UNIVERSITE D'ANTANANARIVO S1, 2022-23
Domaine Sciences et Technologies
MIT

# SUITES ET SÉRIES DE NOMBRES RÉELS

Matokia an'i Jehovah amin'ny fonao rehetra,
fa aza miankina amin'ny fahalalanao.
Ohabolana 3:5

## 1 Suites

### 1.1 Définitions

**Définition 1.1** Une suite de nombres réels est une application $u$ de $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n, \ldots, \}$ dans $\mathbb{R}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On note $u_n$ l'image de $n$ par $u$, appelée terme de rang $n$ de la suite, et $u$ sera notée $(u_n)_{n \geq n_0}$, $u_{n_0}$ étant le premier terme de la suite.

**Définition 1.2** On dit qu'une suite de nombres réels $(u_n)$ est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $n$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
Si l'inégalité est stricte, on dit que la suite est strictement croissante (resp. décroissante)

**Définition 1.3** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres réels. On dit que $(v_n)$ est une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)$ s'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(i_n)$ telle que, pour tout $n$, $v_n = u_{i_n}$.

Par exemple, soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies respectivement par $v_n = \dfrac{-1}{2n+1}$ et $w_n = \dfrac{1}{2^n}$ sont des suites extraites de $(u_n)$ car $v_n = u_{2n+1}$ et $w_n = u_{2^n}$.

### 1.2 Suites bornées et suites convergentes

**Définition 1.4** Une suite $(u_n)$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe un réel $M$ (resp. $m$) tel que, pour tout $n$, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$).
Une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée.

*Exemple* La suite $(\dfrac{1}{n})_{n>0}$ est bornée car $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n > 0$.

**Définition 1.5** On dit qu'une suite $(u_n)$ est convergente s'il existe un réel $l$ tel que pour tout intervalle ouvert I de centre $l$, il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \in$ I. Autrement dit, $(u_n)$ est convergente si

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)$ converge vers $l$ et $l$ est appelé la limite de cette suite.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

**Proposition 1.1** *Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.*

**Proposition 1.2** *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) de nombres réels est convergente.*

**Définition 1.6** Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $a_0 < b_0$. On dit qu'elles sont adjacentes si elles possèdent les propriétés suivantes:
(1) $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ décroissante;
(2) Pour tout $n$, $a_n < b_n$;
(3) La suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0.

**Proposition 1.3** *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

*Preuve* : Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites adjacentes $(a_0 < b_0)$. Comme $(a_n)$ est croissante, majorée par $b_0$, alors elle admet une limite $l$.
Comme $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty}(b_n - l) = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n + a_n - l) = 0$
Ce qui prouve que ces deux suites convergent vers la même limite $l$. ∎

**Proposition 1.4** *Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels, $(v_n)$ et $(w_n)$ deux sous-suites de $(u_n)$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Si $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers une même limite $l$, alors $(u_n)$ converge $l$.*

## 1.3 Suites de Cauchy

**Définition 1.7** Une suite $(x_n)$ est de Cauchy si elle vérifie la condition suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |x_n - x_p| < \varepsilon.$$

**Exemple 5** Soit $a$ un entier naturel, $(a_n)$ une suite d'entiers naturels à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. La suite $(x_n)$ définie par les écritures décimales:

$$x_1 = a, a_1 \quad x_2 = a, a_1a_2 \quad x_3 = a, a_1a_2a_3 \qquad x_n = a, a_1a_2 \cdots a_n \qquad \cdots$$

est une suite de Cauchy. En effet, pour tous les entiers $n$ et $p$ tels que $n > p$, on a $x_n - x_p = 0, \underbrace{00\cdots0}_{p\,fois} a_{p+1} \cdots a_n < 10^{-p}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(10^{-n})$ converge vers 0, alors il existe un entier $N$ tel que $10^{-N} < \varepsilon$. Par suite, pour tout $n \geq N$ et pour tout $p \geq N$, on a $|x_n - x_p| < 10^{-N} < \varepsilon$.
∎

**Proposition 1.5** *Toute suite de Cauchy est convergente et vice-versa.*

## 1.4 Suites récurrentes

### 1.4.1 Définitions

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels. On dit que c'est une suite récurrente si chaque terme est fonction des termes qui le précèdent.

**Cas particuliers**:
– Si $u_n = au_{n-1}$, on dit que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $a$. Dans ce cas, $u_n = u_0 a^n$.
– Si $u_n = u_{n-1} + r$, on dit que la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$. Dans ce cas, $u_n = u_0 + rn$.
– Si $u_n = \dfrac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d}$, on dit que la suite $(u_n)$ est une suite homographique.

