HM1 Zusammenfassung

Julius Vater
2603322

Karlsruher Institut für Technologie

August 25, 2025

Inhalt

1 Reelle Zahlen

1.1 Körperaxiome

Zu je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es <u>genau ein</u> $a + b \in \mathbb{R}$

a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz für "+")

b) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Existenz einer Null)

c) $\forall a \in \mathbb{R} \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ (Inverse bzgl. "+")

d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (Kommutativtgesetz für "+")

e) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz für "·")

f) $\exists 1 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ und $1 \neq 0$ (Existenz einer Eins)

g) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \cdot a \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverse bzgl. "·")

h) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativtgesetz für "·")

i) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

1.2 Die Anordnungsaxiom

j) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ oder $b \leq a$

k) $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

l) $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

m) $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$

n) $a \leq b$ und $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

1.3 Das Supremumsaxiom

1.3.1 Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von a. Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt die Zahl $|a - b|$ der **Abstand von** a **zu** b

1.3.2 Beschränktheit

1) M heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in M$ gilt: $x \leq \gamma$.
   Die Zahl γ heißt dann **obere Schranke** von M.

2) Ist γ eine obere Schranke von M und $\gamma \leq \delta$ für jede weiter obere Schranke δ von M, so heißt γ das **Supremum** (oder die **kleinste obere Schranke**) von M.
   Man schreibt: $\gamma = \sup(M)$.

3) Existiert $\sup(M)$ und gilt $\sup(M) \in M$, so heißt $\sup(M)$ das **Maximum** von M und man schreibt $\max(M)$ anstatt $\sup(M)$ M heißt **nach unten beschränkt**, falls ein $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in M$ gilt: $\gamma \leq x$:
   Die Zahl γ heißt dann eine **untere Schranke** von M.

4) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weiter untere Schranke δ von M, so heißt γ das **Infimum** (oder **die größte untere Schranke**) von M
   Man schreibt: $\gamma = \inf(M)$

5) Existiert $\inf(M)$ und gilt $\inf(M) \in M$ so heißt $\inf(M)$ das **Minimum** von M undman schreibt $\min(M)$ anstatt $\inf(M)$

Eine Menge heißt **beschränkt** falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

1.3.3 Eigenschaften der Beschränktheit

Sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

1) Ist A beschränkt, so ist $\inf(A) \leq \sup(A)$

2) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt, so ist B nach oben beschränkt und $\sup(B) \leq \sup(A)$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf(B) \geq \inf(A)$

3) A sei nach oben beschränkt und γ eine obere Schranke von A. Dann ist genau dann $\gamma = \sup(A)$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $x = x(\varepsilon) \in A$ existiert, sodass $x > \gamma - \varepsilon$

4) A sei nach unten beschränkt und γ eine untere Schranke von A. Dann ist genau dann $\gamma = \inf(A)$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $x = x(\varepsilon) \in A$ existiert, sodass $x < \gamma + \varepsilon$

1.4 Die natürlichen Zahlen

1.4.1 Definitionsmenge

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Induktionsmenge**, falls

a) $1 \in A$

b) aus $x \in A$ folgt stets $x + 1 \in A$

1.4.2 Natürliche Zahlen

Wir definieren die Menge der **Natürlichen Zahlen** durch

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ gehört zu jeder Induktionsmenge}\}\\ &= \text{Durchschnitt aller Induktionsmengen}\end{aligned}$$

Ferner definieren wir $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
Für Natürliche Zaheln gilt stets

a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

b) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$

1.5 Beweisverfahren durch vollständige Induktion

Für ale $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage mit den Eigenschaften

a) $A(1)$ ist wahr

b) ist $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$

1.5.1 Beispiel

Aussage: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Beweis:
<u>Induktionsanfang (IA):</u>
Für $n = 1$ gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Also ist $A(1)$ wahr
<u>Induktionsvorraussetzung (IV):</u>
Es sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $A(n)$ wahr ist. Es gelte Also

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>Induktionsschritt (IS) (von n auf $n+1$):</u>

$$1+2+\cdots+n+(n+1) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.5.2 Die ganzen Zahlen

Die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_o \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1.5.3 Ganzzahlige Potenz

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist definiert:

$$a^n := a \in \mathbb{R} \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \text{ und } a^0 := 1$$

Es gelten die Rechenregeln

$$a^n a^m = a^{n+m} \text{ und } (a^n)^m = a^{nm}$$

1.5.4 Fakultät und Binomialkoffizient

a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Fakultät** von n durch $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ und $0! := 1$

b) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoffizienten** "n über k" durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.6 Die Rationalen Zahlen

1.6.1 Die Rationalen Zahlen

Wir definieren die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y < y$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$
Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n$

1.6.2 Wurzeln

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$
Dieses x heißt **die n-te Wurzel aus** a. Bezeichnung:

$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} := x \text{ und } \sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$$

1.6.3 Regeln der Wurzel

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) $\sqrt{x^2} = |x|$

c) $0 \leq x \leq y \Rightarrow \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$ und $0 \leq x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x}$

d) Für $a \geq 0, \mathbb{Q} \ni r > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$ gilt:

$$a^r := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

e) Für $a > 0$ und $\mathbb{Q} \ni r < 0$, so gilt:

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}$$

2 Folgen und Konvergenz

2.1 Grundlegendes

2.1.1 Folge

Eine Folge ist eine Auflistung $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ von Elementen $a_n \in X$
Falls $X = \mathbb{R}$, so ist jedes a_n eine Reelle Zahl

2.1.2 Reelle Folgen

Für eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt die Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ eine **Folge in X**.
Ist $X = \mathbb{R}$, dann heißt a eine **reelle Folge**.

