

Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 14 日

目录

1 第一章	1
2 第二章	1
3 第三章	3
4 第四章	9

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$ 。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \quad (2.1)$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \quad (2.2)$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化, 于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P_{c,t_0,t}^{-1}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X(Y - P_{c,t_0,t}Y)(p) = \nabla_X Y(p) \quad (2.3)$$

3. ∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回, M 的度量是 f^*g . 设 $f_*X = \bar{X}$ 。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z \rangle = X\langle f_*Y, f_*Z \rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (2.4)$$



4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 \mathbb{R}^3 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \quad (2.5)$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$. 所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的, 从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间, 则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点, 走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (2.6)$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的, 且联络是无挠的, 我们仍然有:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (2.7)$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$ 的值, 我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇ . 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D . 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \leq i, j \leq n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于:

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.9)$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。

3 第三章

1. (Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = 0, \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = f'^2 + g'^2, \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = f^2 \quad (3.1)$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t), v(t))$. 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t) \frac{\partial}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v} \quad (3.2)$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{f'}{f}, \Gamma_{22}^1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{f f'}{f'^2 + g'^2}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \Gamma_{22}^2 = \frac{f' f'' + g' g''}{f'^2 + g'^2} \quad (3.4)$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{f'}{f} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{f f'}{(f')^2 + (g')^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f' f'' + g' g''}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \quad (3.6)$$

(c) $|\gamma'(t)|^2 = u'^2 f^2 + v'^2 (f'^2 + g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 2u' u'' f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v'' v' (f'^2 + g'^2) + 2v'^3 (f'' f' + g'' g') \quad (3.7)$$

$$= 2u' u'' f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v' [f f' u'^2 - (f' f'' + g' g'') v'^2] + 2v'^3 (f'' f' + g'' g') \quad (3.8)$$

$$= 2f u' (u'' f + 2u' v' f') = 0 \quad (3.9)$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r \cos \beta = \text{const} \quad (3.10)$$

(d) 我认为是一个错题。

2. (定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式, 良定义意为选择的曲线 p, v, q, w 并不影响计算的结果. 其次, 这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式:

$$\langle V, W \rangle_{p,v} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \right\rangle_p \quad (3.11)$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0) = \nabla_{d\pi(V)} v(t), \frac{Dw}{ds}(0) = \nabla_{d\pi(W)} w(s) \quad (3.12)$$



我们需要说明 $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$ 是不依赖 $v(t)$ 选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i (d\pi(V))^k Y^j) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \quad (3.13)$$

于是该向量被 v, V 所表达, 因而是良定义的。

(b) 纤维上 $d\pi(W) = 0$ 。因此 V 是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \rangle \equiv 0, \forall w(t) \quad (3.14)$$

因此 $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 即 $v(t)$ 沿着 $p(t)$ 平行移动。

(c) 设 $v(t)$ 是测地向量场 (M 上的)。这也可以写作 $v: M \rightarrow TM$ 表。我们断言 $v_*v(t)$ 是水平向量场。不妨设 $v(t)$ 对应的测地线是 $p(t)$ 。

于是在 $(p(t), v(t))$ 处, $\nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 从而 $v_*v(t)$ 是水平向量场。

(d) 设 $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$, 其中 $v(t)$ 是沿着 $\alpha(t)$ 的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.15)$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \quad (3.16)$$

若 $\alpha(t)$ 是测地线且 $v(t)$ 是 $\alpha(t)$ 的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.17)$$

于是 $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$ 。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是 $\bar{\alpha}$ 成为了所有 $\bar{\gamma}(t)$ 中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为 $\frac{Dw}{dt} = 0$ (W 水平), 所以第一个等式成立。

如果 W 垂直, 则 $d\pi(W) = 0$ 且 $\frac{Dw}{dt}$ 退化为 W 。所以第二个等式成立。

3. 设 G 是李群, \mathcal{G} 是李代数。给定 $X \in \mathcal{G}$, 有积分曲线:

$$\varphi: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow G, \varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (3.18)$$

(a) 设 $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ 且 $\varphi(t_0) = y$ 。根据左不变性, 可以推出 $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$ 是在 t_0 处经过 e 的 X 的积分曲线。

事实上, 该曲线的切向量场为 $L_{*, y^{-1}}X = X$ 。因此根据积分曲线的唯一性可知 $y^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。即 $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。

由于 t_0 是任意的, 所以在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上, 我们有 $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ 。用简单的微分方程知识可以推得 t 对于所有 \mathbb{R} 都有定义。

