

# Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 17 日

## 目录

1 第一章	1
2 第二章	1
3 第三章	3
4 第四章	9

## 1 第一章

## 2 第二章

1. 设  $c(t)$  的切向量为  $\dot{c}(t)$ 。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c, t_0, t} = 0 \quad (2.1)$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c, t_0, t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \quad (2.2)$$

保定向:

设  $e_i$  是  $t_0$  处的一组单位正交定向基, 则  $P_{c, t_0, t}(e_i)$  是一组  $t$  处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化, 于是  $P$  是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P_{c, t_0, t}^{-1}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c, t_0, t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X(Y - P_{c, t_0, t}Y)(p) = \nabla_X Y(p) \quad (2.3)$$

3.  $\nabla$  是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回,  $M$  的度量是  $f^*g$ . 设  $f_*X = \bar{X}$ 。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z \rangle = X\langle f_*Y, f_*Z \rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (2.4)$$



4.(a) 借鉴上题的思路。设  $\nabla$  是  $M$  上的联络, 则  $\nabla_V V = 0$ . 于是  $\mathbb{R}^3$  上的平凡联络  $D$  满足:

$$D_V V \perp V \quad (2.5)$$

若上述公式成立, 则  $\nabla_V V = 0$ . 所以  $V$  沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的, 从而对单位向量  $e_i$  求联络总是 0.

若不是欧氏空间, 则可以举球面  $S^2$  的例子。从北极点平行移动到南极点, 走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (2.6)$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的, 且联络是无挠的, 我们仍然有:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (2.7)$$

因为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  仍然是非退化的, 所以通过指定  $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$  的值, 我们仍然可以给出  $\nabla$  的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是  $\nabla$ . 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是  $D$ . 我们说明若  $\nabla_X Y = 0$  与  $D_X Y = 0$  等价。

对于  $\nabla$  而言, 带入式 (7), 不难发现  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \leq i, j \leq n$ . 所以  $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$  等价于:

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.9)$$

于是  $D_X Y = 0$  与  $\nabla_X Y = 0$  等价。

### 3 第三章

1. (Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle \frac{\partial v}{\partial}, \frac{\partial u}{\partial} \rangle = 0, \langle \frac{\partial v}{\partial}, \frac{\partial v}{\partial} \rangle = f'^2 + g'^2, \langle \frac{\partial u}{\partial}, \frac{\partial u}{\partial} \rangle = f^2 \quad (3.1)$$

(b) 设测地线  $\gamma(t)$  为  $(u(t), v(t))$ . 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t) \frac{\partial}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v} \quad (3.2)$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{f'}{f}, \Gamma_{22}^1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{f'^2 + g'^2}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} \quad (3.4)$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{f'}{f} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \quad (3.6)$$

(c)  $|\gamma'(t)|^2 = u'^2 f^2 + v'^2 (f'^2 + g'^2)$ . 对其求导:

$$\frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 2u'u'' f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v'' v' (f'^2 + g'^2) + 2v'^3 (f'' f' + g'' g') \quad (3.7)$$

$$= 2u'u'' f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v' [f f' u'^2 - (f' f'' + g' g'') v'^2] + 2v'^3 (f'' f' + g'' g') \quad (3.8)$$

$$= 2f u' (u'' f + 2u' v' f') = 0 \quad (3.9)$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r \cos \beta = \text{const} \quad (3.10)$$

(d) 我认为是一个错题。

2. (定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式, 良定义意为选择的曲线  $p, v, q, w$  并不影响计算的结果. 其次, 这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式:

$$\langle V, W \rangle_{p,v} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \right\rangle_p \quad (3.11)$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0) = \nabla_{d\pi(V)} v(t), \frac{Dw}{ds}(0) = \nabla_{d\pi(W)} w(s) \quad (3.12)$$



我们需要说明  $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$  是不依赖  $v(t)$  选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i (d\pi(V))^k Y^j) \frac{\partial x^i}{\partial,} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \quad (3.13)$$

于是该向量被  $v, V$  所表达, 因而是良定义的。

(b) 纤维上  $d\pi(W) = 0$ 。因此  $V$  是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \rangle \equiv 0, \forall w(t) \quad (3.14)$$

因此  $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$  恒成立, 即  $v(t)$  沿着  $p(t)$  平行移动。