2.1.3 Schreibweisen

- Meistens schreibt man a_n anstatt $a(n)$ und nennt dies das **n-te Folgenglied**
- Anstatt der Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ schr3eibt man oft $(a_n), (a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$
- Wenn man sagen will, dass (a_n) eine Folge in X ist, schreibt man oft kurz $(a_n) \subseteq X$

2.1.4 Bemerkung

Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a : \{p, p+1, p+2, \dots\} \longrightarrow X$ eine Funktion, so spircht man ebenfalls von einer Folge X. Bezeichnung: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$

2.2 Abzählbarkeit

2.2.1 Abzählbarkeit

a) X heißt **abzählbar**, falls eine Folge $(a_n) \subseteq X$ mit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$ existiert

b) X heißt **überabzählbar**, falls X nicht abzählbar ist

2.3 Konvergenz von Folgen

2.3.1 Beschränktheit von Folgen

Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$

a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, falls M nach oben beschränkt ist.
In diseem Fall schreiben wir:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup(M)$$

b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, falls M nach unten beschränkt ist.
In diesem Fall schreiben wir

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf(M)$$

c) (a_n) heißt **beschränkt**, falls M beschänkt ist.
Äquivalent ist:

$$\exists c \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$$

2.3.2 ε-Umgebung

Für $a \in \mathbb{R}$ uund $\varepsilon > 0$ heißt das Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

die **ε-Umgebung von** a

2.3.3 Konvergenz

Eine Folge heißt **Konvergent**, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

In diesem Fall heißt a **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \longrightarrow a \ (n \to \infty) \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Im Spezialfall $a = 0$ heißt $8a_n)$ eine **Nullfolge**. Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**. Beachte:

$$\begin{aligned} a_n \to a \ (n \to \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2.3.4 Eigenschaften Konvergenter Folgen

Sei (a_n) konvergent und $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt:

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so ist $a = b$

b) (a_n) ist beschränkt

2.3.5 Rechenregeln

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (a_n) \pm (b_n) &:= (a_n \pm b_n) && \text{(Summe)} \\ (a_n)(b_n) &:= (a_n b_n) && \text{(Multiplikation)} \\ \alpha(a_n) &:= (\alpha a_n) && \text{(skalare Multiplikation)} \end{aligned}$$

Gilt $b_n \neq 0$ $(n \geq M)$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$

2.3.6 Wichtige Eigenschaften

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$

b) Existiert ein $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt, dass $|a_n - a| \leq \alpha_n$ und gilt $a_n \to 0$, so konvergiert (a_n) gegen a

c) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:

i) $|a_n| \to |a|$

ii) $a_n + b_n \to a + b$

iii) $\alpha a_n \to \alpha a$

iv) $a_n b_n \to ab$

v) ist $a \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \neq 0 \ (n \geq m) \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

Seien nun (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$

a) Existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq m$ gilt $a_n \leq b_n$, so gilt $a \leq b$

b) Ist (c_n) eine weitere Folge mit der Eigentschaft, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiere, sodass für alle $n \geq m$ gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$, und gilt $a = b$, so ist auch (c_n) konvergent und es gilt $c_n \to a$

Strikte Ungleichungen $a_n < b_n$ konvergenter Folgen werden in der Regel nicht auf die Grenzwerte übertragen (d.h. es gilt im Allgemeinen nicht $a < b$). Ein Beisplie hierzu wäre $a_n := 0$ und $b_n := \frac{1}{n}$. Hier gilt $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$

2.3.7 Monotonie

Sei (a_n) eine Folge

a) (a_n) heißt **monoton wachsend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$

b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a_{n+1}$

c) Ensprechend definiert man **monoton fallen** und **streng monoton fallend**

d) (a_n) heißt **(streng) monoton**, falls (a_n) (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist

Jede Folge (a_n) enthält eine Monotone Teilfoge.

2.3.8 Monotoniekriterien

a) Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

b) Die Folge (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

2.3.9 Die eulersche Zahl

Den Grenzwert der beiden Folgen

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

nennt man **eulersche Zahl**

2.3.10 Teilfolgen

Es sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, \dots)$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_1 < n_2 < \dots$ Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$b_k; = a_{n_k} \quad \text{also} \quad b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \ \dots$$

Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n)
Ist die Folge (a_n) konvergent, $a := \lim_{n \to \infty} a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfoge von (a_n). Dann gilt:

$$a_{n_k} \to a \ (k \to \infty)$$

2.3.11 Häufungswert

Es sei (a_n) eine Folge. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$
Weiter sei

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ ist Häufungswert von } (a_n)\}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha \in H(a_n) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

2.3.12 Niedrig

Es sei (a_n) eine Folge. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt **niedrig** (für (a_n)), falls $a_n \geq a_m$ für alle $n \geq m$ gilt.
Also ist $m \in \mathbb{N}$ nicht niedrig, falls ein $n > m$ existiert mit $a_n < a_m$

2.3.13 Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) enthält eine konvergente Teilfoge, d.h. es gilt $h((a_n)) \neq \emptyset$

