南开大学 2024 年春黎曼几何复习题参考解答

作者：夏目凉 Natsume ryo

2024 年 6 月 17 日

邮箱:tsechiyuan@163.com

一些只是要求回忆定理/定义/证明的题目, 省略解答.

0. 回忆几个公式:

$$\Delta f = \sum_i e_i e_i f, \text{其中} e_i \text{是正交测地标架} \tag{1}$$

$$\Delta f = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}) \tag{2}$$

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \tag{3}$$

1. 写出 Levi-Civita 联络的定义.

证明 Levi-Civita 联络是黎曼流形上唯一的一个与度量相容且无挠的联络。

联络定义: 省略.

与度量相容:

$$\nabla g = 0 \Leftrightarrow \nabla_X [g(Y,Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{4}$$

无挠:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \tag{5}$$

2. 推导 Koszul 公式, 并据此计算出 Christoffell 系数.

证明 设 X, Y, Z 是向量场. 根据度量相容性:

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

前两个相加, 减去第三个, 考虑式 (5), 有:

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z], Y\rangle + \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [X,Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{7}$$

移项即可得到 Koszul 公式. 此外, 代入 $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}, X = \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, 即送 Christoffel 系数:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}] g^{km} \tag{8}$$

3. 设 Ω 是可定向黎曼流形 (M,g) 的体积形式, 则 Ω 是平行的, 即 $\nabla\Omega = 0$.

证明 对于任意 $p \in M$, 选取 p 的一个邻域 U 以及局部定向正交标架 $\{e_i, i=1,\dots,n\}$ 和对偶 1 形式 $\{e^1, i=1,\dots,n\}$. 则体积形式可写为:

$$\Omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$$

先计算 $\nabla_{e_j} e^i$. 此时:

$$(\nabla_{e_j} e^i)(e_k) = \nabla_{e_j}(\delta_{ik}) - e^i(\nabla_{e_j} e_k) = -\langle e_i, \nabla_{e_j} e_k\rangle = \langle \nabla_{e_j} e_i, e_k\rangle \Rightarrow \nabla_{e_j} e^i = \langle \nabla_{e_j} e_i, e_k\rangle e^k$$

于是:

$$\nabla_{e_j}\Omega = \sum_i e^1 \wedge \dots (\langle \nabla_{e_j} e_i, e_i\rangle) e^i \wedge \dots e^n = 0$$

4. 阐明平行移动的概念.

证明 给定曲线 $\gamma : [0,1] \to M$, 向量 $v \in T_{\gamma(0)}M.v$ 沿着 γ 平行移动是指一个沿着 γ 的向量场 X 使得 $X(0) = v$, 且:

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X = 0 \tag{9}$$

5. 证明等距变换保持黎曼联络. 即对于等距变换 $\phi : M \to M$, 有公式:

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\phi_* X}(\phi_* Y)$$

证明 定义联络:

$$\nabla^*_X Y = \nabla_{d\phi^{-1}X}(d\phi^{-1}Y)$$

只需要验证 ∇^* 也是无挠且与度量相容的联络. 由于 ϕ 是等距, 这一点是很容易的. 因此省略余下的证明. □

注: 对于嵌入 $f : M \to \overline{M}$, 拉回度量有对应的黎曼联络:

$$\nabla_X Y(p) = (\nabla_{f_* X} f_* Y)(f(p)) \text{与} T_p M \text{相切的分量}$$

6.(Killing 场) 若黎曼流形 (M, g) 上向量场 X 生成的单参数变换群是等距群, 则称 X 是 Killing 场.
(1) 证明 $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$.
(2) 若 f 是 (M, g) 的一个自等距, 则 $f_*(X)$ 也是 Killing 场.

证明 (1)Killing 场 X 满足:

$$L_X g = 0 \Leftrightarrow X\langle Y, Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle$$

根据联络与度量相容和无挠:

$$\langle \nabla_X Y - [X,Y], Z\rangle + \langle \nabla_X Z - [X,Z], Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$$

注: 上述方程称为 Killing 方程. 容易看出 Killing 方程是 Killing 场的等价定义.
(2)f_* 是可逆的等距映射, 因此:

$$\langle \nabla_{f_* Y} f_* X, f_* Z\rangle + \langle \nabla_{f_* Z} X, f_* Y\rangle = 0$$

7. 设 (M,g) 是闭黎曼流形,X 是其上的一个散度为 0 的向量场, 证明 X 生成的局部单参数变换群保持体积形式.

证明 任取 $p\in M$ 和局部坐标 U. 取 U 上的正交坐标系 $\{e_i\}$ 和对偶 1 形式 $\{e^i\}$.