(c) 设  $v(t)$  是测地向量场 ( $M$  上的)。这也可以写作  $v: M \rightarrow TM$  表。我们断言  $v_*v(t)$  是水平向量场。不妨设  $v(t)$  对应的测地线是  $p(t)$ 。

于是在  $(p(t), v(t))$  处,  $\nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$  恒成立, 从而  $v_*v(t)$  是水平向量场。

(d) 设  $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$ , 其中  $v(t)$  是沿着  $\alpha(t)$  的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.15)$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \quad (3.16)$$

若  $\alpha(t)$  是测地线且  $v(t)$  是  $\alpha(t)$  的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.17)$$

于是  $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$ 。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是  $\bar{\alpha}$  成为了所有  $\bar{\gamma}(t)$  中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为  $\frac{Dw}{dt} = 0$  ( $W$  水平), 所以第一个等式成立。

如果  $W$  垂直, 则  $d\pi(W) = 0$  且  $\frac{Dw}{dt}$  退化为  $W$ 。所以第二个等式成立。

3. 设  $G$  是李群,  $\mathcal{G}$  是李代数. 给定  $X \in \mathcal{G}$ , 有积分曲线:

$$\varphi: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow G, \varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (3.18)$$

(a) 设  $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$  且  $\varphi(t_0) = y$ 。根据左不变性, 可以推出  $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$  是在  $t_0$  处经过  $e$  的  $X$  的积分曲线。

事实上, 该曲线的切向量场为  $L_{*, y^{-1}}X = X$ 。因此根据积分曲线的唯一性可知  $y^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。即  $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。

由于  $t_0$  是任意的, 所以在  $(-\epsilon, \epsilon)$  上, 我们有  $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ 。用简单的微分方程知识可以推得  $t$  对于所有  $\mathbb{R}$  都有定义。

(b) 对于  $Y \in \mathcal{G}$ , 需要证明  $\nabla_Y Y = 0$ 。

考虑关系:

$$2\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 2Y\langle X, Y \rangle - X\langle Y, Y \rangle + 2\langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.19)$$



因为  $X, Y$  是左不变的向量场, 所以  $\langle X, Y \rangle$  和  $\langle Y, Y \rangle$  恒定。于是:

$$\langle X, \nabla_Y Y \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.20)$$

而度量是双不变的, 于是:

$$\langle [U, X], Y \rangle = -\langle U, [V, X] \rangle \quad (3.21)$$

上述等式可以参考伴随表示  $\text{Ad}$  和  $\text{ad}$  之间的关系.

所以  $\langle Y, [X, Y] \rangle = 0$  恒成立。于是  $\langle \nabla_Y Y, X \rangle = 0$  恒成立。于是  $\nabla_Y Y = 0$ .

4.

(a) 取满足定理 3.7 的  $W$ 。对于任意点  $p \in W$ , 有  $\exp_p$  是  $W$  上的微分同胚。于是任何点  $q$  都与  $p$  有测地线连接, 即  $W$  可缩。

(b) 使用  $W_p$  即可。有限交的情况下用测地线的唯一性可以保证可缩。

5.

(a) 设  $V$  是线性场且  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是矩阵。于是  $V$  的积分曲线:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t) = e^{tA}x(0) \quad (3.22)$$

所以  $\varphi(t_0, p) = e^{t_0 A}p$ . 若这个线性变换是等距, 则  $e^{t_0 A} \in O(n)$ . 即:

$$e^{t_0 A}(e^{t_0 A})^T = e^{t_0(A+A^T)} = \text{Id} \Rightarrow A + A^T = 0 \quad (3.23)$$

(b) 取  $q = \exp_p(v) \neq p, v \in T_p M$ . 我们说明  $\langle X_q, (d\exp_p)_q v \rangle = 0$ .

取  $q$  处的  $X$  的积分曲线  $\gamma(t), \gamma(0) = q$ . 通过选择适当的  $U$  作为正规坐标系, 我们可以假定  $\gamma(t) \in U$  且  $X$  在  $U$  上满足 Killing 场的定义。

从而存在  $v(t) \in T_p M$  使得  $\exp_p v(t) = \gamma(t), v(0) = v$ .

