Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 15 日

目录

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \tag{2.1}$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \tag{2.2}$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化，于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P^{-1}_{c,t_0,t}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X (Y - P_{c,t_0,t} Y)(p) = \nabla_X Y(p) \tag{2.3}$$

3.∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回，M 的度量是 f^*g. 设 $f_*X = \bar{X}$。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z\rangle = X\langle f_*Y, f_*Z\rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.4}$$

4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 $\mathbb{R}^3$ 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \tag{2.5}$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$。所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的，从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间，则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点，走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\} g^{km} \tag{2.6}$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的，且联络是无挠的，我们仍然有:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.7}$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ 的值，我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇. 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D. 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \leq i, j \leq n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于：

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.8}$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.9}$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。

3 第三章

1.(Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle\frac{\partial v}{\partial,}\frac{\partial u}{\partial\rangle}=0,\langle\frac{\partial v}{\partial,}\frac{\partial v}{\partial\rangle}=f'^2+g'^2,\langle\frac{\partial u}{\partial,}\frac{\partial u}{\partial\rangle}=f^2 \tag{3.1}$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t),v(t))$. 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t)=u'(t)\frac{\partial}{\partial u}+v'(t)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.2}$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma^1_{11}=0,\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{f'}{f},\Gamma^1_{22}=0 \tag{3.3}$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{ff'}{f'^2+g'^2},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,\Gamma^2_{22}=\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2} \tag{3.4}$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\frac{f'}{f}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(\frac{du}{dt})^2+\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}(\frac{dv}{dt})^2=0 \tag{3.6}$$

(c)$|\gamma'(t)|^2=u'^2f^2+v'^2(f'^2+g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v''v'(f'^2+g'^2)+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.7}$$

$$=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v'[ff'u'^2-(f'f''+g'g'')v'^2]+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.8}$$

$$=2fu'(u''f+2u'v'f')=0 \tag{3.9}$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r\cos\beta=\text{const} \tag{3.10}$$

(d) 我认为是一个错题。

2.(定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式，良定义意为选择的曲线 p,v,q,w 并不影响计算的结果. 其次，这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式：

$$\langle V,W\rangle_{p,v}=\langle d\pi(V),d\pi(W)\rangle_p+\langle\frac{Dv}{dt}(0),\frac{Dw}{ds}(0)\rangle_p \tag{3.11}$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0)=\nabla_{d\pi(V)}v(t),\frac{Dw}{ds}(0)=\nabla_{d\pi(W)}w(s) \tag{3.12}$$

我们需要说明 $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$ 是不依赖 $v(t)$ 选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}(d\pi(V))^k Y^j)\frac{\partial x^i}{\partial,}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \tag{3.13}$$

于是该向量被 v,V 所表达，因而是良定义的。

(b) 纤维上 $d\pi(W) = 0$。因此 V 是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0)\rangle \equiv 0, \forall w(t) \tag{3.14}$$

因此 $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 即 $v(t)$ 沿着 $p(t)$ 平行移动。

(c) 设 $v(t)$ 是测地向量场 (M 上的)。这也可以写作 $v: M \to TM$ 表。我们断言 $v_*v(t)$ 是水平向量场。不妨设 $v(t)$ 对应的测地线是 $p(t)$。

于是在 $(p(t), v(t))$ 处,$\nabla_{\dot{p(t)}}v(t) = 0$ 恒成立，从而 $v_*v(t)$ 是水平向量场。

(d) 设 $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$, 其中 $v(t)$ 是沿着 $\alpha(t)$ 的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.15}$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \tag{3.16}$$

若 $\alpha(t)$ 是测地线且 $v(t)$ 是 $\alpha(t)$ 的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.17}$$

于是 $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是 $\bar{\alpha}$ 成为了所有 $\bar{\gamma}(t)$ 中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为 $\dfrac{Dw}{dt} = 0$(W 水平), 所以第一个等式成立。

如果 W 垂直, 则 $d\pi(W) = 0$ 且 $\dfrac{Dw}{dt}$ 退化为 W. 所以第二个等式成立。

3. 设 G 是李群,$\mathcal{G}$ 是李代数. 给定 $X \in \mathcal{G}$, 有积分曲线:

$$\varphi : (-\epsilon, +\epsilon) \to G, \varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \tag{3.18}$$

(a) 设 $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ 且 $\varphi(t_0) = y$. 根据左不变性, 可以推出 $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$ 是在 t_0 处经过 e 的 X 的积分曲线。

事实上, 该曲线的切向量场为 $L_{*,y^{-1}}X = X$。因此根据积分曲线的唯一性可知 $y^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$. 即 $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$.

