UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
Domaine Sciences et Technologies
MIT

S1, 2022-23

Fonctions réelles d'une variable réelle

Fa toy izao no nitiavan'Andriamanitra izao tontolo izao
nomeny ny Zanany Lahitokana mba tsy ho very izay
rehetra mino Azy fa hanana fiainana mandrakizay
Jaona 3: 16

1 Rappels et Notations

Une fonction réelle d'une variable réelle est une application f d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c-à-d, qui, à chaque réel x, fait correspondre au plus un réel y. Si y existe, y est appelé image de x, notée $f(x)$. L'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe est appelé ensemble de définition de f.

Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ est l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On note, pour tout $r > 0$ et pour tout a réel,

$I_r(a) =]a-r, a+r[$, $I_r^*(a) = I_r(a)\backslash\{a\}$, $I_r^+(a) =]a, a+r[$, $I_r^-(a) =]a-r, a[$;

$I_r(+\infty) = I_r^*(+\infty) =]r, +\infty[$;

$I_r(-\infty) = I_r^*(-\infty) =]-\infty, -r[$.

Par définition d'un intervalle, on a les équivalences:

$* \; x \in I_r(a) \iff |x-a| < r$;

$* \; x \in I_r(+\infty) \iff x > r$;

$* \; x \in I_r(-\infty) \iff x < -r$.

2 Fonctions bornées

Définition 2.1 Soit a un nombre réel ou infini et f une fonction définie sur $I_r^*(a)$. On dit que f est bornée en a s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in I_r^*(a)$, $|f(x)| \leq M$.

Définition 2.2 Soit f une fonction définie sur un domaine contenant une partie E de $\mathbb{R}$. On dit qu'elle bornée sur E s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$.

Exemple. La fonction $x \mapsto x \ln x$ est bornée sur $]0, 1[$ tandis que la fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas bornée sur $]0, 1[$.

3 Limite d'une fonction

3.1 Définitions

Définition 3.1 Soit a et l deux nombres (réels ou infinis) et f une fonction définie sur $I_r^*(a)$. On dit que f admet l comme limite en a et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si:
Pour tout intervalle $I_r(l)$, il existe un intervalle $I_\alpha(a)$ tel que $\forall x \in I_\alpha^*(a), f(x) \in I_r(l)$.
En d'autres termes, si a et l sont réels, on a les définitions suivantes:

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{x \to a} f(x) = l & \iff \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| < r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \\
\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty & \iff \forall A > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| < r \Rightarrow f(x) > A) \\
\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty & \iff \forall A < 0, \exists r > 0, \forall x \in D, (0 < |x - a| < r \Rightarrow f(x) < A) \\
\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l & \iff \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\
\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty & \iff \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x > B \Rightarrow f(x) > A) \\
\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty & \iff \forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x > B \Rightarrow f(x) < A).
\end{array}$$

On définit de même pour $x \to -\infty$.

Définition 3.2 On dit qu'une fonction f admet une limite en a s'il existe un réel l telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle n'a pas de limite.

3.2 Limite à droite et limite à gauche

Définition 3.3 Soit a un réel, l un nombre réel ou infini et f une fonction définie sur un intervalle $I_r^+(a)$ (resp. $I_r^-(a)$). On dit que f admet l comme limite à droite (resp. à gauche) en a et on écrit $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$) si, pour tout intervalle $I_\alpha(l)$, il existe un intervalle $I_r^+(a)$ (resp. $I_r^-(a)$) tel que $\forall x \in I_r^+(a)$ (resp. $\forall x \in I_r^-(a)$), $f(x) \in I_\alpha(l)$.

