

1 Übung 1

2 Übung 2

3 Übung 3

4 Übung 4

5 Übung 5

5.1 Aufgabe 1

5.2 Aufgabe 2

5.3 Aufgabe 3

5.4 Aufgabe 4

5.5 Aufgabe 5

a)

b)

c) Siehe Krypto/gap/ElGamal.g

6 Übung 6

6.1 Aufgabe 1

6.2 Aufgabe 2

- öffentlicher Schlüssel: $(n, e) = (299, 79)$.
- geheimer Schlüssel: $d = 127$.

$$\begin{aligned}ed - 1 &= 79 \times 127 - 1 \\&= 10033 - 1 \\&= 10032 \\&= 2^s \times t \\&= 2^4 \times 627\end{aligned}$$

Also $s = 4$ und $t = 627$. Für (2.1.26) müssen wir dann ein $a \in \{1, \dots, n-1\}$ finden mit

$$\text{ggT}(a, n) = 1 \quad (1a)$$

$$\text{ord}[a^t]_p \neq \text{ord}[a^t]_q \quad (1b)$$

wobei wir p und q ja gerade noch nicht kennen. Wir ignorieren also die zweite Bedingung (1b) und gehen probabilistisch vor, d.h. wir wählen ein zufälliges $a \in \{1, \dots, n-1\}$, welches (1a) erfüllt. Mit den so bestimmten Variablen und einem $i \in \{0, \dots, s-1\} = \{0, 1, 2, 3\}$ haben wir also a, i, t, n sodass

$$\text{ggT}(a^{2^i t} - 1, n) \in \{p, q\}. \quad (2)$$

Zum Beispiel für $a = 224$, welches $\text{ggT}(a, n) = 1$ erfüllt, ergibt sich

$$i = 0 : \text{ggT}(224^{2^0 \times 627} - 1, 299) = 13$$

Also haben wir 13 als Teiler von 299 erkannt, und tatsächlich ist $299/13 = 23$.

Als Beispiel, dass auch $i > 0$ nötig sein kann, z.B. $a = 44$, dann ergibt sich

$$i = 0 : \text{ggT}(44^{2^0 \times 627} - 1, 299) = 1$$

$$i = 1 : \text{ggT}(44^{2^1 \times 627} - 1, 299) = 23$$

Als Algorithmus nach (2.1.28) habe ich `Krypto/gap/RSAFactoring.g` geschrieben, dem man n, e, d übergibt (der also bereits annimmt, dass man d aus n und e effizient errechnet hat) und der daraus einen Faktor von n bestimmt.

6.3 Aufgabe 3

ElGamal \mathbb{Z}_p^* , $p = 17, a = 3, k = 10$.

a) öffentlicher Schlüssel

$$\begin{aligned}(p, a, k) &= (17, 3, 10) \\z &= a^k \mod p \\&= 3^{10} \mod 17\end{aligned}$$

Schnelle Expo mit $a = 3, n = 10, m = 17$:

k	pk	nk	ak	nk mod 2
0	1	10	3	0
1	1	5	9	1
2	9	2	13	0
3	9	1	-1	1
4	-9	0	(Ende)	

$$a^3 \bmod 17 = -9 \bmod 17 = 8 \bmod 17.$$

Also $z = 8$ und damit ist der öffentliche Schlüssel $(p, a, z) = (17, 3, 8)$.

b) $m = 5, y = 5$.

