

Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 20 日

目录

1 第一章	1
2 第二章	1
3 第三章	3
4 第四章	9
5 第五章	13

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$ 。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c, t_0, t} = 0 \quad (2.1)$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c, t_0, t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \quad (2.2)$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c, t_0, t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化, 于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P_{c, t_0, t}^{-1}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c, t_0, t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X(Y - P_{c, t_0, t}Y)(p) = \nabla_X Y(p) \quad (2.3)$$

3. ∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回, M 的度量是 f^*g . 设 $f_*X = \bar{X}$ 。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z \rangle = X\langle f_*Y, f_*Z \rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (2.4)$$



4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 \mathbb{R}^3 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \quad (2.5)$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$. 所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的, 从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间, 则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点, 走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (2.6)$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的, 且联络是无挠的, 我们仍然有:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (2.7)$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$ 的值, 我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇ . 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D . 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \leq i, j \leq n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于:

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (2.9)$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。

3 第三章

1. (Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle \frac{\partial v}{\partial}, \frac{\partial u}{\partial} \rangle = 0, \langle \frac{\partial v}{\partial}, \frac{\partial v}{\partial} \rangle = f'^2 + g'^2, \langle \frac{\partial u}{\partial}, \frac{\partial u}{\partial} \rangle = f^2 \quad (3.1)$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t), v(t))$. 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t) \frac{\partial}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v} \quad (3.2)$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{f'}{f}, \Gamma_{22}^1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{f'^2 + g'^2}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} \quad (3.4)$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2 \frac{f'}{f} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \quad (3.6)$$

(c) $|\gamma'(t)|^2 = u'^2 f^2 + v'^2 (f'^2 + g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 2u'u''f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v''v'(f'^2 + g'^2) + 2v'^3 (f''f' + g''g') \quad (3.7)$$

$$= 2u'u''f^2 + 2u'^2 f f' v' + 2v'[f f' u'^2 - (f'f'' + g'g'')v'^2] + 2v'^3 (f''f' + g''g') \quad (3.8)$$

$$= 2f u'(u''f + 2u'v'f') = 0 \quad (3.9)$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r \cos \beta = \text{const} \quad (3.10)$$

(d) 我认为是一个错题。

2. (定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式, 良定义意为选择的曲线 p, v, q, w 并不影响计算的结果. 其次, 这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式:

$$\langle V, W \rangle_{p,v} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \right\rangle_p \quad (3.11)$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0) = \nabla_{d\pi(V)} v(t), \frac{Dw}{ds}(0) = \nabla_{d\pi(W)} w(s) \quad (3.12)$$



我们需要说明 $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$ 是不依赖 $v(t)$ 选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i (d\pi(V))^k Y^j) \frac{\partial x^i}{\partial,} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \quad (3.13)$$

于是该向量被 v, V 所表达, 因而是良定义的。

(b) 纤维上 $d\pi(W) = 0$ 。因此 V 是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \rangle \equiv 0, \forall w(t) \quad (3.14)$$

因此 $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 即 $v(t)$ 沿着 $p(t)$ 平行移动。

(c) 设 $v(t)$ 是测地向量场 (M 上的)。这也可以写作 $v: M \rightarrow TM$ 表。我们断言 $v_*v(t)$ 是水平向量场。不妨设 $v(t)$ 对应的测地线是 $p(t)$ 。

于是在 $(p(t), v(t))$ 处, $\nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 从而 $v_*v(t)$ 是水平向量场。

(d) 设 $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$, 其中 $v(t)$ 是沿着 $\alpha(t)$ 的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.15)$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \quad (3.16)$$

若 $\alpha(t)$ 是测地线且 $v(t)$ 是 $\alpha(t)$ 的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \quad (3.17)$$

于是 $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$ 。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是 $\bar{\alpha}$ 成为了所有 $\bar{\gamma}(t)$ 中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为 $\frac{Dw}{dt} = 0$ (W 水平), 所以第一个等式成立。

如果 W 垂直, 则 $d\pi(W) = 0$ 且 $\frac{Dw}{dt}$ 退化为 W 。所以第二个等式成立。

3. 设 G 是李群, \mathcal{G} 是李代数。给定 $X \in \mathcal{G}$, 有积分曲线:

$$\varphi: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow G, \varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \quad (3.18)$$

(a) 设 $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ 且 $\varphi(t_0) = y$ 。根据左不变性, 可以推出 $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$ 是在 t_0 处经过 e 的 X 的积分曲线。