于是  $X_q = \dot{\gamma}(0) = \exp_p \dot{v}(0)$ . 因为  $\exp_p$  是微分同胚, 于是  $X_q = d(\exp_p)_q \dot{v}(0)$ .

而根据  $X$  是无穷小等距可知:

$$\|v(t)\| \equiv \text{Const} \Rightarrow \langle v(t), \dot{v}(t) \rangle_p = 0 \quad (3.24)$$

(c) 设  $X$  在  $p$  处生成的积分曲线是  $\varphi_p$ . 我们断言  $Y$  在  $f(p)$  生成的积分曲线是  $f \circ \varphi_p$ .

事实上:

$$f \circ \dot{\varphi}_p(t) = f_{*, \varphi(t)}(\dot{\varphi}_p(t)) = f_{*, \varphi(t)}(X(\varphi(t))) = Y(f(\varphi(t))) \quad (3.25)$$

$f$  是等距, 意味着  $\varphi$  是等距与  $f \circ \varphi$  是等距是等价的。

(d)(killing equation)  $X$  是 killing field 当且仅当对于任何向量场  $Y, Z$ , 有:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0 \quad (3.26)$$

我们说明上述结果。只需要对  $X(p) \neq 0$  的地方说明。设  $U$  是  $p$  处的一个正规坐标系,  $S$  是  $U$  的子流形, 满足与  $X_p$  正交。  $\dim S = n - 1$ . 设  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  给出  $S$  在  $p$  的坐标,  $(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$  给出  $U$  处的坐标,  $\frac{\partial}{\partial t} X_p$ .



同时设  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . 我们得到:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X \langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle - \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial t}{\partial \langle} X_i, X_j \rangle \quad (3.27)$$

因为  $X$  是 Killing 场, 而  $X_i$  沿着  $X$  的积分曲线移动时仍为  $X_i$ , 从而:

$$g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j) = g(X_i(p), X_j(p)) \quad (3.28)$$

这意味着上述式子为 0.

反过来, 若上述公式为 0, 则  $g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j)$ . 这意味着  $g$  在  $X$  的积分曲线上做拉回不变, 因此  $X$  是 Killing 场。

(e) 在 (d) 题下已经显然。

6. 用  $X$  生成局部单参数变换群  $\varphi_t$ . 则  $\varphi_t(q) = 0$ . 从而  $\varphi_{t,*}$  是  $T_p M$  上的线性映射。我们断言这个映射是 Id.

实际上考虑:

$$0 = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(q) = [Y, X](q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\varphi_{t,*} - \text{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} \quad (3.29)$$

并且  $\varphi_{t,*} \circ \varphi_{s,*} = \varphi_{t+s,*}$  两边对  $s$  求导可得:

$$\varphi_{s,*} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=s} = 0 \quad (3.30)$$

于是  $\varphi_{t,*} = \text{Id}$ .

因为  $\varphi_t$  是等距, 我们已经给出了其一个点处的值和微分, 从而  $\varphi_t$  被唯一确定为 Id.

**引理 3.0.1** 设  $M$  是完备黎曼流形,  $f$  是  $M$  的等距同构。则  $f$  被一个点  $p$  处的值和该处的微分唯一确定。

**证明** 设  $q \in M$ . 我们说明  $f(q)$  只有一种选择。

取连接  $p, q$  的测地线  $\gamma$ . 于是存在  $v \in T_p M$  使得  $q = \exp_p v$ . 我们断言:

$$f(q) = f(\exp_p v) = \exp_{f(p)}(f_* v) \quad (3.31)$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线  $\gamma(t)$ :

$$t \mapsto f(\exp_p(tv)) \quad (3.32)$$

是从  $f(p)$  出发, 以  $f_* v$  为测地线。

求  $\gamma(t)$  的切向量  $\dot{\gamma}(t)$ :

$$\dot{\gamma}(t) = f_*(\exp_p(\dot{tv})) \quad (3.33)$$

于是:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = f_*(\nabla_{\exp_p(\dot{tv})} \exp_p(\dot{tv})) = 0 \quad (3.34)$$

上述第一个等式用到了  $f_*$  是等距。

所以  $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tf_*(v))$ . 带入  $t = 1$  可得结果。  $\square$