2.3.14 Eigenschaften eines Häufungswertes

Sei (a_n) beschränkt. Dann gilt:

a) $H(a_n)$ ist beschränkt

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$; es existieren also $\max H(a_n)$ und $\min H(a_n)$

2.3.15 Limes superior/ inferior

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge.

a) Die Zahl

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \max H(a_n)$$

heißt **Limes superior** von (a_n)

b) Die Zahl

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \min H(a_n)$$

heißt **Limes inferior** von (a_n)

2.3.16 Eigenscharften beschränkter Folgen

Sei (a_n) beschränkt. Dann gilt:

a) Für alle $\alpha \in H(a_n)$ gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

b) (a_n) konvergiert genau dann, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n =: a$. In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

c) Für alle $\alpha \geq 0$ gilt $\limsup_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n$

d) Es gilt $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$

2.3.17 Cauchyfolgen

Eine Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge**, falls (a_n) die Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

besitzt

2.3.18 Cauchykriteium

Eine Reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

3 Unendliche Reihen

3.1 Definitionen

3.1.1 Unendliche Reihen

a) Wir setzen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Folge (s_n) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Wir sagen, dasss $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergiert** bzw. **divergiert**, falls (s_n) konvergiert bzw. divergiert.

b) s_n heißt **n-te Partialsumme** von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

c) Ist $\sum_{k=1}^{\infty}$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert** und wird ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

Reihen sind somit nichts anderes als speziell defineierte Folgen. In einigen Fällen, startet man die summation nicht bei Index $n = 1$ sondern bei einem anderen Index.

3.1.2 Besondere Reihen

a) Für $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

geometrische Reihe. Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$. Der Reihenwert ist in diesem Fall gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \qquad (|x| < 1)$$

b) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

heißt **harmonische Reihe**. Die n-te Partialsumme ist gegeben durch

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Die harmonische Reihe divergiert.

3.1.3 Eigenschaften konvergenter Reihen

Es sei (a_n) eine Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent

a) Es gilt $a_k \to 0$ für $k \to \infty$

b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ konvergent und für $r_m := \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ gilt $r_m \to 0$ für $m \to \infty$

Also gilt:

$$\text{Ist } (a_k) \text{ eine Folge und gilt } a_k \not\to 0, \text{ so ist } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

3.2 Konvergenzkriterien für Reihen

3.2.1 Monotonie und Cauchykriterium

a) **Monotoniekriterium**: Sind alle $a_k \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

b) **Cauchykriterium**: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart exisstiert, dass für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt

$$|\sum^{m} -k = na_k| < \varepsilon$$

3.2.2 Leibnizkriterium

Es sei (b_k) eine Folge mit den Eigenschaften

a) (b_k) its monoton fallend

b) $b_k \to 0$ für $k \to \infty$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ konvergent

3.2.3 Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konvergiert
Isst $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung für Reihen

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$$

3.2.4 Majoranten-/ Minorantenkriterium

a) **Majorantenkriteium**: Existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt $|a_k| \leq b_k$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

b) **Minorantenkriterium**: Existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_k \geq b_k \geq 0$ und ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

3.2.5 Hilfsatz

Es sei (c_k) eine beschränkte Folge.

a) Ist $\alpha := \limsup_{k\to\infty} c_k$ und $x > \alpha$, so existeirt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $c_k < x$ für alle $k \geq k_0$ gilt

b) Ist $\alpha := \liminf_{k\to\infty} c_k$ und $x < \alpha$, so existert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $c_k > x$ für alle $k \geq k_0$ gilt

c) Ist $c_k \geq 0, k \in \mathbb{N}$, und $\limsup_{k\to\infty} c_k = 0$, so gilt $c_k \to 0$ für $k \to \infty$

3.2.6 Wurzelkriterium

a) Ist (c_k) unbeschränkt, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

b) Es sei (c_k) beschränkt und $\alpha := \limsup_{k\to\infty}$.

oman*) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
oman*) Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich

3.2.7 Quottientenkriterium

Es sei (a_k) eine Folge, für die ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart existiere, dass $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ gelte. Ferne sei $c_k := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ für $k \geq k_0$

a) Existtiert ein $k_1 \geq k_0$ mit $c_k \geq 1$ für alle $k \geq k_1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

b) Es sei (c_k) beschränkt, $\alpha := \limsup_{k\to\infty} c_k$ und $\beta := \liminf_{k\to\infty} c_k$. Dann gilt:

oman*) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
oman*) Ist $\beta > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Ist (c_k) sogar konvergent, so gilt sogar

$$\alpha = \beta = \lim_{k\to\infty} c_k$$

In diesem Fall vereinfacht sich die Aussage des Quottientenkriteriums Zusammenfassung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich

3.2.8 Exponentialfunktion

Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\exp(r) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^r$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ unr $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$
$$\exp(rx) = \exp(x)^r$$
$$\exp(r) = e^r$$
$$e^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

