HM2 Zusammenfassung

Julius Vater - 2603322

Karlsruher Institut für Technologie

August 24, 2025

Inhalt

12 Analysis in $\mathbb{C}$

12.1 Konvergenz von Folgen und Reihen

Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Wobei die **imaginäre Einhiet** i die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

erfüllt. **Addition** und **Multiplikation** von komplexen Zahlen $z = a + ib$ und $w = x + iy$ sind definiert durch

$$z + w = (a + x) + i(b + y) \text{ und } z \cdot w = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Es gelten:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \text{ in dem Sinne, dass } a \in \mathbb{R} = a + 0i \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} \text{ ist ein Körper}$$

12.1.1 Real- und Imaginärteil

Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir

a) $\mathrm{Re}(z) := a$ und $\mathrm{IM}(z) := b$ den **Real-** bzw. **Imaginärteil** von z.

b) $\bar{z} := a - ib := a + i(-b)$ die **komplex konjugiergte Zahl** von z.

12.1.2 Rechenregeln

a) Der Imaginärteil ist immer eine Reelle Zahl!

b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z + \bar{z})$

c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \bar{\bar{z}} = z, \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

12.1.3 Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag von z ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Es gilt:

a) $|z| = |\overline{z}|$

b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

c) $|z + w| \leq |z| + |w|$ und $||z| - |z|| \leq |z - w|$

12.1.4 Konvergenz

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ heißt **konvergent**, falls ein $z \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$|z_n - z| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

In diesem Fall heißt z der **Grenzwert** von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist die Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**. Es folgt

a) $z_n \to z \iff \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$

b) $0 \leq ||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| \to 0$

c) $z_n + w_n \to z + w$ und $z_n w_n \to zw$

12.1.5 Unendliche Reihen

Für eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ sei $s_n := a_1 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) heißt unendliche Reihe und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** bzw. **divergent**, falls (s_n) konvergent bzw. divergent ist.

b) Im Konvergenzfall heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert**

c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent, so heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**

12.1.6 Potenzreihen

Für eine **Potenzreihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0 =^n$ sei

$$\rho = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ unbeschänkt} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

12.2 Die komplexe Exponentialfunktion

12.2.1 Definitionen

Auf $\mathbb{C}$ definieren wir

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \textbf{ (komplexe Exponentialfunktion)}$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1^n) \frac{z^{2n}}{(2n)!} \textbf{ (komplexer Cosinus)}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1^n) \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \textbf{ (komplexer Sinus)}$$

12.2.2 Eigenschaften

a) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gelten $e^{z+w} = e^z e^w$ sowie $e^n z = (e^z)^n$

b) Fpr alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ und $e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$

d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

e) Es gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$

f) Die komplexe Exponetialfunktion ist periosisch mit Periode $2\pi i$, d.h. für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z+2k\pi} = e^z$

g) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$

h) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

12.2.3 Argument

Das **Argument von** z ist der Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$, der duch die Gerad durch 0 un z und der positiven x-Achse eingeschlossen wird. Wir schreiben $\arg(z) := \varphi$. Es gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \text{ und } \sin(\varphi == \frac{y}{r}$$

also kann z auch geschreiben werden durch

$$z = x + iy = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\arg(z}$$

Dies ist die Darstellung von z in Polarkoordinaten.

12.3 Wurzeln und Logarithmus in $\mathbb{C}$

12.3.1 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ein Polynom mit $n \geq 1, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Dann existieren eindutig bestimmte Zahlen $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \cdots \cdot (z - z_n) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Insbesondere gilt:

$$p(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{z_1, \ldots, z_n\}$$

12.3.2 Wurzeln

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n-te Wurzel aus** a. Man bezeichnet solch eine Wurzel mit $\sqrt[n]{a}$.

12.3.3 Einheitswurzeln

Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, r := |a|$ und $\varphi := \arg(a)$.
Ist $a = 1$, so heißen die Zahlen $z_k(0 \leq k \leq n-1$ die **n-ten Einheitswurzeln**. Diese sind also

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

12.3.4 Logarithmus

Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt **Logarithmus von** w

12.4 Differential- und Integraldrechnung für komplexwertige Funktionen

12.4.1 DIfferenzierbarkeit

f heißt auf I diffbar, falls u und v auf I diffbar sind. In diesem Fall definieren wir

$$f'(x) := u'(x) + iv'(x) \qquad (x \in I)$$

Es gilt:

$$\int_a^b \alpha f + \beta g \; dx = \alpha \int_a^b f \; dx + \beta \int_y^b g \; dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) \; dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \; dx$$

12.4.2 Stammfunktionen

Es sei $I = [a, b]$ für $a < b$. Besitzen u und v auf $[a, b]$ die Stammfunktion U bzw. V, definiern wir eine Stammfunktion von f durch $F := U + iV$.

13 Fourierreihen

13.1 Fourierreihen im Reellen

13.1.1 Periodische Funktionnen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hießt $2\pi-$**periosisch**, falls $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

13.1.2 Trigonometrische Reihen

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe**.