事实上, 该曲线的切向量场为 $L_{*, y^{-1}}X = X$ 。因此根据积分曲线的唯一性可知 $y^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。即 $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$ 。

由于 t_0 是任意的, 所以在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上, 我们有 $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ 。用简单的微分方程知识可以推得 t 对于所有 \mathbb{R} 都有定义。

(b) 对于 $Y \in \mathcal{G}$, 需要证明 $\nabla_Y Y = 0$ 。

考虑关系:

$$2\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 2Y\langle X, Y \rangle - X\langle Y, Y \rangle + 2\langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.19)$$



因为 X, Y 是左不变的向量场, 所以 $\langle X, Y \rangle$ 和 $\langle Y, Y \rangle$ 恒定。于是:

$$\langle X, \nabla_Y Y \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle \quad (3.20)$$

而度量是双不变的, 于是:

$$\langle [U, X], Y \rangle = -\langle U, [V, X] \rangle \quad (3.21)$$

上述等式可以参考伴随表示 Ad 和 ad 之间的关系.

所以 $\langle Y, [X, Y] \rangle = 0$ 恒成立。于是 $\langle \nabla_Y Y, X \rangle = 0$ 恒成立。于是 $\nabla_Y Y = 0$.

4.

(a) 取满足定理 3.7 的 W 。对于任意点 $p \in W$, 有 \exp_p 是 W 上的微分同胚。于是任何点 q 都与 p 有测地线连接, 即 W 可缩。

(b) 使用 W_p 即可。有限交的情况下用测地线的唯一性可以保证可缩。

5.

(a) 设 V 是线性场且 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是矩阵。于是 V 的积分曲线:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t) = e^{tA}x(0) \quad (3.22)$$

所以 $\varphi(t_0, p) = e^{t_0 A}p$. 若这个线性变换是等距, 则 $e^{t_0 A} \in O(n)$. 即:

$$e^{t_0 A}(e^{t_0 A})^T = e^{t_0(A+A^T)} = \text{Id} \Rightarrow A + A^T = 0 \quad (3.23)$$

(b) 取 $q = \exp_p(v) \neq p, v \in T_p M$. 我们说明 $\langle X_q, (d\exp_p)_q v \rangle = 0$.

取 q 处的 X 的积分曲线 $\gamma(t), \gamma(0) = q$. 通过选择适当的 U 作为正规坐标系, 我们可以假定 $\gamma(t) \in U$ 且 X 在 U 上满足 Killing 场的定义。

从而存在 $v(t) \in T_p M$ 使得 $\exp_p v(t) = \gamma(t), v(0) = v$.

于是 $X_q = \dot{\gamma}(0) = \exp_p \dot{v}(0)$. 因为 \exp_p 是微分同胚, 于是 $X_q = d(\exp_p)_q \dot{v}(0)$.

而根据 X 是无穷小等距可知:

$$\|v(t)\| \equiv \text{Const} \Rightarrow \langle v(t), \dot{v}(t) \rangle_p = 0 \quad (3.24)$$

(c) 设 X 在 p 处生成的积分曲线是 φ_p . 我们断言 Y 在 $f(p)$ 生成的积分曲线是 $f \circ \varphi_p$.

事实上:

$$f \circ \dot{\varphi}_p(t) = f_{*, \varphi(t)}(\dot{\varphi}_p(t)) = f_{*, \varphi(t)}(X(\varphi(t))) = Y(f(\varphi(t))) \quad (3.25)$$

f 是等距, 意味着 φ 是等距与 $f \circ \varphi$ 是等距是等价的。

(d)(killing equation) X 是 killing field 当且仅当对于任何向量场 Y, Z , 有:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0 \quad (3.26)$$

我们说明上述结果。只需要对 $X(p) \neq 0$ 的地方说明。设 U 是 p 处的一个正规坐标系, S 是 U 的子流形, 满足与 X_p 正交。 $\dim S = n - 1$. 设 (x_1, \dots, x_{n-1}) 给出 S 在 p 的坐标, (x_1, \dots, x_{n-1}, t) 给出 U 处的坐标, $\frac{\partial}{\partial t} X_p$.



同时设 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 我们得到:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X \langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle - \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial t}{\partial \langle X_i, X_j \rangle} \quad (3.27)$$

因为 X 是 Killing 场, 而 X_i 沿着 X 的积分曲线移动时仍为 X_i , 从而:

$$g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j) = g(X_i(p), X_j(p)) \quad (3.28)$$

这意味着上述式子为 0.