(b) 对于 $Y \in \mathcal{G}$, 需要证明 $\nabla_Y Y = 0$ 。

考虑关系:

$$2\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 2Y\langle X, Y \rangle - X\langle Y, Y \rangle + 2\langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.19)$$

因为 X, Y 是左不变的向量场, 所以 $\langle X, Y \rangle$ 和 $\langle Y, Y \rangle$ 恒定. 于是:

$$\langle X, \nabla_Y Y \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.20)$$

而度量是双不变的, 于是:

$$\langle [U, X], Y \rangle = -\langle U, [V, X] \rangle \quad (3.21)$$

上述等式可以参考伴随表示 Ad 和 ad 之间的关系.

所以 $\langle Y, [X, Y] \rangle = 0$ 恒成立. 于是 $\langle \nabla_Y Y, X \rangle = 0$ 恒成立. 于是 $\nabla_Y Y = 0$.

4.

(a) 取满足定理 3.7 的 W . 对于任意点 $p \in W$, 有 \exp_p 是 W 上的微分同胚. 于是任何点 q 都与 p 有测地线连接, 即 W 可缩.

(b) 使用 W_p 即可. 有限交的情况下用测地线的唯一性可以保证可缩.

5.

(a) 设 V 是线性场且 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是矩阵. 于是 V 的积分曲线:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t) = e^{tA}x(0) \quad (3.22)$$

所以 $\varphi(t_0, p) = e^{t_0 A}p$. 若这个线性变换是等距, 则 $e^{t_0 A} \in O(n)$. 即:

$$e^{t_0 A}(e^{t_0 A})^T = e^{t_0(A+A^T)} = \text{Id} \Rightarrow A + A^T = 0 \quad (3.23)$$

(b) 取 $q = \exp_p(v) \neq p, v \in T_p M$. 我们说明 $\langle X_q, (d\exp_p)_q v \rangle = 0$.

取 q 处的 X 的积分曲线 $\gamma(t), \gamma(0) = q$. 通过选择适当的 U 作为正规坐标系, 我们可以假定 $\gamma(t) \in U$ 且 X 在 U 上满足 Killing 场的定义.

从而存在 $v(t) \in T_p M$ 使得 $\exp_p v(t) = \gamma(t), v(0) = v$.

于是 $X_q = \dot{\gamma}(0) = \exp_p \dot{v}(0)$. 因为 \exp_p 是微分同胚, 于是 $X_q = d(\exp_p)_q \dot{v}(0)$.

而根据 X 是无穷小等距可知:

$$\|v(t)\| \equiv \text{Const} \Rightarrow \langle v(t), \dot{v}(t) \rangle_p = 0 \quad (3.24)$$

(c) 设 X 在 p 处生成的积分曲线是 φ_p . 我们断言 Y 在 $f(p)$ 生成的积分曲线是 $f \circ \varphi_p$.

事实上:

$$f \circ \dot{\varphi}_p(t) = f_{*, \varphi(t)}(\dot{\varphi}_p(t)) = f_{*, \varphi(t)}(X(\varphi(t))) = Y(f(\varphi(t))) \quad (3.25)$$

f 是等距, 意味着 φ 是等距与 $f \circ \varphi$ 是等距是等价的.

(d)(killing equation) X 是 killing field 当且仅当对于任何向量场 Y, Z , 有:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0 \quad (3.26)$$

我们说明上述结果. 只需要对 $X(p) \neq 0$ 的地方说明. 设 U 是 p 处的一个正规坐标系, S 是 U 的子流形, 满足与 X_p 正交. $\dim S = n - 1$. 设 (x_1, \dots, x_{n-1}) 给出 S 在 p 的坐标, (x_1, \dots, x_{n-1}, t) 给出 U 处的坐标, $\frac{\partial}{\partial t} = X_p$.

同时设 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 我们得到:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X \langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle - \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle X_i, X_j \rangle \quad (3.27)$$

因为 X 是 Killing 场, 而 X_i 沿着 X 的积分曲线移动时仍为 X_i , 从而:

$$g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j) = g(X_i(p), X_j(p)) \quad (3.28)$$

这意味着上述式子为 0.

反过来, 若上述公式为 0, 则 $g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j)$. 这意味着 g 在 X 的积分曲线上做拉回不变, 因此 X 是 Killing 场。

(e) 在 (d) 题下已经显然。

6. 用 X 生成局部单参数变换群 φ_t . 则 $\varphi_t(q) = 0$. 从而 $\varphi_{t,*}$ 是 $T_p M$ 上的线性映射。我们断言这个映射是 Id.

