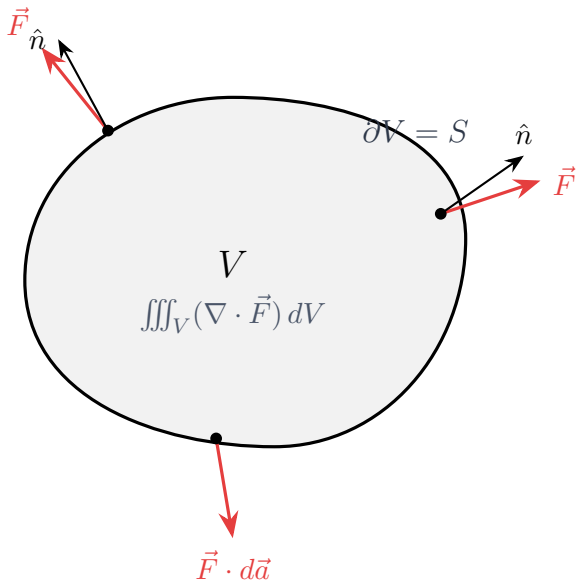
ฟลักซ์ (Flux) หมายถึงปริมาณการไหลของสนามเวกเตอร์ทะลุผ่านพื้นที่ผิวหนึ่งหน่วย ฟลักซ์สุทธิ Φ ของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ ผ่านพื้นผิว S นิยามโดย:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \iint_S \vec{A} \cdot \hat{n}\, da \tag{7.8}$$

โดยที่ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว สำหรับพื้นผิวปิด (Closed Surface) จะกำหนดให้ $\hat{n}$ มีทิศพุ่งออกจากปริมาตรภายในเสมอ

7.4 ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์

ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์ (Gauss's Divergence Theorem) เป็นหนึ่งในเสาหลักทางคณิตศาสตร์ฟิสิกส์ เชื่อมโยงพฤติกรรมเฉพาะที่ (ไดเวอร์เจนซ์ภายในเนื้อปริมาตร) เข้ากับพฤติกรรมโดยรวมที่ขอบเขต (ฟลักซ์สุทธิบนผิวปิด)



ภาพที่ 7.1 ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์: ผลรวมของแหล่งกำเนิดภายในปริมาตร V $(\nabla \cdot \vec{F})$ เท่ากับฟลักซ์สุทธิที่พุ่งข้ามพื้นผิวปิด ∂V

ทฤษฎีบทที่ 7.2 ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์

ถ้า V เป็นปริมาตรในสามมิติที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวปิดเรียบเป็นช่วง ๆ $S = \partial V$ และ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F})\, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{a} \tag{7.9}$$

ในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า ทฤษฎีบทนี้ใช้แปลงกฎของเกาส์ระหว่างรูปอนุพันธ์และรูปปริพันธ์:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{7.10}$$

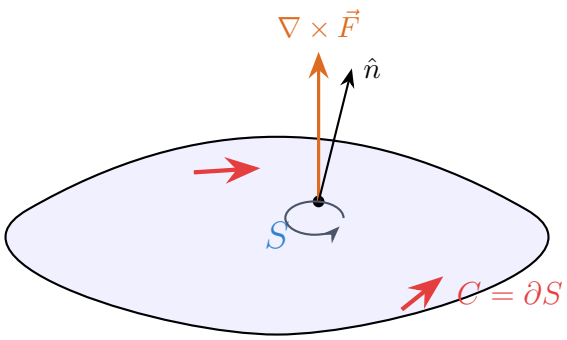
และกฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็ก:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \tag{7.11}$$

ซึ่งยืนยันว่าในธรรมชาติไม่มีขั้วแม่เหล็กเดี่ยว (Magnetic Monopole) เส้นแรงแม่เหล็กจึงเป็นวงปิดเสมอ

7.5 ทฤษฎีบทของสโตกส์และทฤษฎีบทของกรีน

ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes' Theorem) เชื่อมโยงการไหลเวียนตามแนวเส้นรอบวงปิด เข้ากับเคิร์ลของสนามที่ทะลุผ่านแผ่นพื้นผิวใด ๆ ที่มีวงปิดนั้นเป็นขอบเขต



ภาพที่ 7.2 ทฤษฎีบทของสโตกส์: การไหลเวียนตามแนววงปิด $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เท่ากับฟลักซ์ของเคิร์ล $(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a}$ ที่ทะลุผ่านพื้นผิวเปิด S ใด ๆ ที่มีขอบเขตเป็น C

ทฤษฎีบทที่ 7.3 ทฤษฎีบทของสโตกส์

ถ้า S เป็นพื้นผิวเปิดในปริภูมิสามมิติที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้งปิดเรียบเป็นช่วง ๆ $C = \partial S$ ทิศทางการเดินรอบ C สัมพันธ์กับเวกเตอร์แนวฉาก $\hat{n}$ ตามกฎมือขวา:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} \tag{7.12}$$

หากพิจารณาในระนาบสองมิติ xy โดย $d\vec{a} = dx\,dy\,\hat{k}$ และ $\vec{F} = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ ทฤษฎีบทของสโตกส์จะลดรูปกลายเป็น **ทฤษฎีบทของกรีนในระนาบ (Green's Theorem in the Plane)**:

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{7.13}$$

ในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า ทฤษฎีบทของสโตกส์ใช้แปลงกฎการเหนี่ยวนำของฟาราเดย์:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \mathcal{E} \tag{7.14}$$

ซึ่งอธิบายการทำงานของเครื่องกำเนิดไฟฟ้า ไดนาโม และหม้อแปลงไฟฟ้ากำลังสูง

7.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

7.6.1 การคำนวณฟลักซ์รังสีอาทิตย์บนแผงโซลาร์เซลล์

ฟลักซ์พลังงานแสงอาทิตย์ที่ตกกระทบบนแผงเซลล์แสงอาทิตย์พื้นที่ A ขึ้นอยู่กับมุมตกกระทบระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแนวฉากของแผง $\hat{n}$ และเวกเตอร์รังสีอาทิตย์ (Poynting Vector $\vec{S}_{\text{solar}}$):

$$P_{\text{solar}} = \iint_A \vec{S}_{\text{solar}} \cdot d\vec{a} = |\vec{S}_{\text{solar}}| A \cos\theta \tag{7.15}$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่างแสงอาทิตย์กับแนวฉากของแผง วิศวกรพลังงานทดแทนจึงออกแบบระบบติดตามดวงอาทิตย์ (Solar Tracking System) ที่ปรับหมุนเวกเตอร์ $\hat{n}$ ให้ขนานกับ $\vec{S}$ ตลอดทั้งวัน ($\theta = 0, \cos\theta = 1$) เพื่อให้เกิดพลังงานไฟฟ้าสูงสุด

7.6.2 แรงยกอากาศพลศาสตร์และทฤษฎีบทคัตตา-จูคอฟสกี

ในวิศวกรรมการบินและพลศาสตร์ของไหล แรงยกต่อหนึ่งหน่วยความยาวปีกเครื่องบิน L' คำนวณได้จากปริพันธ์การไหลเวียน (Circulation) ของความเร็วลมรอบปีกเครื่องบิน:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \tag{7.16}$$

ตาม **ทฤษฎีบทคัตตา-จูคอฟสกี (Kutta-Joukowski Theorem)**:

$$L' = \rho_\infty v_\infty \Gamma \tag{7.17}$$

เมื่อ ρ_∞ คือความหนาแน่นอากาศ และ v_∞ คือความเร็วการบินสัมพัทธ์ การออกแบบปีกเครื่องบินแอร์ฟอยล์ (Airfoil) จึงเป็นการควบคุมปริพันธ์ตามเส้น Γ ให้มีค่าเพียงพอที่จะยกลำเครื่องบินขึ้นสู่อากาศได้

7.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

ตัวอย่างที่ 7.1 การคำนวณประจุไฟฟ้าสะสมในกลุ่มเมฆพายุฟ้าคะนองด้วยทฤษฎีบทเกาส์

โจทย์: ในการศึกษาปรากฏการณ์ฟ้าผ่า นักอุตุนิยมวิทยาตรวจวัดสนามไฟฟ้าภายในก้อนเมฆพายุฟ้าคะนองทรงกลมรัศมี $R = 2$ km พบว่าการกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกลมเป็น:

$$\vec{E}(r) = E_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \hat{r} \tag{7.18}$$

เมื่อ $E_0 = 1.0 \times 10^5$ V/m และ $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$ C^2/(N $\cdot$ m^2)

1. จงคำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่พุ่งออกจากพื้นผิวทรงกลมของก้อนเมฆ
2. จงหาประจุไฟฟ้ารวม Q_{enc} ภายในก้อนเมฆพายุ
3. จงหาความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตร $\rho(r)$ ภายในก้อนเมฆโดยใช้รูปอนุพันธ์

PICTURE: ก้อนเมฆพายุจำลองเป็นทรงกลมรัศมี R มีศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด สนามไฟฟ้าพุ่งออกตามแนวรัศมี $\hat{r}$ โดยมีความเข้มเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับ r^2 บนผิวทรงกลม $r = R$ เวกเตอร์แนวฉาก $\hat{n} = \hat{r}$