3.3 Propriétés

Proposition 3.1 *Soit a un réel et f une fonction définie sur une partie $I_r^*(a)$. Alors f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.*

Proposition 3.2 *Soit f une fonction définie sur $I_r^*(a)$ (a réel ou infini).*
- *Si f admet une limite en a, alors f est bornée en a;*
- *Si a est réel et si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a, alors f est bornée en a.*

Proposition 3.3 *Soit l un réel, a un nombre réel ou infini, et f une fonction définie sur $I_r^*(a)$. Alors f admet la limite l en a ssi, pour toute suite (x_n) dans $I_r^*(a)$ convergeant vers a, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.*

Application. La fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, considérons les deux suites définies par $x_n = n\pi$ et $y_n = 2n\pi + \pi/2$. Elles tendent toutes les deux vers $+\infty$, mais $\sin x_n = 0$ et $\sin y_n = 1$ pour tout n.

Proposition 3.4 (Critère de Cauchy) *Soit a un nombre réel ou infini et f une fonction définie sur $I_r^*(a)$. Alors, f admet une limite en a ssi elle vérifie la condition suivante dite critère de Cauchy:*
Pour tout intervalle $I_\varepsilon(0)$, il existe un intervalle $I_\alpha(a)$ tel que $\forall x_1, x_2 \in I_\alpha^*(a), f(x_1) - f(x_2) \in I_\varepsilon(0)$.

Proposition 3.5 *Soit f et g deux fonctions définies sur $I_r^*(a)$, l et l' deux réels non nuls. On a le tableau suivant:*

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	0	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim(f+g)$	$l+l'$	l	$+\infty$	FI	$+\infty$
$\lim fg$	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$	FI
$\lim(f/g)$	l/l'	?	FI	FI	?

4 Fonctions continues

4.1 Continuité en un point

Définition 4.1 Soit x_0 un réel. Une fonction f définie sur un intervalle $I_r(x_0)$ est dite continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point $x_0 \neq 0$.

Proposition 4.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un point a. Alors f est continue en a ssi pour toute suite (x_n) dans I convergeant vers a, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Définition 4.2 Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[x_0, x_0 + r[$ (resp. $]x_0 - r, x_0]$). On dit que f est continue à droite (resp. gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Définition 4.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = (a, b)$. Elle est dite continue sur I si elle est continue en tout point x_0 de $]a, b[$, continue à droite en a si $a \in I$ et continue à gauche en b si $b \in I$.

Proposition 4.2 *Si f et g sont continues en x_0, il en est de même de leur somme et de leur produit. De plus, si $g(x_0) \neq 0$, f/g est continue en x_0.*

Remarque. On a la même propriété pour les continuités à droite et à gauche.

Proposition 4.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I_r(x_0)$. Alors elle est continue en x_0 ssi elle est continue à droite et à gauche en x_0.*

4.2 Propriétés des fonctions continues sur un segment

Proposition 4.4 *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors elle est bornée sur $[a,b]$, c-à-d, il existe un réel positif M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. De plus, il existe deux réels α et β se trouvant dans $[a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$*

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Proposition 4.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux points de I $(a < b)$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout point y compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un point x dans $]a,b[$ tel que $f(x) = y$.*

Proposition 4.6 *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image $f(I)$ est un intervalle.*

Preuve : Soit y_1 et y_2 $(y_1 < y_2)$ deux éléments de $f(I)$. Montrons alors que tout y tel que $y_1 < y < y_2$ appartient à I. Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Supposons $x_1 < x_2$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point x dans $]x_1, x_2[$ tel que $f(x) = y$. Ce qui prouve que $y \in f(I)$. Donc $f(I)$ est un intervalle.

4.3 Prolongement par continuité

Définition 4.4 Soit I un intervalle contenant a, et f une fonction définie et continue sur $I \backslash \{a\}$. On dit que f est prolongeable par continuité sur I si f admet une limite en a.
Si f admet une limite l en a, la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I\backslash\{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$
est appelée le prolongement par continuité de f sur I.

4.4 Fonctions continues monotones

Définition 4.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (resp. décroissante) sur I si

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$
$$(\text{resp. } \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))).$$

La fonction est dite strictement croissante (resp. décroissante) si les inégalités larges sont remplacées par les inégalités strictes.
Une fonction (strictement) monotone est soit une fonction (strictement) croissante, soit une fonction (strictement) décroissante.

