UNIVERSITE D'ANTANANARIVO année universitaire 2022-23

FACULTÉ DES SCIENCES

Mention Informatique

et Technologie

Feuille d'exercices $n°1$

Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+, x \to g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2

On considère l'application $S_n : [n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1], x \mapsto S_n(x) = \sin x$, ($n$ entier relatif).

1) Montrer que S_n est bijective.

2) Soit T_n la réciproque de S_n.

a) Calculer $T_n(0)$.

b) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, T_n'(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) On pose $U_n(x) = (-1)^n T_n(x) - \arcsin x, \forall x \in [-1, 1]$. Montrer que U_n est une fonction constante.

d) En déduire que $T_n(x) = n\pi + (-1)^n \arcsin x$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + a & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

où a est un parmètre réel.

1) Pour quelle valeur a_0 de a f est-elle continue en 1?

Dans la suite, on prend $a = a_0$.

2) Montrer que f est dérivable en 1.

3) Montrer que f est une bijection de $[0, 2]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

4) Déterminer la réciproque.

Exercice 4

Utiliser la régle de l'Hopital qui est applicable au cas $\frac{\infty}{\infty}$ pour calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln^2 x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + x + 1)}{x}$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x+1})}{x}$.

1) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x + \sqrt{x+1}$ est une bijection de son domaine de définition sur un intervalle I que l'on déterminera. Trouver sa réciproque.

2) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

3) Trouver le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.

4) Calculer la dérivée de f et montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que f est décroissante sur $[B, +\infty[$.

Exercice 6

Développement limité à l'ordre 4 des fonctions suivantes au voisinage de 0:

$$\frac{1}{x+2};\ \frac{\ln(x+1)}{x};\ \frac{x}{\ln(x+1)};\quad \arctan x;\ \frac{1-\cos x}{x^2};\ \frac{x^2}{1-\cos x}.$$