13.1.3 Orthogonalitätsrelationen

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\ dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\ dx = \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

13.1.4 Fourierkoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und erfülle $f \in R([-\pi, \pi)]$. Die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

heißen die **Fourierkoeffizienten** von f und die mit (a_n) und (b_n) gebildete trigonometrische Reihe heißt die zu f gehörende **Forierreihe**. Man schreibt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n(sin(nx))$$

13.1.5 Positve und negative Grenzwerte

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0$ ein Häfungspunkt von D und $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$g(x_0\pm) := \lim_{x \to x_0\pm} g(x)$$

falls dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

13.1.6 Stückweise Glätte

Es se $a < b$. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **auf** $[a.b]$ **stückweise glatt**, falls eine Zerlegung $\{t_0, \dots, t_m\}$ von $[a, b]$ existiert (also $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$) mit

$$g \in C^1((t_{j-1}, t_j)) \qquad (j = 1, \dots, m)$$

und falls für alle $j = 1, \dots .m - 1$ die folgenden Grenzwerte existieren

$$g(t_j+), g(t_j-), g'(t_j+), g'(t_j-) \text{ sowie } g(a+), g'(a+), g'(b-), g(b-)$$

Ist g stückweise glatt auf $[a, b]$, so gelten:

a) g muss in den Punkten t_j nicht stetig sein

b) g ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$

13.1.7 Satz über die Konvergenz von Fourierreihen

Ist f 2π-periodisch und auf $[-\pi,\pi]$ stückweise glatt, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Ist f zusätzlich in x stetig, so konvergiert die Fourierreihe von f also gegen $f(x)$

13.1.8 Vereinfachungen zum Rechnen

a) Ist f gerade, also $f(x) = f(-(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad b_n = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

b) Ist f ungerade, also $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

13.1.9 Eigenschaften von Fourierreihen

Es sei $f \in C(\mathbb{R})$, 2π-periodisch und stückweise glatt. Dann gelten:

a) Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut

b) Die Fourierreihe von f konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f

c) Sind a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von f, so konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{absolut}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und erfülle $f \in R([-\pi,\pi])$ und a_n sowie b_n seien die Fourierkoeffizienten.

a) Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konvergent

b) Es gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\ dx$$

c) Es gilt das **Lemma von Riemann-Lebesgue**, d.h. $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$

13.2 Fourierreihen im Komplexen

13.2.1 Komplexe Fourierkoeffizienten

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion mit $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Die **komplexen Fourierkoeffizienten** sind definiert durch

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

und

$$f \sim \sum^{i} nfty_{n=-\infty} c_n e^{inx} := \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

heißt die zu f gehörende **komplexe Fourierreihe**.

14 Die Fouriertransformation

14.1 Grundlegendes

14.1.1 Stückweise Glätte

a) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **auf** $\mathbb{R}$ **stückweise glatt**, g auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise glatt ist

b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **auf** $\mathbb{R}$ **stückweise glatt**, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ auf $\mathbb{R}$ stückweise glatt sind

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt. Dann gelten:

a) f ist absolut integrierbar $\iff \int 1\infty_{-\infty} |f(x)|\, dx$ ist konvergent

b) Ist f absolut integrierbar und $|g| \leq |f|$ auf $\mathbb{R}$, so ist g absolut integrierbar

14.1.2 Die Fouriertransformierte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar. Die **Fouriertransformierte von** f ist die Funktion

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \xi \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

Oft schreibt man auch $\mathcal{F}f$ anstatt $\widehat{f}$. Die Zuordnung $f \mapsto \widehat{f}$ heißt **Fouriertransformation** und wid auch mit $\mathcal{F}$ gezeichnet.

14.1.3 Eigenschaften

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierrbar. Dann gelten:

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ stückweise glatt und absolut integrierbar und

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g$$

b) $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt

c) **(Satz von Riemann-Lebesgue)** $\widehat{f}$ ist stetig und erfüllt

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

d) Für $h \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f_h(x) := f(x + h)$. Dann ist f_h stückweise glatt und absolut integrierbar und

$$(\mathcal{F} f_h)(\xi) = e^{ih\xi}(\mathcal{F} f)(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

e) Für $\lambda > 0$ defineren wir $f^\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f^\lambda(x) := f(\lambda x)$. Dann ist f^λ stückweise glatt und absolut integrierbar und

$$(\mathcal{F} f^\lambda)(\xi) = \frac{1}{\lambda}(\mathcal{F} f)(\frac{\xi}{\lambda}) \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diffbar und absolut integrierbar. Weiter sei f' stückweise glatt und absolut integrierbar. Dann gilt

$$(\mathcal{F} f')(\xi) = i\xi(\mathcal{F} f)(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

14.1.4 Cauchysche Hauptwerte

Es sei $f_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f \in \mathbb{R}([a, b]; \mathbb{C})$ für alle $a < b$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x)\ dx$$

so heißt die Zahl **Cauchyscher Hauptwert** und man schreibt

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx := \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x)\ dx$$

Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ konvergent, so existiert $CH - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = CH - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$

14.1.5 Fourierinversion

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$CH - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

14.1.6 Bandbeschränktheit

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, stückweise glatt und absolut integrierbar. Wenn die Fouriertransformierte $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ außerhalb eines beschränkten Intervalls 0 ist, so heißt f **bandbeschränkt**. In diesem Fall ist es möglich f aus den Werten auf einem hinreichend feinen Raster $\{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}, T > 0$ zu reproduzieren.

14.1.7 Abtasttheorem von Shannon

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, stückweise glatt und absolut integrierbar, und es existiere ein $b > 0$ mit

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus (-b, b)$$

Dann gilt für jedes $T < \frac{\pi}{b}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \mathrm{si}(\frac{\pi}{T}(x - kT)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

wobei si den **Sinus cardinalis** bezeichnet, welcher gegeben ist durch

$$\mathrm{si}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

15 Der Raum $\mathbb{R}^n$

15.1 Grundlegendes

15.1.1 Skalarprodukt, Norm, Abstand

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T, y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ heißen

a) $x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ das **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von x und y.

b) $||x|| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \cdot + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ die **Norm** oder **Länge** von x

c) $||x - y||$ der **Abstand** von x zu y

15.1.2 Rechenregeln

a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ und $x \cdot y = y \cdot x$

b) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$

c) $||x|| \geq 0$ sowie $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 = (0, \ldots, 0 =^T$

d) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$

e) $|x \cdot y| \leq ||x||||y||$ **(Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**

f) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ **(Dreiecksungleichung)**

g) $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$ **(Umgekehrte Dreiecksungleichung)**

h) Für alle $j = 1, \ldots, n$ ist $|x_k| \leq ||x|| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