实际上考虑:

$$0 = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(q) = [Y, X](q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\varphi_{t,*} - \text{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} \quad (3.29)$$

并且 $\varphi_{t,*} \circ \varphi_{s,*} = \varphi_{t+s,*}$ 两边对 s 求导可得:

$$\varphi_{s,*} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=s} = 0 \quad (3.30)$$

于是 $\varphi_{t,*} = \text{Id}$.

因为 φ_t 是等距, 我们已经给出了其一个点处的值和微分, 从而 φ_t 被唯一确定为 Id.

引理 设 M 是完备黎曼流形, f 是 M 的等距同构。则 f 被一个点 p 处的值和该处的微分唯一确定。

证明 设 $q \in M$. 我们说明 $f(q)$ 只有一种选择。

取连接 p, q 的测地线 γ . 于是存在 $v \in T_p M$ 使得 $q = \exp_p v$. 我们断言:

$$f(q) = f(\exp_p v) = \exp_{f(p)}(f_* v) \quad (3.31)$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线 $\gamma(t)$:

$$t \mapsto f(\exp_p(tv)) \quad (3.32)$$

是从 $f(p)$ 出发, 以 $f_* v$ 为测地线。

求 $\gamma(t)$ 的切向量 $\dot{\gamma}(t)$:

$$\dot{\gamma}(t) = f_*(\exp_p \dot{(tv)}) \quad (3.33)$$

于是:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = f_*(\nabla_{\exp_p \dot{(tv)}} \exp_p \dot{(tv)}) = 0 \quad (3.34)$$

上述第一个等式用到了 f_* 是等距。

所以 $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tf_*(v))$. 带入 $t = 1$ 可得结果。 \square

7. 设 M 是 n 维黎曼流形, $p \in M$. 证明存在 p 在 M 中的邻域 U 和 n 个向量场 $E_1, \dots, E_n \in \Gamma(X)$ 在 U 上的每个点都正交, 使得在 p 处:

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \quad (3.35)$$

这样的一族 E_i 被称为 p 处的局部测地标架。

解答: 取 e_1, \dots, e_n 作为 p 处的一组单位正交基。取 U 是 p 处的一个正规坐标系, 定义 $E_i(\exp_p w)$ 是 e_i 沿着 $\exp_p(tw)$ 平行移动得到的向量。

容易验证 E_i 正交。另外, $\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{e_i} E_j(p) = 0$ 。因为 e_j 沿着 $\exp_p(te_i)$ 平行移动。

8. 定义向量场 X 的散度是函数 $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, 在 p 处的值是线性映射 $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$ 的迹。函数 f 的梯度则是 df 在度量下的对偶向量场。

设 E_i 是测地标架。

(a) 证明 $\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p)$, 其中 $X = \sum_i f_i E_i$ 。

(b) 验证上式和 $M = \mathbb{R}^n$ 时在数学分析中定义的表达式相同。

解答:

(a)

$$\nabla_{E_i}(f^j E_j) = \nabla_{E_i}(f^j) E_j = E_i(f_j) E_j \quad (3.36)$$

于是该映射的迹是 $\sum_i E_i(f_i)(p)$ 。

(b) 平凡。

9. 定义 Laplacian 算子 Δ 为:

$$\Delta(f) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, f \in C^\infty(M) \quad (3.37)$$

解答:

(a)

$$\Delta(f) = \sum_i E_i(E_i)(p) \quad (3.38)$$

(b)

$$\Delta(fg) = \sum_i E_i E_i(fg) = \sum_i E_i(f E_i g + E_i f g) = 2 \sum_i E_i f E_i g + \sum_i E_i E_i f g + \sum_i f E_i E_i g \quad (3.39)$$

10. 计算:

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0 \quad (3.41)$$

11. 对于可定向黎曼流形 ν , 证明:

$$d(i_X \nu) = \operatorname{div} X \nu \quad (3.42)$$

其中 ν 是 M 的体积形式。

解答: 取 $p \in M$ 和 E_i 作为测地标架。设 $X = X^i E_i$ 。设 $\omega^i \in \Omega^1(U)$ 满足 $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$ 。



则 $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ 是 M 上的体积形式。于是 $i_X \nu = \sum_i (-1)^{i-1} X^i \theta_i$ 。其中 θ_i 是缺少 ω^i 的 $n-1$ 形式。

$$d(i_X \nu) = \sum_i (-1)^{i-1} dX^i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.43)$$

$$= \sum_i E_i(X^i) \nu + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.44)$$