仿照第 3 题, 我们需要说明:

$$\sum_i \langle e_i,[e_i,X]\rangle = 0 \tag{10}$$

另一方面,X 的散度定义为:

$$\mathrm{tr}(Y\mapsto \nabla_Y X) = \sum_i \langle e_i, \nabla_{e_i}X\rangle = 0 \tag{11}$$

于是:

$$\sum_i \langle e_i,[e_i,X]\rangle = \sum_i \langle e_i,\nabla_{e_i}X-\nabla_X e_i\rangle = -\sum_i\langle e_i,\nabla_X e_i\rangle = 0$$

最后一个等号来自于 $0 = X\langle e_i,e_i\rangle = 2\langle e_i,\nabla_X e_i\rangle$. □

8. 设 (M,g) 是黎曼流形,f 是 M 上光滑函数, 证明:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle + |\nabla^2 f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)$$

证明 任取 $p\in M$, 选取一组正规测地标架 $\{e_i\}$. 我们不加证明的指出, 梯度和 Laplace 算子有如下表达式.

$$\begin{aligned}\nabla f &= \sum_i e_i(f)e_i\\ \Delta f &= \sum_i e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f)\end{aligned} \tag{12}$$

从而左式:

$$\frac{1}{2}\sum_i e_i(e_i(\sum_j e_j(f)^2)) = \sum_i\sum_j e_i(e_j(f)e_i(e_j(f))) = \sum_i\sum_j[e_i(e_j(f))^2 + e_j(f)e_i(e_i(e_j(f)))]$$

右式:

$$\begin{aligned}\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle &= \langle\sum_i\sum_j[e_i(e_j(e_j(f))) - e_i(\nabla_{e_j}e_j(f))]e_i, \sum_i e_i(f)e_i\rangle = \sum_i\sum_j e_i(f)[e_i(e_j(e_j(f))) - e_i(\nabla_{e_j}e_j(f))]\\
\nabla^2 f &= \sum_{i,j}[\nabla^2 f(e_i,e_j)]^2 = \sum_{i,j}[(\nabla_{e_j}df)(e_i)]^2 = \sum_{i,j}[e_j(e_i(f)) - \nabla_{e_j}e_i(f)]^2 = \sum_{i,j}[e_j(e_i(f))]^2\\
\mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f) &= \sum_{i,j}e_i(f)e_j(f)\mathrm{Ric}(e_i,e_j) = \sum_{i,j}e_i(f)e_j(f)\sum_k R(e_k,e_i,e_k,e_j)\\
&= \sum_{i,j}e_i(f)e_j(f)\sum_k\langle(-\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_k + \nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_k + \nabla_{[e_k,e_i]}e_k),e_j\rangle\\
&= \sum_{i,j}e_i(f)e_j(f)\sum_k\langle(-\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_k + \nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_k),e_j\rangle\end{aligned}$$

计算:

$$\sum_{i,j} e_j(f)e_j(e_i(e_i(f))) - e_j(f)e_i(e_i(e_j(f))) = \sum_{i,j} e_j(f)e_i(e_j(e_i(f))) - e_j(f)e_i(e_i(e_j(f))) = \sum_{i,j} e_j(f)e_i([e_j, e_i](f))$$
$$= \sum_{i,j} e_j(f)[e_i(\nabla_{e_j} e_i f) - e_i(\nabla_{e_i} e_j f)]$$
$$= \sum_{i,j} e_j(f)\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_i - \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} e_j, \nabla f\rangle$$
$$= \sum_{i,j,k} e_j(f)e_k(f)\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_i, e_k\rangle$$
$$= \sum_{i,j,k} e_i(f)e_j(f)\langle \nabla_{e_k}\nabla_{e_i} e_k, e_j\rangle$$

相加:

$$\sum_{i,j}[e_i(f)e_i(e_j(e_j(f))) + (e_j(e_i(f)))^2 - e_i(f)e_i(\nabla_{e_j} e_j(f)) + e_i(f)e_j(f)\sum_k \langle(-\nabla_{e_k}\nabla_{e_i} e_k + \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} e_k), e_j\rangle]$$
$$= \sum_{i,j}[(e_i(e_j(f)))^2 + e_j(f)e_j(e_i(e_i(f))) - e_i(f)e_i(\nabla_{e_j} e_j(f)) + e_i(f)e_j(f)\sum_k \langle(-\nabla_{e_k}\nabla_{e_i} e_k + \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} e_k), e_j\rangle]$$
$$= \sum_{i,j}[(e_i(e_j(f)))^2 + e_j(f)e_i(e_i(e_j(f))) - e_i(f)e_i(\nabla_{e_j} e_j(f)) + e_i(f)e_j(f)\sum_k \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_k} e_k, e_j\rangle]$$
$$= \sum_{i,j}[(e_i(e_j(f)))^2 + e_j(f)e_i(e_i(e_j(f)))]$$