SOLVE: 1. คำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิผ่านพื้นผิวทรงกลม $r = R$: บนผิวทรงกลม $r = R$ สนามไฟฟ้ามีค่าสม่ำเสมอเท่ากับ $\vec{E}(R) = E_0\hat{r}$ ชิ้นส่วนพื้นที่คือ $d\vec{a} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$:

$$\Phi_E = \oiint_{r=R} \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_0 \oiint_{r=R} da = E_0(4\pi R^2) = 4\pi E_0 R^2 \tag{7.19}$$

แทนค่าตัวเลข ($R = 2000$ m):

$$\Phi_E = 4\pi(1.0\times10^5)(2000)^2 = 4\pi(10^5)(4\times10^6) = 1.6\pi\times10^{12} \approx 5.027\times10^{12} \text{ V}\cdot\text{m} \tag{7.20}$$

2. หาประจุไฟฟ้ารวมภายในก้อนเมฆจากกฎของเกาส์ $\Phi_E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$:

$$Q_{\text{enc}} = \varepsilon_0 \Phi_E = (8.854 \times 10^{-12})(1.6\pi \times 10^{12}) = 14.17\pi \approx 44.51 \text{ คูลอมบ์ (C)} \tag{7.21}$$

3. หาความหนาแน่นประจุ $\rho(r)$ จากไดเวอร์เจนซ์ของสนามไฟฟ้าในพิกัดทรงกลม:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \cdot E_0 \frac{r^2}{R^2}\right] = \frac{E_0}{R^2 r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4) = \frac{E_0}{R^2 r^2}(4r^3) = \frac{4E_0 r}{R^2} \tag{7.22}$$

จากสมการของแมกซ์เวลล์ $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ จะได้:

$$\rho(r) = \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{4\varepsilon_0 E_0 r}{R^2} \quad (\text{C/m}^3) \tag{7.23}$$

CHECK: ทำการอินทิเกรตความหนาแน่นประจุ $\rho(r)$ ทั่วทั้งปริมาตรเพื่อตรวจสอบความสอดคล้องกับทฤษฎีบทการลู่ออก:

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_V \rho(r)\, dV = \int_0^R \frac{4\varepsilon_0 E_0 r}{R^2}(4\pi r^2 dr) = \frac{16\pi\varepsilon_0 E_0}{R^2}\int_0^R r^3 dr \tag{7.24}$$

$$= \frac{16\pi\varepsilon_0 E_0}{R^2}\left(\frac{R^4}{4}\right) = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^2 \tag{7.25}$$

ซึ่งตรงกับ $Q_{\text{enc}} = \varepsilon_0 \Phi_E$ ที่คำนวณจากปริพันธ์ผิวอย่างสมบูรณ์แบบ ■

การจำลองด้วย Python การคำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าและปริพันธ์ปริมาตรความหนาแน่นประจุ

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

# กำหนดพารามิเตอร์ทางฟิสิกส์
R = 2000.0              # รัศมีก้อนเมฆพายุ (m)
E0 = 1.0e5              # ขนาดสนามไฟฟ้าที่ผิวเมฆ (V/m)
eps0 = 8.8541878e-12    # ค่าสภาพยอมสุญญากาศ (C^2/(N*m^2))

# 1. ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิผ่านผิวทรงกลมและประจุจากกฎของเกาส์
Phi_E = 4 * np.pi * E0 * (R**2)
Q_enc_gauss = eps0 * Phi_E

# 2. ปริพันธ์เชิงปริมาตรของความหนาแน่นประจุ rho(r) * 4*pi*r^2 dr
def charge_integrand(r):
    rho = (4.0 * eps0 * E0 * r) / (R**2)
    return rho * 4.0 * np.pi * (r**2)

Q_enc_integral, _ = quad(charge_integrand, 0, R)

print(f"ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิ Phi_E: {Phi_E:.4e} V*m")
print(f"ประจุไฟฟ้ารวมจากกฎของเกาส์: {Q_enc_gauss:.4f} C")
print(f"ประจุรวมจากการอินทิเกรตปริมาตร: {Q_enc_integral:.4f} C")
print(f"ความสอดคล้องของผลลัพธ์: ผลต่าง = {abs(Q_enc_gauss - Q_enc_integral):.2e} C")
```

ตัวอย่างที่ 7.2 การคำนวณการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าในวงลวดหมุนด้วยทฤษฎีบทของสโตกส์

โจทย์: ขดลวดวงกลมระนาบรัศมี b วางอยู่ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กแปรผันตามเวลา $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{k}$ จงคำนวณแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\mathcal{E}$ รอบวงลวดขอบเขต C โดยใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์

PICTURE: วงลวดวงกลมวางในระนาบ xy มีเวกเตอร์แนวฉาก $\hat{n} = \hat{k}$ เส้นทางเดิน C ทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่หน้าตัดคือแผ่นวงกลม S รัศมี b

SOLVE: จากกฎการเหนี่ยวนำของฟาราเดย์ในรูปอนุพันธ์ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์แปลงปริพันธ์ของเคิร์ลเป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำ $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \iint_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot (\hat{k}\, da) \tag{7.26}$$

$$= -\iint_S \left(-B_0\omega \sin(\omega t)\hat{k}\right) \cdot \hat{k}\, da = B_0\omega \sin(\omega t) \iint_S da \tag{7.27}$$

$$= B_0\omega \sin(\omega t)(\pi b^2) = \pi b^2 B_0\omega \sin(\omega t) \quad (\text{โวลต์}) \tag{7.28}$$

CHECK: ฟลักซ์แม่เหล็ก $\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} = B_0 \cos(\omega t)(\pi b^2)$ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(-B_0\omega \sin(\omega t)\pi b^2) = \pi b^2 B_0\omega \sin(\omega t)$ ได้ผลลัพธ์ตรงกันอย่างแท้จริง ■

การจำลองด้วย Python แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำฟาราเดย์และฟลักซ์แม่เหล็ก

```python
import numpy as np

# พารามิเตอร์ขดลวดและสนามแม่เหล็ก
b = 0.10          # รัศมีขดลวด 10 cm (0.10 m)
B0 = 0.50         # ความเข้มสนามแม่เหล็กสูงสุด (Tesla)
freq = 50.0       # ความถี่ไฟฟ้า 50 Hz
omega = 2.0 * np.pi * freq
area = np.pi * (b**2)

# คำนวณแรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุด (Peak EMF)
emf_peak = area * B0 * omega
print(f"พื้นที่หน้าตัดขดลวด A = {area * 1e4:.2f} cm^2")
print(f"ความถี่เชิงมุม omega = {omega:.2f} rad/s")
print(f"แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำสูงสุด: {emf_peak:.4f} โวลต์ (V)")