由于 t_0 是任意的, 所以在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上, 我们有 $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$。用简单的微分方程知识可以推得 t 对于所有 $\mathbb{R}$ 都有定义。

(b) 对于 $Y \in \mathcal{G}$, 需要证明 $\nabla_Y Y = 0$.

考虑关系:

$$2\langle X, \nabla_Y Y\rangle = 2Y\langle X, Y\rangle - X\langle Y, Y\rangle + 2\langle Y, [X, Y]\rangle \tag{3.19}$$

因为 X, Y 是左不变的向量场, 所以 $\langle X, Y\rangle$ 和 $\langle Y, Y\rangle$ 恒定。于是:

$$\langle X, \nabla_Y Y\rangle = \langle Y, [X, Y]\rangle \tag{3.20}$$

而度量是双不变的, 于是:

$$\langle [U, X], Y\rangle = -\langle U, [V, X]\rangle \tag{3.21}$$

上述等式可以参考伴随表示 Ad 和 ad 之间的关系.

所以 $\langle Y, [X, Y]\rangle = 0$ 恒成立。于是 $\langle \nabla_Y Y, X\rangle = 0$ 恒成立。于是 $\nabla_Y Y = 0$.

4.

(a) 取满足定理 3.7 的 W。对于任意点 $p \in W$, 有 $\exp_p$ 是 W 上的微分同胚。于是任何点 q 都与 q 有测地线连接，即 W 可缩。

(b) 使用 W_p 即可。有限交的情况下用测地线的唯一性可以保证可缩。

5.

(a) 设 V 是线性场且 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是矩阵。于是 V 的积分曲线:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t) = e^{tA}x(0) \tag{3.22}$$

所以 $\varphi(t_0, p) = e^{t_0 A}p$. 若这个线性变换是等距, 则 $e^{t_0 A} \in O(n)$. 即:

$$e^{t_0 A}(e^{t_0 A})^T = e^{t_0(A+A^T)} = \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.23}$$

(b) 取 $q = \exp_p(v) \neq p, v \in T_pM$. 我们说明 $\langle X_q, (d\exp_p)_q v\rangle = 0$.

取 q 处的 X 的积分曲线 $\gamma(t)$,$\gamma(0) = q$. 通过选择适当的 U 作为正规坐标系, 我们可以假定 $\gamma(t) \in U$ 且 X 在 U 上满足 Killing 场的定义。

从而存在 $v(t) \in T_pM$ 使得 $\exp_p v(t) = \gamma(t)$,$v(0) = v$.

于是 $X_q = \dot{\gamma}(0) = \dot{\exp_p} v(0)$. 因为 $\exp_p$ 是微分同胚, 于是 $X_q = d(\exp_p)_q \dot{v}(0)$.

而根据 X 是无穷小等距可知:

$$\|v(t)\| \equiv \mathrm{Const} \Rightarrow \langle v(t), \dot{v}(t)\rangle_p = 0 \tag{3.24}$$

(c) 设 X 在 p 处生成的积分曲线是 φ_p. 我们断言 Y 在 $f(p)$ 生成的积分曲线是 $f \circ \varphi_p$.

事实上:

$$f \dot{\circ} \varphi_p(t) = f_{*,\varphi(t)}(\dot{\varphi_p}(t)) = f_{*,\varphi(t)}(X(\varphi(t))) = Y(f(\varphi(t))) \tag{3.25}$$

f 是等距，意味着 φ 是等距与 $f \circ \varphi$ 是等距是等价的。

(d)(killing equation) X 是 killing field 当且仅当对于任何向量场 Y, Z, 有:

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0 \tag{3.26}$$

我们说明上述结果。只需要对 $X(p) \neq 0$ 的地方说明。设 U 是 p 处的一个正规坐标系,S 是 U 的子流形, 满足与 X_p 正交。$\dim S = n - 1$. 设 $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ 给出 S 在 p 的坐标,$(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ 给出 U 处的坐标,$\frac{\partial t}{\partial =} X_p$.