最后一个等号:

$$\sum_{i,j}[-e_i(f)e_i(\nabla_{e_j} e_j(f)) + e_i(f)e_k(f)\sum_k \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_j, e_k\rangle] = \sum_{i,j}[-e_i(f)e_i\langle \nabla_{e_j} e_j, \nabla f\rangle + e_i(f)\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_j, \nabla f\rangle] = 0$$

9. 写出测地线的定义以及在局部坐标系下的测地线方程.

证明 对于参数曲线:$\gamma : I \to M$, 称曲线在 $t_0 \in I$ 是测地的, 若:

$$\nabla_{\dot\gamma(t_0)}\dot\gamma(t) = 0 \tag{13}$$

若 γ 在 I 上处处测地, 则称 γ 是测地线.

局部上, 考虑局部坐标 $(U; x^i)$. 设曲线 $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$. 则测地线局部方程为:

$$\dot{x^i}(t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\dot{x^j}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}) = \dot{x^i}(t)\dot{x^i}(t)\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} + \ddot{x^k}(t)\frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \tag{14}$$

即:

$$\dot{x^i}(t)\dot{x^i}(t)\Gamma^k_{ij} + \ddot{x^k}(t) = 0, k = 1, \ldots, n \tag{15}$$

10. 证明等距变换把测地线变为测地线.

证明 等距变换保测地线方程. □

11. 设 (M^n, g) 是黎曼流形,u 是 M^n 上正光滑函数. 设 $\tilde g = u^2 g$. 设 Δ 和 $\tilde\Delta$ 分别为关于 g 和 $\tilde g$ 的 Laplace 算子. 证明:

$$\tilde\Delta f = u^{-2}[\Delta f + (n-2)\langle \nabla \mathrm{ln} u, \nabla f\rangle]$$

证明 任取 $p \in M$ 和正规标架 $\{e_i\}$. 则 $\{e_i/u\}$ 是相对于度量 $\tilde{g}$ 的一个正交标架. 于是:

$$\Delta f(p) = \sum_i e_i(e_i f)(p), \tilde{\Delta} f(p) = \sum_i \frac{e_i}{u}(\frac{e_i}{u}(f)) - \sum_i \tilde{\nabla}_{\frac{e_i}{u}} \frac{e_i}{u}(f)$$

根据 Kozsul 公式, 不难算出:

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i - \frac{1}{u} \nabla u, e_j \rangle, i \neq j; \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i + \frac{1}{u} \nabla u, e_j \rangle$$

计算:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} f(p) &= \frac{1}{u^2} \Delta f(p) - \sum_i \frac{1}{u^3} e_i(u) e_i(f) + \sum_i \frac{1}{u^3} \tilde{\nabla}_{e_i} u e_i(f) - \sum_i \frac{1}{u^2} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nabla f \rangle \\
&= \frac{1}{u^2} \Delta f(p) - \sum_i \frac{1}{u^2} \langle \tilde{\nabla}_{e_i} e_i, \nabla f \rangle = \frac{1}{u^2} \Delta f(p) + \frac{1}{u^2} \sum_i [\sum_{j \neq i} e_j(f) \frac{1}{u} \langle \nabla u, e_j \rangle - \frac{1}{u} \langle \nabla u, e_i \rangle] \\
&= \frac{1}{u^2} \Delta f(p) + \frac{1}{u^3} \sum_i \langle \nabla u, \nabla f \rangle - \frac{2}{u^3} \langle \nabla u, \nabla f \rangle \\
&= u^{-2} [\Delta f + (n-2) \langle \nabla \ln u, \nabla f \rangle]
\end{aligned}$$

12. 对于双曲空间模型 (R_+^n, g_H), 计算 Δx_1 和 $\Delta x_n^\alpha, \alpha > 0$.

证明

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}, g^{ij} = x_n^2 \delta_{ij}, G = x_n^{-2n}, \sqrt{G} = x_n^{-n} \tag{16}$$

于是:

$$\Delta x_1 = \sum_{i,j} x_n^n \frac{\partial}{\partial x^i} (x_n^{2-n} \delta_{ij} \frac{\partial x_1}{\partial x_j}) = 0, \Delta x_n^\alpha = \sum_{i,j} x_n^n \frac{\partial}{\partial x^i} (x_n^{2-n} \delta_{ij} \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_j}) = x_n^n \frac{\partial}{\partial x^n} (\alpha x_n^{1-n+\alpha}) = \alpha(1-n+\alpha) x_n^\alpha$$

13. 计算 $\mathbb{R}^2$ 关于度量 $g = e^{-1/4(x^2+y^2)}(dx^2 + dy^2)$ 的高斯曲率.