反过来, 若上述公式为 0, 则 $g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j)$. 这意味着 g 在 X 的积分曲线上做拉回不变, 因此 X 是 Killing 场。

(e) 在 (d) 题下已经显然。

6. 用 X 生成局部单参数变换群 φ_t . 则 $\varphi_t(q) = 0$. 从而 $\varphi_{t,*}$ 是 $T_p M$ 上的线性映射。我们断言这个映射是 Id.

实际上考虑:

$$0 = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(q) = [Y, X](q) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\varphi_{t,*} - \text{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} \quad (3.29)$$

并且 $\varphi_{t,*} \circ \varphi_{s,*} = \varphi_{t+s,*}$ 两边对 s 求导可得:

$$\varphi_{s,*} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*})|_{t=s} = 0 \quad (3.30)$$

于是 $\varphi_{t,*} = \text{Id}$.

因为 φ_t 是等距, 我们已经给出了其一个点处的值和微分, 从而 φ_t 被唯一确定为 Id.

引理 3.0.1 设 M 是完备黎曼流形, f 是 M 的等距同构。则 f 被一个点 p 处的值和该处的微分唯一确定。

证明 设 $q \in M$. 我们说明 $f(q)$ 只有一种选择。

取连接 p, q 的测地线 γ . 于是存在 $v \in T_p M$ 使得 $q = \exp_p v$. 我们断言:

$$f(q) = f(\exp_p v) = \exp_{f(p)}(f_* v) \quad (3.31)$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线 $\gamma(t)$:

$$t \mapsto f(\exp_p(tv)) \quad (3.32)$$

是从 $f(p)$ 出发, 以 $f_* v$ 为测地线。

求 $\gamma(t)$ 的切向量 $\dot{\gamma}(t)$:

$$\dot{\gamma}(t) = f_*(\exp_p(\dot{tv})) \quad (3.33)$$

于是:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = f_*(\nabla_{\exp_p(\dot{tv})} \exp_p(\dot{tv})) = 0 \quad (3.34)$$

上述第一个等式用到了 f_* 是等距。

所以 $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tf_*(v))$. 带入 $t = 1$ 可得结果。□

7. 设 M 是 n 维黎曼流形, $p \in M$. 证明存在 p 在 M 中的邻域 U 和 n 个向量场 $E_1, \dots, E_n \in \Gamma(X)$ 在 U 上的每个点都正交, 使得在 p 处:

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \quad (3.35)$$

这样的一族 E_i 被称为 p 处的局部测地标架。

解答: 取 e_1, \dots, e_n 作为 p 处的一组单位正交基。取 U 是 p 处的一个正规坐标系, 定义 $E_i(\exp_p w)$ 是 e_i 沿着 $\exp_p(tw)$ 平行移动得到的向量。

容易验证 E_i 正交。另外, $\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{e_i} E_j(p) = 0$ 。因为 e_j 沿着 $\exp_p(te_i)$ 平行移动。

8. 定义向量场 X 的散度是函数 $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, 在 p 处的值是线性映射 $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$ 的迹。函数 f 的梯度则是 df 在度量下的对偶向量场。

设 E_i 是测地标架。

(a) 证明 $\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p)$, 其中 $X = \sum_i f_i E_i$ 。

(b) 验证上式和 $M = \mathbb{R}^n$ 时在数学分析中定义的表达式相同。

解答:

(a)

$$\nabla_{E_i}(f^j E_j) = \nabla_{E_i}(f^j) E_j = E_i(f_j) E_j \quad (3.36)$$

于是该映射的迹是 $\sum_i E_i(f_i)(p)$ 。

(b) 平凡。

9. 定义 Laplacian 算子 Δ 为:

$$\Delta(f) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, f \in C^\infty(M) \quad (3.37)$$

解答:

(a)

$$\Delta(f) = \sum_i E_i(E_i)(p) \quad (3.38)$$

(b)

$$\Delta(fg) = \sum_i E_i E_i(fg) = \sum_i E_i(f E_i g + E_i f g) = 2 \sum_i E_i f E_i g + \sum_i E_i E_i f g + \sum_i f E_i E_i g \quad (3.39)$$

10. 计算:

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0 \quad (3.41)$$

11. 对于可定向黎曼流形 ν , 证明:

$$d(i_X \nu) = \operatorname{div} X \nu \quad (3.42)$$

其中 ν 是 M 的体积形式。

解答: 取 $p \in M$ 和 E_i 作为测地标架。设 $X = X^i E_i$ 。设 $\omega^i \in \Omega^1(U)$ 满足 $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$ 。