同时设 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 我们得到:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X\langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle - \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial t}{\partial \langle} X_i, X_j \rangle \tag{3.27}$$

因为 X 是 Killing 场, 而 X_i 沿着 X 的积分曲线移动时仍为 X_i, 从而:

$$g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j) = g(X_i(p), X_j(p)) \tag{3.28}$$

这意味着上述式子为 0.

反过来, 若上述公式为 0，则 $g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j)$. 这意味着 g 在 X 的积分曲线上做拉回不变, 因此 X 是 Killing 场。

(e) 在 (d) 题下已经显然。

6. 用 X 生成局部单参数变换群 φ_t. 则 $\varphi_t(q) = 0$. 从而 $\varphi_{t,*,q}$ 是 T_pM 上的线性映射。我们断言这个映射是 Id.

实际上考虑:

$$0 = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(q) = [Y, X](q) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[d\varphi_{t,*,q} - \mathrm{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=0} \tag{3.29}$$

并且 $\varphi_{t,*,q} \circ \varphi_{s,*,q} = \varphi_{t+s,*,q}$。两边对 s 求导可得：

$$\varphi_{s,*,q} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=s} = 0 \tag{3.30}$$

于是 $\varphi_{t,*,q} = \mathrm{Id}$.

因为 φ_t 是等距, 我们已经给出了其一个点处的值和微分, 从而 φ_t 被唯一确定为 Id.

引理 设 M 是完备黎曼流形,f 是 M 的等距同构。则 f 被一个点 p 处的值和该处的微分唯一确定。

证明 设 $q \in M$. 我们说明 $f(q)$ 只有一种选择。

取连接 p, q 的测地线 γ. 于是存在 $v \in T_pM$ 使得 $q = \exp_p v$. 我们断言:

$$f(q) = f(\exp_p v) = \exp_{f(p)}(f_* v) \tag{3.31}$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线 $\gamma(t)$:

$$t \mapsto f(\exp_p(tv)) \tag{3.32}$$

是从 $f(p)$ 出发, 以 $f_* v$ 为测地线。

求 $\gamma(t)$ 的切向量 $\dot\gamma(t)$:

$$\dot\gamma(t) = f_*(\dot{\exp_p}(tv)) \tag{3.33}$$

于是:

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} \dot{\gamma(t)} = f_*(\nabla_{\dot{\exp_p}(tv)} \dot{\exp_p}(tv)) = 0 \tag{3.34}$$

上述第一个等式用到了 f_* 是等距。

所以 $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(tf_*(v))$. 带入 $t = 1$ 可得结果。 □

7. 设 M 是 n 维黎曼流形,$p \in M$. 证明存在 p 在 M 中的邻域 U 和 n 个向量场 $E_1, \ldots, E_n \in \Gamma(X)$ 在 U 上的每个点都正交，使得在 p 处:

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \tag{3.35}$$

这样的一族 E_i 被称为 p 处的局部测地标架。

解答: 取 $e_1, \ldots, e_n$ 作为 p 处的一组单位正交基。取 U 是 p 处的一个正规坐标系，定义 $E_i(\exp_p w)$ 是 e_i 沿着 $\exp_p(tw)$ 平行移动得到的向量。

容易验证 E_i 正交。另外,$\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_{e_i} E_j(p) = 0$。因为 e_j 沿着 $\exp_p(te_i)$ 平行移动。

8. 定义向量场 X 的散度是函数 $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$, 在 p 处的值是线性映射 $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$ 的迹。函数 f 的梯度则是 df 在度量下的对偶向量场。

设 E_i 是测地标架。

(a) 证明 $\mathrm{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p)$, 其中 $X = \sum_i f_i E_i$.