7. 设  $M$  是  $n$  维黎曼流形,  $p \in M$ . 证明存在  $p$  在  $M$  中的邻域  $U$  和  $n$  个向量场  $E_1, \dots, E_n \in \Gamma(X)$  在  $U$  上的每个点都正交, 使得在  $p$  处:

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \quad (3.35)$$

这样的一族  $E_i$  被称为  $p$  处的局部测地标架。

**解答:** 取  $e_1, \dots, e_n$  作为  $p$  处的一组单位正交基。取  $U$  是  $p$  处的一个正规坐标系, 定义  $E_i(\exp_p w)$  是  $e_i$  沿着  $\exp_p(tw)$  平行移动得到的向量。

容易验证  $E_i$  正交。另外,  $\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{e_i} E_j(p) = 0$ 。因为  $e_j$  沿着  $\exp_p(te_i)$  平行移动。

8. 定义向量场  $X$  的散度是函数  $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ , 在  $p$  处的值是线性映射  $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$  的迹。函数  $f$  的梯度则是  $df$  在度量下的对偶向量场。

设  $E_i$  是测地标架。

(a) 证明  $\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p)$ , 其中  $X = \sum_i f_i E_i$ 。

(b) 验证上式和  $M = \mathbb{R}^n$  时在数学分析中定义的表达式相同。

**解答:**

(a)

$$\nabla_{E_i}(f^j E_j) = \nabla_{E_i}(f^j) E_j = E_i(f_j) E_j \quad (3.36)$$

于是该映射的迹是  $\sum_i E_i(f_i)(p)$ 。

(b) 平凡。

9. 定义 Laplacian 算子  $\Delta$  为:

$$\Delta(f) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, f \in C^\infty(M) \quad (3.37)$$

**解答:**

(a)

$$\Delta(f) = \sum_i E_i(E_i)(p) \quad (3.38)$$

(b)

$$\Delta(fg) = \sum_i E_i E_i(fg) = \sum_i E_i(f E_i g + E_i f g) = 2 \sum_i E_i f E_i g + \sum_i E_i E_i f g + \sum_i f E_i E_i g \quad (3.39)$$

10. 计算:

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0 \quad (3.41)$$

11. 对于可定向黎曼流形  $\nu$ , 证明:

$$d(i_X \nu) = \operatorname{div} X \nu \quad (3.42)$$

其中  $\nu$  是  $M$  的体积形式。

**解答:** 取  $p \in M$  和  $E_i$  作为测地标架。设  $X = X^i E_i$ 。设  $\omega^i \in \Omega^1(U)$  满足  $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$ 。



则  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$  是  $M$  上的体积形式。于是  $i_X \nu = \sum_i (-1)^{i-1} X^i \theta_i$ 。其中  $\theta_i$  是缺少  $\omega^i$  的  $n-1$  形式。

$$d(i_X \nu) = \sum_i (-1)^{i-1} dX^i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.43)$$

$$= \sum_i E_i(X^i) \nu + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.44)$$

但是在  $p$  处  $d\theta_i = 0$ 。这是因为:

$$d\omega^k(E_i, E_j) = \omega^k(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i) = 0 \quad (3.45)$$

再根据  $p$  的任意性, 可知上述方程成立哦。

12.(E.Hopf 定理)

对  $\Delta f \nu$  给出的  $n$  形式积分。设  $X = \text{grad} f$  (因为是紧流形)。

$$\int_M \Delta(f) \nu = \int_M \text{div} X \nu = \int_M d(i(X) \nu) = \int_{\partial M} i(X) \nu = 0 \quad (3.46)$$

因为  $\nabla f \geq 0$ , 所以上式给出  $\nabla f = 0$ 。

接着对  $\nabla(f^2/2)$  积分:

$$\int_M \nabla(f^2/2) \nu = \int_M 2 \|\text{grad} f\|^2 \nu \quad (3.47)$$

对上式使用 Stokes 公式, 可以得到  $\text{grad} f = 0$ 。

所以  $f$  是常数。

13.

$$\text{div} X \nu = d(i_X \nu) = dg \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} \nu \quad (3.48)$$

14.(Liouville 定理)

选取  $p \in M$ 。我们只需要说明任意  $p$  以及经过  $p$  的测地线  $\gamma$  都有  $\text{div} G(p, \dot{\gamma}(p)) = 0$ 。