证明 计算 Christoffel 记号:

$$\begin{gathered}
\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{4} x, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{4} y, \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{4}; \\
\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4} y, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{4} x, \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{4} y;
\end{gathered}$$

然后计算曲率.

$$R_{121}^1 = \frac{1}{2}$$

从而高斯曲率为:

$$K = \sum_i \mathrm{Ric}(e_i, e_i) = \sum_i \sum_j R(e_j, e_i, e_j, e_i) = \sum_l \langle R_{121}^l x_l, x_2 \rangle g_{11}^{-2} = \frac{1}{2} e^{1/4(x^2+y^2)}$$

14. 计算椭圆抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的 Ricci 曲率和数量曲率.

证明 二维情况下 Ric 曲率为 Gauss 曲率. 使用古典微分几何的办法更佳. 故略去. □

15. 写出指数映射的定义.

证明 根据微分方程解的存在唯一性, 局部上, 满足测地线方程的曲线在确定起点和初始向量的情况下唯一存在. 因此定义该曲线在 $t = 1$ 处的点为对应起点和初始向量的指数映射值. □

16. 给出 Hopf-Rinow 定理.

证明 (M, g) 是黎曼流形, 下列条件等价:

1. 任意 $p \in M$, 指数映射在 T_pM 均有定义.

2.M 的紧集等价于有界闭集.

3.M 作为度量空间完备.

4.M 测地完备 (总有曲线实现距离)

5. 若 M 非紧, 则存在序列紧集 $\{K_n\}$ 满足:$K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$,$\bigcup_n K_n = M$, 且若有点列 $\{q_n\}$ 满足 $q_n \notin K_n$, 则 $d(p, q_n) \to +\infty$ □

17. 称 (M, g) 为齐性空间, 若任意 $p, q \in M$, 都存在等距 $\varphi(p) = q$. 证明齐性空间是完备的.

证明 指数映射 exp 的最大存在范围在整个流形上有一个一致下界. □

18. 设 (M, g) 是完备黎曼流形,φ 是等距. 证明: 若存在一点 $p \in M$ 是的 $\varphi(p) = p$,$\varphi_{*,p} = \mathrm{id}$, 则 $\varphi = \mathrm{id}$.

证明 设 $q \in M$. 我们说明 $\varphi(q)$ 只有一种选择。

取连接 p, q 的一条测地线 γ. 于是存在 $v \in T_pM$ 使得 $q = \exp_p v$. 我们断言:

$$\varphi(q) = \varphi(\exp_p v) = \exp_{\varphi(p)}(\varphi_* v) = \exp_p v = q \tag{17}$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线 $\gamma(t)$:

$$t \mapsto \varphi(\exp_p(tv)) \tag{18}$$

是从 $\varphi(p)$ 出发, 以 $\varphi_* v$ 为初始方向的测地线。

求 $\gamma(t)$ 的切向量 $\dot\gamma(t)$:

$$\dot\gamma(t) = \varphi_*(\dot{\exp_p}(tv)) \tag{19}$$

于是:

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot{\gamma(t)} = \varphi_*(\nabla_{\dot{\exp_p}(tv)}\dot{\exp_p}(tv)) = 0 \tag{20}$$

上述第一个等式用到了 φ_* 是等距。

所以 $\varphi(\exp_p(tv)) = \exp_{\varphi(p)}(tf_*(v))$. 带入 $t = 1$ 可得断言. □

19. 写出 Jacobi 场的定义, 并推导 Jacobi 方程.

证明 沿着 M 中测地线 γ 的向量场 J 若满足 Jacobi 方程:

$$\nabla_{\gamma'(t)}\nabla_{\gamma'(t)}J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \tag{21}$$

则称为 Jacobi 场.

为了写出分量的方程, 常见的做法是在 $\gamma(0)$ 处给定正交基底 $\{e_i\}$ 且 $e_n = \gamma'(0)$, 平行移动 $\{e_i\}$, 从而给出沿着 γ 的正交标架 $\{e_i(t)\}$, 且 $e_n(t) = \gamma'(t)$.

在这样的标架下可以很轻松的把 Jacobi 方程写为分量的形式. □

20. 证明负曲率流形任意一点的指数映射都没有共轭点.