### 1.4.2 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

**Définition 1.8** *Une suite $(u_n)$ est dite une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si elle est définie par ses 2 premiers termes $u_0, u_1$ et par la relation de récurrence*

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{1}$$

*où $a$ et $b$ sont des réels.*

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique de la suite définie par la relation (1).

**Proposition 1.6** *Soit $(u_n)$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*
*(ii) Si son équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, alors pour tout $n \geq 0$,*

$$u_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$$

*où $a_1$ et $a_2$ sont déterminés par $a_1 + a_2 = u_0$ et $a_1 r_1 + a_2 r_2 = u_1$;*
*(i) Si son équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $r_2 = \bar{r_1}$, alors pour tout $n \geq 0$,*

$$u_n = (a\cos n\theta + b\sin n\theta)r^n$$

*où $a$ et $b$ sont déterminés par $a = u_0$ et $r(a\cos\theta + b\sin\theta) = u_1$.*
*(iii) Si son équation caractéristique admet une seule racine $r$, alors pour tout $n \geq 0$,*

$$u_n = (an + b)r^n.$$

**Exemple 6** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -3$ et la relation $u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
L'équation caractéristique associée $r^2 + r - 2 = 0$ a pour racines 1 et $-2$.
$u_n$ est donc de la forme $u_n = a1^n + b(-2)^n$.
$a$ et $b$ sont déterminés par $a + b = 0$ et $a - 2b = -3$.
On obtient $a = -b = -1$. D'où $u_n = (-2)^n - 1$.

**Exemple 7** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et par la relation $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ $(n \geq 2)$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r^2 + 2 = 0$ dont les racines sont $\alpha, \bar{\alpha}$ avec $\alpha = 1 + i$.
$u_n$ est donc de la forme $u_n = (a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4})\sqrt{2}^n$.
En remplaçant $n$ par 0 et 1, on obtient $a = 0$ $b = 1$. D'où $u_n = \sqrt{2}^n \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

### 1.4.3 Suite récurrente de la forme $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + (an^2 + bn + c)\alpha^n$

Soit $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.
1° cas: $\alpha \neq r_1, r_2$.
1- Si $r_1$ et $r_2$ sont des réels distincts,

$$u_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n + (a'n^2 + b'n + c')\alpha^n.$$

2- Si $r_1$ et $r_2$ sont des complexes ($r_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$),

$$u_n = (a_1 \cos n\theta + a_2 \sin n\theta)r^n + (a'n^2 + b'n + c')\alpha^n.$$

3- Si $r_1 = r_2 = r$, alors

$$u_n = (an + b)r^n + (a'n^2 + b'n + c')\alpha^n.$$

2° cas: $\alpha = r_1$.
1- Si $r_1$ et $r_2$ sont des réels distincts,

$$u_n = (a'n^3 + b'n^2 + c'n + d')\alpha^n + a_2 r_2^n.$$

2- Si $r_1 = r_2 = \alpha$, alors

$$u_n = (a'n^4 + b'n^3 + c'n^2 + d'n + e')\alpha^n.$$

### 1.4.4 Suite homographique

Soit $(u_n)$ la suite homographique définie par son premier terme $u_0$ et la relation $u_n = f(u_{n-1})$ $(n \geq 1)$où $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
L'équation $f(r) = r$ est appelée équation caractéristique de la suite $(u_n)$. Soit $\alpha$ et $\beta$ ses racines (non nécessairement distinctes).
On note $g$ la fonction réciproque de $f$, $(a_n)$ la suite définie par $a_0 = -d/c$ et $a_n = g(a_{n-1})$.
Si $u_0 \neq a_p$ pour tout $p$, la suite $(u_n)$ est bien définie.
**Remarque**: La suite $(a_n)$ peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

**Proposition 1.7** *On suppose $u_0 \neq a_p$ pour tout $p$. Alors*
- *si $\alpha = \beta$, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique;*
- *si $\alpha \neq \beta$, la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est une suite géométrique.*

*Comme conséquence, le terme général $u_n$ est entièrement bien déterminé.*

**Exemple 9** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_n = \dfrac{1}{-u_{n-1} + 2}$.
Son équation caractéristique a pour racine 1.
Posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On obtient $v_n = v_{n-1} - 1$.

Donc $v_n = \dfrac{1}{2} - n$ et $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{3-2n}{1-2n}$.