为此, 选取  $p$  周围的测地坐标系。给定  $T_p M$  处的单位正交基  $e_1, \dots, e_n$ , 用  $q = \exp_p(\sum_i u_i e_i)$  中的  $(u_1, \dots, u_n)$  表示  $q$  的坐标。

在这样的坐标下, 我们有:

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad (3.49)$$

这是因为经过  $p$  的测地线由线性方程给出。(或者观察测地线微分方程)。

现在设  $(u_i)$  是  $p \in U \subset M$  周围的正规坐标系。设  $(u_i, v_j)$  是  $TM$  上的坐标。我们断言  $TM$  上的在  $(q, v)$  处的体积形式同构于是  $U \times U$  在  $(q, q)$  上的体积形式。

实际上根据第二题 e 问的垂直水平向量可知, 选取  $TM$  上垂直的  $n$  个正交向量即可。

由于  $G$  是测地的, 从而  $G$  是水平的向量场。而散度可以只依照体积形式来计算, 从而我们可以在乘积度量下计算  $\text{div} G$ 。让  $G$  作用在函数  $u^i, v^i$  上:

$$G(u_i) = v_i G(v_j) = - \sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k \quad \text{第二个等式来自于 } G \text{ 是测地线} \quad (3.50)$$

最终我们有:

$$\text{div} G = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k = 0 \quad u_i, v_i \text{ 是 } TM \text{ 在 } (p, p) \text{ 处的单位正交基. Christoffel 记号在 } (p, p) \text{ 处退化。} \quad (3.51)$$



## 4 第四章

1. (双不变度量的李群)

(1) 设  $X = W + Z, Y = W - Z$ 。则:

$$\nabla_X Y = \nabla_{W+Z}(W - Z) = \nabla_W(-Z) + \nabla_Z W \quad (4.1)$$

$$\nabla_Y Z = \nabla_{W-Z}(W + Z) = \nabla_W Z + \nabla_{-Z} W \quad (4.2)$$

因此  $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ 。根据无挠性:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad (4.3)$$

(2)

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]) - \frac{1}{2}([[[X, Y], Z]]) = \frac{1}{4}[[X, Y], Z] \quad (4.4)$$

(c)

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \frac{\langle [[X, Y], X], Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2 \quad (4.5)$$

2.  $X$  是 Killing 场。

(a) 对  $f$  求导, 作用  $Z$  向量场。

$$2\langle \nabla_Z X, X \rangle(p) = Z\langle X, X \rangle(p) = (df, Z)(p) = 0 \quad (4.6)$$

(b) 设  $S$  为:

$$S = \frac{1}{2}ZZ\langle X, X \rangle + \langle R(X, Z)X, Z \rangle \quad (4.7)$$

根据 Killing 方程, 我们有:

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, X \rangle = 0 \quad (4.8)$$

从而可以把  $S$  写为:

$$S = Z\langle \nabla_Z X, X \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.9)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.10)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - X\langle \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.11)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.12)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle + \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle - \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle \quad (4.13)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle \quad (4.14)$$

带入  $p$  且根据  $\nabla_X X(p) = 0$  可得结果。

3. 命题: 设  $M$  是紧致偶数维黎曼流形且截面曲率恒正。则  $M$  上的 Killing 场总有 0 点。

解答: 设  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是函数  $f(q) = \langle X, X \rangle(q)$ 。因为  $M$  是紧流形, 从而  $f(q)$  有最小值  $p$ 。在该点处  $df = 0$ 。假设  $X(p) \neq 0$ 。

定义线性映射  $A : T_p M \rightarrow T_p M$ . 其中  $A(y) = \nabla_Y X(p)$ , 其中  $Y$  是  $y$  在该处的 extension. 显然  $A(y)$  与  $Y$  的选取无关。

因为  $X(p) \neq 0$ , 所以存在  $E$  作为  $T_p M$  的子空间正交于  $X(p)$ . 把  $A$  限制在  $E$  上, 我们断言这是  $E$  的一个线性变换 (a). 设  $\tilde{A}$  是  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  的双线性函数:  $\tilde{A}(v, w) = \langle Av, w \rangle$ . 我们同时断言  $\tilde{A}$  非退化且反对称. (b)

根据两个断言,  $E$  的维数必须是偶数. 然而  $M$  的维数也是偶数, 这产生了矛盾! 因此  $X(p) = 0$ .