则 $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ 是 M 上的体积形式。于是 $i_X \nu = \sum_i (-1)^{i-1} X^i \theta_i$ 。其中 θ_i 是缺少 ω^i 的 $n-1$ 形式。

$$d(i_X \nu) = \sum_i (-1)^{i-1} dX^i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.43)$$

$$= \sum_i E_i(X^i) \nu + \sum_i (-1)^{i-1} X^i \wedge d\theta_i \quad (3.44)$$

但是在 p 处 $d\theta_i = 0$ 。这是因为:

$$d\omega^k(E_i, E_j) = \omega^k(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i) = 0 \quad (3.45)$$

再根据 p 的任意性, 可知上述方程成立哦。

12.(E.Hopf 定理)

对 $\Delta f \nu$ 给出的 n 形式积分。设 $X = \text{grad} f$ (因为是紧流形)。

$$\int_M \Delta(f) \nu = \int_M \text{div} X \nu = \int_M d(i(X) \nu) = \int_{\partial M} i(X) \nu = 0 \quad (3.46)$$

因为 $\nabla f \geq 0$, 所以上式给出 $\nabla f = 0$ 。

接着对 $\nabla(f^2/2)$ 积分:

$$\int_M \nabla(f^2/2) \nu = \int_M 2 \|\text{grad} f\|^2 \nu \quad (3.47)$$

对上式使用 Stokes 公式, 可以得到 $\text{grad} f = 0$ 。

所以 f 是常数。

13.

$$\text{div} X \nu = d(i_X \nu) = dg \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} \nu \quad (3.48)$$

14.(Liouville 定理)

选取 $p \in M$ 。我们只需要说明任意 p 以及经过 p 的测地线 γ 都有 $\text{div} G(p, \dot{\gamma}(p)) = 0$ 。

为此, 选取 p 周围的测地坐标系。给定 $T_p M$ 处的单位正交基 e_1, \dots, e_n , 用 $q = \exp_p(\sum_i u_i e_i)$ 中的 (u_1, \dots, u_n) 表示 q 的坐标。

在这样的坐标下, 我们有:

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad (3.49)$$

这是因为经过 p 的测地线由线性方程给出。(或者观察测地线微分方程)。

现在设 (u_i) 是 $p \in U \subset M$ 周围的正规坐标系。设 (u_i, v_j) 是 TM 上的坐标。我们断言 TM 上的在 (q, v) 处的体积形式同构于是 $U \times U$ 在 (q, q) 上的体积形式。

实际上根据第二题 e 问的垂直水平向量可知, 选取 TM 上垂直的 n 个正交向量即可。

由于 G 是测地的, 从而 G 是水平的向量场。而散度可以只依照体积形式来计算, 从而我们可以在乘积度量下计算 $\text{div} G$ 。让 G 作用在函数 u^i, v^i 上:

$$G(u_i) = v_i G(v_j) = - \sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k \quad \text{第二个等式来自于 } G \text{ 是测地线} \quad (3.50)$$

最终我们有:

$$\text{div} G = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \sum_{ik} \Gamma_{ik}^j v_i v_k = 0 \quad u_i, v_i \text{ 是 } TM \text{ 在 } (p, p) \text{ 处的单位正交基. Christoffel 记号在 } (p, p) \text{ 处退化。} \quad (3.51)$$

4 第四章

1. (双不变度量的李群)

(1) 设 $X = W + Z, Y = W - Z$ 。则:

$$\nabla_X Y = \nabla_{W+Z}(W - Z) = \nabla_W(-Z) + \nabla_Z W \quad (4.1)$$

$$\nabla_Y Z = \nabla_{W-Z}(W + Z) = \nabla_W Z + \nabla_{-Z} W \quad (4.2)$$

因此 $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ 。根据无挠性:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad (4.3)$$

(2)

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]) - \frac{1}{2}([[[X, Y], Z]]) = \frac{1}{4}[[X, Y], Z] \quad (4.4)$$

(c)

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \frac{\langle [[X, Y], X], Y \rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2 \quad (4.5)$$

2. X 是 Killing 场。

(a) 对 f 求导, 作用 Z 向量场。

$$2\langle \nabla_Z X, X \rangle(p) = Z\langle X, X \rangle(p) = (df, Z)(p) = 0 \quad (4.6)$$