3.3 Umordung von Reihen

3.3.1 Umordnung

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Setzt $b_k := a_{\phi(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Also

$$b_0 = a_{\phi(0)}, \quad b_1 = a_{\phi(1)}, \dots$$

Dann heißt $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine **Umordnung** von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_o}$ (Man kann hier auch $\mathbb{N}_0$ durch $\mathbb{N}$ ersetzen)
Es sei (b_k) eine Umordung von (a_k). Dann gilt:

a) Ist (a_k) konvergent, so ist (b_k) konvergent und $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k$

b) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gilt:

a) Ist $s \in \mathbb{R}$, so existiert eine Umordung (b_k) von (a_k) mit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad \text{ist konvergent und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = s$$

b) Es existiert eine Umordung (c_k) von (a_k) mit:$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist divergent

3.3.2 Cauchyprodukt

Das **Cauchyprodukt** zweier Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)$$

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \quad \text{ist absolut konvergent und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

4 Potenzreihen

4.1 Grundlegendes

4.1.1 Potenzreihe

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$. EIne Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_o)^k = a_0 + a_1(x - x0) + a_2(x - x_o)^2 + \dots$$

Heißt **Potenzreihe**.

4.1.2 Konvergenzradius

Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } (\sqrt[k]{|a_k|}) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup_{k\to\infty}()\sqrt[k]{|a_k|}), & \text{falls } (\sqrt[k]{|a_k|}) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

Der **Konvergenzradius** der zugehörigen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,\ x_0 \in \mathbb{R}$, ist definiert durch

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0,\infty) \end{cases}$$

(Formal ist also "$r = \frac{1}{\rho}$").
Es gilt:

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreuihe nur für $x = x_0$

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$

c) Ist $r \in (0,\infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$ und sie divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$. Für $x = \pm r$ ist keine allgemeine Aussage möglich

4.1.3 Sinus/ Cosinus

Wir definiren den **Cosinus** und den **Sinus** durch

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und}$$

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wir können bereits einige Eigenschaften des Cosinus und des Sinus festhalten. Es gelten

- $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$
- Da im Cosinus nur gerade Exponenten von x und im Sinus nur ungerade Exponenten von x summiert werden, gelten für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

- Man kann mit hilfe des Cauchyproduktes die folgenden **Additionstheoreme** beweisen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

- Da Additionstheorem für den Cosinus zusammen mit den Symmetrie-Eigenschaften von oben liefern für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität (den sogenannten trigonometrischen Pythagoras)

$$1 = \cos(0) = \cos(x+(-x)) = \cos(x)\cos(-x)-\sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x)+\sin^2(x)$$

- Die letzte Ungleichung impliziert, für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $|\cos(x)| \leq 1$ und $|\sin(x)| \leq 1$, den

$$\cos(x)^2 \leq \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \sin(x)^2 \leq \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

5 q-adische Entwicklung

5.1 Grundlegendes

5.1.1 Gaußklammern

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine größte Zahl $k \in \mathbb{Z}$, die kleiner oder gleich x ist. Diese erfüllt $k \leq x < k+1$ und wir schreiben hierfür

$$\lfloor x \rfloor := k$$

Dies Klammern um das x nennt man **Gaußklammern** diese Gaußklammern runden ab, analog gibt es allerdings auch Gaußklammern, die aufrunden ($\lceil x \rceil$)

5.1.2 q-adischer Bruch

Ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}, k \in \mathbb{N}$, so schreibt man

$$(0, y_1 y_2 y_3 \ldots)_q := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{q^k}$$

und nennt $(0, y_1 y_2 y_3 \ldots)_q$ einen **q-adischen Bruch**

5.1.3 q-adiische Entwicklung

Ist $a = (0, z_1 z_2 \ldots)_q$ mit einer Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die

$$\begin{cases} z_k \in \{0, 1 \ldots, q-1\} & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \frac{z_1}{q} + \cdots + \frac{z_n}{q^n} \leq a < \frac{z_1}{q} + \cdots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

erfüllt, so nennt man $(0, z_1 z_2 \ldots)_q$ die **q-adische Entwickliiung von a**
Ist $(\overline{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weiter Folge mit den gleichen Eigenschaften, so gilt $z_k = \overline{z}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$

5.1.4 Algorithmus zur Berechnung einer q-adischen Entwicklung

Seien $a \in [0,1), q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a = (0, z_1 z_2 \dots)_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{q^k}$

$$z_1 = \lfloor a \cdot q \rfloor \quad a_1 = a \cdot q - z_1$$
$$z_2 = \lfloor a_1 \cdot q \rfloor \quad a_2 = a_1 \cdot q - z_2$$
$$\vdots$$
$$z_{n+1} = \lfloor a_n \cdot q \rfloor \quad a_{n+1} = a_n \cdot q - z_{n+1}$$

6 Grenzwerte bei Funktionen

6.1 Grundlegendes

6.1.1 Häufungpunkte

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von D, falls eine Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$
Es gilt

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } D \iff \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ ist } U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

6.1.2 Grenzwert

Wir ssagen, das der **Grenzwert** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert, falls ein $a \in \mathbb{R}$ derart existiert, dass für alle Folgen $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$f(x_n) \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \quad \text{für} \quad x \to x_0$$

Es gilt:

a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann sind äquivalent:

oman*) Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und es gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

oman*) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, das für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$

b) Es sind äquivalent:

oman*) Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

oman*) Für jede Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $(f(x_n))$ konvergent

oman*) (**Cauchykriterium**) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x_1, x_2 \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_1, x_2 \in U_\delta(x_0)$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

