Université d'Antananarivo — Mention Info & Technologies — AU 2022-2023
Domaine Sciences et Technologies — TD SÉRIE N° 3 — L1 - Semestre 1
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 Soit $\mathbb{R}[X] = \{P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots\}$ l'ensemble des polynômes à une indeterminée X.
1)- Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ? En donner une base de $\mathbb{R}[X]$.

2)- Soit maintenant E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2, i.e. $E = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donner une base de E. Quelle est sa dimension?

Exercice 2 Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-sou-espaces vectoriels ed E.

1)- $E_1 \cap E_2$ et $E_1 \cup E_2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de E? Justifier.

2)- On définit l'ensemble $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.

a) Montrer que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) En déduire que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$. Ainsi, $E_1 + E_2$ est appelé *sous-espace somme* de E_1 et de E_2.

3)- Soit E un espace vectoriel tel que $E = E_1 + E_2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique comme $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.

(ii) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que E_1 et E_2 sont *supplémentaires* et on écrit $E = E_1 \oplus E_2$. On dit aussi que E est somme directe de E_1 et E_2.

4)- Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires.

a) Montrer que $E_1 \times E_2$ est un espace vectoriel muni de
− l'addition : $(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ et de
− la multiplication externe : $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

b) Montrer que $E_1 \times E_2$ et $E_1 \oplus E_2$ sont isomorphes.

MATRICES

Exercice 1 Soit $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc \neq 0 \neq 0\}$.
1)- Montrer que $(G, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel. Quelle est sa dimension, en donner une base.
2)- Soit $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \mid ad \neq 0\}$. Montrer que H est sous-groupe de G.
3)- Montrer que $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$ est sous-groupe distingué de H.

Exercice 2 Soit
$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c, d$ des entiers modulo 2 et $ad - bc \neq 0\}$.
Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe d'ordre 6.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

1)- Montrer qu'il existe deux matrices $I, J \in E$ tels que $M(a,b) = aI + bJ$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2)- Montrer que $(E, +, \cdot))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice A' associée à f relativement à la base $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ définie par $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$

Exercice 5 Soit f une application linéaire définie relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ par : $\begin{cases} f(e_1) = 3e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ f(e_3) = 5e_1 + 2e_2 + 4e_3 \end{cases}$
1)- Déterminer la matrice associée à f.
2)- En déduire l'expression de f en tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3)- Déterminer un vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = v$ où $v = (1, 0, -1)$.