(b) 设 S 为:

$$S = \frac{1}{2}ZZ\langle X, X \rangle + \langle R(X, Z)X, Z \rangle \quad (4.7)$$

根据 Killing 方程, 我们有:

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, X \rangle = 0 \quad (4.8)$$

从而可以把 S 写为:

$$S = Z\langle \nabla_Z X, X \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z \nabla_X X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.9)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.10)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle - X\langle \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.11)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Z]} X, Z \rangle \quad (4.12)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle + \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle - \langle \nabla_Z X, [X, Z] \rangle \quad (4.13)$$

$$= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z \rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X \rangle \quad (4.14)$$

带入 p 且根据 $\nabla_X X(p) = 0$ 可得结果。

3. 命题: 设 M 是紧致偶数维黎曼流形且截面曲率恒正。则 M 上的 Killing 场总有 0 点。

解答: 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是函数 $f(q) = \langle X, X \rangle(q)$ 。因为 M 是紧流形, 从而 $f(q)$ 有最小值 p 。在该点处 $df = 0$ 。假设 $X(p) \neq 0$ 。

定义线性映射 $A : T_p M \rightarrow T_p M$. 其中 $A(y) = \nabla_Y X(p)$, 其中 Y 是 y 在该处的 extension. 显然 $A(y)$ 与 Y 的选取无关。

因为 $X(p) \neq 0$, 所以存在 E 作为 $T_p M$ 的子空间正交于 $X(p)$. 把 A 限制在 E 上, 我们断言这是 E 的一个线性变换 (a). 设 \tilde{A} 是 $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ 的双线性函数: $\tilde{A}(v, w) = \langle Av, w \rangle$. 我们同时断言 \tilde{A} 非退化且反对称. (b)

根据两个断言, E 的维数必须是偶数. 然而 M 的维数也是偶数, 这产生了矛盾! 因此 $X(p) = 0$.

先证明断言 (a). 首先说明 $A(E) \subset E$. 事实上, 设 $y \in E$, 则 $\langle \nabla_Y X, X \rangle(p) = \frac{1}{2} Y \langle X, X \rangle = 0$. 因此 $A(y) \in E$.

再证明断言 (b). 选取 E 的基 $\{e_2, \dots, e_n\}$. 令 E_i 是 e_i 的一个延拓. 于是 $\langle A(e_i), e_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle(p) = -\langle \nabla_{E_j} X, E_i \rangle(p)$. 最后一个等号来源于 Killing 方程. 于是 \tilde{A} 是反对称的双线性函数。

为了说明 \tilde{A} 非退化, 假设 $A(y) = 0$ 且 $y \neq 0$. 从而:

$$0 = \langle A(y), A(y) \rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} Y \langle X, X \rangle + \langle R(X, Y)X, Y \rangle \quad (4.15)$$

因为 p 处 $f(p)$ 给出最小值, 从而 $y(Y(f))$ 在 p 处必须非负. 而截面曲率大于 0, 因此等式右边大于 0. 这产生了矛盾! 因而 $y = 0$, 于是 A 是同构。

4. 第 4 题是一个非常好的结论。

命题 4.1 设 M 是黎曼流形且满足性质: 给定 $p, q \in M$, 从 p 到 q 的平行移动与连接 p, q 的道路的选取无关. 则 M 是曲率算子是 0, 换句话说, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M), R(X, Y)Z = 0$.

证明 考虑参数化曲面 $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$:

$$U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; -\epsilon < t < 1 + \epsilon, -\epsilon < s < 1 + \epsilon, \epsilon > 0\} \quad (4.16)$$

且 $f(s, 0) = f(0, 0), \forall s$. 设 $V_0 \in T_{f(0,0)}(M)$ 且定义沿着 f 的向量场 V 满足 $V(s, 0)$ 是沿着 $s \mapsto f(s, 0)$ 得到的向量, $V(s, t)$ 是 $V(s, 0)$ 沿着曲线 $t \mapsto f(s, t)$ 平行移动得到的向量. 从而:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = 0 = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V \quad (4.17)$$

另一方面, 因为 M 上的平行移动与选取的曲线无关, 因此 $V(s, 1)$ 可以看作 $V(s, 0)$ 移动的结果, 也可以看作 $V(0, 1)$ 沿着曲线 $s \mapsto f(s, 1)$ 移动的结果. 所以:

$$\frac{D}{\partial s} V(s, 1) = 0 \quad (4.18)$$

因此:

$$R_{f(0,1)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial s}(0, 1)\right)V(0, 1) = 0 \quad (4.19)$$

然而 $f(0, 1), V_0$ 是我们随意指定的, f 也是随意给出的, 因而 $R = 0$ 恒成立. \square

5.