15.1.3 Für Matrizen

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine reelle $m \times n$-Matrix, d-h. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die **Norm von** A ist definiert durch

$$||A|| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ist B eine reelle $n \times l$-Matrix, so gilt

$$||AB|| < ||A||||B||$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist das **Matrix-Vektorproudkt** gegeben durch

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \end{pmatrix}$$

15.1.4 Offene Kugeln

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$.

a) $U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < \epsilon\}$ heißt **offene Kugel um** x_0 **mit Radius** ϵ, oder auch ϵ**-Umgebung von** x_0

b) $\overline{U_\epsilon(x_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_o|| \leq \epsilon\}$ heißt **abgeschlossene Kugel um** x_0 **mit Radius** ϵ

15.1.5 Beschränkt, offen, abgeschlossen, kompakt

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) A heißt **beschränkt**, falls ein $c \geq 0$ exisitert, derart, dass $||a|| \leq c$ für alle $a \in A$ gilt.

b) A heißt **offen**, falls für alle $a \in A$ ein $\delta > 0$ existiert, derart, dass $U_\delta(a) \subseteq A$

c) A heißt **abgeschlossen**, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

d) A heißt **kompakt**, falls A beschränkt und abgeschlossen ist.

16 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

16.1 Grundlegendes

16.1.1 Allgemeine Definitionen

Sei $(A^{(k)})$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, d.h. $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$ wobei für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Folgenglied $a^{(k)}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$.

a) $(a^{(k)}$ heißt **beschränkt**, falls ein $c \geq 0$ existiert, derart, dass $||a^{(k)}|| \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Der Begriff **Teilfolge** (TF) wird wie in HMI definiert

c) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungswert** (HW) von $(a^{(k)})$, falls für alle $\epsilon > 0$ gilt
$$a^{(k)} \in U_\epsilon(x_0) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}$$

d) $(a^{(k)})$ heißt **konvergent**, falls ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit
$$||a^{(k)} - a|| \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$
In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** bzw. **Limes** von $(a^{(k)})$ und man schreibt
$$a = \lim_{k \to \infty} a^{(k)} \qquad \text{oder} \qquad a^{(k)} \to a(k \to \infty) \qquad \text{oder} \qquad a^{(k)} \to a$$

e) Ist $(a^{(k)})$ nicht konvergent, so heißt $(a^{(k)})$ **divergent**

16.1.2 Eigenschaften

a) Ist $(a^{(k)}) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Folge, so gilt
$$a^{(k)} \to a \text{ für } k \to \infty \iff \forall j \in \{1, \dots, n\} : a_j^{(k)} \to a_j \text{für} k \to \infty$$

b) Ist $(a^{(k)}$ konvergent, so ist $(a^{(k)}$ beschränkt und jede Teilfolge von $(a^{(k)}$ konvergiert gegen $\lim_{k\to\infty} a^{(k)}$

c) Ist $(b^{(k)}) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine wieter Folge, $a, b \in \mathbb{R}^n, (\beta_k) \subseteq \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ und gilt $a^{(k)} \to a, b^{(k)} \to b$ und $\beta_k \to \beta$ so gelten

  i) $a^{(k)} + b^{(k)} \to a + b$
  ii) $\beta_k a^{(k)} \to \beta a$
  iii) $a^{(k)} \cdot b^{(k)} \to a \cdot b$
  iv) $||a^{(k)}|| \to ||a||$

d) **(Cauchykriterium)** Folgende Aussagen sind Äquivalent:

  i) $(a^{(k)})$ ist konvergent
  ii) für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k, l \geq k_0$ gilt

$$||a^{(k)} - a^{(l)}|| < \epsilon$$

e) **(Bolzano-Weierstraß)** Ist $(a^{(k)})$ beschränkt, so enthält $(a^{(k)})$ eine konvergente Teilfolg

16.1.3 Häufungpunkte

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von A, falls eine Folge $(a^{(k)} \subseteq A \setminus \{x_o\}$ existiert mit $a^{(k)} \to x_0$ für $k \to \infty$. Es gilt

a) Die Folgenden Aussagen sind äquivalent:

  i) A ist abgeschlossen
  ii) Für jede konvergent Folge $(a^{(k)})$ in A gilt $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} \in A$
  iii) Jeder Häufungspunkt von A gehört zu A

b) A ist kompakt $\Longleftrightarrow$ Jede Folge in A enthält eine konvergent Teilfoge deren Grenzwert zu A gehört.

17 Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

17.1 Grundlegendes

17.1.1 Limes

Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

falls für jede Folge $(x^{(k)}) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$ für $k \to \infty$ gilt

$$f(x^{(k)}) \to y_0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

In diesem Fall schreiben wir auch $f(x) \to y_0$ für $x \to x_0$

17.1.2 Eigenschaften des Limes

Es sei x_0 ein HP von $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ und $h : D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. Ferner seien $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Ist $f = (f_1, \ldots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \ldots, y_m)$, so gilt

$$f(x) \to y_0 \ (x \to x_0) \iff \forall j \in \{1, \ldots, n\} : f_j/x) \to y_j \ (x \to x_0)$$

b) Es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \backslash \{x_0\} : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - y_0|| < \epsilon$$

c) Es gelte $f(x) \to y_0, g(x) \to z_0$ und $h(x) \to \alpha$ für $x \to x_0$. Dann gilt

i) $f(x) \pm g(x) \to y_0 \pm z_0 \ (x \to x_0)$ und
$f(x) \cdot g(x) \to y_0 \cdot z_0 \ (x \to x_0)$

ii) $h(x) f(x) \to \alpha y_0 \ (x \to x_0)$

iii) $||f(x)|| \to ||y_0|| \ (x \to x_0)$

iv) Ist $\alpha \neq 0$ und $h(x) \neq 0$ für jedes $x \in D$, so gilt

$$\frac{1}{h(x)} \to \frac{1}{\alpha} \quad \text{für} \quad x \to x_0$$

17.1.3 Stetigkeit

a) f heißt in $x_0 \in D$ **stetig**, falls für jede Folge $(x^{(k)})$ in D mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt

$$f(x^{(k)}) \to f(x_0)$$

b) f heißt **stetig auf** D, falls f in jedem $x \in D$ stetig ist. In diesem Fall schreiben wir $f \in C(D; \mathbb{R}^m)$