# คำนวณค่า RMS
emf_rms = emf_peak / np.sqrt(2)
print(f"แรงเคลื่อนไฟฟ้าเหนี่ยวนำยังผล (RMS EMF): {emf_rms:.4f} โวลต์ (V)")
```

7.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท

ตารางที่ 7.2 สรุปทฤษฎีบทการแปลงเชิงปริพันธ์และบทบาทในฟิสิกส์

ทฤษฎีบท	รูปสมการทางคณิตศาสตร์	กฎฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้อง
มูลฐานปริพันธ์ตามเส้น	$\int_A^B \nabla f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$	ทฤษฎีบทงาน-พลังงานศักย์อนุรักษ์
ทฤษฎีบทกรีน	$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$	การคำนวณพื้นที่และงานใน 2 มิติ
ทฤษฎีบทเกาส์	$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F})\, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{a}$	กฎของเกาส์ไฟฟ้า กฎความต่อเนื่องของไหล
ทฤษฎีบทสโตกส์	$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$	กฎฟาราเดย์ กฎแอมแปร์-แมกซ์เวลล์

7.9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. **ระดับพื้นฐาน:** กำหนดสนามเวกเตอร์ $\vec{F} = 3x^2y\hat{i} + x^3\hat{j}$

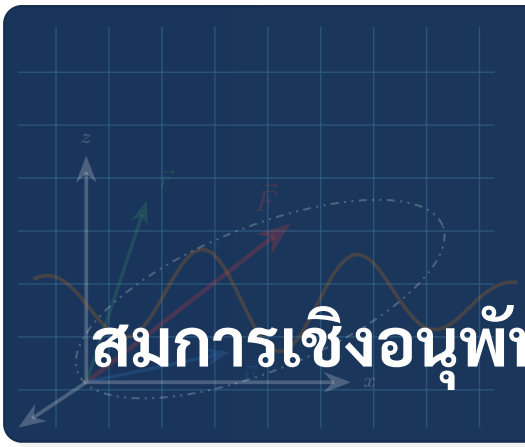
   (a) จงตรวจสอบว่าสนามนี้เป็นสนามอนุรักษ์หรือไม่โดยการคำนวณ $\nabla \times \vec{F}$

   (b) จงหาฟังก์ชันพลังงานศักย์สเกลาร์ $U(x, y)$ ที่สอดคล้องกับ $\vec{F} = -\nabla U$

   (c) จงคำนวณงานในการเคลื่อนที่อนุภาคจาก $(0, 0)$ ไปยัง $(2, 3)$

2. **ระดับประยุกต์:** กำหนดสนามเวกเตอร์ $\vec{A} = 2xy\hat{i} + yz^2\hat{j} + xz\hat{k}$ และ V คือทรงลูกบาศก์หนึ่งหน่วย $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ จงคำนวณฟลักซ์สุทธิ $\oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a}$ โดยใช้ทฤษฎีบทการลู่ออกของเกาส์

3. **ระดับก้าวหน้า:** จงใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ในการคำนวณงานรอบวงปิด $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F} = (y - z)\hat{i} + (z - x)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$ และ C คือวงรีที่เกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ กับระนาบ $x + z = 1$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านบนแกน z



บทที่ 8

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. จำแนกประเภท อันดับ ความเป็นเชิงเส้น และสภาวะเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ได้
2. แก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ สมการเชิงเส้นโดยใช้ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating Factor) และสมการแม่นตรง (Exact ODEs) ได้
3. แปลงสมการไม่เป็นเชิงเส้นแบบแบร์นูลลี (Bernoulli Equation) ให้เป็นสมการเชิงเส้นได้
4. สร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ของการเคลื่อนที่ตกอิสระภายใต้แรงต้านอากาศ การชาร์จแบตเตอรี่รถยนต์ไฟฟ้า และการเย็นตัวของวัตถุได้

8.1 ธรรมชาติของสมการเชิงอนุพันธ์ในฟิสิกส์

กฎเกณฑ์พื้นฐานทางฟิสิกส์เกือบทั้งหมด ตั้งแต่กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน กฎการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า จนถึงกลศาสตร์ควอนตัม ล้วนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางกายภาพกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณนั้น สมการที่บรรจุอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าจึงเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)**

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation: ODE) คือสมการที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว (เช่น เวลา t หรือตำแหน่ง x) อันดับ (Order) ของสมการถูก

กำหนดโดยอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ ในบทนี้จะมุ่งเน้นสมการอันดับหนึ่ง ซึ่งเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{8.1}$$

พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) $y(t_0) = y_0$ ซึ่งเรียกว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial Value Problem: IVP)**

8.2 สมการแบบแยกตัวแปรได้

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันของตัวแปรแต่ละตัวแยกจากกัน:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \implies \frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \tag{8.2}$$

สามารถหาผลเฉลยทั่วไปได้โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างโดยตรง:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx + C \tag{8.3}$$

8.2.1 กฎการเย็นตัวของนิวตัน

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ $T(t)$ ที่สัมผัสกับสิ่งแวดล้อมที่มีอุณหภูมิคงที่ T_{env} จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลต่างอุณหภูมิระหว่างวัตถุกับสิ่งแวดล้อม:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{env}}) \quad (k > 0) \tag{8.4}$$

แยกตัวแปรและหาปริพันธ์:

$$\int \frac{dT}{T - T_{\text{env}}} = -\int k\,dt \implies \ln|T - T_{\text{env}}| = -kt + C_1 \tag{8.5}$$

ปลดลอการิทึมจะได้ผลเฉลย:

$$T(t) = T_{\text{env}} + (T_0 - T_{\text{env}})e^{-kt} \tag{8.6}$$

โดยที่ $T_0 = T(0)$ คืออุณหภูมิเริ่มต้น สมการนี้เป็นรากฐานของการตรวจชันสูตรเวลาเสียชีวิตทางนิติวิทยาศาสตร์และการออกแบบระบบระบายความร้อนของเครื่องยนต์

ตารางที่ 8.1 แบบจำลองระบบฟิสิกส์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและค่าคงที่เวลา

ระบบกายภาพ	สมการเชิงอนุพันธ์	ผลเฉลยตามเวลา	ค่าคงที่เวลา (τ)
การเย็นตัวของนิวตัน	$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{env}})$	$T(t) = T_{\text{env}} + \Delta T_0 e^{-t/\tau}$	$\tau = 1/k$
แรงต้านอากาศเชิงเส้น	$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$	$v(t) = v_{\text{term}}(1 - e^{-t/\tau})$	$\tau = m/k$
การ ชาร์จ ตัว เก็บประจุ RC	$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$	$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$	$\tau = RC$
การ สลาย ตัว กัมมันตรังสี	$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$	$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$	$\tau = 1/\lambda$ ($t_{1/2} = \tau \ln 2$)

8.3 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งและตัวประกอบปริพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง (First-Order Linear ODE) ในรูปมาตรฐานคือ:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{8.7}$$

หาก $Q(x) = 0$ สมการจะเป็นเอกพันธ์ (Homogeneous) ซึ่งแก้ได้โดยการแยกตัวแปร แต่ในกรณีทั่วไปที่ $Q(x) \neq 0$ (Non-homogeneous) จะแก้โดยการคูณด้วย **ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating Factor)** $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int P(x)\,dx\right) \tag{8.8}$$

เมื่อคูณ $\mu(x)$ ตลอดทั้งสมการ:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \tag{8.9}$$

เนื่องจาก $\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x)$ ด้านซ้ายของสมการจะยุบรวมเป็นอนุพันธ์ของผลคูณ:

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)Q(x) \tag{8.10}$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ผลเฉลยทั่วไป:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,dx + C\right] \tag{8.11}$$

8.4 สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงและฟังก์ชันศักย์

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เขียนในรูปผลต่างอนุพันธ์:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8.12}$$

จะเป็น **สมการแม่นตรง (Exact ODE)** ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันศักย์สเกลาร์ $\Psi(x,y)$ ที่ทำให้ $d\Psi = Mdx + Ndy = 0$ ซึ่งเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอตามทฤษฎีบทชวาร์ซคือ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{8.13}$$

เมื่อเงื่อนไขนี้เป็นจริง ผลเฉลยทั่วไปของระบบจะอยู่ในรูปเส้นโค้งระดับ:

$$\Psi(x,y) = C \tag{8.14}$$

ซึ่งในทางฟิสิกส์ Ψ สื่อถึงเส้นทางเดินของกระแสอนุภาค (Streamlines) ในการไหลแบบศักย์ หรือพื้นผิวพลังงานศักย์เท่ากัน

8.5 สมการไม่เป็นเชิงเส้นแบบแบร์นูลลี

สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีรูปพิเศษ:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{8.15}$$

เรียกว่า **สมการแบร์นูลลี (Bernoulli Equation)** สามารถทำให้กลายเป็นสมการเชิงเส้นได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร:

$$u = y^{1-n} \implies \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{8.16}$$

เมื่อแทนค่าลงไป สมการจะแปลงเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งของตัวแปร $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x) \tag{8.17}$$

สมการรูปแบบนี้ใช้ในแบบจำลองการเจริญเติบโตของประชากรและแบคทีเรียที่มีทรัพยากรจำกัด (Logistic Equation) และกลศาสตร์การเคลื่อนที่ของจรวด

8.6 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

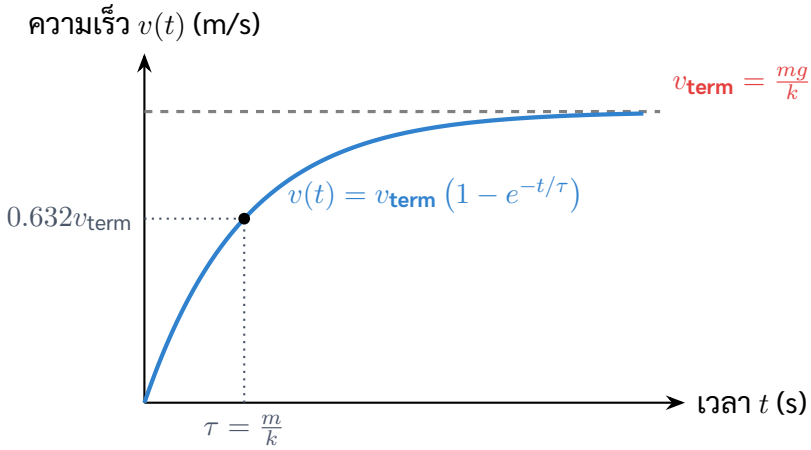
8.6.1 การตกภายใต้แรงต้านอากาศและความเร็วปลาย

วัตถุมวล m ตกในแนวดิ่งภายใต้สนามโน้มถ่วง g และแรงต้านอากาศที่มีขนาดแปรผันตรงกับความเร็ว $F_d = -kv$ (สำหรับความเร็วต่ำ เช่น หยดน้ำฝนหรือการเคลื่อนที่ของละอองเกสร) กฎข้อที่สองของนิวตันเขียนเป็น:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \implies \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{8.18}$$

เมื่อเวลาผ่านไป ความเร่งจะลดลงจนเป็นศูนย์ วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่เรียกว่า **ความเร็วปลาย (Terminal Velocity)**:

$$v_{\text{term}} = \frac{mg}{k} \tag{8.19}$$



ภาพที่ 8.1 กราฟความเร็วตามเวลาของวัตถุที่ตกภายใต้แรงต้านอากาศ ลู่เข้าสู่ความเร็วปลาย v_{term} โดยมีค่าคงที่เวลา $\tau = m/k$

8.6.2 การชาร์จแบตเตอรี่รถยนต์ไฟฟ้าและวงจร RC

ในการชาร์จเซลล์แบตเตอรี่หรือตัวเก็บประจุความจุ C ผ่านความต้านทาน R ด้วยแหล่งจ่ายแรงดันคงที่ V_0 กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's Voltage Law) กำหนดว่า:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_0 \tag{8.20}$$

โดยที่ประจุไฟฟ้า $q(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา มีค่าคงที่เวลาของวงจร (Time Constant) คือ $\tau = RC$ กระแสไฟฟ้าชาร์จจะเริ่มต้นที่ค่าสูงสุด $I_0 = V_0/R$ และลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลตามเวลา

8.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

ตัวอย่างที่ 8.1 การคำนวณความเร็วและระยะทางในการกระโดดร่มชูชีพ

โจทย์: นักกระโดดร่มมวลรวมร่ม $m = 80$ kg กระโดดลงมาจากเครื่องบินที่ระดับความสูงมาก ขณะเริ่มต้นปล่อยตัวมีความเร็วต้นเป็นศูนย์ ($v(0) = 0$) กำหนดให้แรงต้านอากาศเป็นปฏิภาคเชิงเส้นกับความเร็ว $F_d = -kv$ โดยที่สัมประสิทธิ์แรงต้านมีค่า $k = 16$ kg/s และความเร่งโน้มถ่วง $g = 9.8$ m/s^2

1. จงหาสมการความเร็ว $v(t)$ ในฐานะฟังก์ชันของเวลา
2. จงหาความเร็วปลาย v_{term}
3. นักกระโดดร่มต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีความเร็วถึง 95% ของความเร็วปลาย

PICTURE: วัตถุมวล m ตกลงตามแนวดิ่ง กำหนดให้ทิศลงเป็นบวก แรงโน้มถ่วง mg ดึงลง แรงต้านอากาศ kv ต้านขึ้นด้านบน

SOLVE: 1. เขียนสมการการเคลื่อนที่จากกฎข้อที่สองของนิวตัน:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \implies \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{8.21}$$

นี่คือสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยมี $P(t) = \frac{k}{m}$ และ $Q(t) = g$ หาตัวประกอบปริพันธ์:

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{k}{m}dt\right) = e^{(k/m)t} \tag{8.22}$$

คูณตลอดสมการแล้วหาปริพันธ์:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(k/m)t}v\right] = ge^{(k/m)t} \implies e^{(k/m)t}v = \int ge^{(k/m)t}dt + C = g\left(\frac{m}{k}\right)e^{(k/m)t} + C \tag{8.23}$$

หารด้วย $e^{(k/m)t}$:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-(k/m)t} \tag{8.24}$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $v(0) = 0$:

$$0 = \frac{mg}{k} + C \implies C = -\frac{mg}{k} \tag{8.25}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความเร็วคือ:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right) \tag{8.26}$$

2. ความเร็วปลายเมื่อ $t \to \infty$:

$$v_{\text{term}} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k} = \frac{(80\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{16\ \text{kg/s}} = \frac{784}{16} = 49\ \text{m/s} \quad (\approx 176.4\ \text{km/h}) \tag{8.27}$$

3. เวลา t_{95} ที่ความเร็วถึง $0.95v_{\text{term}}$:

$$0.95v_{\text{term}} = v_{\text{term}}\left(1 - e^{-(k/m)t_{95}}\right) \implies 0.95 = 1 - e^{-(k/m)t_{95}} \tag{8.28}$$

$$e^{-(k/m)t_{95}} = 0.05 \implies -(k/m)t_{95} = \ln(0.05) \approx -2.9957 \tag{8.29}$$

แทนค่า $k/m = 16/80 = 0.2\ \text{s}^{-1}$:

$$t_{95} = \frac{2.9957}{0.2} \approx 14.98\ \text{วินาที} \tag{8.30}$$

CHECK: หน่วยของ mg/k คือ $(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)/(\text{kg/s}) = \text{m/s}$ ถูกต้องตามมิติของความเร็ว ค่าคงที่เวลา $\tau = m/k = 5$ s ดังนั้น $t_{95} \approx 3\tau = 15$ s สอดคล้องกับพฤติกรรมเอ็กซ์โพเนนเชียล ($1 - e^{-3} = 1 - 0.0498 = 0.9502$) ■

การจำลองด้วย Python การเคลื่อนที่ตกแบบมีแรงต้านอากาศด้วย solve_ivp

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

# พารามิเตอร์ทางฟิสิกส์
m = 80.0      # มวล (kg)
k = 16.0      # สัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ (kg/s)
g = 9.8       # ความเร่งโน้มถ่วง (m/s^2)

v_term = (m * g) / k
tau = m / k
print(f"ความเร็วปลาย v_term: {v_term:.2f} m/s ({v_term * 3.6:.1f} km/h)")
print(f"ค่าคงที่เวลาผ่อนคลาย tau: {tau:.2f} s")

# สมการเชิงอนุพันธ์ dv/dt = g - (k/m)*v
def parachute_ode(t, y):
    v = y[0]
    return [g - (k / m) * v]

# คำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข (Runge-Kutta 45)
t_eval = np.linspace(0, 25, 200)
sol = solve_ivp(parachute_ode, (0, 25), [0.0], t_eval=t_eval)

# ตรวจสอบเวลาที่ความเร็วถึง 95% ของความเร็วปลาย
t_95_theory = -tau * np.log(0.05)
idx_95 = np.argmin(np.abs(sol.y[0] - 0.95 * v_term))
print(f"เวลาที่ถึง 95% v_term วิเคราะห์(): {t_95_theory:.2f} s")
print(f"เวลาที่ได้จากการจำลอง ODE: {sol.t[idx_95]:.2f} s")
```