证明 考虑 Jacobi 方程:

$$\frac{D^2J}{\mathrm{d}t^2}+\mathcal{R}(V,J)V=0\Rightarrow\langle\frac{D^2J}{\mathrm{d}t^2},J\rangle>0 \tag{22}$$

因此函数 $\langle\frac{DJ}{\mathrm{d}t},J\rangle$ 是单增函数. 若存在非平凡的共轭点, 则对应的一个 Jacobi 场起点终点都是 0, 因此恒为 0. 根据连续性可知 $J\equiv 0$. 从而矛盾于共轭！ □

21. 推导第一变分公式.

证明 只叙述结果. 设 (M,g) 是黎曼流形且 $\gamma:[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M$ 是一个道路变分系统. 其中 s 是变分参量,t 是道路参量.$\gamma(t,0)$ 是基曲线. 设 $L(s)$ 是曲线 $\gamma_s(t)$ 的长度.

令 $T(t,s)=\frac{\partial r}{\partial t}(t,s)$ 是沿着曲线的切向量,$U(t,s)=\frac{\partial r}{\partial s}(t,s)$ 是沿着变分方向的向量. 根据参数化可知 $[T,U]=0$. 现在我们对 $L(s)$ 进行微分:

$$L'(s)=\frac{d}{ds}\int_a^b|T|dt=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_UT\rangle dt=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_TU\rangle dt \tag{23}$$

代入 $s=0$. 我们希望在 $s=0$ 时 $L'(0)=0$. 另外, 我们正规化曲线 γ_0 使得切向量长度总为 1. 则:

$$0=L'(0)=\int_a^b\langle\gamma_0'(t),\nabla_{\gamma_0'(t)}U\rangle=0\Rightarrow L'(0)=\int_a^b\frac{d}{dt}\langle\gamma_0'(t),U\rangle dt-\int_a^b\langle U,\nabla_{\gamma_0'(t)}\gamma_0'(t)\rangle dt \tag{24}$$

对于任意变分 U 恒成立. 所以 γ_0 满足测地线方程. □

22. 推导第二变分公式.

证明 只叙述结果. 设 (M,g) 是黎曼流形且 $\gamma:[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)\to M$ 是一个道路变分系统. 其中 s 是变分参量,t 是道路参量.$\gamma(t,0)$ 是基曲线. 设 $L(s)$ 是曲线 $\gamma_s(t)$ 的长度.

令 $T(t,s)=\frac{\partial r}{\partial t}(t,s)$ 是沿着曲线的切向量,$U(t,s)=\frac{\partial r}{\partial s}(t,s)$ 是沿着变分方向的向量. 根据参数化可知 $[T,U]=0$. 现在我们对 $L(s)$ 进行微分:

$$L'(s)=\frac{d}{ds}\int_a^b|T|dt=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_UT\rangle dt=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_TU\rangle dt \tag{25}$$

我们已经知道 $L(s)$ 在 $s=0$ 时导数为 0 等价于 γ_0 是测地线. 假设 γ_0 是正规测地线, 我们计算 $L''(s)$ 以判断“最短测地线”问题.

$$\begin{aligned}L''(s)&=\frac{d}{ds}\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_TU\rangle dt\\&=\int_a^b[-\frac{1}{|T|^3}\langle T,\nabla_TU\rangle^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_TU|^2+\frac{1}{T}\langle T,\nabla_U\nabla_TU\rangle]dt\\&=\int_a^b[-\frac{1}{|T|^3}(T\langle T,U\rangle-\langle U,\nabla_TT\rangle)^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_TU|^2+\frac{1}{|T|}\langle T,R(U,T)U\rangle+\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_T\nabla_UU\rangle]dt\\&=\int_a^b[-\frac{1}{|T|^3}(T\langle T,U\rangle-\langle U,\nabla_TT\rangle)^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_TU|^2+\frac{1}{|T|}\langle T,R(U,T)U\rangle+\frac{1}{|T|}T\langle T,\nabla_UU\rangle-\frac{1}{|T|}\langle\nabla_TT,\nabla_UU\rangle]dt\end{aligned}$$

$s=0$ 时，显然 $|T|=|\dot{\gamma_0}|=1$，以及 $\nabla_{\dot{\gamma_0}}\dot{\gamma_0}=0$（这一点来源于测地线方程）

$$L''(0)=\langle\dot{\gamma_0},\nabla_UU\rangle|_a^b+\int_a^b[|\dot{U}|^2-(\langle\dot{\gamma_0},U\rangle')^2+R(\dot{\gamma_0},U,\dot{\gamma_0},U)]dt \tag{26}$$

23. 陈述 Bonnet-Myers 定理并给出证明.