17.1.4 Eigenschaften der Stetigkeit

a) Es sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ stetig, $E \subseteq \mathbb{R}^m, f(D) \subseteq E$ und es sei $g : E \to \mathbb{R}^p$ stetig in $f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$$

stetig in x_0

b) Es sei D kompakt und $f \in D(D; \mathbb{R}^m)$. Dann gelten

i) $f(D)$ ist kompakt, insbesonder ist f beschränkt

ii) Ist $m = 1$, so existieren $x_1, x_2 \in D$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad (x \in D)$$

c) Jede lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$

18 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (reellwertige Funktionen)

18.1 Diffenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit

18.1.1 Partielle Differenzierbarkeit und Ableitung

Es sei $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter bezeichne

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 =$$

den i-ten Einheitswektor. Dann gilt

$$x_0 + te_i = (\xi, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i + t, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)$$

f heißt **in x_0 nach x_i partiell diffbar**, falls der Grenzwert

$$f_{x_i}(x_0) := \partial_{x_i} f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0}{t} \in \mathbb{R}$$

existert. In diesem Fall heißt $\partial_{x_i} f(x_0)$ die **partielle Ableitung von f nach x_i in x_0**

18.1.2 Gradient

a) f heißt **in $x_0 \in D$ partiell differenzievar**, falls f in x_0 nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ partiell diffbar ist. In diesem Fall heißt der Vektor

$$\text{grad } f(x_0) := \nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

der **Gradient von f in x_0**

b) f heißt **auf D partiell diffbar**, falls f in jedem $x \in D$ partiell diffbar ist.

c) Für $i = 1, \ldots, n$ sagen wir, dass $\partial_{x_i} f$ **auf D existiert**, falls f in jedem $x \in D$ nach x_i partiell diffbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$\partial_{x_i} f : D \to \mathbb{R}$$

die **partielle Ableitung von f nach x_i**

d) f heißt **auf D stetig partiell diffbar**, falls f aur D partiell diffbar ist und $\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f \in C(D; \mathbb{R})$

18.1.3 Ableitung 2. Ordnung

Für $i = 1, \ldots, n$ existiere die partielle Ableitung $\partial_{x_i} f : D \to \mathbb{R}$ von f nach x_i auf D. Es sei $x_0 \in D$ und $j = 1, \ldots, n$. Ist $\partial_{x_i} f$ in x_0 nach x_j partiell diffbar, so heißt

$$f_{x_i x_j}(x_0) := \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(x_0) := \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j} \partial_{x_i}}(x_0) := \partial_{x_j}(\partial_{x_i} f)(x_0)$$

die **partielle Ableitung 2. Ordnung von f nach x_i und x_j in x_0.** Entsprechend definert man, falls vorhanden, Ableitung höherer Ordung. Schreibweisen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy}, \qquad \frac{\partial^7 f}{\partial y^3 \partial x^4} = f_{xxxxyy}, \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y \partial x^2} = f_{xxyzz}$$

18.1.4 m-malige stetig partielle diffbarkeit

Es sei $m \in \mathbb{N}$. f heißt **auf D m-mal stetig partiell diffbar**, falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung kleiner gleich m auf D existieren und dort stetig sind. In diesem Fall schreiben wir $f \in C^m(D; \mathbb{R})$

18.1.5 Satz von Schwarz

Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und $f \in C^m(D; \mathbb{R})$. Dann ist jede partielle Ableitung von f der Ordnung kleiner gleich m unabhängig von der Reihenfolge der Differentation.

18.1.6 Differenzierbarkeit

a) f heißt **in $x_0 \in D$ diffbar**, falls

$$\begin{aligned} & \exists a \in \mathbb{R}^{1\times n} : \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{||h||} = 0 \\ \iff \quad & \exists a \in \mathbb{R}^{1\times n} : \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x-x_0)}{||x-x_0||} = 0 \end{aligned}$$

b) f heißt **auf D diffbar**, falls f in jedem $x \in D$ diffbar ist.

18.1.7 Ableitung

Es sei $x_0 \in D$

a) Ist f in x_0 diffbar, so ist f in x_0 stetig, und f ist in x_0 partiell diffbar

b) Ist f in x_0 diffbar, so ist die Matrix a obiger Definition eindeutig bestimmt und es gilt $a = \nabla f(x_0)^T$. In diesem Fall heißt

$$f'(x_0) := a = \nabla f(x_0)^T$$

die **Ableitung von f in x_0**

c) f ist in x_0 diffbar $\iff$ f ist in x_0 partiell diffbar und

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot h}{||h||} = 0$$

wobei, wie schon zuvor "$\cdot$" das Skalarprodukt bezeichnet

d) Es sei f auf D partiell diffbar und $\partial_{x_1} j, \ldots, \partial_{x_n} f$ seien in $x_0 \in D$ stetig. Dann ist f in x_0 diffbar. Insbesondere gilt: Ist $f \in C^1(D; \mathbb{R})$, so ist f auf D diffbar.