(langsame Expo im Kopf):

$$\begin{aligned}
 c &= a^y \bmod p \\
 &= 3^5 \bmod 17 \\
 &= 3^4 \cdot 3 \bmod 17 \\
 &= 81 \cdot 3 \bmod 17 \\
 &= 13 \cdot 3 \bmod 17 \\
 &= (-4) \cdot 3 \bmod 17 \\
 &= -12 \bmod 17 \\
 &= 5 \bmod 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d &= m \cdot z^y \bmod p \\
 &= 5 \cdot 8^5 \bmod 17 \\
 &= 5 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 8 \bmod 17 \\
 &= 5(-4)(-4)8 \bmod 17 \\
 &= 5 \cdot 2 \cdot 64 \bmod 17 \\
 &= -40 \bmod 17 \\
 &= -6 \bmod 17 \\
 &= 11 \bmod 17
 \end{aligned}$$

$$(c, d) = (5, 11).$$

c) $(12, 12) = (c, d)$.

$$\begin{aligned}
 s &= 12^{-1} \bmod 17 \\
 12 \cdot 3 &= 36 \cong 2 \bmod 17 \\
 2 \cdot 9 &= 18 \Rightarrow 2^{-1} = 9 \bmod 17 \\
 (12 \cdot 3)^{-1} &= 9 \bmod 17 \\
 12^{-1} \cdot 3^{-1} &= 9 \bmod 17 \\
 12^{-1} &= 3 \cdot 9 = 27 = 10 \bmod 17 \\
 s &= 10
 \end{aligned}$$

$$ds^k \bmod p = 12 \cdot 10^{10} \bmod 17$$

k	pk	nk	ak	nk mod 2
0	1	10	10	0
1	1	5	5	1
2	-2	2	2	0
3	-2	1	1	1
4	2	0	(Ende)	

$$12 \cdot 2 \mod 17 = 24 \mod 17 = 7 \mod 17$$

Klartext ist 7.

6.4 Aufgabe 4

Siehe Krypto/gap/ElGamal.g.

Zuerst habe ich den Algorithmus zur schnellen Exponentiation `names fex` geschrieben. Dann habe ich den Miller-Rabin-Test implementiert, einmal als Primzahl-Test `MillerRabinTest`, `MRT` mit Eingaben n, k wobei k die Anzahl der Wiederholungen des Tests ist, und einmal als Primzahl-Generator `MillerRabinGenerator`, `MRG` mit Eingaben `low`, `high` das Intervall, in dem nach einer Primzahl gesucht werden soll, und k erneut wie oben.

Mit diesen Hilfsmitteln habe ich dann das Programm `ElGamal` geschrieben, das zu einer Eingabe $n \in \mathbb{N}$ ein Schlüssel-Paar `key.public` und `key.private` (als `gap-Records`) erzeugt, wobei `key.public` = (p, a, z) und `key.private` = k wobei für die Primzahl p gilt $p \geq n$, und für den geheimen Schlüssel k gilt $k \geq \frac{1}{2}n$.

Der Algorithmus geht nach dem in (2.2.3) Beschriebenen vor mit $f = 2$, d.h. anstatt Primzahl p und Primitivwurzel a getrennt zu wählen, wird ein Paar (m, a) bestimmt, für das m eine Primzahl und a eine Primitivwurzel modulo m ist. Hierbei wird für die erstmalige Primzahl q das Suchintervall $[n, 2n]$ nach Betrand bestimmt, und die Wiederholungen bei 10. Ebenso wird m mit 10 Wiederholungen auf Primzahl getestet.

Sobald man das Paar (p, a) hat, wird ein zufälliger geheimer Schlüssel $k \geq \frac{n}{2}$ gebildet. Anschließend wird noch das für den öffentlichen Schlüssel fehlende $z = a^k \mod p$ berechnet, wobei wiederum die Schnelle Exponentiation zum Einsatz kommt. Damit ist auch der öffentliche Schlüssel `key.public` = (p, a, z) bestimmt, und beide werden zusammen ausgegeben.

6.5 Aufgabe 5

Satz 6.5.1 (Lagrange). Sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe von G . Dann gilt:

- (1) $|U|$ teilt $|G|$.
- (2) $|U \backslash G| = |G/U| = \frac{|G|}{|U|}$.