ตัวอย่างที่ 8.2 การวิเคราะห์กระแสทรานเซียนต์ในการชาร์จแบตเตอรี่ตัวเก็บประจุ RC

โจทย์: วงจรชาร์จระบบกักเก็บพลังงานประกอบด้วยตัวต้านทาน $R = 100\,\Omega$ และตัวเก็บประจุซูเปอร์คาพาซิเตอร์ $C = 50\,\mu$F ต่ออนุกรมกับแหล่งจ่ายแรงดันตรง $V_0 = 12$ V เมื่อสับสวิตช์ที่เวลา $t = 0$ ขณะเริ่มต้นไม่มีประจุสะสม ($q(0) = 0$) จงหา:

1. ฟังก์ชันประจุไฟฟ้า $q(t)$ และแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $V_C(t)$
2. กระแสไฟฟ้าชาร์จ $I(t)$ ในฐานะฟังก์ชันของเวลา
3. พลังงานไฟฟ้าสะสมในตัวเก็บประจุเมื่อชาร์จเต็ม

PICTURE: วงจรลูปเดี่ยวประกอบด้วยแหล่งจ่าย V_0 ตัวต้านทาน R และตัวเก็บประจุ C ต่ออนุกรมกัน

SOLVE: 1. สมการเคอร์ชอฟฟ์ของวงจร:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \implies \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{V_0}{R} \tag{8.31}$$

มีค่าคงที่เวลา $\tau = RC = (100\,\Omega)(50 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 5 \times 10^{-3}\ \text{s} = 5\ \text{ms}$ ตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(t) = e^{t/\tau}$:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/\tau}q\right] = \frac{V_0}{R}e^{t/\tau} \implies e^{t/\tau}q = \frac{V_0}{R}(\tau e^{t/\tau}) + K = CV_0e^{t/\tau} + K \tag{8.32}$$

$$q(t) = CV_0 + Ke^{-t/\tau} \tag{8.33}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $q(0) = 0 \implies K = -CV_0$:

$$q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{8.34}$$

แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุคือ:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 12\left(1 - e^{-t/0.005}\right)\ \text{V} \tag{8.35}$$

2. กระแสไฟฟ้าชาร์จ $I(t) = \frac{dq}{dt}$:

$$I(t) = \frac{d}{dt}\left[CV_0(1 - e^{-t/\tau})\right] = \frac{CV_0}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} = 0.12e^{-200t}\ \text{A} \tag{8.36}$$

3. พลังงานสะสมสูงสุดเมื่อประจุเต็ม $q_{\text{max}} = CV_0$:

$$U_E = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}(50\times10^{-6}\ \text{F})(12\ \text{V})^2 = 25\times10^{-6}\times144 = 3.6\times10^{-3}\ \text{J} = 3.6\ \text{mJ} \tag{8.37}$$

CHECK: ที่เวลา $t = 0$, $I(0) = V_0/R = 12/100 = 0.12$ A และ $V_C(0) = 0$ สอดคล้องกับกฎของโอห์ม เมื่อเวลาผ่านไปยาวนาน $t \to \infty$, $I \to 0$ และ $V_C \to 12$ V ตัวเก็บประจุทำหน้าที่เสมือนวงจรเปิดอย่างถูกต้องสมบูรณ์ ■

การจำลองด้วย Python การวิเคราะห์ผลตอบสนองทรานเซียนต์ของวงจรชาร์จ RC

```python
import numpy as np

# พารามิเตอร์ของอุปกรณ์
R = 100.0        # ความต้านทาน (Ohm)
C = 50.0e-6      # ความจุไฟฟ้า (Farad)
V0 = 12.0        # แรงดันแหล่งจ่าย (Volt)

tau = R * C
I_peak = V0 / R
U_total = 0.5 * C * (V0**2)

print(f"ค่าคงที่เวลาวงจร tau = {tau * 1e3:.2f} ms")
print(f"กระแสเริ่มต้นสูงสุด I_0 = {I_peak * 1e3:.2f} mA")
print(f"พลังงานไฟฟ้าสะสมสูงสุด = {U_total * 1e3:.2f} mJ")

# ประเมินแรงดันและกระแสที่ 1 tau, 3 tau และ 5 tau
for mult in [1, 3, 5]:
    t_val = mult * tau
    vc = V0 * (1.0 - np.exp(-mult))
    ic = I_peak * np.exp(-mult)
    pct = (vc / V0) * 100.0
    print(f"ที่ t = {mult} tau ({t_val*1e3:.1f} ms): V_C = {vc:.2f} V ({pct:.1f}%), I = {ic*1e3:.2f} mA")
```

