## THÉORIE DE GROUPE

**Exercice 1** Soient $(G, \cdot)$ un groupe, $H$ et $H'$ deux sous-groupes de $G$.

1)- Montrer que $H \cap H'$ est un sous-groupe de $G$.

2)- $H \cup H'$ est-il un sous-groupe de $G$ ?

**Exercice 2** Soient $(G, \cdot)$ un groupe commutatif, $H$ et $H'$ deux sous-groupes de $G$. On définit l'ensemble $H + H' = \{x + x' \mid x \in H, x' \in H'\}$

Montrer que l'ensemble $H + H'$ est un sous-groupe de $G$.

**Exercice 3** Soit $H$ un sous-groupe de $G$ et soit $a \in G$. On note $aHa^{-1}$ l'ensemble définie par: $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$.

1)- Montrer que $aHa^{-1}$ est un sous-groupe de $G$.

2)- Si $H$ est fini, que vaut $o(aHa^{-1})$ ?

**Exercice 4** Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$.
On dit que $H$ est un *sous-groupe distingué* de $G$ si $\forall x \in G$, on a $xH = Hx$, où $xH$ et $Hx$ désignent respectivement la classe à gauche et la classe à droite de $H$ par la relation d'équivalence définie par $H$ notée $\mathcal{R}_H$ :

$$(x \mathcal{R}_H \, y \quad ssi \quad x^{-1}y \in H).$$

1)- Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

$(i)$ $xH = Hx$;

$(ii)$ $H = xHx^{-1}$;

$(iii)$ $H = x^{-1}Hx$

2)- Montrer que l'intersection de deux sous-groupes distingués de $G$ est un sous-groupe distingué de $G$ (i.e. $xH \cap xH' = x(H \cap H')$).

**Exercice 5** Soit $(G, \cdot)$ un groupe quelconque.

1- Pour tout $a \in G$, on appelle *normalisateur* ou *centralisateur* de $a$ dans $G$ l'ensemble noté $N(a)$ et défini par:

$$N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}.$$

Montrer que $N(a)$ est un sous-groupe de $G$.

2- Soit $H$ un sous-groupe de $G$. On appelle *centralisateur* de $H$ l'ensemble défini noté $C(H)$ définit par

$$C(H) = \{x \in G \mid xh = hx, \forall h \in H\}$$

Montrer que $C(H)$ est un sous-groupe de $G$.

3- On appelle *centre* de $G$ l'ensemble noté $Z(G)$ défini par :

$$Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz, \forall x \in G\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $G$.

**Exercice 6** Soient $G$ un groupe et $a \in G$.
Montrer que l'application$\Phi : G \longrightarrow G$, $x \mapsto \Phi(x) = axa^{-1}$ est un isomophisme.

**Exercice 7** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit l'application $\tau_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$.
Notons $G$ l'ensemble $G = \{\tau_{ab}(x) \mid a \neq 0\}$.

1)- Montrer que $(G, \circ)$ muni de la composition d'aplication $\circ$ est un groupe.

2)- Soit $H = \{\tau_{ab} \mid a \text{ est rationnel}\}$.

$(a)$-Montrer que $H$ est un sous-groupe de $G$.

$(b)$ Énumérer toutes les classes à gauche de $G$ et les classes à droite de $G$ suivant $H$.

3)- Soit $N = \{\tau_{ab} \in G\}$.

$(a)$-Montrer que $N$ est un sous-groupe distingué de $G$.

$(b)$- Montrer que $G/N$ est isomorphe au groupe des nombres $r \cdot s$ non nuls muni de la loi multiplication "$\cdot$".