18.2 Der Mittelwertsatz

18.2.1 Differenzierbarkeit

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \ldots, g_n) :) \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann heißt g **in** $t_o \in I$ **diffbar**, falls $g_1, \ldots, g_n$ in $t_0 \in I$ diffbar sind. In diesem Fall setzen wir

$$g'(t_o) := \begin{pmatrix} g_1'(t_0) \\ \vdots \\ g_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

Eintsprechend definiert man "auf I diffbar" und "auf I stetig diffbar".

18.2.2 Kettenregel

Sind $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g = (g_1, \ldots, g_n) : I \to \mathbb{R}^n$ in $t_0 \in I$ diffbar, $g(I) \subseteq D$ und f in $x_0 := g(t_0)$ diffbar, so ist

$$f \circ g : I \to \mathbb{R} \text{ in } t_0 \text{ diffbar}$$

und $(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0))g'(t_0)$

18.2.3 Der Mittelwertsatz

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ auf D diffbar und $a, b \in D$ derart, dass $S[a, b] \subseteq D$. Dann existiert ein $\xi \in S[a, b]$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

18.2.4 Streckenzug

a) Für $x^{(0)}, \ldots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$S\left[x^{(0)}, \ldots, x^{(m)}\right] := \bigcup_{j=1}^{m} S\left[x^{(j-1)}, x^{(j)}\right]$$

Streckenzug durch $x^{(0)}, \ldots, x^{(m)}$

b) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet**, falls M offen ist und falls zu je zwei Punkten $a, b \in M$ ein Streckenzug in M existiert, der a und b verbindet, d.h. es existieren Punkte $x^{(0)}, \ldots, x^{(m)} \in M$ mit

$$a = x^{(0)}, b = x^{(m)} \text{ und } S\left[x^{(0)}, \ldots, x^{(m)}\right] \subseteq M$$

c) Ist D ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}$ diffbar auf §D§ und gilt $f'(x) = 0, x \in D$, so ist f auf D konstant.

18.3 Richtungsableitungen und Extrema

18.3.1 Richtungsvektoren

a) Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ mit $||a|| = 1$ heißt **Richtung** oder **Richtungsvektor**

b) Seien $x_0 \in D$ und $a \in \mathbb{R}^n$ eine Ricbtung. Die Funktion f heißt **in** x_0 **in Richtung** a **diffbar**, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

existiert. In deisem Fall heißt $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ die **Richtungsableitung von** f **in** x_0 **in Richtung** a

Ist f in $x_0 \in D$ diffbar und $a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, so existiert $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ und

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \nabla f(x_0)$$

18.3.2 Hesse-Matrix

Für $f \in C^2(D; \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$ heißt

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_n}\partial_{x_2} f(x_0) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix von** f **in** x_0. Diese Matrix ist symmetrisch.

18.3.3 Definitheit

Eine reelle und symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

a) **positiv definit**, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $(Ax) \cdot x > 0$

b) **negativ definit**, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $(Ax) \cdot x < 0$

c) **indefinit**, falls $u, v \in \mathbb{R}^n$ existieren mut $(Au) \cdot u > 0$ und $(Av) \cdot v < 0$

Eine gegebene Matrix muss allerdings keinem der obigen Begriffe genügen.

18.3.4 Eigenschaften

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times b}$ symmetrisch gilt:

a) i) A ist positiv definit $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positv

ii) A ist negativ definit $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind negativ

iii) A ist indefinit $\Longleftrightarrow$ es gibt Eigenwerte λ, μ von A mit $\lambda > 0$ und $\mu < 0$

b) Sei $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$

   i) A ist positiv definit $\iff \alpha > 0$, $\det A > 0$
   ii) A ist negativ definit $\iff \alpha < 0$, $\det A > 0$
   iii) A ist indefinit $\iff \det A < 0$

18.3.5 Minimum/ Maximum

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, g hat in $x_0 \in M$ ein

a) **lokales Maximum**, falls ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap M$ gilt $g(x) \leq g(x_0)$

b) **lokales Minimum**, falls ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap M$ gilt $g(x) \geq g(x_0)$

c) **globales Maximum**, falls für alle $x \in M$ gilt $g(x) \leq g(x_0)$

d) **globales Minimum**, falls für alle $x \in M$ gilt $g(x) \geq g(x_0)$

18.3.6 Eigenschaften

a) Ist f in $x_0 \in D$ partiell diffbar und hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $\nabla f(x_0) = 0$

b) Ist $f \in C^2(D; \mathbb{R}), x_0 \in D$ und $\nabla f(x_0) = 0$ so gilt:

   i) Ist $H_f(x_0)$ positv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum
   ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum
   iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 kein lokales Extremum

19 Differentaialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (vektorwertige Funktionen)

19.1 Grundlegende Eigenschaften

19.1.1 Jacobi-Matrix

a) Es sei $x_0 \in D$. f heißt **in x_0 partiell diffbar**, falls f_j für alle $j = 1, \ldots, m$ in x_0 partiell diffbar ist. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0) := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix von f in x_0**.
Beachte: In der Jacobi-Matrix stehen zeilenweise die Gradienten der Koordinatenfunktionen.

b) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $f \in C^p(D; \mathbb{R}^m)$, falls $f_j \in C^p(D; \mathbb{R})$ für alle $j = 1, \ldots, m$ gilt.

19.1.2 Differenzierbarkeit

f heißt **in** $x_0 \in d$ **diffbar**, falls $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h - f(x_0) - Ah}{||h||} = 0$$

19.1.3 Ableitungen

Es sei $x_0 \in D$

a) f ist in x_0 diffbar $\iff$ Alle f_j sind in x_0 diffbar. In diesem Fall gilt:

  i) f ist in x_0 stetig

  ii) f ist in x_0 partiell diffbar

  iii) die matrix A in obiger Definition ist eindeutig bestimmt und gegben durch $A = J_f(x_0)$

b) Ist f in x_0 diffbar, so heißt $f'(x_0) := J_f(x_0)$ die **Ableitung von** f **in** x_0.

c) Existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D und sind in x_0 stetig, so ist f in x_0 diffbar. Insbesondere gilt, ist $f \in C^1(D;\mathbb{R})$, so ist f auf D diffbar.