8.8 สรุปสาระสำคัญประจำบท

ตารางที่ 8.2 สรุปรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและวิธีหาผลเฉลย

ประเภทสมการ	รูปมาตรฐาน	วิธีหาผลเฉลย
แยกตัวแปรได้	$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$	$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$
เชิงเส้นอันดับหนึ่ง	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$\mu(x) = e^{\int P dx}$, $y = \frac{1}{\mu}[\int \mu Q dx + C]$
แม่นตรง	$Mdx + Ndy = 0$	ตรวจ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \implies \Psi(x,y) = C$
แบร์นูลลี	$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$	เปลี่ยนตัวแปร $u = y^{1-n} \implies$ สมการเชิงเส้น

8.9 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. **ระดับพื้นฐาน:** จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$, กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$

   (b) $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}$, กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

2. **ระดับประยุกต์:** น้ำชาร้อนอุณหภูมิเริ่มต้น $90°$C ตั้งอยู่ในห้องปรับอากาศที่มีอุณหภูมิคงที่ $25°$C เมื่อเวลาผ่านไป 5 นาที อุณหภูมิของน้ำชาลดลงเหลือ $70°$C

   (a) จงหาค่าคงที่การเย็นตัว k ตามกฎของนิวตัน

   (b) ต้องใช้เวลากี่นาทีนับจากเริ่มต้น อุณหภูมิของน้ำชาจึงจะลดลงเหลือ $40°$C

3. **ระดับก้าวหน้า:** การเคลื่อนที่ของอนุภาคความเร็วสูงในอากาศได้รับแรงต้านที่เป็นปฏิภาคกับกำลังสองของความเร็ว $m\frac{dv}{dt} = -cv^2$ จงหาผลเฉลย $v(t)$ และแสดงว่าระยะทาง $x(t)$ ที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้จะเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันลอการิทึมของเวลา

บทที่ 9

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง และการสั่นพ้อง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมประจำบท

เมื่อศึกษาบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ:

1. แก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ทั้งกรณีเอกพันธ์และไม่เป็นเอกพันธ์ได้
2. วิเคราะห์และจำแนกพฤติกรรมการแกว่งแบบหน่วงทั้ง 3 สภาวะ (Over-damped, Critically Damped, Underdamped) ได้อย่างถูกต้อง
3. คำนวณแอมพลิจูด เฟส และความถี่สั่นพ้อง (Resonance Frequency) ของระบบการสั่นที่ถูกกระตุ้นด้วยแรงขับภายนอกได้
4. ประยุกต์ใช้แบบจำลองการสั่นในการออกแบบโช้กอัพยานยนต์ ลูกตุ้มลดแรงสั่นสะเทือนในอาคารระฟ้า (Tuned Mass Damper) และปรากฏการณ์เรโซแนนซ์ในวงจร RLC/MRI ได้

9.1 สมการเชิงเส้นอันดับสองสัมประสิทธิ์คงที่

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อวิชาฟิสิกส์ เนื่องจากกฎข้อที่สองของนิวตัน $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ เชื่อมโยงแรงเข้ากับอนุพันธ์อันดับสองของตำแหน่งตามเวลา

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่เขียนในรูปทั่วไปได้เป็น:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \quad (a \neq 0) \tag{9.1}$$

หาก $f(t) = 0$ เรียกว่า **สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equation)** และหาก $f(t) \neq 0$ เรียกว่า **สมการไม่เป็นเอกพันธ์ (Non-homogeneous Equation)**

9.1.1 หลักการซ้อนทับและรอนสเกียน

สำหรับสมการเอกพันธ์ ถ้า $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ เป็นผลเฉลยสองผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน การรวมกันเชิงเส้น $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเสมอ การทดสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นทำได้โดยคำนวณ **ดีเทอร์มิแนนต์รอนสเกียน (Wronskian)**:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0 \tag{9.2}$$

9.1.2 สมการลักษณะเฉพาะและรูปแบบผลเฉลย

สมมติผลเฉลยในรูปเอกซ์โพเนนเชียล $y(t) = e^{rt}$ แทนลงในสมการเอกพันธ์จะได้ **สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation)**:

$$ar^2 + br + c = 0 \implies r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{9.3}$$

พิจารณาค่าดิสคริมิแนนต์ $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. **รากจริงแตกต่างกัน ($\Delta > 0$):** มีรากจริงสองค่า $r_1 \neq r_2$

$$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \tag{9.4}$$

2. **รากจริงซ้ำกัน ($\Delta = 0$):** มีรากจริงค่าเดียว $r = -b/(2a)$

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^{rt} \tag{9.5}$$

3. **รากเชิงซ้อนสังยุค ($\Delta < 0$):** $r = \alpha \pm i\beta$ โดยที่ $\alpha = -b/(2a)$ และ $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ จากสูตรของออยเลอร์ ผลเฉลยจริงเขียนได้เป็น:

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t - \phi) \tag{9.6}$$

9.2 การสั่นแบบฮาร์มอนิกหน่วงในกลศาสตร์และวงจรไฟฟ้า

พิจารณาระบบมวล m ติดปลายสปริงค่าคงที่ k เคลื่อนที่บนพื้นผิวที่มีแรงเสียดทานหน่วงเป็นสัดส่วนกับความเร็ว $F_{\text{damp}} = -\gamma \frac{dx}{dt}$ สมการการเคลื่อนที่คือ:

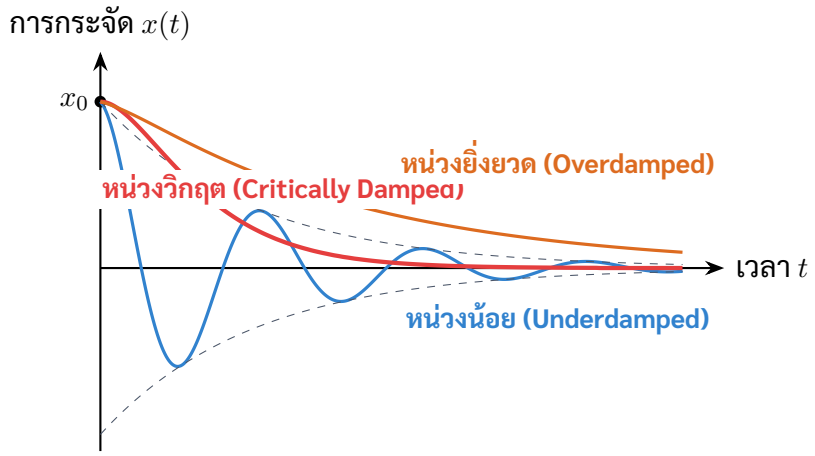
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \iff \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{9.7}$$

โดยที่:

- $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ คือ **ความถี่ธรรมชาติ (Natural Angular Frequency)**
- $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ คือ **พารามิเตอร์การหน่วง (Damping Parameter)**

ตารางที่ 9.1 การเปรียบเทียบสภาวะการแกว่งแบบหน่วง 3 สภาวะ และการประยุกต์ใช้

สภาวะการหน่วง	**เงื่อนไขพารามิเตอร์**	**พฤติกรรมการเคลื่อนที่**	**การประยุกต์ใช้งาน**
หน่วงยิ่งยวด (Overdamped)	$\beta > \omega_0$	ลู่เข้าสู่สมดุลช้า ๆ โดยไม่เกิดการแกว่ง	ประตูปิดอัตโนมัติ (Door closer)
หน่วงวิกฤต (Critically Damped)	$\beta = \omega_0$	คืนสู่สมดุลเร็วที่สุดโดยไม่แกว่งข้ามศูนย์	โช้กอัพรถยนต์, แกลวาโนมิเตอร์
หน่วงน้อย (Underdamped)	$\beta < \omega_0$	แกว่ง ลด ทอน ด้วย ความถี่ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	สายกีตาร์, ลูกตุ้ม, วงจร RLC



ภาพที่ 9.1 เปรียบเทียบพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นหน่วง 3 รูปแบบ: หน่วงยิ่งยวด (Overdamped), หน่วงวิกฤต (Critically Damped) และหน่วงน้อย (Underdamped)

นิยามที่ 9.1 สภาวะการหน่วง 3 รูปแบบ

การตอบสนองของระบบจำแนกตามความสัมพันธ์ระหว่าง β กับ ω_0:

1. **การหน่วงยิ่งยวด (Overdamped, $\beta > \omega_0$):** แรงหน่วงมีค่าสูงมาก ระบบจะเคลื่อนที่กลับสู่จุดสมดุลอย่างช้า ๆ ในลักษณะลดทอนแบบเอกซ์โพเนนเชียลโดยไม่มีการแกว่งข้ามตำแหน่งสมดุล
2. **การหน่วงวิกฤต (Critically Damped, $\beta = \omega_0$):** ระบบกลับคืนสู่ตำแหน่งสมดุลได้เร็วที่สุดโดยไม่เกิดการแกว่งเลย นิยมใช้อย่างกว้างขวางในระบบรองรับน้ำหนักรถยนต์ (โช้กอัพ) ประตูปิดอัตโนมัติ และมาตรวัดความเร็ว
3. **การหน่วงน้อย (Underdamped, $\beta < \omega_0$):** ระบบแกว่งไปมารอบตำแหน่งสมดุลด้วยแอมพลิจูดที่ลดลงตามเอกซ์โพเนนเชียล:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi) \tag{9.8}$$