6.1.3 Rechts-/ Linsseitiger Grenzwert

Einige Funktionen haben unterschiedliche Grenzwert im gleichem Punkt, je nachdem, ob man die Funktion "von links" oder "von rechts" betrachtet. Um diese zu Untescheiden gibt den **linksseitigen Grenzwert**:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x)$$

und den **rechtsseitigen Grenzwert**

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

6.1.4 Bestimmte divergentz

a) oman*) Wir sagen (x_n) **divergiere bestimmt gegen** ∞, falls für alle $C > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n \geq C$
Wir schreiben hierfür kurz: $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$

oman*) Analog sagen wir, (x_n) **divergiere bestimmt gegen** $-\infty$, falls für alle $C < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n \leq C$
Wir schreiben hierfür kurz: $x_n \to -\infty$ für $n \to \infty$

$$x_n \to \infty \iff x_n > 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ genügend groß und } \frac{1}{z_n} \to 0$$

$$x_n \to -\infty \iff x_n < 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ genügend groß und } \frac{1}{z_n} \to 0$$

b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 sei ein Häufungswwert von D und $g : D \to \mathbb{R}$ eine FUnktion. Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty, \text{ falls } g(x_n) \to \infty \text{ für jede Folge } (x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty, \text{ falls } g(x_n) \to -\infty \text{ für jede Folge } (x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0$$

c) Es sei D nicht nach oben beschränkt, $g : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Wir schreiben

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = a, \text{ falls } g(x_n) \to a \text{ für jede Folge } (x_n) \subseteq D \text{ mit } x_n \to \infty$$

d) Es sei D nicht nach unten beschränkt, $g; D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Wir schreiben

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = a, \text{ falls } g(x_n) \to a \text{ für jede Folge } (x_n) \subseteq D \text{ mit } x_n \to -\infty$$

7 Stetigkeit

7.1 Definiton und grundlegende Eigentschaften

7.1.1 Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$

a) f heißt **in** x_0 **stetig**, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_n)$

b) f heißt **auf** D **stetig**, falls f in jedem $x \in D$ stetig ist

c) Wir setzen

$$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g : D \to \mathbb{R} : \ g \text{ ist stetig auf } D$$

Ist x_0 ein Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

7.1.2 $\varepsilon - \delta$ -Kriterium

f ist genau dann stetig in x_0, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

7.1.3 grundlegenede Rechenregeln

a) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f| \text{ stetig in } x_0$$

Ist $s_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$, so ist

$$\frac{1}{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}, \ \frac{1}{f}(x) := \frac{1}{f(x)}$$

stetig in x_0

b) Sind $f, g \in C(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\alpha f + \beta g, \ fg, \ |f| \in C(D)$$

c) Es seien $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, g : D_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq D_0, x_0 \in D$ und $y_0 := f(x_0)$. Ist f in x_0 stetig und ist g in y_0 stetig, so ist

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \ (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

stetig in x_0

7.2 Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

7.2.1 Zwischenwertsatz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b, f \in C([a, b])$ und y_0 sei zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d.h. es gelte

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq y_0 \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$

7.2.2 Nullstellensatz von Bolzano

Ist $f \in C([a, b])$ und $f(a)f(b) \leq 0$, so existeirt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$

7.2.3 Abgeschlossenheit

a) D heißt **abgeschlossen**, falls für jede konvergente Folge (x_n) mit $(x_n) \subseteq D$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in D$$

b) D heißt **kompakt**, falls jede Folge $(x_n) \subseteq D$ eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) enthält mit

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in D$$

Folgende Eigenschaften gelten:

a) D ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ Jeder Häufungpunkt von D gehört zu D

b) D ist kompakt $\Longleftrightarrow$ D ist beschränkt und abgeschlossen

c) Ist D kompakt und $D \neq \emptyset$, so existieren $\max D$ und $\min D$

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$. Dann ist $f(D)$ kompakt

7.2.4 Beschränktheit

Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, falls $f(D)$ beschänkt ist.
Äquivalent ist:

$$\exists c \geq 0 \; \forall x \in D : \quad |f(x)| \leq c$$

7.2.5 Stetigkeit bei Intervallen

a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f \in Clabel = oman*)$, so ist $flabel = oman*)$ ein Intervall

b) Sei $f \in C([a, b]), A := \min f([a, b])$ und $B := \max f([a, b])$, so ist $f([a, b]) = [A, B]$

7.3 Stetigkeit und Umkehrfunktionen

7.3.1 Monotonie

a) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton fallend**, falls aus $x, y \in D$ und $x < y$ stets folgt, dass $f(x) \le f(y)$.
$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend**, falls aus $x, y \in D$ und $x < y$ stets folgt, dass $f(x) < f(y)$

b) Analog definiert man **(streng) monoton fallend**

c) f heißt **(streng) monoton**, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist

7.3.2 Logarithmus

Die Funktion

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \log(x) = \exp^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

heißt **Logarithmus**. Oft schreibt man auch **ln** anstatt log.
Es gelten:

a) $\log(1) = 0, \log(e) = 1$

b) $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$

c) $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

d) $\log(x) \to \infty \ (x \to \infty), \log(xy) = \log(x) + \log(y)$

e) Für alle $x, y > 0 :\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$

f) Für alle $x, y > 0 :\ \log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$

Wir definieren für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$a^x := \exp(x \log(a))$$