Beweis. Weil G endlich ist, ist U eine endliche Untergruppe von G . Setze $|U| := m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Zu jedem $g \in G$ sei $gU := \{gu : u \in U\}$ eine Linksnebenklasse von U . Dann ist die Abbildung

$$g \cdot : U \rightarrow gU, u \mapsto gu$$

eine Bijektion: Weil $g \in G$ invertierbar ist, definiert g^{-1} die Abbildung

$$g^{-1} \cdot : gU \rightarrow U, gu \mapsto g^{-1}gu = u$$

und es gilt

$$g \cdot (g^{-1} \cdot (gu)) = g \cdot (u) = gu$$

sowie

$$g^{-1} \cdot (g \cdot (u)) = g^{-1} \cdot (gu) = u$$

also $(g \cdot) \cdot (g^{-1} \cdot) = \text{Id}_{gU}$ und $(g^{-1} \cdot) \cdot (g \cdot) = \text{Id}_U$. Also ist $g \cdot$ bijektiv. Insbesondere gilt $|gU| = |U|$, weil U endlich ist. Damit folgt $|U| = |gU| \forall g \in G$.

Es sei ${}^G/U := \{gU : g \in G\}$ die Menge der Linksnebenklassen von U . Für $g, h \in G$ untersuchen wir den Fall, dass $gU = hU$. Unter der Äquivalenzrelation

$$g \sim h :\Leftrightarrow gU = hU$$

betrachte die Menge ${}^G/\sim := \{[g]_\sim : g \in G\}$ mit $[g]_\sim := \{h \in G | h \sim g\}$. Offensichtlich gilt ${}^G/U \simeq {}^G/\sim$. Im Fall $gU = hU$ gibt es also zu jedem $u_1 \in U$ ein $u_2 \in U$ sodass $gu_1 = hu_2$, also $h^{-1}g = u_1^{-1}u_2 \in U$. Damit stellen wir fest, dass

$$g \sim h \Leftrightarrow gU = hU \Leftrightarrow h^{-1}g \in U \Leftrightarrow g^{-1}h \in U.$$

Die Anzahl der Nebenklassen von U ist also ein Vielfaches von $|U|$, d.h. $\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : |{}^G/U| = n \cdot |U| = n \cdot m$.

□

6.6 Aufgabe 6

Siehe `Krypto/gap/EllipticCurve.g`.

Zunächst habe ich eine Funktion `defines_ellipse` geschrieben, die bei Eingabe von a_4, a_6 und dem Körper F überprüft, ob durch $E_0(a_4, a_6, F)$ eine elliptische Kurve i.S.v. (2.3.10) definiert ist, wobei die Existenz des neutralen Elements ignoriert wird, also nur die Eigenschaften in (2.3.6) überprüft werden, d.h.

$$F \text{ ist ein Körper} \tag{3}$$

$$\text{Char } F \neq 2 \tag{4}$$

$$\text{Char } F \neq 3 \tag{5}$$

$$4a_4^3 + 27a_6^2 \neq 0 \tag{6}$$

wobei die letzte Gleichung über F gesehen werden sollte.

Für die endlichen Körper benutze ich das `gap`-Paket `GaussForHomalg` vom `homalg_project` (https://github.com/homalg-project/homalg_project).

a) $a_4 = -7, a_6 = -6, F = \mathbb{Z}_5, P = (3, 0)$

Zunächst betrachte ich die Zahlen als Elemente von \mathbb{Z}_5 , d.h.

$$a_4 \mod 5 = -7 \mod 5 = 3$$

$$a_6 \mod 5 = -6 \mod 5 = 4$$

$$P \mod 5 = (3, 0) \mod 5 = (3, 0)$$

In `gap` wird das durch Multiplizieren mit 1_F erledigt, d.h. (6) wird so überprüft:

$$1_F * (4 * a_4^3 + 27 * a_6^2) \neq 1_F * 0$$

Auch die Koeffizienten in (6) können wir über \mathbb{Z}_5 betrachten:

$$4 \mod 5 = 4$$

$$27 \mod 5 = 2$$

Nun ist aber $4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 4^2 \mod 5 = 140 \mod 5 = 0$, also gilt (6) nicht, d.h. mit $a_4 = -7, a_6 = -6, F = \mathbb{Z}_5$ handelt es sich nicht um eine Ellipse (was alle weiteren Rechnungen erübrigt).