命题 4.2 设 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ 是测地线且 X 是 M 上的向量场, 满足 $X(\gamma(0)) = 0$. 则:

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0) \quad (4.20)$$

其中 $X' = \frac{DX}{dt}$. 换句话说, 求导穿进了曲率算子。



证明 考虑 (0,4) 型的算子 R 。对于任意的向量场 Z , 在 $t = 0$ 时:

$$(\nabla_{\gamma'} R)(\gamma', X, \gamma', Z) = \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', X) \gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', X') \gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', X) \gamma', Z' \rangle \quad (4.21)$$

$$= \langle \nabla_{\gamma'} (R(\gamma', X) \gamma'), Z \rangle - \langle R(\gamma', X') \gamma', Z \rangle \quad (4.22)$$

事实上, 上式左边是 0. 因为 $X(\gamma(0)) = 0$, 从而 (0,4) 张量 $\nabla_{\gamma'} R$ 在 $t = 0$ 时为 0. \square

6.(a)

命题 4.3 (局部对称空间) 设 M 是黎曼流形。称 M 是局部对称空间, 若 $\nabla R = 0$. 其中 R 是 M 的曲率张量。设 $\gamma: [0, l] \rightarrow M$ 是 M 的测地线, 且 X, Y, Z 是沿着 γ 平行移动的向量场。则 $R(X, Y)Z$ 也是沿着 γ 平行移动的向量场。

证明

$$0 = (\nabla_{\gamma'} R)(X, Y, Z, W) = \gamma'(R(X, Y, Z, W)) - R(X, Y, Z, \nabla_{\gamma'} W) \quad (4.23)$$

于是:

$$\gamma' \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, \nabla_{\gamma'} W \rangle \quad (4.24)$$

根据联络适配度量性, 可知:

$$\langle \nabla_{\gamma'} R(X, Y)Z, W \rangle = 0 \quad (4.25)$$

总成立。 \square

(b)

命题 4.4 若 M 是 2 维的局部对称空间, 连通。则 M 有常截面曲率。

证明 根据连通, 我们只需要说明任何点 $p \in M$ 都存在 $p \in U$ 使得其上的截面曲率为常数。因为是 2 维的流形, 所以实际上是 $T_p M$ 的曲率。

考虑在上一章习题给出的正规坐标系。取 E_1, E_2 是对应的标架。则 $E_i(\exp_p v)$ 是 $E_i(p)$ 沿着曲线 $t \mapsto \exp_p(tv)$ 平行移动到 $\exp_p(v)$ 的向量。显然 E_1, E_2 总是标准正交基。

于是 $K(\exp v) = R(E_1, E_2, E_1, E_2)$ 。根据上个命题的结果, 该值沿着曲线 $t \mapsto \exp_p(tv)$ 不变, 因而在整个测地坐标系上 R 是恒定的。 \square

(c)

命题 4.5 若 M 有常截面曲率, 则 M 是局部的对称空间。

证明 常曲率空间中可以计算:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = K_0(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle) \quad (4.26)$$

对其求 ∇ 可得结果。 \square

7.

命题 4.6 (第二 Bianchi 不等式)

$$(\nabla R)(X, Y, Z, W, T) + (\nabla R)(X, Y, W, T, Z) + (\nabla R)(X, Y, T, Z, W) = 0 \quad (4.27)$$

略。这个恒等式的证明很经典的。

8.

定理 4.0.1 (Schur 定理) 若 M 是 n 维黎曼流形且 $n \geq 3$. 设 M 是各向同性的, 即 $K(p, \sigma)$ 并不依赖于 $\sigma \subset T_p M$. 则 M 有着常截面曲率。

证明 定义:

$$R'(W, Z, X, Y) = \langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle$$

如果截面曲率不依赖于该点处平面的选取, 则我们有:

$$R = KR' \quad (4.28)$$

对 R 求联络:

$$\nabla_U R = (UK)R' \quad (4.29)$$

根据第二 Bianchi 恒等式:

$$0 = (UK)(\langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle) + (XK)(\langle W, Y \rangle \langle Z, U \rangle - \langle Z, Y \rangle \langle W, U \rangle) + \\ (YK)(\langle W, U \rangle \langle Z, X \rangle - \langle Z, U \rangle \langle W, X \rangle)$$

选取固定的 $p \in M$ 和 X 在 p 的值。因为 $n \geq 3$, 则存在 Y, Z 使得 $\langle X, Y \rangle = \langle Y, Z \rangle + \langle Z, X \rangle = 0$ 且 $\langle Z, Z \rangle = 1$.