โดยมีความถี่การสั่นหน่วง $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$

9.2.1 ความสมนัยกับวงจรไฟฟ้า RLC แบบอนุกรม

ระบบการสั่นทางกลมีความสมนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Analogy) แบบหนึ่งต่อหนึ่งกับวงจรไฟฟ้า RLC อนุกรม:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{9.9}$$

โดยที่ประจุ q สมนัยกับการกระจัด x, ความเหนี่ยวนำ L สมนัยกับมวล m, ความต้านทาน R สมนัยกับสัมประสิทธิ์ความหน่วง γ, และส่วนกลับของความจุ $1/C$ สมนัยกับค่าคงที่สปริง k คุณภาพการแกว่งของระบบแสดงด้วย **แฟกเตอร์คุณภาพ (Quality Factor: Q)**:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{mk}}{\gamma} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9.10}$$

ระบบที่มีค่า Q สูงมากจะสูญเสียพลังงานน้อยและสามารถแกว่งได้ต่อเนื่องยาวนาน

9.3 การสั่นถูกบังคับและปรากฏการณ์การสั่นพ้อง

เมื่อระบบการสั่นถูกกระตุ้นด้วยแรงภายนอกเป็นคาบตามเวลา $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ สมการการเคลื่อนที่จะเป็นสมการไม่เป็นเอกพันธ์:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{9.11}$$

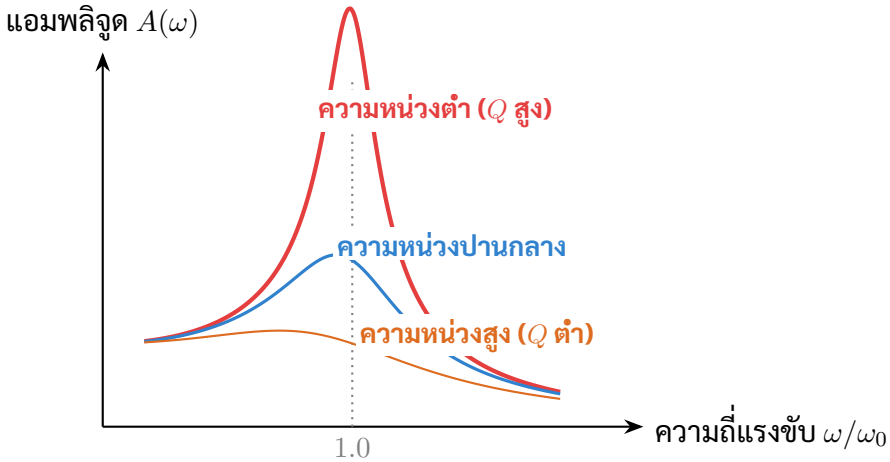
ผลเฉลยทั่วไปประกอบด้วยสองส่วน: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ เมื่อเวลาผ่านไปนาน ผลเฉลยเอกพันธ์ $x_h(t)$ (Transient Response) จะสลายตัวหมดไปด้วยความหน่วง เหลือเพียงผลเฉลยเฉพาะ $x_p(t)$ (Steady-State Response) ซึ่งแกว่งด้วยความถี่ของแรงขับ ω:

$$x_p(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \delta) \tag{9.12}$$

โดยมีแอมพลิจูด $A(\omega)$ และมุมเฟสตามหลัง δ คือ:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \tag{9.13}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{9.14}$$



ภาพที่ 9.2 เส้นโค้งการสั่นพ้อง (Resonance Curves) แสดงแอมพลิจูดของการสั่นเทียบกับความถี่แรงขับ ω สำหรับค่าความหน่วงต่าง ๆ ยิ่งความหน่วงน้อย ยอดกราฟจะยิ่งสูงและแคบลง

ทฤษฎีบทที่ 9.1 สภาวะการสั่นพ้อง

แอมพลิจูด $A(\omega)$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อพจน์ใต้กรณฑ์ในตัวหารมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งเกิดขึ้นที่ **ความถี่สั่นพ้อง (Resonance Frequency)**:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{9.15}$$

หาก ความหน่วง มี ค่า น้อย มาก ($\beta \ll \omega_0$) ความถี่ สั่น พ้อง จะ เข้า ใกล้ ความถี่ธรรมชาติ $\omega_R \approx \omega_0$ และแอมพลิจูดที่จุดสั่นพ้องจะพุ่งสูงขึ้นอย่างมหาศาล:

$$A_{\text{max}} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = \frac{F_0 Q}{k} \tag{9.16}$$

9.4 การประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

9.4.1 ลูกตุ้มปรับจูนมวลในอาคารระฟ้าไทเป 101

อาคารสูงระฟ้า เช่น อาคารไทเป 101 (Taipei 101) ในไต้หวัน เผชิญกับแรงกระทำเป็นคาบจากพายุไต้ฝุ่นและแผ่นดินไหว ซึ่งอาจก่อให้เกิดการสั่นพ้องจนอาคารพังทลาย วิศวกรได้ติดตั้ง **ลูกตุ้มปรับจูนมวล (Tuned Mass Damper: TMD)** น้ำหนัก 660 ตัน แขวนไว้ระหว่างชั้นที่ 87 ถึง 92 ระบบลูกตุ้มนี้ถูกคำนวณความถี่ธรรมชาติ ω_{TMD} ให้เท่ากับความถี่การแกว่งโหมดพื้นฐานของอาคาร เมื่ออาคารแกว่งไปทางขวา ลูกตุ้มจะแกว่งต้านไปทางซ้ายด้วยมุมเฟสต่างกัน 90° ถึง 180° และส่งถ่ายพลังงานจลน์ของอาคารไปสลายทิ้งผ่านกระบอกสูบไฮดรอลิกหน่วงความเร็วได้อย่างมีประสิทธิภาพ

9.4.2 การสร้างภาพด้วยเรโซแนนซ์แม่เหล็กนิวเคลียร์

ในทางการแพทย์ เครื่องตรวจคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Magnetic Resonance Imaging: MRI) ทำงานโดยการอาศัยปรากฏการณ์การสั่นพ้องของโมเมนต์แม่เหล็กนิวเคลียสไฮโดรเจน (โปรตอน) ในร่างกาย เมื่ออยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กคงที่ความเข้มสูง B_0 นิวเคลียสจะเกิดการควง (Larmor Precession) ด้วยความถี่ธรรมชาติ:

$$\omega_L = \gamma_{\text{gyro}} B_0 \tag{9.17}$$

เมื่อส่งคลื่นวิทยุความถี่ภายนอก ω_{RF} ที่ตรงกับความถี่ลาร์มอร์ ω_L พอดี นิวเคลียสจะดูดกลืนพลังงานอย่างรุนแรงเนื่องจากการสั่นพ้อง และเมื่อปิดคลื่นวิทยุ นิวเคลียสจะคลายพลังงานกลับสู่สภาพเดิม ส่งสัญญาณที่สามารถนำมาประมวลผลเป็นภาพถ่ายอวัยวะภายใน 3 มิติความละเอียดสูง

9.5 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

ตัวอย่างที่ 9.1 การออกแบบโช้กอัพรถยนต์ในสภาวะหน่วงวิกฤตเพื่อความปลอดภัย

โจทย์: รถยนต์คันหนึ่งมีมวลตัวถังกระจายลงสู่ระบบช่วงล่างล้อละ $m = 250$ kg สปริงของล้อมีค่าคงที่สปริง $k = 40,000$ N/m

1. จงหาความถี่ธรรมชาติของการสั่นในแนวดิ่ง ω_0
2. จงหาสัมประสิทธิ์ความหน่วง γ_{crit} ของโช้กอัพที่ทำให้ระบบอยู่ในสภาวะหน่วงวิกฤต (Critically Damped) พอดี

3. หากรถคันนี้วิ่งตกหลุมถนนทำให้เกิดการกระจัดเริ่มต้น $x(0) = 0.10$ m โดยมีความเร็วต้นเป็นศูนย์ ($v(0) = 0$) จงหาสมการการกระจัด $x(t)$ และคำนวณตำแหน่งของตัวถังหลังจากผ่านไป 0.2 วินาที

PICTURE: แบบจำลองหนึ่งในสี่ของรถยนต์ (Quarter-car model) มวล m รองรับด้วยสปริง k และตัวหน่วง γ ขนานกัน

SOLVE: 1. ความถี่ธรรมชาติ ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40,000 \text{ N/m}}{250 \text{ kg}}} = \sqrt{160} \approx 12.649 \text{ rad/s} \quad (f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 2.01 \text{ Hz}) \tag{9.18}$$

2. สภาวะหน่วงวิกฤตเกิดขึ้นเมื่อ $\beta = \omega_0$:

$$\beta = \frac{\gamma_{\text{crit}}}{2m} = \omega_0 \implies \gamma_{\text{crit}} = 2m\omega_0 = 2(250 \text{ kg})(12.649 \text{ rad/s}) \approx 6,324.5 \text{ N·s/m} \tag{9.19}$$