Das ergebnis liefert auch unsere Funktion `defines_ellipse`:

```
gap> Z5 := HomalgRingOfIntegers( 5 );
GF(5)
gap> defines_ellipse( -7, -6, Z5 );
false
```

b) $a_4 = -5, a_6 = 5, F = \mathbb{Z}_{11}, P = (4, 7)$.

Über \mathbb{Z}_{11} ergibt das

$$\begin{array}{ll} a_4 \bmod 11 = -5 & \bmod 11 = 6 \\ a_6 \bmod 11 = 5 & \bmod 11 = 5 \\ P \bmod 11 = (4, 7) & \bmod 11 = (4, 7) \end{array}$$

Ebenso die Koeffizienten

$$\begin{array}{ll} 4 \bmod 11 = 4 \\ 27 \bmod 11 = 5 \end{array}$$

Wir stellen fest, \mathbb{Z}_{11} ist ein Körper, nicht von Charakteristik 2 oder 3. Bleibt also (6) zu überprüfen:

$$4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 5^2 \bmod 11 = 989 \bmod 11 = 10 \neq 0 \bmod 11.$$

Das ergebnis liefert auch unsere Funktion `defines_ellipse`:

```
gap> Z11 := HomalgRingOfIntegers( 11 );
GF(11)
gap> defines_ellipse( -5, 5, Z11 );
true
```

Nun haben wir also eine elliptische Kurve $E_0(-5, 5, \mathbb{Z}_{11})$ und wollen die Anzahl der Elemente bestimmen. Da sie als x - y -Graph eine Teilmenge der Zahlenebene \mathbb{Z}_{11}^2 ist, brauchen wir also nur für endlich viele Punkte zu überprüfen, ob sie auf der elliptischen Kurve liegen. Dazu bestimmen wir zunächst die Gleichung der Kurve:

$$y^2 = x^3 + a_4x + a_6, \tag{7}$$

also

$$y^2 = x^3 + 6x + 5$$

Dazu habe ich eine Funktion `ellipse_membership` geschrieben, die bei Eingabe eines Punktes $xy \in F^2$ und den Werten a_4, a_6 und F ausgibt, ob xy die Gleichung (7) erfüllt.

Diesen Filter kann ich nun auf die Zahlenebene F^2 anwenden, wenn F endlich ist. Zusammen mit der Funktion `defines_ellipse` habe ich dann die Funktion `ellipticCurve` geschrieben, die zuerst überprüft, ob es sich um eine ellipse handelt, dann ob der Körper endlich ist, und dann die Punkte auf der elliptischen Kurve als Teilmenge von F^2 ausgibt:

```
gap> E0 := ellipticCurve( -5, 5, Z11 );
[ [ 0*Z(11), Z(11)^2 ], [ 0*Z(11), Z(11)^7 ], [ Z(11)^0, Z(11)^0 ],
[ Z(11)^0, Z(11)^5 ], [ Z(11), Z(11)^4 ], [ Z(11), Z(11)^9 ],
```

```

[ Z(11)^2, Z(11)^2 ], [ Z(11)^2, Z(11)^7 ], [ Z(11)^3, Z(11) ],
[ Z(11)^3, Z(11)^6 ], [ Z(11)^5, Z(11)^3 ], [ Z(11)^5, Z(11)^8 ],
[ Z(11)^7, Z(11)^2 ], [ Z(11)^7, Z(11)^7 ], [ Z(11)^9, Z(11) ],
[ Z(11)^9, Z(11)^6 ] ]
gap> Length( E0 );
16

```

Wir dürfen aber auch nicht den Fernpunkt $O \in E_0$ vergessen, der das neutrale Element der Gruppe ist. Die Gruppe hat also insgesamt 17 Elemente.