Proposition 4.7 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si elle est strictement monotone sur I, alors elle est une bijection de I sur $f(I)$.*

4.5 Fonctions arc

Nous supposons connues les propriétés des fonctions sin, cos et tan.

4.5.1 Fonction arcsinus

Soit f la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$, donc admet une fonction réciproque appelée arcsinus, notée arcsin.

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, elle est impaire, c-à-d,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(-x) = -\text{Arcsin}\, x.$$

4.5.2 Fonction arccosinus

Soit g la restriction de cos à $[0, \pi]$. g est une bijection de $[0, \pi]$sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée arccosinus, notée arccos.

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \text{ et } 0 \leq y \leq \pi.$$

arccos est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$. De plus, elle vérifie la propriété suivante

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

4.5.3 Fonction arctangente

Soit h la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. h est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$sur $\mathbb{R}$, donc admet une fonction réciproque appelée arctangente et notée arctan.

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, elle est impaire.

5 Dérivabilité d'une fonction réelle

5.1 Définitions. Propriétés

Définition 5.1 Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle $I_r(x_0)$. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe.
Dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de f au point x_0, notée $f'(x_0)$.

Exemple: La fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. En effet,
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$.
Par suite $f'(x_0) = 2x_0$.

Proposition 5.1 *Si f est dérivable en x_0, elle est continue en ce point.*

En effet, $\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h = f'(x_0)\lim\limits_{h\to 0}h = 0.$
Remarque importante: La réciproque n'est pas vraie.

Proposition 5.2 *Si f est dérivable et croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $]a,b[$, alors $\forall x_0 \in]a,b[$, $f'(x_0)\geq 0$ (resp. $f'(x_0)\leq 0$).*

Preuve : Supposons f croissante et soit $x_0 \in]a,b[$. Alors
$\forall h \neq 0,\ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$
En passant à la limite, on a $f'(x_0)\geq 0$.

Proposition 5.3 *Si f est dérivable en x_0 et admet un minimum ou un maximum local en ce point, alors $f'(x_0)=0$.*

Proposition 5.4 *Si f est dérivable en x_0 et g en $y_0=f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.*

Définition 5.2 On dit qu'une fonction f admet en x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche) si la fonction $h\mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite à droite (resp. à gauche) en x_0, que l'on notera $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Proposition 5.5 (*Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient*) *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ et fg sont dérivables en x_0 et on a:*

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0), \qquad (fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Si, de plus, $g(x_0)\neq 0$, f/g est dérivable en x_0 et

$$(f/g)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

En particulier,

$$(1/g)'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Proposition 5.6 (*Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable.*) *Soit f une fonction bijective. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Preuve : De l'equivalence $y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$, on a:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

5.2 Dérivées des fonctions arc

En appliquant la proposition précédente, on a:
– $\forall x \in]-1,1[, (\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
– $\forall x \in]-1,1[, (\arccos)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
– $\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.3 Fonctions dérivées et dérivées successives

Définition 5.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle (a,b), admettant en tout point x de (a,b) une dérivée $f'(x)$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur (a,b) est appelée fonction dérivée de f. Si f' est elle-même dérivable sur (a,b), sa fonction dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f.
Plus généralement, les dérivées successives seront notées $f^{(3)}, f^{4)}, \ldots, f^{(n)}$.
$f^{(n)}$ est appelée dérivée d'ordre n de f.
On dit que f est n fois dérivable si sa dérivée d'ordre n existe.

5.4 Théorème de Rolle et Théorème des accroissements finis

Théorème 5.7 (**Théorème de Rolle**) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 5.8 (**Théorème des accroissements finis** (*TAF*)) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Théorème 5.9 (**Généralisation du TAF**) *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et $g' \neq 0$ sur $]a,b[$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Preuve : On applique le Théorème de Rolle à $\Phi : x \mapsto \Phi(x) = f(x) - kg(x)$, k étant choisi par $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Théorème 5.10 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f' > 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*

Preuve : Soit $x_1 > x_2$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(c)$.
Comme $f'(c) > 0$, alors $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Corollaire 5.11 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f' > 0$ sur $]a,b[$ sauf pour un nombre fini de points de $]a,b[$ en lesquels $f' = 0$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*