7.3.3 Rechenregeln

Es seien $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $a^x > 0$
- DIe Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig
- $a^{x+y} = e^{(x+y)\log(a)} = e^{x\log(a)+y\log(a)} = e^{x\log(a)}e^{y\log(a)} = a^x a^y$
- $a^{-x} = e^{-x\log(a)} = \frac{1}{e^{x\log(a)}} = \frac{1}{a^x}$
- $\log(a^z) = \log(e^{x\log(a)}) = x\log(a)$
- $(a^x)^z = e^{y\log(a^x)} = e^{xy\log(a)} = a^{xy}$
- Ist auch $x > 0$, so ist $a^{x^y} := a^{(x^y)}$. Im Allgemeinen ist $a^{x^y} \neq (a^x)^y$

7.4 Gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit

7.4.1 Gleichmäßige Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf D, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

7.4.2 Satz von Heine

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und ist $f \in C(D)$, so ist f auf D gleichmäpig stetig

7.4.3 Lipschitz-Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D **Lipschitz-stetig**, falls ein $L \geq 0$ derart existiert, dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion f auf D ist gleichmäßig stetig auf D. In der Tat, im Fall $L = 0$ ist f konstant. Im Fall $L > 0$ wählt man für gegebenes $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ und erhält für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon$$

8 Funktionenfolgen und -reihen

8.1 Grundlegendes

8.1.1 Punktweise Konvergenz

a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf** D **punktweise konvergent**, falls für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ konvergiert. In diesem Fall heißt die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

die **Grenzwertfunktion** von (f_n)

b) Die **Funktionenreihe** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt **auf** D **punktweise konvergent**, falls für jedes $x \in D$ die Folge $(s_n(x))$ konvergiert. In diesem Fall heißt die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \qquad (x \in D)$$

die **Summenfunktion** von (f_n)

Punktweise Konvergenz von (f_n) gegen f auf D bedeutet:

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in /nat \forall n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

also darf n_0 in der Regel vom Punkt x abhängen

8.1.2 Gleichmäßige Konvergenz

a) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **gleichmäßig auf** D gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert **auf** D **gleichmäßig** gegen die Summenfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : \qquad |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt stets punktweise Konvergenz. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch
Die Folge (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Weiter sei (α_n) eine Folge in $[0, \infty)$ mit $\alpha_n \to 0,\ m \in \mathbb{N}$ und

$$\forall n \geq m \forall x \in D : \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f

8.1.3 Kriterium von Weierstraß

Es sei $m \in \mathbb{N}, (c_n)$ eine Folge in $[0, \infty), \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sei konvergent und

$$\forall n \geq m \forall x \in D : \qquad |f_n(x)| \leq c_n$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig

8.1.4 Eigenschaften

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und

$$D := \begin{cases} (x_0 - r, x_0 + r), & \text{falls } r \in (0, \infty) \\ \mathbb{R}, & \text{falls } r = \infty \end{cases}$$

Ist $[a, b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleihmäßig

(f_n) bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig

b) Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$

9 Differentialrechnung

9.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

9.1.1 Differenzierbarkeit

f heißt **in** $x_0 \in I$ **differenzierbar**, falls der Limes der **Differenzenquotienten**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert. Ersetzt man x durch x_0+h, so sieht man, dass dies zur Existenz von

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

äquivalent ist. In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von** f **in** x_0 und man schreibt

$$\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f **auf** I **differenzierbar** und die **Ableitung** $f' : I \to \mathbb{R}$ **von** f **auf** I ist gegenben durch $x \mapsto f'(x)$
Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

9.1.2 Differenzierbarkeits Regeln

Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann gelten:

a) (Linearität der Ableitung) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0)$$

b) (Produktregel) fg ist differenzierbar in x_0 und
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) (Quotientenregel) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x)/neq0$ für alle $x \in J := I \cap U_\delta(x_0)$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

d) Es sei $f \in Clabel = oman*)$ streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : flabel = oman*) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

9.1.3 Kettenregel

Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $flabel = oman*) \subseteq J$. Weiter sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f : I \to \mathbb{R} \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar}$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

9.2 Monotonie, Extrema und Grenzwerte

9.2.1 Innerer Punkt, lokales- und globales Maximum/ Minimum

a) $x_0 \in M$ heißt ein **innerer Punkt von M**, falls ein $\delta < 0$ derart existiert, dass

$$U_\delta(x_0) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\} \subseteq M$$

b) g hat in $x_0 \in M$ ein **lokales Maximum [bzw. Minimum]**, falls ein $\delta > 0$ derart existiert, dass

$$g(x) \leq g(x_0) \quad [\text{bzw.} g(x) \geq g(x_0)] \quad \text{für alle} \quad x \in U_\delta(x_0) \cap M$$

c) g hat in $x_0 \in M$ ein **globales Maximum [bzw. Minimum]**, falls

$$g(x) \leq g(x_0) \quad [\text{bzw.} g(x) \geq g(x_0)] \quad \text{für alle} \quad x \in M$$

d) **"Extremum"** bedeutet "Maximum oder Minimum"

9.2.2 Kritische Punkte

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Ist x_0 ein innerer Punkt von I, so ist x_0 ein **kritischer Punkt von** f, d.h. es gilt $f'(x_0) = 0$

9.2.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei $f \in C([a, b])$ und f sei auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\zeta \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta)$$

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Dann gilt:

$$f \text{ ist auf } I \text{ konstant} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) = 0$$