Damit können wir auf zwei Arten überprüfen, ob der Punkt $P = (4, 7)$ auf E_0 liegt:

Example

```

gap> P := [ 4, 7 ];
[ 4, 7 ]
gap> ellipse_membership( P, -5, 5, Z11 );
true
gap> One( Z11 ) * P in E0;
true

```

c) $a_4 = -43, a_6 = 166, F = \mathbb{R}, P = (3, 8)$.

Da \mathbb{R} ein unendlicher Körper ist, gilt $\text{Char } \mathbb{R} = 0$, und wir brauchen auch nicht in Restklassen zu rechnen. Es gilt also wieder nur die Gleichung (6) zu überprüfen, also

$$4 \cdot (-43)^3 + 27 \cdot 166^2 = 425984 \neq 0$$

Statt über \mathbb{R} rechnen wir in gap über den berechenbaren Körper \mathbb{Q} , was am Ergebnis nichts ändert:

Example

```

gap> QQ := HomalgFieldOfRationals();
Q
gap> defines_ellipse( -43, 166, QQ );
true

```

Da es sich bei $E_0(-43, 166, \mathbb{R}) \subset (\mathbb{R}^2 \cup \{O\})$ um einen stetigen Graph handelt, ist die Gruppe unendlich groß.

Um einen Punkt P zu sich selbst zu addieren, also ihn zu verdoppeln in der Gruppen-Operation auf E_0 bildet man die Tangente an der elliptischen Kurve durch P . Wenn die Tangente parallel zur y -Achse verläuft, schneidet sie die elliptische Kurve in keinem weiteren Punkt. In diesem Fall gilt dann $P + P = O$ und die Ordnung von P wäre zwei.

Wie man am Graph der Kurve

$$y^2 = x^3 - 43x + 166,$$

sehen kann, ist der äußerst linke Punkt derjenige, an dem $y = 0$ gilt und der eine Tangente parallel zur y -Achse hat. Da es sich nicht um unseren Punkt $P = (3, 8)$ handelt, können wir also $P + P = O$ ausschließen, d.h. P ist nicht von Ordnung 2.

Wir müssen also die Tangente an E_0 im Punkt $P = (3, 8)$ berechnen. Da sich der Punkt in der oberen Hälfte des Graphes befindet, können wir $y > 0$ annehmen, und damit den Graph nach $y = f(x)$ auflösen:

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 - 43x + 166} = (x^3 - 43x + 166)^{1/2}$$

Für die Tangente bilden wir also die Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 43) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 43x + 166)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 - 43}{\sqrt{x^3 - 43x + 166}} \end{aligned}$$

Die Tangente hat also im Punkt $P = (3, 8)$ die Steigung $f'(3) = -1$. Damit können wir die Tangentenfunktion $t_P(x)$ zur Geraden $L(P, P, \mathbb{R})$ bestimmen:

$$\begin{aligned} t_P(x) &= ax + b \\ t_P(3) &= 8 \\ t'_P(x) &= a = f'(3) = -1 \\ t_P(x) &= -x + b \\ 8 &= -3 + b \\ b &= 11 \\ t_P(x) &= -x + 11 \end{aligned}$$

Nun haben wir mit P einen doppelten Schnittpunkt an E_0 und suchen den dritten Schnittpunkt $R \in L(P, P, \mathbb{R}) \cap E_0$, also setzen wir beide Funktionen gleich und lösen nach x und y auf:

$$\begin{aligned} t_P(x) &= f(x) \\ -x + 11 &= \sqrt{x^3 - 43x + 166} \\ (11 - x)^2 &= x^3 - 43x + 166 \\ 121 - 22x + x^2 &= x^3 - 43x + 166 \\ x^3 - x^2 - 21x + 45 &= 0 \\ (x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x - 3) &= x^2 + 2x - 15 \\ (x + 5)(x - 3)(x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

also $R = (-5, f(-5)) = (-5, 16)$. Damit haben wir also $P * P$ nach (2.3.10) berechnet. Für die Gruppenoperation auf E_0 müssen wir dann nur noch berechnen

$$\begin{aligned} P + P &= 0 * (P * P) \\ &= 0 * R \\ &= 0 * (-5, 16) \\ &= (-5, -16) \end{aligned}$$