5.5 Règle de l'Hopital

Théorème 5.12 *Soit f et g deux fonctions dérivable sur in intervalle $I_r(x_0)$. Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$*

Corollaire 5.13 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$.*
Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Corollaire 5.14 *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$.*
Si f' et g' sont continues en x_0 et $g'(x_0) \neq 0$, alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5.6 Formule de Taylor

Théorème 5.15 *Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle fermé I telle que $f^{(n)}$ est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I, c-à-d, sur I privé de ses deux extrémités, et soit $x_0 \in I$. Alors, $\forall x \in I$ avec $x \neq x_0$, il existe un réel c compris strictement entre x_0 et x tels que*

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (1)$$

Cette formule (1) est appelée **formule de Taylor en** x_0.

En remplaçant dans la relation (1) x par $x_0 + h$, on obtient

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2)$$

où $0 < \theta < 1$.
La formule (obtenue pour $x_0 = 0$)

$$f(h) = f(0) + f^{(1)}(0)\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

est appelée formule de Mac-Laurin.

Corollaire 5.16 *Soit f une fonction n fois dérivable au point x_0 telle que $f^{(n)}$ est continue en x_0, $f^{(1)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors, si n est pair, f admet un maximum ou un minimum local en x_0.*

Définition 5.4 Soit f une fonction dérivable au point x_0 et φ la fonction définie par $\varphi(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$.
On dit que la courbe de f admet au point x_0 un point d'inflexion si $\varphi(h)/h$ a un signe constant dans $I_r^*(0)$ pour une certaine valeur $r > 0$.

Proposition 5.17 *Soit f une fonction deux fois dérivable au point x_0 telle que $f^{(2)}$ soit continue en x_0. Alors f admet un point d'inflexion en x_0 ssi $f^{(2)}(x_0) = 0$ et $f^{(2)}$ change de signe en x_0.*

6 Développements limités

6.1 Fonctions équivalentes au voisinage d'un point

Définition 6.1 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I_r(a)$ (a peut être infini). On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a et on écrit $f \sim g$ si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition 6.1 *Soient f_1, f_2 et g_1, g_2 des fonctions définies sur un intervalle $I_r(a)$ telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$.*

Application: Cherchons la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)\tan^2(x)}{x(1-\cos x)}$.
En utilisant la règle de l'Hopital, on a $(e^x - 1) \sim x$, $\tan x \sim x$ et $1 - \cos x \sim x^2/2$.
Donc $f(x) \sim \dfrac{x \cdot x^2}{x \cdot x^2/2}$ et par suite $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

6.2 Développements limités au vois. de 0

Définition 6.2 Soit f une fonction définie sur $I_r^*(0)$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au vois. de 0 s'il existe un réel $r > 0$ tel que pour $0 < |x| \leq r$, $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
On écrit aussi $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.

Proposition 6.2 *Si une fonction admet au voisinage de 0 un dvp limité, ce dvp limité est unique.*

Corollaire 6.3 *Soit f une fonction paire (resp. impaire). Si elle admet au vois de 0 un dvp limité $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, alors les coefficients d'indices impairs (resp; pairs) $a_1, a_3, \ldots$(resp. $a_0, a_2, \ldots$) sont nuls.*

Preuve : Soit f une fonction paire admettant au vois de 0 le dvp limité $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.
On a $f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$.
Comme le dvp est unique, nécessairement $a_{2p-1} = 0$ pour tout $1 \leq 2p - 1 \leq n$.
On fait de même pour f impaire.

Proposition 6.4 *Si f est une fonction $n+1$ fois dérivable en 0 et $f^{(n+1)}$ bornée au vois de 0, alors f admet un dvp limité d'ordre n:*

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $0 < \theta < 1$.