(b) 验证上式和 $M = \mathbb{R}^n$ 时在数学分析中定义的表达式相同。

解答:

(a)

$$\nabla_{E_i}(f^j E_j) = \nabla_{E_i}(f^j) E_j = E_i(f_j) E_j \tag{3.36}$$

于是该映射的迹是 $\sum_i E_i(f_i)(p)$。

(b) 平凡。

9. 定义 Laplacian 算子 Δ 为:

$$\Delta(f) = \mathrm{divgrad} f, f \in C^\infty(M) \tag{3.37}$$

解答:

(a)

$$\Delta(f) = \sum_i E_i(E_i)(p) \tag{3.38}$$

(b)

$$\Delta(fg) = \sum_i E_i E_i(fg) = \sum_i E_i(f E_i g + E_i f g) = 2 \sum_i E_i f E_i g + \sum_i E_i E_i f g + \sum_i f E_i E_i g \tag{3.39}$$

10. 计算:

$$\frac{d}{ds}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} \rangle \tag{3.40}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = 0 \tag{3.41}$$

11. 对于可定向黎曼流形 ν，证明:

$$d(i_X \nu) = \mathrm{div} X \nu \tag{3.42}$$

其中 ν 是 M 的体积形式。

解答: 取 $p \in M$ 和 E_i 作为测地标架。设 $X = X^i E_i$. 设 $\omega^i \in \Omega^1(U)$ 满足 $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$.

则 $\omega^1\wedge\dots\omega^n$ 是 M 上的体积形式。于是 $i_X\nu=\sum_i(-1)^{i-1}X^i\theta_i$。其中 θ_i 是缺少 ω^i 的 $n-1$ 形式。

$$d(i_X\nu)=\sum_i(-1)^{i-1}dX^i\wedge\theta_i+\sum_i(-1)^{i-1}X^i\wedge d\theta_i \tag{3.43}$$

$$=\sum_i E_i(X^i)\nu+\sum_i(-1)^{i-1}X^i\wedge d\theta_i \tag{3.44}$$

但是在 p 处 $d\theta_i=0$. 这是因为:

$$d\omega^k(E_i,E_j)=\omega^k(\nabla_{E_i}E_j-\nabla_{E_j}E_i)=0 \tag{3.45}$$

再根据 p 的任意性, 可知上述方程成立哦。

12.(E.Hopf 定理)

对 $\Delta f\nu$ 给出的 n 形式积分。设 $X=\mathrm{grad}f$（因为是紧流形）。

$$\int_M\Delta(f)\nu=\int_M\mathrm{div}X\nu=\int_M d(i(X)\nu)=\int_{\partial M}i(X)\nu=0 \tag{3.46}$$

因为 $\nabla f\geq 0$, 所以上式给出 $\nabla f=0$.

接着对 $\nabla(f^2/2)$ 积分:

$$\int_M\nabla(f^2/2)\nu=\int_M 2\|\mathrm{grad}f\|^2\nu \tag{3.47}$$

对上式使用 Stokes 公式，可以得到 $\mathrm{grad}f=0$.

所以 f 是常数。

13.

$$\mathrm{div}X\nu=d(i_X\nu)=dg\wedge dx_2\wedge\dots dx_n=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}\nu \tag{3.48}$$

14.(Liouville 定理)

选取 $p\in M$。我们只需要说明任意 p 以及经过 p 的测地线 γ 都有 $\mathrm{div}G(p,\dot\gamma(p))=0$.

为此, 选取 p 周围的测地坐标系。给定 T_pM 处的单位正交基 $e_1,\dots,e_n$, 用 $q=\exp_p(\sum_i u_ie_i)$ 中的 $(u_1,\dots,u_n)$ 表示 q 的坐标。

在这样的坐标下, 我们有:

$$\Gamma^k_{ij}(p)=0 \tag{3.49}$$

这是因为经过 p 的测地线由线性方程给出。（或者观察测地线微分方程）。

现在设 (u_i) 是 $p\in U\subset M$ 周围的正规坐标系。设 (u_i,v_j) 是 TM 上的坐标。我们断言 TM 上的在 (q,v) 处的体积形式同构于是 $U\times U$ 在 (q,q) 上的体积形式。

实际上根据第二题 e 问的垂直水平向量可知，选取 TM 上垂直的 n 个正交向量即可。

由于 G 是测地的, 从而 G 是水平的向量场。而散度可以只依照体积形式来计算，从而我们可以在乘积度量下计算 $\mathrm{div}G$。让 G 作用在函数 u^i,v^i 上:

$$G(u_i)=v_iG(v_j)=-\sum_{ik}\Gamma^j_{ik}v_iv_k\quad\text{第二个等式来自于}G\text{是测地线} \tag{3.50}$$