Es muss also nur noch das Vorzeichen vom y -Wert vertauscht werden. Wir halten also fest, $P + P = 2P = (-5, -16)$. Nun sollte die Verbindungsline zwischen P und nP in den meisten Fällen keine Tangente an E_0 mehr sein, sondern eine Sekante. Wir berechnen also der Reihe nach $3P = P + 2P, 4P = P + 3P, \dots$ bis wir für ein $n \in \mathbb{N}$ haben $nP = 0$.

$$\begin{aligned} L(P, Q, \mathbb{R}) &= \{(1 - s)P + sQ \mid s \in \mathbb{R}\} \\ (x, y) &\in L(P, Q, \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow x &= (1 - s)P_x + sQ_x \\ y &= (1 - s)P_y + sQ_y \end{aligned}$$

Das ergibt für $L(P, 2P, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}x &= (1-s)3 + s(-5) \\y &= (1-s)8 + s(-16) \\x(s) &= 3 - 8s \\y(s) &= 8 - 24s \\s(x) &= (x-3)/(-8) \\y(x) &= 8 - 24(s(x)) \\&= 8 - 24((x-3)/(-8)) \\&= 8 + 3(x-3) \\&= 3x - 1\end{aligned}$$

Also wieder gleichsetzen

$$\begin{aligned}(3x-1)^2 &= x^3 - 43x + 166 \\9x^2 - 6x + 1 &= x^3 - 43x + 166 \\x^3 - 9x^2 - 37x + 165 &= 0\end{aligned}$$

Und wir kennen bereits zwei Lösungen $P_x = 3$ und $(2P)_x = -5$, wir können also dividieren:

$$(x^3 - 9x^2 - 37x + 165) : ((x-3)(x+5)) = (x^2 - 6x - 55) : (x+5) = (x-11)$$

Der dritte Punkt ist also $R = (11, f(11)) = (11, 32)$. Einmal noch das Vorzeichen vom y -Wert tauschen erhalten wir $3P = (11, -32)$.

Wieder die Gerade durch P und $3P$:

$$\begin{aligned}x &= (1-s)3 + s(11) \\&= 3 + 8s \\s(x) &= (x-3)/8 \\y &= (1-s)8 + s(-32) \\y(x) &= 8 - 40(s(x)) \\&= 8 - 40((x-3)/8) \\&= 8 - 5x + 15 \\&= -5x + 23\end{aligned}$$

Wieder gleichsetzen:

$$\begin{aligned}(-5x+23)^2 &= x^3 - 43x + 166 \\25x^2 - 230x + 529 &= x^3 - 43x + 166 \\x^3 - 25x^2 + 187x - 363 &= 0\end{aligned}$$

Mit den bekannten zwei Lösungen $x = 3$ und $x = 11$:

$$\begin{aligned}(x^3 - 25x^2 + 187x - 363) : ((x-3)(x-11)) \\&= (x^2 - 22x + 121) : (x-11) \\&= x - 11\end{aligned}$$

Wir haben also wieder $x = 11$ herausbekommen. Also $R = (11, f(11)) = (11, 32)$ also $P * 3P = 3P$. Und $P + 3P = 0 * 3P = (11, -(-32)) = (11, 32) = 4P$.

Nun ist die Verbindungsline zwischen $4P$ und $3P$ parallel zur y -Achse, also $4P * 3P = 0$ und damit

$$4P + 3P = 0 * (4P * 3P) = 0 * 0 = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow 7P = 4P + 3P = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \text{ord}_{E_0} P = 7 \quad (10)$$

Die Ordnung vom Punkt $P = (3, 8)$ betragt 7.