19.1.4 Kettenregel

Es sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ diffbar, es sei $E \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f(D) \subseteq E$ und $g : E \to \mathbb{R}^l$ sei diffbar in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$$

in x_0 diffbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

19.2 Implizit definierte Funktionen

19.2.1 Satz über implizi definierte Funktionen

Es sei $(x_0, y_0) \in D, f(x_0, y_0) = 0$ und $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq 0$. Dann existieren $\delta, \mu > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $U_\delta(x_0) \times U_\mu(y_0) \subseteq D$

b) für alle $x \in U_delta(x_0)$ existiert ein eindeutiges $y \in U_\mu(y_0)$ mit $f(x, y) = 0$

Wir definieren $g : U_\delta(x_0) \to U_\mu(y_0)$ durch $g(x) = y$, wobei x und y vermöge Aussage b) zusammenhängen. Die Funktion g erfüllt

a) $g \in C^1(U_\delta(x_0); \mathbb{R}^m)$

b) für alle $x \in U_\delta(x_0)$ ist $det(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))) \neq 0$

c) für alle $x \in U_\delta(x_0)$ ist die Ableitung von g gegeben durch

$$J_g(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)$$

19.3 Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

19.3.1 Der Umkehrsatz

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in D$. Ist $\det(f'(x_0)) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

a) $U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(U_\delta(x_0))$ ist offen

b) f ist auf $U_\delta(x:0)$ injektiv

c) $f^{-1} : f(U_\delta(x_0)) \to U_\delta(x_0)$ ist in $C^2(f(U_\delta(x_0));\mathbb{R}^n)$,

$$\det(f'(x)) \neq 0 \qquad (x \in U_\delta(x_0))$$

und

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \qquad (y \in f(U_\delta(x_0)))$$

20 Integration in $\mathbb{R}^n$

20.1 Definition und grundelgende Eigenschaften

20.1.1 Kompakte Intervalle, Inhalt, Zerlegung

a) Sind $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$, so heißt

$$I := [a_1, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ein **kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$**

b) Die Zahl $|I| := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n)$ heißt **Inhalt** (oder **Volumen**) von I

c) Zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei eine Zerlegung Z_j von $[a_j, b_j$ gegeben. Dann heißt

$$\begin{aligned} Z &:= Z_1 \times \cdots \times Z_n \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in Z_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

eine **Zerlegung von I**

20.1.2 Ober- und Untersummen

Es sei I wie oben, $f : I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und Z sei eine Zerlegung von I mit den Teilintervallen $I_1, \ldots, I_m$. Wir setzen

$$m_j := \inf f(I_j) \quad \text{und} \quad M_j := \sup f(I_j) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

und definieren die Unter- bzw. Obersomme von f bzgl. Z durch

$$U_f(Z) := \sum_{j=1}^{m} m_j |I_j| \text{ \textbf{die Untersumme} von } f \text{ bzgl. } Z$$

$$O_f(Z) := \sum_{j=1}^{m} m_j |I_j| \text{ \textbf{die Obersumme} von } f \text{ bzgl. } Z$$

20.1.3 Integrierbarkeit

Es seien I und f wie oben. Wir definierne das **Unter-** bzw. **Oberintegral** von f auf I durch

$$\underline{\int_I} f(x)\ dx := \sup\{U_f(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

$$\overline{\int_I} f(x)\ dx := \inf\{O_f(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

Man kann zeigen, dass immer $\underline{\int_I} f(x)\ dx \leq \overline{\int_I} f(x)\ dx$ gilt. Wir nennen die Funktion f **integrierbar über** I, falls $\underline{\int_I} f(x)\ dx = \overline{\int_I} f(x)\ dx$. In diesem Fall hießt

$$\int_I f\ dx := \int_I f(x)\ dx := \underline{\int_I} f(x)\ dx \left(= \overline{\int_I} f(x)\ dx \right)$$

das **Integral von** f **über** I und man schreib $f \in R(I)$ oder $f \in R(I; \mathbb{R})$

20.1.4 Grundlegende Eigenschaften

Es sei I ein kompaktes Intervalll im $\mathbb{R}^n$, $f, g \in R(I)$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann geilten:

a) Es sind $\alpha f + \beta g, fg, |f| \in R(I)$ es gelten

$$\int_I (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_I f\ dx + \beta \int_I g\ dx$$

b) Ist $f \leq g$ auf I, so ist

$$\int_I f\ dx \leq \int_I$$

Insbesondere gilt

$$\left| \int_I f(x)\ dx \right| \leq \int_I |f(x)|\ dx$$

c) Gilt $|g(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in I$ und ein $\alpha > 0$, so ist $\frac{f}{g} \in R(I)$

d) $C(I) \subseteq R(I)$

20.2 Der Satz von Fubini und das Prinzip von Cavalieri

20.2.1 Satz von Fubini

Es sei $k, l \in \mathbb{N}$ und $n = k + l$ (also $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$). Weiterhin seien $I_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $I_2 \in \mathbb{R}^l$ kompakte Intervalle. $I = I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in R(I)$. Punkte in I bezeichnen wir mit (x, y), wobei $x \in I_1$ und $y \in I_2$

a) Für jedes feste $y \in I_2$ sei dei Funktion $x \mapsto f(x, y)$ integrierbar über I_1 und es sei $g(y) := \int_{I_1} f(x, y)\ dx$. Dann gilt $f \in R(I_2)$ und

$$\int_I f(x,y)\ d(x,y) = \int_{I_2} g(x)\ dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

b) Für jedes feste $x \in I_1$ sei dei Funktion $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar über I_2 und es sei $g(y) := \int_{I_2} f(x, y)\ dx$. Dann gilt $f \in R(I_1)$ und

$$\int_I f(x,y)\ d(x,y) = \int_{I_1} g(x)\ dx = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

Diese Verfahren lässt sich auch auf mehr als zwei Intervalle übertragen.