**Exemple 10** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{-u_{n-1}+1}$.
Son équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racines (complexes) $i$ et $-i$.
Posons $v_n = \dfrac{u_n + i}{u_n - i}$. On a:

$$v_n = \frac{\dfrac{u_{n-1}+1}{-u_{n-1}+1} + i}{\dfrac{u_{n-1}+1}{-u_{n-1}+1} - i} = \frac{(1-i)u_{n-1} + 1 + i}{(1+i)u_{n-1} + 1 - i} = \frac{(1-i)(u_{n-1}+i)}{(1+i)(u_{n-1}-i)} = -iv_{n-1}$$

Donc $v_{2p} = (-1)^p v_0 = \dfrac{3+4i}{5}(-1)^p$ et $v_{2p+1} = (-1)^p(-i)v_0 = \dfrac{4-3i}{5}(-1)^p$.
Comme $u_n = \dfrac{i(v_n+1)}{v_n - 1}$, on a:

$$u_{4p} = 2, \quad u_{4p+1} = -3, \quad u_{4p+2} = -\frac{1}{2}, \quad u_{4p+3} = \frac{1}{3} \ (p \geq 0).$$

# 2 Séries

## 2.1 Rappels

Rappelons qu'une suite numérique réelle est une application $u$ d'un intervalle $[n_0, +\infty[$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- $u_{n_0}$ est son premier terme et on note $(u_n)_{n\geq n_0}$ au lieu de $u$.
- Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe, on dit que la suite est convergente et sa limite est égale à $l = \lim_{n\to\infty} u_n$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.
Par exemple, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{\ln n}{n}$ est convergente et sa limite est égale à 0.
- La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy si, pour chaque réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $N$ tel que, si $m > n \geq N$, alors $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$.
- Toute suite de Cauchy à valeurs réelles est convergente.

## 2.2 Convergence et somme d'une série

### 2.2.1 Définition

On appelle série numérique réelle toute suite de couples $(u_n, S_n)_{n\geq 1}$ où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite numérique réelle et $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Une telle série est notée $\sum_{n\geq 1} u_n$ ou $[u_n]_{n\geq 1}$ : $u_n$ est le terme général de la série et $S_n$ sa somme partielle d'ordre $n$.
**Remarque** Si la suite $(u_n)$ n'est définie que pour $n \geq n_0$, on dit que la série $\sum u_n$ est définie à partir du rang $n_0$ : son premier terme est $u_{n_0}$ et $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$ $(n \geq n_0)$.

### 2.2.2 Convergence et somme d'une série

#### Définition

Soit $[u_n]_{n\geq 1}$ une série numérique réelle. On dit qu'elle est convergente si la suite $(S_n)$ est convergente, c-à-d, s'il existe un réel $S$ tel que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

$S$ est appelé somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, notée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $R_n = S - S_n$ est le reste d'ordre $n$ de la série.

#### Propriétés

**Proposition 2.1** *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

En effet, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
**Remarque importante** La réciproque est fausse.
Par exemple la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

**Proposition 2.2** *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont convergentes de sommes respectives* $S$ *et* $T$*, et si* $a \in \mathbb{R}$*, alors*$\sum(u_n + v_n)$ *et* $\sum au_n$ *sont convergentes de sommes respectives* $S + T$ *et* $aS$*.*

**Proposition 2.3** *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *et si* $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$*, alors les séries* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *sont de même nature, c-à-d,* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est convergente ssi* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *est convergente.*

*De plus, si* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est convergente,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$*.*

*Preuve* : Soit $S_n$ et $T_n$ les sommes partielles d'ordre $n$ respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
On a : $S_{2n+1} = T_n$ et $S_{2n} = T_n - u_{2n+1}$.
Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors la suite $(T_n)$ converge ssi les deux suites$(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ convergent et ont la même limite. D'où le théorème.

**Critère de Cauchy**

On dit que $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy si la suite $(S_n)$ est une suite de Cauchy.
En d'autres termes, $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (m \geq n \geq N \Rightarrow |u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m| \leq \varepsilon).$$

**Proposition 2.4** *Une série* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.*

*Preuve* : Soit $S_n$ la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum u_n$. Alors $\sum u_n$ est convergente ssi la suite $(S_n)$ est une suite de Cauchy. D'où le résultat.

## 2.3 Séries numériques à termes positifs

### 2.3.1 Propriétés

**Proposition 2.5** *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique réelle à termes positifs, c-à-d,* $u_n \geq 0$*. Alors* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si on peut trouver un réel* $M > 0$ *tel que* $S_n \leq M$ *pour tout* $n$*.*

*Preuve* : Comme $(S_n)$ est une suite croissante, alors $\sum u_n$ est convergente ssi la suite $(S_n)$ est majorée.
**Remarque:** Ce théorème reste valable si $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang $n_0$.

**Proposition 2.6** *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques réelles telles que* $0 < u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang* $n_0$*. Alors, si* $\sum v_n$ *est convergente,* $\sum u_n$ *est convergente.*

*Preuve* : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N$ tel que si $m \geq n \geq N$, $|v_n+v_{n+1}+\cdots+v_m| \leq \varepsilon$.
Soit $N' = \max(N, n_0)$. Pour tous les entiers $m$ et $n$ tels que $m \geq n \geq N$, on a$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m| \leq |v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m| \leq \varepsilon$.