Proposition 6.5 *Si f est dérivable en 0 et si f' admet au vois de 0 le dvp limité d'ordre $n-1$: $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$, alors f admet le dvp limité $f(x) = f(0) + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$.*

6.3 Développements limités de quelques fonctions usuelles

(1) *Développement limité de* sin: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)} x = \sin(x + n\pi/2)$.
Donc, au vois de 0, on a le dvp limité

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}).$$

(2) *Développement limité de* cos: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2)$.
Donc, au vois de 0, on a le dvp limité

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}).$$

(3) *Développement limité de exp*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(n)} x = e^x$.
Donc, au vois de 0, on a le dvp limité

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

(4) *Développement limité de* $f : x \mapsto f(x) = (1+x)^\alpha$:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.
Donc, au vois de 0, on a le dvp limité

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

En particulier, on a au vois de 0

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

(5) *Développement limité de* $g : x \mapsto g(x) = \ln(1+x)$:
$\forall x > 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Donc, au vois de 0, on a le dvp limité

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

6.4 Développement limité d'une fonction composée

Soit u une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et admettant au vois de 0 un dvp limité
$$u(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n) = B(x) + o(x^n)$$
et f une fonction définie dans un vois. de 0 et admettant au vois de 0 un dvp limité $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$.
Alors la fonction composée $F = f \circ u$ admet un dvp limité au vois. de 0. En effet, au vois. de 0, $F(x) = a_0 + a_1[B(x)] + a_2[B(x)]^2 + \cdots + a_n[B(x)]^n + o(x^n)$.
En développant, on a $F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$.

Exemple: Développons au vois de 0 jusqu'à l'ordre 5 la fonction $\ln(\cos x)$.

Posons $\cos x = 1 + u(x)$. On a: $u(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + 0(x^5)$ et $\ln(\cos x) = \ln(1 + u(x)) = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}\right] - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}\right]^2 + 0(x^5) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + 0(x^5)$.

6.5 Développement limité au vois. de x_0 et de l'infini

Définition 6.3 Soit f une fonction définie au vois. de x_0. On dit que f admet au vois. de ce point un dvp limité si la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(x_0 + t)$ admet au vois. de 0 un dvp limité.
Si $F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$, alors
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$.

Exemple: $f(x) = e^x$ et $x_0 = 1$.
Au vois. de 0, $F(t) = e^{1+t} = e\left(1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + \cdots + \dfrac{t^n}{n!}\right) + o(t^n)$.
Ainsi, au vois. de 1, $e^x = e\left(1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(x-1)^n}{n!}\right) + o((x-1)^n)$.

Définition 6.4 Soit f une fonction définie au vois. de $+\infty$. On dit que f admet au vois. de $+\infty$ un dvp limité si la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(\dfrac{1}{t})$ admet au vois. de 0 un dvp limité.

Exemple: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$.
Posons $x = \dfrac{1}{t}$. On a $F(t) = f(\dfrac{1}{t}) = \dfrac{1 - t^2}{1 + 2t}$.
A l'ordre 3, $F(t) = (1 - t^2)(1 - 2t + 4t^2 - 8t^3) + o(t^3) = 1 - 2t + 3t^2 - 6t^3 + o(t^3)$.
D'où, au vois. de $+\infty$, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + o(\dfrac{1}{x^3})$.

7 Applications des développements limités

7.1 Application à la recherche des limites

Puisque les dvp limités permettent l'étude des fonctions au vois. d'un point, ils peuvent être utiles pour des recherches de limites.
Exemple: Calcul de $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{x(1 + \cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$.
Au vois de 0,
$1 + \cos x = 2 - x^2/2 + o(x^2)$, $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ et $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$. Par suite, $f(x) = \dfrac{-(7/6)x^3 + o(x^3)}{-(1/6)x^3 + o(x^3)}$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 7$.

7.2 Application à la détermination d'une asymptote oblique de la courbe d'une fonction

Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté aux axes de coordonnées $0x, 0y$. On suppose que $\lim_{x \to \infty} f(x)$ soit infinie.

Si $\frac{f(x)}{x}$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de l'infinie, alors $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique. De plus, si $\frac{f(x)}{x}$ a pour développement limité $a + \frac{b}{x} + o(\frac{1}{x})$, l'asymptote oblique a pour équation $y = ax + b$.