但是在 p 处 $d\theta_i = 0$ 。这是因为:

$$d\omega^k(E_i, E_j) = \omega^k(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i) = 0 \quad (3.45)$$

再根据 p 的任意性, 可知上述方程成立哦。

12.(E.Hopf 定理)

对 $\Delta f \nu$ 给出的 n 形式积分。设 $X = \text{grad} f$ (因为是紧流形)。

$$\int_M \Delta(f) \nu = \int_M \text{div} X \nu = \int_M d(i(X) \nu) = \int_{\partial M} i(X) \nu = 0 \quad (3.46)$$

因为 $\nabla f \geq 0$, 所以上式给出 $\nabla f = 0$ 。

接着对 $\nabla(f^2/2)$ 积分:

$$\int_M \nabla(f^2/2) \nu = \int_M 2 \|\text{grad} f\|^2 \nu \quad (3.47)$$

对上式使用 Stokes 公式, 可以得到 $\text{grad} f = 0$ 。

所以 f 是常数。

13.

$$\text{div} X \nu = d(i_X \nu) = dg \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} \nu \quad (3.48)$$

14.(Liouville 定理)

选取 $p \in M$ 。我们只需要说明任意 p 以及经过 p 的测地线 γ 都有 $\text{div} G(p, \dot{\gamma}(p)) = 0$ 。

为此, 选取 p 周围的测地坐标系。给定 $T_p M$ 处的单位正交基 e_1, \dots, e_n , 用 $q = \exp_p(\sum_i u_i e_i)$ 中的 (u_1, \dots, u_n) 表示 q 的坐标。

在这样的坐标下, 我们有:

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad (3.49)$$

这是因为经过 p 的测地线由线性方程给出。(或者观察测地线微分方程)。

现在设 (u_i) 是 $p \in U \subset M$ 周围的正规坐标系。设 (u_i, v_j) 是 TM 上的坐标。我们断言 TM 上的在 (q, v) 处的体积形式同构于是 $U \times U$ 在 (q, q) 上的体积形式。

实际上根据第二题 e 问的垂直水平向量可知, 选取 TM 上垂直的 n 个正交向量即可。

由于 G 是测地的, 从而 G 是水平的向量场。而散度可以只依照体积形式来计算, 从而我们可以在乘积度量下计算 $\text{div} G$ 。让 G 作用在函数 u^i, v^i 上:

$$G(u_i) = v_i G(v_j) = - \sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k \quad \text{第二个等式来自于 } G \text{ 是测地线} \quad (3.50)$$

最终我们有:

$$\text{div} G = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k \right) = 0 \quad u_i, v_i \text{ 是 } TM \text{ 在 } (p, p) \text{ 处的单位正交基. Christoffel 记号在 } (p, p) \text{ 处退化。} \quad (3.51)$$

4 第四章

1. (双不变度量的李群)

(1) 设 $X = W + Z, Y = W - Z$ 。则:

$$\nabla_X Y = \nabla_{W+Z}(W - Z) = \nabla_W(-Z) + \nabla_Z W \quad (4.1)$$

$$\nabla_Y Z = \nabla_{W-Z}(W + Z) = \nabla_W Z + \nabla_{-Z} W \quad (4.2)$$

因此 $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ 。根据无挠性:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad (4.3)$$

(2)

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]) - \frac{1}{2}([[[X, Y], Z]]) = \frac{1}{4}[[X, Y], Z] \quad (4.4)$$

(c)

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \frac{\langle [[X, Y], X], Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2 \quad (4.5)$$

2. X 是 Killing 场。

(a) 对 f 求导, 作用 Z 向量场。

$$2\langle \nabla_Z X, X \rangle(p) = Z\langle X, X \rangle(p) = (df, Z)(p) = 0 \quad (4.6)$$

(b) 设 S 为:

$$S = \frac{1}{2}ZZ\langle X, X \rangle + \langle R(X, Z)X, Z \rangle \quad (4.7)$$

根据 Killing 方程, 我们有:

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, X \rangle = 0 \quad (4.8)$$

从而可以把 S 写为:

$$S = Z\langle \nabla_Z X, X \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.9)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.10)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - X\langle \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.11)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.12)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle + \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle - \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle \quad (4.13)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle \quad (4.14)$$

带入 p 且根据 $\nabla_X X(p) = 0$ 可得结果。