先证明断言 (a). 首先说明  $A(E) \subset E$ . 事实上, 设  $y \in E$ , 则  $\langle \nabla_Y X, X \rangle(p) = \frac{1}{2} Y \langle X, X \rangle = 0$ . 因此  $A(y) \in E$ .

再证明断言 (b). 选取  $E$  的基  $\{e_2, \dots, e_n\}$ . 令  $E_i$  是  $e_i$  的一个延拓. 于是  $\langle A(e_i), e_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle(p) = -\langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle(p)$ . 最后一个等号来源于 Killing 方程. 于是  $\tilde{A}$  是反对称的双线性函数。

为了说明  $\tilde{A}$  非退化, 假设  $A(y) = 0$  且  $y \neq 0$ . 从而:

$$0 = \langle A(y), A(y) \rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} Y \langle X, X \rangle + \langle R(X, Y)X, Y \rangle \quad (4.15)$$

因为  $p$  处  $f(p)$  给出最小值, 从而  $y(Y(f))$  在  $p$  处必须非负. 而截面曲率大于 0, 因此等式右边大于 0. 这产生了矛盾! 因而  $y = 0$ , 于是  $A$  是同构。

4. 第 4 题是一个非常好的结论。

**命题 4.1** 设  $M$  是黎曼流形且满足性质: 给定  $p, q \in M$ , 从  $p$  到  $q$  的平行移动与连接  $p, q$  的道路的选取无关. 则  $M$  是曲率算子是 0, 换句话说,  $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M), R(X, Y)Z = 0$ .

**证明** 考虑参数化曲面  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ :

$$U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; -\epsilon < t < 1 + \epsilon, -\epsilon < s < 1 + \epsilon, \epsilon > 0\} \quad (4.16)$$

且  $f(s, 0) = f(0, 0), \forall s$ . 设  $V_0 \in T_{f(0,0)}(M)$  且定义沿着  $f$  的向量场  $V$  满足  $V(s, 0)$  是沿着  $s \mapsto f(s, 0)$  得到的向量,  $V(s, t)$  是  $V(s, 0)$  沿着曲线  $t \mapsto f(s, t)$  平行移动得到的向量. 从而:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = 0 = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V \quad (4.17)$$

另一方面, 因为  $M$  上的平行移动与选取的曲线无关, 因此  $V(s, 1)$  可以看作  $V(s, 0)$  移动的结果, 也可以看作  $V(0, 1)$  沿着曲线  $s \mapsto f(s, 1)$  移动的结果. 所以:

$$\frac{D}{\partial s} V(s, 1) = 0 \quad (4.18)$$

因此:

$$R_{f(0,1)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial s}(0, 1)\right)V(0, 1) = 0 \quad (4.19)$$

然而  $f(0, 1), V_0$  是我们随意指定的,  $f$  也是随意给出的, 因而  $R = 0$  恒成立.  $\square$

5.

**命题 4.2** 设  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  是测地线且  $X$  是  $M$  上的向量场, 满足  $X(\gamma(0)) = 0$ . 则:

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0) \quad (4.20)$$

其中  $X' = \frac{DX}{dt}$ . 换句话说, 求导穿进了曲率算子。



**证明** 考虑 (0,4) 型的算子  $R$ 。对于任意的向量场  $Z$ , 在  $t = 0$  时:

$$(\nabla_{\gamma'} R)(\gamma', X, \gamma', Z) = \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', X) \gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', X') \gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', X) \gamma', Z' \rangle \quad (4.21)$$

$$= \langle \nabla_{\gamma'} (R(\gamma', X) \gamma'), Z \rangle - \langle R(\gamma', X') \gamma', Z \rangle \quad (4.22)$$

事实上, 上式左边是 0. 因为  $X(\gamma(0)) = 0$ , 从而 (0,4) 张量  $\nabla_{\gamma'} R$  在  $t = 0$  时为 0.  $\square$

6.(a)

**命题 4.3 (局部对称空间)** 设  $M$  是黎曼流形。称  $M$  是局部对称空间, 若  $\nabla R = 0$ . 其中  $R$  是  $M$  的曲率张量。设  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  是  $M$  的测地线, 且  $X, Y, Z$  是沿着  $\gamma$  平行移动的向量场。则  $R(X, Y)Z$  也是沿着  $\gamma$  平行移动的向量场。