9.2.4 Monotonie

a) Ist $f' = g'$ auf I, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I

b) Ist $f' \geq 0$ auf I, so ist f monoton wachsend auf I
Ist $f' > 0$ auf I, so ist f streng monoton wachsend auf I

c) Ist $f' \leq 0$ auf I, so ist f monoton fallend auf I
Ist $f' < 0$ auf I, so ist f streng monoton fallend auf I

9.2.5 2. Ableitung

a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar. Ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f **in** x_0 **zweimal differenzierbar** und

$$f''(x_0) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0)$$

heißt **die 2. Ableitung von** f **in** x_0

b) Ist f' auf I differnzierbar, so heißt f **auf** I **zweimal differenzierbar** und

$$f'' := (f')'$$

die 2. Ableitung von f **auf** I. Entsprechend definiert man, falls vorhanden:

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0), \ldots \quad \text{und} \quad f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f **auf** I n**-mal stetig differenzierbar**, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)} \in clabel = oman*)$. In diesem Fall gilt: $f, f', \ldots, f^{(n)} \in Clabel = oman*)$. Wir setzen

$C^0 label = oman*) := Clabel = oman*)$ sowie $f^{(0)} := f$

$C^n label = oman*) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ ist auf I n-mal stetig differenzierbar $(n \in \mathbb{N})$

$C^\infty(i) := \bigcap_{n \geq 0} C^n label = oman*)$

9.2.6 Satz von Taylor

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f sei auf I $(n+1)$-mal differenzierbar. Es seien $x, x_0 \in i$ und $x \neq x_0$. Dann existiert ein $\zeta \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$T_n f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$ und heißt n**-tes Taylorpolynom von** f **im Punkt** x_0. Der Term $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied**

9.2.7 Satz de l'Hospital

Sei $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit $g(x) \neq 0 \neq g'x$ für alle $x \in I$, und sei $c = a$ oder $c = b$. Ferner gelte entweder

a) $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$
oder

b) $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to c} g(x)$

und es existiere zusätlich der Grenzwert

$$L := \lim_{x\to x} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

(mit bestimmter Divergenz im Falle $L = \pm\infty$). Dann gilt

$$\lim x \to c\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

9.3 Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

9.3.1 Die Zahl π

Die Zahl π ist definiert durch

$$\pi := 2\zeta_0$$

Wegen $\zeta_0 \in (0, 2)$ gilt $\pi \in (0, 4)$ (es gilt $\pi \simeq 3,14159\ldots$). Ferner können wir aus $\cos(\pi \setminus 2) = 0$ und dem trigonometrischen Pythagoras folgern, dass

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Es folgt, dass $\sin(\pi \setminus 2) > 0$, sodass

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

9.3.2 Tanges

Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt **Tangens**

9.3.3 Arkustangens

Der **Arkustangens** $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion der Tangens, also $\arctan := \tan^{-1}$

10 Das Riemann-Integral

10.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

10.1.1 Zerlegung

$a)$ Eine endliche Teilmenge $\mathbb{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a, b]$, falls

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Die Menge aller Zerlegungen $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Z} := \{Z \mid Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]$

$b)$ Es sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}$. Für $j = 1, \ldots, n$ definieren wir

$$I_j := [x_{j-1}, x_j] \quad \text{und} \quad |I_j| := x_j - x_{j-1} \quad ()\textbf{Intervalllänge} \text{ von } I_j$$

sowie

$$U : f(Z) := \sum_{j=1}^{n} |I_j| \inf_{I_j} f \quad (\text{die } \textbf{Untersumme von } f \textbf{ bzgl } Z)$$

$$O_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} |I_j| \sup_{I_j} f \quad (\text{die } \textbf{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z)$$

10.1.2 Unter-/ Oberintegrale

Das **Unterintegral** von f auf $[a, b]$ ist definiert als

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}} U_f(Z)$$

und das **Oberintegral** von f auf $[a, b]$ ist definiert als

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}} = O_f(Z)$$

Es seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$

$a)$ $U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$

$b)$ Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, so gilt:

$$U_f(Z_1) \leq U_f(Z_2) \qquad \text{und} \qquad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

10.1.3 (Riemann-)integrierbarkeit

Die Funktion f heißt **(Riemann-)integrierbar über** $[a, b]$, falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx \left(= \overline{\int_a^b} f(x)dx \right)$$

das **(Riemann-)Integral von** f **über** $[a, b]$ und wir schreiben:

$$f \in R([a, b]) \quad \text{oder} \quad f \in R([a, b]; \mathbb{R})$$

10.1.4 Wichtige Eigenschaften

Es seien $f, g \in R([a, b])$. Dann gilt:

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R([a, b])$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx$$

b) $fg \in R([a, b])$

c) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $\frac{1}{g}$ beschränkt auf $[a, b]$, so ist $\frac{1}{g} \in R([a, b])$

d) Es sei $D := f([a, b])$ und $h : D \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig auf D mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, d.h.