3. ผลเฉลยทั่วไปของสภาวะหน่วงวิกฤต ($\Delta = 0$):

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t} \tag{9.20}$$

หาอนุพันธ์เพื่อหาความเร็ว:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C_2 e^{-\omega_0 t} - \omega_0(C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t} = [C_2 - \omega_0 C_1 - \omega_0 C_2 t]e^{-\omega_0 t} \tag{9.21}$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0.10$ m และ $v(0) = 0$:

$$x(0) = C_1 = 0.10 \text{ m} \tag{9.22}$$

$$v(0) = C_2 - \omega_0 C_1 = 0 \implies C_2 = \omega_0 C_1 = (12.649)(0.10) = 1.2649 \text{ m/s} \tag{9.23}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการเคลื่อนที่คือ:

$$x(t) = (0.10 + 1.2649t)e^{-12.649t} \text{ m} \tag{9.24}$$

ที่เวลา $t = 0.2$ s:

$$x(0.2) = (0.10 + 1.2649(0.2))e^{-12.649(0.2)} = (0.10 + 0.25298)e^{-2.5298} \tag{9.25}$$

$$= (0.35298)(0.07967) \approx 0.0281 \text{ m} = 2.81 \text{ cm} \tag{9.26}$$

CHECK: ภายในเวลาเพียง 0.2 วินาที การกระจัดลดลงจาก 10 cm เหลือเพียง 2.81 cm (ลดลงมากกว่า 70%) โดยไม่มีการแกว่งข้ามจุดสมดุลไปยังฝั่งลบเลย ซึ่ง

ยืนยันว่าการตั้งค่าความหน่วงแบบวิกฤตช่วยให้รถยนต์ทรงตัวนิ่งได้อย่างรวดเร็วและปลอดภัยที่สุดสำหรับผู้โดยสาร ■

การ จำลอง ด้วย Python พฤติกรรม ระบบ กัน สะเทือน รถยนต์ สภาวะ หน่วง วิกฤต (Critical Damping)

```python
import numpy as np

# พารามิเตอร์ระบบรองรับน้ำหนักหนึ่งในสี่ของรถยนต์ (Quarter-Car)
m = 250.0        # มวลต่อหนึ่งล้อ (kg)
k = 40000.0      # ค่าคงที่สปริง (N/m)

# ความถี่ธรรมชาติและสัมประสิทธิ์หน่วงวิกฤต
omega0 = np.sqrt(k / m)
gamma_crit = 2.0 * m * omega0
freq_hz = omega0 / (2.0 * np.pi)

print(f"ความถี่ธรรมชาติ omega_0: {omega0:.3f} rad/s ({freq_hz:.2f} Hz)")
print(f"สัมประสิทธิ์หน่วงวิกฤต gamma_crit: {gamma_crit:.1f} N*s/m")

# การกระจายตัวของการกระจัด x(t) = (C1 + C2*t)*exp(-omega0*t)
x0 = 0.10  # ระยะยุบเริ่มต้น 10 cm
C1 = x0
C2 = omega0 * x0

time_steps = np.array([0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6])
for t in time_steps:
    xt = (C1 + C2 * t) * np.exp(-omega0 * t)
    print(f"ที่เวลา t = {t:.2f} s: x(t) = {xt*100:.2f} cm ({xt/x0*100:.1f}%)")
```

ตัวอย่างที่ 9.2 การวิเคราะห์การสั่นพ้องในเซนเซอร์วัดความเร่งไมโครระบบเครื่องกลไฟฟ้า

โจทย์: เซนเซอร์ วัด ความเร่ง ชนิด ไมโคร ระบบ เครื่องกล ไฟฟ้า (MEMS Accelerometer) มวล $m = 2.0 \times 10^{-9}$ kg มี ความถี่ ธรรมชาติ $f_0 = 10$ kHz ($\omega_0 = 2\pi \times 10^4$ rad/s) และมีแฟกเตอร์คุณภาพ $Q = 50$ หากมีแรงสั่นสะเทือนภายนอกขนาด $F_0 = 1.0 \times 10^{-7}$ N มากระตุ้นที่ความถี่ตรงกับความถี่ธรรมชาติพอดี ($\omega = \omega_0$)

1. จงหาสัมประสิทธิ์ความหน่วง γ
2. จงหาแอมพลิจูดการสั่นขณะสั่นพ้อง A_{res}

3. เปรียบเทียบแอมพลิจูดขณะสั่นพ้องกับแอมพลิจูดในสภาวะสถิต $A_{\text{static}} = F_0/k$

PICTURE: ไมโครแคนติลิเวอร์ (Microcantilever) ทำจากซิลิคอน แกว่งสั่นในห้องสุญญากาศภายใต้แรงขับเป็นคาบ

SOLVE: 1. ค่าคงที่สปริงสมมูล k:

$$k = m\omega_0^2 = (2.0\times10^{-9}\ \text{kg})(2\pi\times10^4\ \text{rad/s})^2 = 2.0\times10^{-9}\times3.9478\times10^9 \approx 7.896\ \text{N/m} \tag{9.27}$$

จากนิยาม $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{m\omega_0}{\gamma}$:

$$\gamma = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{(2.0\times10^{-9})(2\pi\times10^4)}{50} = \frac{1.2566\times10^{-4}}{50} \approx 2.513\times10^{-6}\ \text{N·s/m} \tag{9.28}$$

2. แอมพลิจูดขณะสั่นพ้องที่ $\omega = \omega_0$:

$$A_{\text{res}} = \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0} = \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2} = \frac{F_0 Q}{k} \tag{9.29}$$

แทนค่าตัวเลข:

$$A_{\text{res}} = \frac{(1.0\times10^{-7}\ \text{N})(50)}{7.896\ \text{N/m}} = \frac{5.0\times10^{-6}}{7.896} \approx 6.332\times10^{-7}\ \text{m} = 633.2\ \text{nm} \tag{9.30}$$

3. แอมพลิจูดในสภาวะสถิต:

$$A_{\text{static}} = \frac{F_0}{k} = \frac{1.0\times10^{-7}}{7.896} \approx 1.266\times10^{-8}\ \text{m} = 12.66\ \text{nm} \tag{9.31}$$

อัตราส่วนการขยายแอมพลิจูดคือ:

$$\frac{A_{\text{res}}}{A_{\text{static}}} = Q = 50\ \text{เท่า} \tag{9.32}$$

CHECK: ปรากฏการณ์การสั่นพ้องช่วยขยายสัญญาณการสั่นขนาดเล็กมากจากระดับสถิต 12.66 nm ให้เด่นชัดขึ้นเป็น 633.2 nm ได้ถึง 50 เท่าตามค่าของ Q พอดี ทำให้เซนเซอร์ตรวจวัดคลื่นความเร่งและการสั่นสะเทือนในสมาร์ตโฟนและระบบถุงลมนิรภัยรถยนต์ได้อย่างแม่นยำยิ่ง ■

การจำลองด้วย Python การตอบสนองสั่นพ้อง (Resonance Amplification) ของ MEMS

```python
import numpy as np

# พารามิเตอร์โครงสร้าง MEMS Accelerometer
mass = 2.0e-9          # มวลของแผ่นสั่น (kg)
f0 = 10.0e3            # ความถี่ธรรมชาติ 10 kHz (Hz)
omega0 = 2.0 * np.pi * f0
Q = 50.0               # Quality Factor
F0 = 1.0e-7            # แอมพลิจูดแรงขับภายนอก (N)

# คำนวณคุณสมบัติเชิงกล
k_spring = mass * (omega0**2)
gamma_damp = (mass * omega0) / Q

# เปรียบเทียบแอมพลิจูดสถิตและแอมพลิจูดเรโซแนนซ์
A_static = F0 / k_spring
A_res = (F0 * Q) / k_spring

print(f"ค่าสติฟเนสสมมูล k: {k_spring:.3f} N/m")
print(f"สัมประสิทธิ์ความหน่วง gamma: {gamma_damp:.4e} N*s/m")
print(f"แอมพลิจูดการตอบสนองสถิต A_static: {A_static * 1e9:.2f} nm")
print(f"แอมพลิจูดที่ยอดสั่นพ้อง A_res: {A_res * 1e9:.2f} nm")
print(f"อัตราการขยายสัญญาณแอมพลิจูด (Gain): {A_res / A_static:.1f} เท่า")
```

9.6 สรุปสาระสำคัญประจำบท

ตารางที่ 9.2 สรุปพารามิเตอร์และสภาวะต่าง ๆ ของสมการการสั่นอันดับสอง

สภาวะการสั่น	เงื่อนไขพารามิเตอร์	รูปแบบผลเฉลยและการประยุกต์
หน่วงยิ่งยวด (Overdamped)	$\beta > \omega_0 \iff \Delta > 0$	$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ (ไม่มีการแกว่ง คืนสู่สมดุลช้า)
หน่วงวิกฤต (Critical)	$\beta = \omega_0 \iff \Delta = 0$	$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t}$ (คืนสู่สมดุลเร็วสุด โช้กอัพรถ)
หน่วงน้อย (Underdamped)	$\beta < \omega_0 \iff \Delta < 0$	$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi)$ (แกว่งลดทอน Q สูง)
การสั่นพ้อง (Resonance)	$\omega = \omega_R \approx \omega_0$	$A_{\text{max}} \approx \frac{F_0 Q}{k}$ (แอมพลิจูดขยายตัวสูงสุด ไทเป 101/MRI)