La série $\sum u_n$ vérifie donc le critère de Cauchy.

**Exemple:** Considérons la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Posons $v_1 = 1$ et, pour $n > 1$, $v_n = \dfrac{1}{(n-1)n}$.

On a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$, et $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 2 - \frac{1}{n}$.

Ainsi $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente et, par suite, $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente.

**Proposition 2.7** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques réelles telles que $0 < au_n \leq v_n \leq bu_n$ à partir d'un certain rang $n_0$ $(0 < a < b)$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

*Preuve* : Ceci résulte du théorème précédent.

**Proposition 2.8** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques réelles telles que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$. Si $l \neq 0$, alors elles sont de même nature.*

*Preuve* : Il existe un entier $n_1$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $0 < \frac{l}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3l}{2} v_n$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent.

**Corollaire 2.9** *Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle telle que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_0$. Si $u_n$ et $v_n$ sont équivalents au voisinage de $+\infty$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.*

**Proposition 2.10** *Si $f$ est une fonction définie, continue, décroissante et positive sur $[1, \infty[$, alors la série $\sum f(n)$ est convergente ssi l'intégrale $\int_1^\infty f(t)\mathrm{dt}$ est convergente.*

*Preuve* : Soit $S_n$ la somme partielle de $\sum f(n)$. On a :

$$\forall n \geq 2, S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)\mathrm{dt} \leq \mathrm{S_{n-1}}.$$

### 2.3.2 Application: Série de Riemann

**Définition 2.1** Une série de Riemann est une série dont le terme général est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha$ étant un réel.

**Proposition 2.11** *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$.*

*Preuve* : D'après le théorème précédent, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{dt}$ est convergente, c-à-d, ssi $\alpha > 1$.

**Corollaire 2.12** *S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

**Proposition 2.13** (Série de Bertrand) *Si $a > 1$ ou $(a = 1, b > 1)$, alors la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a \ln^b n}$ est convergente. Dans les autres cas, elle est divergente.*

## 2.4 Convergence absolue

**Définition 2.2** On dit qu'une série numérique réelle $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

**Proposition 2.14** *Toute série numérique réelle absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.*

*Preuve* : Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle absolument convergente et $\varepsilon > 0$. D'après le Th 2.4, il existe un entier $N$ tel que si $m \geq n \geq N$, alors $|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_m| \leq \varepsilon$.
Donc, si $m \geq n \geq N$, alors $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que $\sum u_n$ est convergente.

## 2.5 Critère de D'Alembert et critère de Cauchy

**Proposition 2.15** (*Critère de D'Alembert*) *Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = l$. Alors elle est convergente si $l < 1$, et divergente si $l > 1$.*

*Preuve* : Supposons d'abord que $l < 1$ et soit $r$ un réel tel que $l < r < 1$. Il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \leq r|u_n|$.
Posons $v_n = r^{n-n_0}|u_{n_0}|$ $(n \geq n_0)$. On a : $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
Supposons maintenant que $l > 1$. Il existe un entier $n_1$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Ce qui prouve que la suite $(u_n)$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est divergente.

**Proposition 2.16** (*Critère de Cauchy*) *Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} = l$. Alors elle est convergente si $l < 1$, et divergente si $l > 1$.*

## 2.6 Critère d'Abel et Théorème de Dirichlet

**Proposition 2.17** *Soit $(u_n)$ et $(\alpha_n)$ deux suites de nombres réels vérifiant les trois conditions suivantes:*
(1) *Il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout $n$ et pour tout $m$ tels que $m \geq n$, $|\alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m| \leq a$;*
(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;
(3) *La série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ est convergente. Alors la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente.*

En particulier, on a le théorème suivant appelé Théorème de Dirichlet

**Proposition 2.18** *Si $(u_n)$ est une suite de nombres réels $> 0$, décroissante et tendant vers 0, et si $(\alpha_n)$ est une suite de nombres réels vérifiant la condition:*
*Il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout $n$ et pour tout $m$ tels que $m \geq n$, $|\alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m| \leq a$.*
*Alors la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente. De plus, $|R_n| \leq a u_{n+1}$.*

**Exemple:** La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{n}$ est convergente.

**Application: Série alternée**

**Définition 2.3** Une série alternée est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n a_n$ (resp. $(-1)^{n+1}a_n$) où $a_n > 0$ pour tout $n$.

**Proposition 2.19** *Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Si $(a_n)$ est une suite décroissante (à partir d'un certain rang) et tendant vers 0, cette série alternée est convergente. En particulier, la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$.*