20.2.2 Charakteristische Funktion

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion

$$c_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad c_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

heißt **charakteristische Funkton von** B Um das "Volumen" von B zu definiern wählen wir est ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$ und zerlegen dann I in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_m$ bzgl. einer Zerlegung Z. Es gilt

$$\inf c_B(I_j) = \begin{cases} 1, & I_j \in B \\ 0, & I_j \notin B \end{cases}$$

Die Untersumme von c_B bzgl. Z ist damit gegeben durch

$$U_{c_B}(Z) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ I_j \subseteq B}} |I_j|$$

Analog gilt

$$\sup c_B(I_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I_j \cap B \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } I_j \cap B = \emptyset \end{cases}$$

sodass die Obersumme von c_B bzgl. Z gegeben ist durch

$$O_{c_B}(Z) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ I_j\cap B\neq\emptyset}} |I_j|$$

20.2.3 Innerer und äußerer Inhalt

Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt setzten wir

$$\underline{v}(B) := \underline{\int_I} c_B(x)\ dx \qquad \textbf{innerer Inhalt} \text{ von } B$$

$$\overline{v}(B) := \overline{\int_I} c_B(x)\ dx \qquad \textbf{äußerer Inhalt} \text{ von } B$$

Die Menge B heißt **messbar**, falls $c_B \in R(I)$. In diesem Fall ist

$$\underline{v}(B) = \overline{v}(B) = \int_I c_B(x)\ dx$$

und

$$|B| := \int_I c_B(x)\ dx$$

heißt der **Inhalt von** B

20.2.4 Integrierbarkeit und Intervall

Für $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt definieren wir

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Zusätzlich sei I ein kompaktes Intervall mit $B \subseteq I$. Wir nenn f **über** B **integrierbar**, falls $f_B \in R(I)$. In diesem Fall schreiben wir $f \in R(B)$, setzen

$$\int_B f\ dx := \int_B f(x)\ dx := \int_I f_B(x)\ dx$$

und nennen dies das **Integral von** f **über** B.

20.2.5 Eigenschaften

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) Ist $f \in C(B; \mathbb{R})$ beschränkt, so ist $f \in R(B)$

b) Es seien $f, g \in R(B)$. Dann gelten:

i) Es sind $\alpha f + \beta g, fg, |f| \in R(B)$ und es gilt

$$\int_B (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int_B f\ dx + \beta \int_B g\ dx$$

ii) Ist $f \leq g$ auf B, so ist

$$\int_B f\ dx \leq \int_B g\ dx$$

Insbesondere gilt

$$\left| \int_B f\ dx \right| \leq \int_B |f|\ dx$$

iii) Gilt $|g(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in B$ und ein $\alpha > 0$, so ist $\frac{f}{g} \in R(B)$

c) i) $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B$ sind messbar.

ii) Aus $A \subseteq B$ folt $|A| \leq |B|$

iii) $f \in R(A \cup B) \Longleftrightarrow f \in R(A) \cap R(B)$. In diesem Fall gilt

$$\int A \cup B f\ dx = \int_A f\ dx + \int_B f\ dx - \int A \cap B f\ dx$$

Insbesondere gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap b|$$

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar. Es seien $f, g \in R(B)$ mit $g \leq f$ auf B und

$$M_{f,g} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in B, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Dann ist $M_{f,g}$ messbar (im $\mathbb{R}^{n+1}$) und, ist $h \in (M_{f,g}; \mathbb{R})$ beschränkt, so ist

$$\int_{M_{f,g}} h(x, y)\ d(x, y) = \int_B \left(\int_{g_x)}^{f(x)} h(x, y)\ dy \right)\ dx$$

Insbesondere gilt

$$|M_{f,g}| = \int_B (f - g)\ dx$$

20.2.6 Prinzip von Cavalieri

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ messbar und beschränkt. FÜr Punkte im $\mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}$. Ferner sei $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $a \leq y \leq b$ für alle $(x, y) \in B$ gilt. Ist für jedes $y \in [a, b]$ die Menge

$$Q(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in B\}$$

messbar, so ist $y \mapsto |Q(y)|$ integrierbar über $[a, b]$ und

$$|B| = \int_a^b |Q(y)|\ dy$$

20.3 Die Substitutionsregel

20.3.1 Die Substitutionsregel

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^1(G;\mathbb{R}^n)$ und $B \subseteq G$ kompakt und messbar. Weiter sei g auf dem Inneren B^0 von B injektiv und

$$\det(g'(y)) \neq 0 \qquad (y \in B^0)$$

Ist dann $A := g(B)$ und $f \in C(A;\mathbb{R})$, so ist A kompakt und messbar und es gilt

$$\int_A f(x)\ dx = \int_B f(g(y))|\det(g'(y))|\ dy$$

21 Spezielle Differentialglicheungen 1. Ordnung

21.1 Grundlegendes

21.1.1 Anfangswertprobleme

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $h : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) Die Gleichung

$$h(x, y(x), y*(x)) = 0 \qquad (21.1)$$

heißt eine **Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung**. Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, so heißt

$$\begin{cases} h(x, y(x), y'(x)) & = 0 \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (21.2)$$

ein **Anfangswertproblem (AWP)**

b) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall une $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heipt y eine **Lösung von** (21.1) **auf** I, falls y auf I diffbar ist und

$$\forall x \in I : (x, y(x), y'(x)) \in D \quad \text{ und } \quad h(x, y(x), y'(x)) = 0$$

Ist y eine Lösung von (21.1) auf I so ist $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$, so heißt y eine **Lösung des Anfangswertproblems** (21.2) **auf** I

21.2 Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

21.2.1 Definition

Es sei $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f \in C(I_1;\mathbb{R})$ sowie $g \in C(I_2;\mathbb{R})$. Die Dgl

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \qquad (21.3)$$

heißt eine **Differentialgleichung mit getrennten veränderlichen**.