9.7 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. **ระดับพื้นฐาน:** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   (a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$

   (b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 20y = 0$

2. **ระดับประยุกต์:** วงจรไฟฟ้า RLC อนุกรมประกอบด้วย $L = 0.5$ H, $R = 20\,\Omega$ และ $C = 100\,\mu$F

   (a) วงจรนี้จัดอยู่ในสภาวะการหน่วงรูปแบบใด (Overdamped, Critically Damped หรือ Underdamped)

   (b) จงหาความถี่การแกว่ง ω_d และแฟกเตอร์คุณภาพ Q ของวงจร

3. **ระดับก้าวหน้า:** พิจารณาระบบมวล-สปริงที่มีความหน่วงถูกขับด้วยแรง $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ จงพิสูจน์อย่างละเอียดว่าความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดของการสั่นมีค่าสูงสุดคือ $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ และแสดงว่าหาก $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$ แอมพลิจูดจะมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องเมื่อความถี่ ω เพิ่มขึ้นโดยไม่เกิดยอดการสั่นพ้อง

ภาคผนวก ก

สูตรคณิตศาสตร์และเอกลักษณ์เวกเตอร์พื้นฐาน

ก.1 ตัวดำเนินการในระบบพิกัดต่าง ๆ

กำหนดให้ ψ คือสนามสเกลาร์ และ $\vec{A}$ คือสนามเวกเตอร์

ก.1.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y, z)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \tag{ก.1}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{ก.2}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{ก.3}$$

ก.1.2 ระบบพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k} \tag{ก.4}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{ก.5}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{ก.6}$$

ก.1.3 ระบบพิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi} \tag{ก.7}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \tag{ก.8}$$

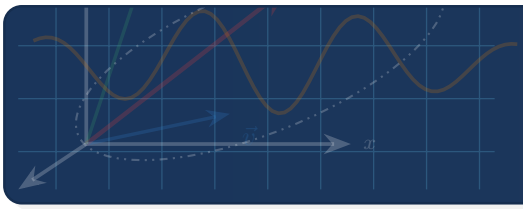
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{ก.9}$$

ก.2 เอกลักษณ์ผลคูณเวกเตอร์

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{ก.10}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \tag{ก.11}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{ก.12}$$



บรรณานุกรม

เอกสารภาษาไทย

ชีวะ ทัศนา. (2569). *ฟิสิกส์แผนใหม่และการประยุกต์ด้วยแบบจำลองเสมือน*. จันทบุรี: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

มหาวิทยาลัย ราชภัฏ รำไพ พรรณี. (2567). *คู่มือ และ เกณฑ์ การ ประเมิน ตำแหน่ง ทางวิชาการ*. จันทบุรี: กองบริหารงานบุคคล มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี.

เอกสารภาษาอังกฤษ (English References)

Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide* (7th ed.). Academic Press.

Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Riley, K. F., Hobson, M. P., & Bence, S. J. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (10th ed.). Cengage Learning.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2020). *Physics for Scientists and Engineers* (6th ed.). W. H. Freeman.

ดัชนีสืบค้นคำสำคัญ

Binomial expansion, 18

Cartesian coordinates, 1
Complex impedance, 25
Complex numbers, 25
Cross product, 10
Curl, 10
Cylindrical coordinates, 1

Damped oscillation, 74
Diagonalization, 33
Directional derivative, 41
Divergence, 10
Dot product, 10

Eigenvalue, 33
Eigenvector, 33
Euler's formula, 25

Gauss's theorem, 53
Gradient, 10

Hessian matrix, 41

Integrating factor, 64

Lagrange multipliers, 41
Line integral, 53

Maclaurin series, 18
Matrix, 33

Ordinary differential equations, 64

Partial derivative, 41
Phasor, 25

Quality factor, 74

Resonance, 74

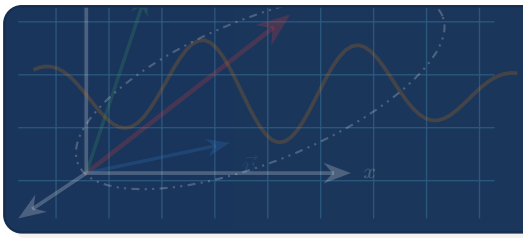
Spherical coordinates, 1
Stokes's theorem, 53
Surface integral, 53

Taylor series, 18
Terminal velocity, 64
Time constant, 64

Vector, 10

กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's cooling law), 64
การกระจายทวินาม (Binomial expansion), 18
การประมาณค่ามุมเล็ก (Small-angle approximation), 18
การสั่นพ้อง (Resonance), 74
การสั่นแบบฮาร์มอนิกหน่วง (Damped harmonic oscillator), 74
การแปลงทแยงมุม (Diagonalization), 33
ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency), 74
ความสัมพันธ์ของแมกซ์เวลล์ (Maxwell relations), 41
ความเร็วปลาย (Terminal velocity), 64
ค่าคงที่เวลา (Time constant), 64
ค่าเจาะจง (Eigenvalue), 33
จาโคเบียน (Jacobian determinant), 53

จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers), 25
ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant), 33
ตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers), 41
ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating factor), 64
ตัวประกอบสเกล (Scale factors), 1
ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes's theorem), 53
ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem), 53
ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ (De Moivre's theorem), 25
ทฤษฎีบทชวาร์ซ (Schwarz's theorem), 41
ปริพันธ์ตามปริมาตร (Volume integral), 53
ปริพันธ์ตามพื้นผิว (Surface integral), 53
ปริพันธ์ตามเส้น (Line integral), 53
ผลคูณจุด (Dot product), 10
ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (Scalar triple product), 10
ผลคูณไขว้ (Cross product), 10
ผลต่างรวม (Total differential), 41
พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates), 1
พิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinates), 1
พิกัดทรงกลม (Spherical coordinates), 1
พีชคณิตเวกเตอร์ (Vector algebra), 10
ฟลักซ์ความร้อน (Heat flux), 41
ฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric flux), 53
รอนสเกียน (Wronskian), 74
ระบบพิกัด (Coordinate system), 1
รัศมีการลู่เข้า (Radius of convergence), 18
วงจร RC (RC circuit), 64
วงจรกรองความถี่ต่ำ (Low-pass filter), 25
สนามอนุรักษ์ (Conservative field), 10
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE), 64
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order ODE), 74
สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (First-order linear ODE), 64
สมการแยกตัวแปรได้ (Separable ODE), 64
สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula), 25
หน่วงน้อย (Underdamped), 74
หน่วงยิ่งยวด (Overdamped), 74
หน่วงวิกฤต (Critically damped), 74
หน่วยจินตภาพ (Imaginary unit), 25
อนุกรมพื้นฐาน (Basic series), 18
อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series), 18
อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series), 18
อนุพันธ์ย่อย (Partial derivative), 41
อนุพันธ์ระบุทิศทาง (Directional derivative), 41
อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (Complex impedance), 25
เกรเดียนต์ (Gradient), 10, 41
เคิร์ล (Curl), 10
เฟสเซอร์ (Phasor), 25
เมทริกซ์ (Matrix), 33
เมทริกซ์การหมุน (Rotation matrix), 33
เมทริกซ์เฮสเซียน (Hessian matrix), 41
เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (Hermitian matrix), 33
เวกเตอร์ (Vector), 10
เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector), 33
แคลคูลัสเชิงปริพันธ์ (Integral calculus), 53
แฟกเตอร์คุณภาพ (Quality factor), 74
แรงต้านอากาศ (Air resistance), 64
แรงลอเรนซ์ (Lorentz force), 10
โช้กอัพรถยนต์ (Shock absorber), 74
โหมดปกติ (Normal modes), 33
ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence), 10



ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชีวะ ทัศนา

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

อีเมล: chewa.t@rbru.ac.th

ประวัติการศึกษา

- **ปร.ด. (ฟิสิกส์)** Ph.D. in Physics สาขาวิชาฟิสิกส์
- **วท.ม. (ฟิสิกส์)** M.Sc. in Physics สาขาวิชาฟิสิกส์
- **วท.บ. (ฟิสิกส์)** B.Sc. in Physics สาขาวิชาฟิสิกส์ (เกียรตินิยม)

ภาระงานสอนประจำ

- คณิตศาสตร์ สำหรับ ฟิสิกส์ (Mathematics for Physics)
- ฟิสิกส์แผนใหม่ (Modern Physics)
- ปฏิบัติ การ ฟิสิกส์ ขั้น สูง (Advanced Physics Lab)
- ฟิสิกส์เชิงคำนวณ (Computational Physics)

ความเชี่ยวชาญและงานวิจัยที่สนใจ

- ฟิสิกส์ เชิง ทฤษฎี และ ระเบียบ วิธี ทาง คณิตศาสตร์ ใน ฟิสิกส์ (Theoretical Physics & Mathematical Methods)
- การ จำลอง ปรากฏการณ์ ทาง ฟิสิกส์ ด้วยคอมพิวเตอร์และการคำนวณเชิงตัวเลข (Computational Physics)
- การประยุกต์ใช้เทคโนโลยีความจริงเสริมและความจริงขยาย (AR / VR / XR) ในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์
- ปัญญา ประดิษฐ์ และ วิทยาศาสตร์ ข้อมูล เพื่อ การ ศึกษา (AI in STEM Education)