定理 1 (Bonnet-Myers) *设 (M,g) 是完备黎曼流形,$\mathrm{Ric} \geq (n-1)k$ 总成立,k 是一个正实数, 则 M 是紧致流形且 $d(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. 进一步,$M$ 的基本群是有限群.*

证明 在 M 上任取两点 $p \neq q$。我们的目的是证明 $d(p,q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$。

因为 M 是完备的，自然有最短正规测地线 $\sigma : [0,l] \to M.l$ 是 p,q 之间的距离。

沿着 σ 取平行的标准正交基向量场 $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$。使得 $e_n(t) = \dot{\sigma}(t)$。能做到是因为测地线方程。

考虑沿着 $\sigma(t)$ 的向量场 $E_i(t) = f(t)e_i(t)$。其中 i 的取值是 $1,\ldots,n-1$。$f(t)$ 是待定函数，满足 $f(0) = f(l) = 0$。以 $E_i(t)$ 做 σ 的变分如下:

$$\gamma_i(t,s) = \exp_{\sigma(t)}[sf(t)e_i(t)]$$

注意到 $t = 0$ 和 $t = l$ 时 $\exp_p(0) = p$,$\exp_q(0) = q$。所以这是定端变分，因此第二变分可以写作:($\exp_{\sigma(t)}(sE_i(t))$ 对 s 求偏导，$s = 0$ 时为 $E_i(t)$)

$$L_i''(0) = \int_0^l (f')^2 + f^2 R(\dot{\sigma}, e_i, \dot{\sigma}, e_i) dt$$

条件中的 Ricci 促使我们把所有 $L_i''(0)$ 相加:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} L_i''(0) &= \int_0^l (n-1)(f')^2 - f^2 \mathrm{Ric}(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}) dt \\
&\leq (n-1) \int_0^l ((f')^2 - kf^2) dt \\
&= (n-1) \int_0^l (f'' - kf) f dt \qquad \text{分部积分} f'^2
\end{aligned}$$

灵光一闪, 取 $f = \sin \frac{\pi}{l} t$。代入:

$$\sum_{k=1}^{n-1} L_i''(0) \leq -(n-1) \int_0^l [k - (\frac{\pi^2}{l^2})] \sin^2(\frac{\pi}{l} t) dt = \frac{n-1}{2} [(\pi/l)^2 - k] l$$

γ 是最短测地线，因此 $L_i''(0) \geq 0$ 总成立。上述不等式旋即说明:

$$\pi/l \geq k \Rightarrow l \leq \pi/\sqrt{k}$$

对 M 的万有覆叠 $\tilde{M}$ 使用上述分析, 则 $\tilde{M}$ 是紧致流形. 这表明覆叠重数大于 0, 因此 M 的基本群是有限群. □

24. 陈述 Rauch 比较定理.

定理 2 (Rauch I) *设 $(M,g),(\bar{M},\bar{g})$ 是黎曼流形。$\gamma,\bar{\gamma}$ 是 $M,\bar{M}$ 上的正规测地线。$U(t)$ 和 $\bar{U}(t)$ 分别为沿着 $\gamma,\bar{\gamma}$ 的 Jacobi 场, 且满足条件:*

$$|U(0)| = |\bar{U}(0)|, \langle \dot{U}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = \langle \dot{\bar{U}}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0) \rangle = 0, |\dot{U}(0)| = |\dot{\bar{U}}(0)|$$

记 $k(t) = \min\{K_g(\dot{\gamma}(t),v) | v \perp \dot{\gamma}(t)\}$, $\bar{k}(t) = \max\{K_{\bar{g}}(\dot{\bar{\gamma}}(t),v) | v \perp \dot{\bar{\gamma}}(t)\}$。

假设 1.γ 无共轭点,2.$k(t) \geq \bar{k}(t), \forall t \in [0,t]$。

则 A.$\bar{\gamma}$ 无共轭点,B.$|U(t)| \leq \bar{U}(t)|$。

定理 3 (Rauch II) *在 Rauch I 的条件下，记 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$,$\bar{\gamma}(t)=\exp_{\bar{p}}(t\bar{v})$。设 $X\in T_pM$,$\bar{X}\in T_{\bar{p}}\bar{M}$。若:*

$$\langle X,v\rangle=\langle\bar{X},\bar{v}\rangle,|X|=|\bar{X}|$$

则 $|(\exp_p)_{*lv}(X)|\le|(\exp_{\bar{p}})_{*l\bar{v}}(\bar{X})|$

25. 陈述 Hessian 比较定理.