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad (t, s \in D)$$

Dann ist $h \circ f \in R([a, b])$

e) Das Riemann-Integral ist **monoton**, d.h. ist $f \leq g$ auf $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f\ dx \leq \int_a^b g\ dx$$

f) $|f| \in R([a, b])$ und es gilt die **Dreiecksungleichung für Integral**

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

$g)$ Es sei $c \in (a,b)$. Dann gilt:

$$f \in R([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in R([a,c]) \text{ und } f \in R([c,b])$$

In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$$

$h)$ Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R([a,b])$

$i)$ Es gilt: $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$

$j)$

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\ dx := 0$$

$k)$

$$\int_\beta^\alpha f(x)\ dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$$

10.1.5 Riemannsches Integrabilitätskriterium

Es gilt:

$$f \in R([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists Z = Z(\varepsilon) \in \mathcal{Z} : O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$$

10.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

10.2.1 Stammfunktion

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $G, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionen. Die Funktion G heißt **Stammfunktion von** g **auf** I, falls G auf I differenzierbar ist mit $G' = g$ auf I

Sind G und H Stammfunktionen von g auf I, so ist $G' = g = H'$ auf I und es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = H(x) + c \qquad \text{für alle } x \in I$$

10.2.2 Erster Hauptsatz der Differenztil- und Integralrechnung

Ist $f \in R([a,b])$ und besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

10.2.3 Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f \in R([a, b])$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt \quad (x \in [a, b])$$

Dann gilt:

a) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\ dt$ für alle $x, y \in [a, b]$

b) F ist Lipschitz-stetig

c) Ist $f \in C([a, b])$, so ist $F \in C^1([a, b])$ und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$

10.2.4 unbestimmte Integrale

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Integral. Besitzt $g_I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion auf I, so schreibt man für diese auch

$$\int g\ dx \qquad \text{oder} \qquad f(x)\ dx$$

und nennt dies ein **unbestimmtes Integral** von g

10.3 Partielle Integration und Substitutionregel

10.3.1 Partielle Integration

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha, \beta \in I$ und $f, g \in C^1 label = oman*)$. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f'g\ dx = fg\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta fg'\ dx$$

10.3.2 Substitutionsregel

Es seien I und J Intervall in $\mathbb{R}$, es sei $f \in Clabel = oman*), g \in C(J)$ und $g(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in J$

10.3.3 Substitutionsregel

Es seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$, es sei $f \in Clabel = oman*)$ und $g(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in J$

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\ dt$$

Ist g zusätzlich invertierbar, so gilt für alle $a, b \in g(J)$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\ dt$$

Merkregel: "Substituiert" man $x = g(t)$ und fasst somit x als Funktion von t auf, so ist die Ableitung von x durch $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ gegeben. Multipliziert man formal mit dt erhält man

$$\text{"}dx = g'(t)\ dt\text{"}$$

10.4 Integration und Grenzwerte

Es sei (f_n) eine Folge in $R([a,b])$ und (f_n) konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $f \in R([a,b])$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Es sei (f_n) eine Folge mit

i) $f_n \in c^1([a,b]), n \in \mathbb{N}$

ii) $(f_n(a))$ ist konvergent

iii) (f_n') konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Dann konvergiert (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig und für

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

gilt:

$$f \in C^1([a,b]) \quad \text{und} \quad f'(x) = g(x) \quad (x \in [a,b])$$

11 Uneigentliche Integrale

11.1 Grundlegendes

11.1.1 Uneigentliche Integrale

a) Es sei $a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, a < \beta$ und $f : [a,\beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in R([a,b])$ für alle $a < b < \beta$. Wir nennen das **uneigentliche Integral**

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \textbf{konvergent},$$

falls der Grenzwert

$$\lim_{t\to\beta-} \int_a^t f(x)\ dx \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall definieren wir

$$\int_a^\beta f(x)\ dx := \lim_{t\to\beta-} \int_a^t f(x)\ dx$$

b) Es sei $b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \alpha < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in R([a, b])$ für alle $\alpha < a < b$. Wir nennen das **uneigentliche Integral**

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

konvergent, falls der Grenzwert

$$\lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall definieren wir

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f(x)\ dx$$

11.1.2 Konvergenz

Es sei $\alpha < \beta, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in R([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < a < b < \beta$. Wir nenn das **uneigentliche Integral**

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$$

konvergent, falls ein $c \in (\alpha, \beta)$ derart existiert, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_\alpha^c f(x)\ dx \quad \text{und} \quad \int_c^\beta f(x)\ dx$$

konvergieren. In diesem Fall definieren wir

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ dx := \int_\alpha^c f(x)\ dx + \int_c^\beta f(x)\ dx$$

Im anderen Fall heißt das Integral **divergent**
Diese Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$

11.1.3 Cauchykriterium

Es gilt:

$$\int_a^\beta f(x)\, dx \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, \beta) \forall u, v \in (c, \beta) : \left| \int_u^v f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

11.1.4 Absolute konvergenz

Wir nennen das Integral

$$\int_a^\beta f(x)\ dx$$

absolut konvergent, falls

$$\int_a^\beta |f(x)|\ dx$$

konvergiert

11.1.5 Majoranten-/ Minorantenkriterium

$a)$ Ist $\int_a^\beta f(x)\ dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\ dx$ konvergent und

$$\left|\int_a^\beta f(x)\ dx\right| \leq int_a^\beta |f(x)|\ dx$$

$b)$ **Majorantenkriteium**: Ist $|f| \leq h$ auf $[a, b)$ und $\int_a^\beta h(x)\ dx$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\ dx$ absolut konvergent

$c)$ **Minorantenkriterium**: Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)\ dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\ dx$ divergent