最终我们有:

$$\mathrm{div}G=\sum_i\frac{\partial v_i}{\partial u_i}-\sum_j\frac{\partial v_j}{\partial(}\sum_{ik}\Gamma^j_{ik}v_iv_k)=0\quad u_i,v_i\text{ 是 }TM\text{ 在 }(p,p)\text{ 处的单位正交基.Christoffel 记号在 }(p,p)\text{ 处退化。} \tag{3.51}$$

4 第四章

1.(双不变度量的李群)

(1) 设 $X=W+Z$,$Y=W-Z$。则:

$$\nabla_X Y = \nabla_{W+Z}(W-Z) = \nabla_W(-Z) + \nabla_Z W \tag{4.1}$$

$$\nabla_Y Z = \nabla_{W-Z}(W+Z) = \nabla_W Z + \nabla_{-Z} W \tag{4.2}$$

因此 $\nabla_X Y = \nabla_Y X$。根据无挠性:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \tag{4.3}$$

(2)

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}([X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]) - \frac{1}{2}([[X,Y],Z]) = \frac{1}{4}[[X,Y],Z] \tag{4.4}$$

(c)

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4}\frac{\langle[[X,Y],X],Y\rangle}{|X|^2|Y|^2} = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 \tag{4.5}$$

2.X 是 Killing 场。

(a) 对 f 求导, 作用 Z 向量场。

$$2\langle\nabla_Z X, X\rangle(p) = Z\langle X,X\rangle(p) = (df,Z)(p) = 0 \tag{4.6}$$

(b) 设 S 为:

$$S = \frac{1}{2}ZZ\langle X,X\rangle + \langle R(X,Z)X,Z\rangle \tag{4.7}$$

根据 Killing 方程, 我们有:

$$\langle\nabla_X X, Z\rangle + \langle\nabla_Z X, X\rangle = 0 \tag{4.8}$$

从而可以把 S 写为:

$$S = Z\langle\nabla_Z X, X\rangle - \langle\nabla_X\nabla_Z X, Z\rangle + \langle\nabla_Z\nabla_X X, Z\rangle + \langle\nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle \tag{4.9}$$

$$= -\langle\nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle - \langle\nabla_X\nabla_Z X, Z\rangle + \langle\nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle \tag{4.10}$$

$$= -\langle\nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle - X\langle\nabla_Z X, Z\rangle + \langle\nabla_Z X, \nabla_X Z\rangle + \langle\nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle \tag{4.11}$$

$$= -\langle\nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle + \langle\nabla_Z X, \nabla_X Z\rangle + \langle\nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle \tag{4.12}$$

$$= -\langle\nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle + \langle\nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle + \langle\nabla_Z X, [X,Z]\rangle - \langle\nabla_Z X, [X,Z]\rangle \tag{4.13}$$

$$= -\langle\nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle + \langle\nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle \tag{4.14}$$

带入 p 且根据 $\nabla_X X(p) = 0$ 可得结果。

3. 命题: 设 M 是紧致偶数维黎曼流形且截面曲率恒正。则 M 上的 Killing 场总有 0 点。

解答：设 $f: M \to \mathbb{R}$ 是函数 $f(q) = \langle X,X\rangle(q)$. 因为 M 是紧流形, 从而 $f(q)$ 有最小值 p. 在该点处 $df = 0$。假设 $X(p) \neq 0$.

定义线性映射 $A: T_pM \to T_pM$. 其中 $A(y) = \nabla_Y X(p)$, 其中 Y 是 y 在该处的 extension。显然 $A(y)$ 与 Y 的选取无关。

因为 $X(p) \neq 0$, 所以存在 E 作为 T_pM 的子空间正交于 $X(p)$。把 A 限制在 E 上, 我们断言这是 E 的一个线性变换 (a)。设 $\tilde{A}$ 是 $E \times E \to \mathbb{R}$ 的双线性函数:$\tilde{A}(v,w) = \langle Av, w\rangle$. 我们同时断言 $\tilde{A}$ 非退化且反对称。(b)

根据两个断言，E 的维数必须是偶数。然而 M 的维数也是偶数, 这产生了矛盾！因此 $X(p) = 0$.