定理 4 (Hessian 比较定理) *设 $(M,g),(\bar{M},\bar{g})$ 是完备的黎曼流形。$\gamma,\bar{\gamma}$ 是正规测地线。*
$k(t)=\min\{K(\dot{\gamma}(t),e)|e\perp\dot{\gamma}(t)\}$,$\bar{k}(t)=\max\{K(\dot{\bar{\gamma}}(t),e)|e\perp\dot{\bar{\gamma}}(t)\}$。记 $p=\gamma(0)$,$\bar{p}=\bar{\gamma}(0)$。假设:
(1)$\gamma,\bar{\gamma}$ 均为最短测地线
(2)$k(t)\ge\bar{k}(t),\forall t\in[0,l]$。
则当 $t_0\in(0,l)$ 时，有:$\nabla^2 d_p|_{\gamma(t)}<<\nabla^2 d_{\bar{p}}|_{\dot{\bar{\gamma}}(t)}$。
即当 $X\in T_{\gamma(t_0)}M$，$\bar{X}\in T_{\bar{\gamma}(t_0)}\bar{M}$,$|X|=|\bar{X}|$,$\langle X,\dot{\gamma}(t_0)\rangle=\langle X',\dot{\bar{\gamma}}(t_0)\rangle$，有:

$$\nabla^2 d_p(X,X)\le\nabla^2 d_{\bar{p}}(\bar{X},\bar{X})$$

26. 推导标准球面和双曲空间中测地三角形的余弦公式.

证明 球面:链接
双曲空间:链接 □

27. 证明 Cartan-Hadamard 流形 (M^n,g) 上到一点 p 的距离函数 $d_p(x)$ 满足:

$$\Delta d_p(x)\ge\frac{n-1}{d_p(x)}$$

证明 注:Cardan-Hadamard 流形意指单连通完备, 且截面曲率处处非正的黎曼流形.
根据 Cartan-Hadamard 定理, 连接 M 上两点 p,q 的测地线均为最短测地线.
对 M 和 $\mathbb{R}^n$ 使用 Hessian 比较定理. 因为截面曲率处处非正, 所以:

$$\nabla^2 d_{p_M}(x)>>\nabla^2 d_{p_{\mathbb{R}^n}}(\overline{x})\Rightarrow\Delta d_p(x)=\mathrm{Tr}(\nabla^2 d_p(x))>\mathrm{Tr}(\nabla^2 d_{p_{\mathbb{R}^n}}(\overline{x}))=\frac{n-1}{d_p(x)}.\tag{27}$$

因此命题得证. □

28. 设 $d_p(x)$ 是 Cartan-Hadamard 流形 (M^n,g) 上到一点 p 的距离函数. 证明 $d_p^2(x)$ 是凸函数.

证明 因为 M 是 Cartan-Hadamard 流形, 从而测地线都是最短测地线. 从而为了判定 $d_p^2(x)$ 是凸函数, 只需要说明 $d_p^2(x)$ 的 Hess 正定.

$$\nabla^2 d_p^2(x)=\nabla(\mathrm{d}(d_p^2))=\nabla(2d_p\mathrm{d}d_p)=2d_p\nabla^2 d_p+2\mathrm{d}d_p\otimes\mathrm{d}d_p\tag{28}$$

由 27 题可给出 Hess 正定. 因此命题得证. □

29. 陈述体积比较定理的内容.

定理 5 (Bishop-Gromov,1980) 设 n 维完备黎曼流形 (M,g),$p\in M$。若 $\mathrm{Ric}_M\geq(n-1)k$,$k\in\mathbb{R}$。则表达式:

$$\frac{\mathrm{B_k(p)}}{\mathrm{Vol}(B_R^k)}$$

关于 R 是单调减的。其中 B_R^k 表示曲率为 k 的单连通空间形式中半径为 R 的测地球。特别的,$\mathrm{vol}(B_R(p))\leq\mathrm{vol}(B_R^k)$。

30. 证明 Hodge * 算子与 Hodge-Laplace 算子交换.