**证明**

$$0 = (\nabla_{\gamma'} R)(X, Y, Z, W) = \gamma'(R(X, Y, Z, W)) - R(X, Y, Z, \nabla_{\gamma'} W) \quad (4.23)$$

于是:

$$\gamma' \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, \nabla_{\gamma'} W \rangle \quad (4.24)$$

根据联络适配度量性, 可知:

$$\langle \nabla_{\gamma'} R(X, Y)Z, W \rangle = 0 \quad (4.25)$$

总成立。  $\square$

(b)

**命题 4.4** 若  $M$  是 2 维的局部对称空间, 连通。则  $M$  有常截面曲率。

**证明** 根据连通, 我们只需要说明任何点  $p \in M$  都存在  $p \in U$  使得其上的截面曲率为常数。因为是 2 维的流形, 所以实际上是  $T_p M$  的曲率。

考虑在上一章习题给出的正规坐标系。取  $E_1, E_2$  是对应的标架。则  $E_i(\exp_p v)$  是  $E_i(p)$  沿着曲线  $t \mapsto \exp_p(tv)$  平行移动到  $\exp_p(v)$  的向量。显然  $E_1, E_2$  总是标准正交基。

于是  $K(\exp v) = R(E_1, E_2, E_1, E_2)$ 。根据上个命题的结果, 该值沿着曲线  $t \mapsto \exp_p(tv)$  不变, 因而在整个测地坐标系上  $R$  是恒定的。  $\square$

(c)

**命题 4.5** 若  $M$  有常截面曲率, 则  $M$  是局部的对称空间。

**证明** 常曲率空间中可以计算:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = K_0(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle) \quad (4.26)$$

对其求  $\nabla$  可得结果。  $\square$

7.

命题 4.6 (第二 Bianchi 不等式)

$$(\nabla R)(X, Y, Z, W, T) + (\nabla R)(X, Y, W, T, Z) + (\nabla R)(X, Y, T, Z, W) = 0 \quad (4.27)$$

略。这个恒等式的证明很经典的。

8.

**定理 4.0.1 (Schur 定理)** 若  $M$  是  $n$  维黎曼流形且  $n \geq 3$ . 设  $M$  是各向同性的, 即  $K(p, \sigma)$  并不依赖于  $\sigma \subset T_p M$ . 则  $M$  有着常截面曲率。

证明 定义:

$$R'(W, Z, X, Y) = \langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle$$

如果截面曲率不依赖于该点处平面的选取, 则我们有:

$$R = KR' \quad (4.28)$$

对  $R$  求联络:

$$\nabla_U R = (UK)R' \quad (4.29)$$

根据第二 Bianchi 恒等式:

$$0 = (UK)(\langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle) + (XK)(\langle W, Y \rangle \langle Z, U \rangle - \langle Z, Y \rangle \langle W, U \rangle) + \\ (YK)(\langle W, U \rangle \langle Z, X \rangle - \langle Z, U \rangle \langle W, X \rangle)$$

选取固定的  $p \in M$  和  $X$  在  $p$  的值。因为  $n \geq 3$ , 则存在  $Y, Z$  使得  $\langle X, Y \rangle = \langle Y, Z \rangle + \langle Z, X \rangle = 0$  且  $\langle Z, Z \rangle = 1$ .

把  $U$  带入为  $Z$ , 则:

$$\langle (XK)Y - (YK)X, W \rangle = 0$$

因而  $(XK)Y - (YK)X = 0$ . 从而  $XK = 0$  恒成立, 于是  $K$  是常数。□

9.

命题 4.7 常数曲率  $K(p)$  可以用公式:

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(x) dS^{n-1}$$

计算。其中  $\omega_{n-1}$  是  $S^{n-1}$  的面积,  $dS^{n-1}$  是  $S^{n-1}$  的体积元。

证明 提示已经做完了。□

10.

**命题 4.8** 若  $M^n$  是连通的 Einstein 流形, 则 Einstein 数是常数。若  $M^3$  是连通的 Einstein 流形则  $M^3$  的截面曲率恒定。

提示也做完了。第二个命题直接带入正交基  $e_1, e_2, e_3$  就得到三个方程。