把 U 带入为 Z , 则:

$$\langle (XK)Y - (YK)X, W \rangle = 0$$

因而 $(XK)Y - (YK)X = 0$. 从而 $XK = 0$ 恒成立, 于是 K 是常数。□

9.

命题 4.7 常数曲率 $K(p)$ 可以用公式:

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(x) dS^{n-1}$$

计算。其中 ω_{n-1} 是 S^{n-1} 的面积, dS^{n-1} 是 S^{n-1} 的体积元。

证明 提示已经做完了。□

10.

命题 4.8 若 M^n 是连通的 Einstein 流形, 则 Einstein 数是常数。若 M^3 是连通的 Einstein 流形则 M^3 的截面曲率恒定。

提示也做完了。第二个命题直接带入正交基 e_1, e_2, e_3 就得到三个方程。

5 第五章

命题 5.1 设 M 是黎曼流形且截面曲率是 0. 则任意 $p \in M$, 映射 $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_p M \rightarrow B_\epsilon(p)$ 是等距同构。其中 $B_\epsilon(p)$ 是在 p 处的正规球。

证明 设 $w \in T_v(T_p M)$ 且满足 $\|w\| = 1$. 则 Jacobi 场:

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw) \quad (5.1)$$

我们需要说明 $\|J(t)\| = t$. 因为 $\|tw\| = t$, 从而给出 \exp_p 是一个等距同构。

计算:

$$\langle J, J' \rangle'(t) = 2\langle J', J \rangle(t), \langle J, J' \rangle'(t) = \langle J', J' \rangle + \langle J, J'' \rangle = \langle J', J' \rangle - \langle J, R(\gamma', J(t))\gamma' \rangle \quad (5.2)$$

因为截面曲率总是 0, 所以:

$$\langle J, J' \rangle'(t) = \langle J', J' \rangle(t) \quad (5.3)$$

对右边的表达式求导:

$$\langle J', J' \rangle'(t) = 2\langle J'', J' \rangle = -2\langle R(\gamma', J)\gamma', J' \rangle = 0 \quad (5.4)$$

从而 $\langle J', J' \rangle(t) = t$, 于是 $\langle J, J \rangle(t) = t^2$. □

命题 5.2 设 M 是黎曼流形. $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ 是测地线, J 是沿着 γ 的 Jacobi 场。则存在一个参数化的曲面 $f(t, s)$, 使得 $f(t, 0) = \gamma(t)$, $t \mapsto f(t, s)$ 是测地线, 且 $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$.

证明 是 Jacobi 场的典范构造。 □

命题 5.3 设 M 是有非正截面曲率的黎曼流形。则对于任何 $p \in M$, 对偶 $\text{locus} C(p)$ 总是空集。

证明 假设存在非平凡的 Jacobi 场使得 $J(0) = J(1) = 0$.

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt} J, J \right\rangle = \langle J'', J \rangle + \langle J', J' \rangle \geq 0 \quad (5.5)$$

根据 $J(0) = J(1) = 0$, 可以得知:

$$\left\langle \frac{D}{dt} J, J \right\rangle = 0 \quad (5.6)$$

这意味着 $\|J\|^2 = 0$ 恒成立, 矛盾! □

命题 5.4 设 $b < 0$. M 有恒负的常曲率 b . 设 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ 是正规测地线, $v \in T_{\gamma(l)} M$ 且 $\langle v, \gamma'(l) \rangle = 0$, $\|v\| = 1$. 因为 M 的曲率是负数, 从而 $\gamma(l)$ 与 $\gamma(0)$ 不共轭。

则沿着 γ 的 Jacobi 场 $J(J(0) = 0, J(l) = v)$ 为:

$$J(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{-b})}{\sinh(l\sqrt{-b})} w(t) \quad (5.7)$$

其中 $w(t)$ 是沿着 γ 平行移动的向量场:

$$w(0) = \frac{u_0}{\|u_0\|}, u_0 = (d\exp_p)_{l\gamma'(0)}^{-1}(v) \quad (5.8)$$

证明 因为 M 是常曲率空间, 于是给定初值的 Jacobi 场有表达式:

$$J_1(t) = \frac{\sinh t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}w(t) \quad (5.9)$$

其中 $J_1(t)$ 满足 $J_1(0) = 0, J_1'(0) = \frac{u_0}{\|u_0\|}$.