证明 直接计算:

$$\begin{aligned}*d\delta+*\delta d&=*d*d*(-1)^{nk+n+1}+(-1)^{nk-k+n+1}**d*d\\&=(-1)^{nk+n+1}*d*d*+(-1)^{n^2-nk+n-k}d*d\\d\delta*+\delta d*&=d*d**(-1)^{n(n-k)+n+1}+*d*d*(-1)^{n(n-k+1)+n+1}\\&=(-1)^{nk+k}d*d+(-1)^{n^2-nk+1}*d*d*\end{aligned}\tag{29}$$

简单比对两者即可得到相等. □

31. 证明 $\mathrm{div}X=-\delta(X^b)$

证明 取 p 处的测地正规正交坐标 $\{e_i\}$,$X=X^ie_i$, 于是 $X^b=\sum_i X^ie^i$. 不难有 $[e_i,e_j](p)=0,\forall i,j$

$$\mathrm{div}X=e_i(X^i)\tag{30}$$

另外, 我们又有:

$$-\delta(X^b)=*d*(X^b)=*d(\sum_i X^i(-1)^{i-1}e^1\wedge\dots\hat{e^i}\dots\wedge e^n)=*(\sum_i e_i(X^i)e^1\wedge\dots e^n)=e_i(X^i)=\mathrm{div}X\tag{31}$$

注:$de^i(e_j,e_k)=-e^i([e_j,e_k])$. 在 p 处 $[e_j,e_k]=\nabla_{e_i}e_k-\nabla_{e_k}e_j=0$. 因此在 p 处 $de^i=0$. □

32. 写出 Hodge 定理的内容.

证明 有分解:

$$\Omega^k(M)=H^k(M)\oplus d(\Omega^{k-1}(M))\oplus d^*(\Omega^{k+1}(M))\tag{32}$$

33. 设 (M,g) 是闭黎曼流形,X 是 Killing 场,ω 是调和微分形式. 证明 $L_X\omega$ 仍然是调和微分形式, 且是恰当形式, 因而 $L_X\omega=0$

证明 显然 $L_X\omega=d\iota_X\omega$ 是恰当形式. 我们只需要说明 $L_X\omega$ 是调和的.

我们断言,Hodge* 算子与 L_X 交换. 从而 $\delta L_X=L_X\delta$. 因此 Hodge-Laplace 算子与 L_X 也交换, 因此 $L_X\omega$ 也调和.

对断言的证明我们直接调用链接. 可点链接查看. □

34. 设 (M,g) 是闭黎曼流形且 $\mathrm{Ric}_g\geq0$, 证明 $b_1(M)\leq n$.

证明 考虑 Hodge 分解, 则仅需证明不存在 $n+1$ 个处处线性无关的调和 1 形式.

假设存在 $\omega_1,\ldots,\omega_{n+1}$ 处处线性无关. 任取 $p\in M$, 则 $\omega_1(p),\ldots,\omega_n(p)$ 是 T_p^*M 的一组基. 于是:

$$\omega_{n+1}(p)=\sum_i a_i\omega_i(p) \tag{33}$$

紧黎曼流形总是完备的, 因此任意 $q\in M$, 存在测地线 γ 连接 p,q. 根据 Bochner 定理, 调和形式总是平行的:

$$\nabla\omega_i=0 \tag{34}$$

从而 $\nabla(a_i\omega_i)=0$, 于是 $a_i\omega_i$ 是一个与 ω_{i+1} 在 p 处相同的两个平行调和形式, 因此:

$$\omega_{n+1}=\sum_i a_i\omega_i \tag{35}$$

这说明 $\omega_1,\ldots,\omega_{n+1}$ 处处线性相关, 矛盾！ □

35. 证明 $S^n\times S^1$ 不存在正 Ricci 曲率度量.

证明 若存在, 考虑 $S^n\times S^1$ 是紧集, 则 Ricci 曲率有正的下界. 根据 Bonnet-Myers 定理,$S^n\times\mathbb{R}^1$ 也应该是紧致的. 矛盾！ □

36. 证明 $S^n\times S^1$ 上不存在非正的截面曲率度量.

证明 假设存在这样的度量.$S^n\times S^1$ 是紧集, 因而是完备的黎曼流形. 从而万有覆叠 $S^n\times\mathbb{R}^1$ 在诱导度量下也是完备的黎曼流形.

因为覆叠映射是局部等距, 所以 $S^n\times\mathbb{R}^1$ 上的截面曲率也非正. 根据 Cardan-Hadamard 定理,$S^n\times\mathbb{R}^1$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^{n+1}$. 这产生了拓扑上的一个矛盾! □

37. 证明 $S^2\times S^1$ 上不存在 Einstein 度量.

证明 考虑 $S^2\times S^1$ 的万有覆叠 $S^2\times\mathbb{R}^1$. 因为三维 Einstein 流形总是常曲率空间, 从而 $S^2\times S^1$ 是常曲率空间. 然而 $S^1\times\mathbb{R}^1$ 不与 $S^3,\mathbb{R}^3,\mathcal{H}^3$ 中的任意一个空间同胚, 这产生了拓扑上的一个矛盾！ □