先证明断言 (a)。首先说明 $A(E) \subset E$. 事实上, 设 $y \in E$, 则 $\langle \nabla_Y X, X\rangle(p) = \dfrac{1}{2} Y\langle X, X\rangle = 0$. 因此 $A(y) \in E$.

再证明断言 (b)。选取 E 的基 $\{e_2, \ldots, e_n\}$. 令 E_i 是 e_i 的一个延拓。于是 $\langle A(e_i), e_j\rangle = \langle \nabla_{E_i} X, E_j\rangle(p) = -\langle \nabla_{E_j} X, E_i\rangle(p)$. 最后一个等号来源于 Killing 方程。于是 $\tilde{A}$ 是反对称的双线性函数。

为了说明 $\tilde{A}$ 非退化, 假设 $A(y) = 0$ 且 $y \neq 0$. 从而:

$$0 = \langle A(y), A(y)\rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2} y(Y\langle X, X\rangle) + \langle R(X,Y)X, Y\rangle \tag{4.15}$$

因为 p 处 $f(p)$ 给出最小值, 从而 $y(Y(f))$ 在 p 处必须非负. 而截面曲率大于 0, 因此等式右边大于 0。这产生了矛盾！因而 $y = 0$, 于是 A 是同构。

4. 第 4 题是一个非常好的结论。

命题 设 M 是黎曼流形且满足性质: 给定 $p, q \in M$, 从 p 到 q 的平行移动与连接 p, q 的道路的选取无关。则 M 是曲率算子是 0, 换句话说,$\forall X, Y, Z \in \Gamma(M), R(X,Y)Z = 0$.

证明 考虑参数化曲面 $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M$:

$$U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; -\epsilon < t + 1 + \epsilon, -\epsilon < s < 1 + \epsilon, \epsilon > 0\} \tag{4.16}$$

且 $f(s,0) = f(0,0), \forall s$. 设 $V_0 \in T_{f(0,0)}(M)$ 且定义沿着 f 的向量场 V 满足 $V(s,0)$ 是沿着 $s \mapsto f(s,0)$ 得到的向量,$V(s,t)$ 是 $V(s,0)$ 沿着曲线 $t \mapsto f(s,t)$ 平行移动得到的向量。从而:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} V = 0 = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} V + R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})V \tag{4.17}$$

另一方面, 因为 M 上的平行移动与选取的曲线无关, 因此 $V(s,1)$ 可以看作 $V(s,0)$ 移动的结果, 也可以看作 $V(0,1)$ 沿着曲线 $s \mapsto f(s,1)$ 移动的结果。所以:

$$\frac{D}{\partial s} V(s,1) = 0 \tag{4.18}$$

因此:

$$R_{f(0,1)}(\frac{\partial f}{\partial t}(0,1), \frac{\partial f}{\partial s}(0,1))V(0,1) = 0 \tag{4.19}$$

然而 $f(0,1)$,V_0 是我们随意指定的,f 也是随意给出的, 因而 $R = 0$ 恒成立。 $\square$

5.

命题 设 $\gamma: [0,l] \to M$ 是测地线且 X 是 M 上的向量场, 满足 $X(\gamma(0)) = 0$. 则:

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0) \tag{4.20}$$

其中 $X' = \frac{DX}{dt}$. 换句话说, 求导穿进了曲率算子。

证明 考虑 (0,4) 型的算子 R。对于任意的向量场 Z, 在 $t=0$ 时:

$$(\nabla_{\gamma'}R)(\gamma',X,\gamma',Z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R(\gamma',X)\gamma',Z\rangle-\langle R(\gamma',X')\gamma',Z\rangle-\langle R(\gamma',X)\gamma',Z'\rangle \tag{4.21}$$

$$=\langle\nabla_{\gamma'}(R(\gamma',X)\gamma'),Z\rangle-\langle R(\gamma',X')\gamma',Z\rangle \tag{4.22}$$

事实上, 上式左边是 0. 因为 $X(\gamma(0))=0$, 从而 (0,4) 张量 $\nabla_{\gamma'}R$ 在 $t=0$ 时为 0. □