21.2.2 Eigenschaften

Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f \in C(I_1; \mathbb{R})$ sowie $g \in C(I_2; \mathbb{R})$. Gilt $g(y) \neq 0$ für alle $y \in I_2$, so erhält man die Lösungen von (21.3), indem man die Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx + c$$

nach y auflöst.
Diese Formel kann man sich ugt mit Hilfe der folgenden Rechnung merken

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx + c$$

21.3 Lineare Differentialgleichungen

21.3.1 Definition

Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + s(x) \qquad (21.4)$$

heißt eine **lineare Differentialgleichung** und s heißt **Störfunktion**. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \alpha(x)x(x) \qquad (21.5)$$

heißt die zu $(21-4)$ gehörige **homogene Gleichung**. Ist $s \neq 0$ (also nicht die Nullfunktion), so heißt die Gleichung (21.4) **inhomogen**.

21.3.2 Eigenschaften

Es sei β eine Stammfunkton von α auf I.

$a)$ Es sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

- i) y ist eine Lösung von (21.5) auf $I \Longleftarrow \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = ce^{\beta(x)}$
- ii) Sei y_p eine spezielle Lösung von (21.4) auf I. Dann gilt:

  y ist eine Lösung von (21.4) auf$I \Longleftarrow \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = y_p(x) + ce^{\beta(x)}$

$b)$ **Variation der Konstanten:** Der Ansatz

$$y_p(x) : c(x)e^{\beta(x)}$$

mit einer noch unbekannten Funktion c führt auf eine spezielle Lösung von (21.4) auf I

$c)$ Es sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das Awp

$$\begin{cases} y'(x) &= \alpha(x)y(x) + s(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung

22 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

22.1 Grundlegendes

22.1.1 System linearer Differentialgleichungen

Ist $A = (a_{j,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$, so betrachten wir auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das folgende **System linearer Differentialgleichungen**

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

wobei b_j :) $\to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$ gegebende stetige Funktionen sind und jedes $y_j : I \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$ gesucht ist. Definert man $y := (y_1, \ldots, y_n)^T$ und $b := (b_1, \ldots, b_n)^T$ kann dieses System kompakter geschriebgen werden durch

$$y'(x) = Ay(x) + b(x) \qquad (22.1)$$

Das System

$$y'(x) = Ay(x) \qquad (22.2)$$

heißt das zu $(22-1)$ gehörende **homogene System** ((22.2) heißt **inhomogen**, falls $b \neq 0$). Gesucht sind nun also vektorwertige FUnktionen die (22.1) bze. (22.2) erfüllen.

22.1.2 Eigenschaften

a) Die Lösung von (22.2) sind auf ganr $\mathbb{R}$ definiert. Ferner ist die Menge aller Lösungen

$$V := \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid y \text{ ist eine Lösung von (22.2)}\}$$

ein reeller Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Jede Basis von V heißt **Fundamentalsystem** von (22.2)

b) Ist y_p eine spezielle Lösung von (22.1) auf I, so gilt:

$$y \text{ ist eine Lösung von (22.1) auf } I \iff \exists y_h \in V : y(x) = y_p(x) + y_h(x) \; (x \in I)$$

c) Ist $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^0$, so hat das Awp

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung

22.1.3 Lösungsmethode für (22.2)

1. Bestimme die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots \lambda_r$ von A, wobei $r \leq n$. Ordne die Eigenwerte wie folgt an:

   i) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ bezeichnen die reellen Eigenwerte von A

   ii) $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_r$ bezeichnen die Eigenwerte in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Die komplex konjugierten Zahlen sind ebenfalls Nullstellen, befinden sich also auch unter den Zahlen $\lambda_{m+1}, \dots . \lambda_r$. Folglich ist $r - m$ gerade und mit $s := \frac{1}{2}(r - m)$ können wir diese derart durchnummerieren, dass

   $$\lambda_{m+s+1} = \overline{\lambda_m}, \dots, \lambda_{m+2s} = \overline{\lambda_s}$$

   Setze

   $$M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+s}$$

   Die Zahlen $\lambda_{m+s+1}, \dots \lambda_r$ sind nicht weiter von Wichtigkeit!

2. Für jedes $\lambda_j \in M$ und jeden Eigenvektor $u^{(1)}$ von A_j bestimmt man die zugehörige Jordankette $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$, die $u^{(l)} = (A - \lambda_j \mathrm{Id})u^{(l+1)}$ für $l = 1, \dots, p - 1$ erfüllt

3. Es sei $\lambda_j \in M$ und $u^1, \dots, u^{(p)}$ die Jordankett aus Schritt 2. Wir bilden die Funktion

   $$e^{t\lambda_j} u^{(1)},\ e^{t\lambda_j}(xu^{(1)} + u^{(2)}),\ e^{t\lambda_j}\left(\frac{x^1}{2}u^{(1)} + xu^{(2)} + u^{(3)}\right),\ \dots,$$

   $$e^{t\lambda_j}\left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}u^{(1)} + \dots + xu^{(p-1)} + u^{(p)}\right) \tag{22.3}$$

   Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Bezeichnet $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion aus (22.3), so ist y eine Lösung von (22.2) auf $\mathbb{R}$.
   Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Es bezeichne $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus (22.3). Zerlege $z(x)$ komponentenweise in Real- und Imaginärtel

   $$z(x) = \mathrm{Re}(z(x)) + i\mathrm{Im}(z(x)) =; y^{(1)}(x) + iy^{(2)}(x)$$