我们用指数映射写出 J_1 :

$$J_1(l) = (d\exp_p)_{l\gamma'(0)}(lw(0)) \quad (5.10)$$

因为 v 满足:

$$v = d(\exp_p)_{l\gamma'(0)}(u_0) \quad (5.11)$$

从而 $v = \frac{\|u_0\|}{l}J_1(l)$. 因此:

$$J(t) = \frac{\|u_0\|}{l} \frac{\sinh t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}w(t) \quad (5.12)$$

余下的工作是解算 $\|u_0\|$. 事实上, $\|v\| = 1$. 从而:

$$1 = \|v\| = \frac{\|u_0\| \sinh l\sqrt{-b}}{l\sqrt{-b}} \quad (5.13)$$

于是:

$$J(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{-b})}{\sinh(l\sqrt{-b})}w(t) \quad (5.14)$$

命题 5.5 (局部对称空间的 Jacobi 场) 设 γ 是 M 中测地线且 M 是局部对称空间. v 是 γ 在起点的切向量. 定义线性映射 $K_v: T_pM \rightarrow T_pM$:

$$K_v(x) = R(v, x)v \quad (5.15)$$

则 $(1)K_v$ 是自伴随的.

(2) 选取 T_pM 的正交基 $\{e_i\}$ 以对角化 K_v . 把 e_i 沿着 γ 平行移动, 则 $K_{\gamma'(t)}(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t)$ 恒成立.

(3) 设 $J(t) = \sum x_i(t)e_i(t)$ 是沿着 γ 的 Jacobi 场. 则 Jacobi 方程等价:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0 \quad (5.16)$$

(4) p 沿着 γ 的共轭点 (p 是 γ 的起点) 由 $\gamma(\pi k/\sqrt{\lambda_i})$ 给出. 其中 k 是正整数, λ_i 是 K_v 的正特征值.

证明 (1) 计算:

$$\langle R(v, x)v, y \rangle = \langle R(v, y)v, x \rangle \quad (5.17)$$

这是因为 R 的对称性.

(2) $R(v, e_i)v = \lambda_i e_i$. 则 $R(\gamma', e_i(t))\gamma'$ 是沿着曲线 γ 的平行移动的向量场. 于是其和 $e_j(t)$ 的内积保持不变. 因此 $R(\gamma', e_i(t))\gamma' = \lambda_i e_i(t)$.

(3) 代入 Jacobi 场即可.

(4) 观察 $x_i(t)$. 若 λ_i 是正数, 则 $x_i(t)$ 有周期解. 周期为 $\pi k/\sqrt{\lambda_i}$. □



命题 5.6 见书。不再抄写。

证明 1. 极坐标。验证一下 p 处的非退化性即可。

2. 根据坐标变换公式平凡。

3. 沿着测地线 $f(\rho, 0)$, 有:

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho} = -K(p)\rho + R(\rho) \quad (5.18)$$

实际上, $\frac{\partial f}{\partial s}$ 是 Jacobi 场, 于是:

$$\sqrt{g_{22}} = \rho - \frac{1}{6}K(p, \sigma)\rho^3 + o(\rho^3) \quad (5.19)$$

求两次导:

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho} = -K(p)\rho + R(\rho) \quad (5.20)$$

4.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho}}{\sqrt{g_{22}}} = -K(p) \quad (5.21)$$

泰勒展开一除即可得到答案。 \square

命题 5.7 设 M 是 2 维黎曼流形。设 $p \in M$ 且 $V \subset T_p M$ 是原点处的一个邻域。设 $S_r(0)$ 是半径为 r 的圆, 且 L_r 是 $\exp_p(S_r)$ 的周长。证明:

$$K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L_r}{r^3} \quad (5.22)$$

证明 容易求出 L_r 关于 r 展开。 \square

命题 5.8 设 γ 测地且 X 是 M 上的 *illing* 场。则 $X(\gamma(s))$ 作为 X 在 $\gamma(s)$ 上的限制是一个 *Jacobi* 场。

证明 用 X 给出局部单参数变换群, 从而有曲面 $f(s, t)$ 满足 $\forall s, t \mapsto f(s, t)$ 是测地线。从而:

$$X'' = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) - R(\gamma', X)\gamma' = -R(\gamma', X)\gamma' \quad (5.23)$$