Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 6 日

目录

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \tag{2.1}$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \tag{2.2}$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化，于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P^{-1}_{c,t_0,t}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X (Y - P_{c,t_0,t} Y)(p) = \nabla_X Y(p) \tag{2.3}$$

3.∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回，M 的度量是 $f^* g$. 设 $f_* X = \bar{X}$。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z \rangle = X\langle f_* Y, f_* Z \rangle = f_*(X)\langle f_* Y, f_* Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \tag{2.4}$$

4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 $\mathbb{R}^3$ 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \tag{2.5}$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$。所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的，从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间，则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点，走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\} g^{km} \tag{2.6}$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的，且联络是无挠的，我们仍然有:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.7}$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ 的值，我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇. 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D. 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \leq i, j \leq n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于：

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.8}$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.9}$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。

3 第三章

1.(Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\rangle=0,\langle\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\rangle=f'^2+g'^2,\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\rangle=f^2 \tag{3.1}$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t),v(t))$. 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t)=u'(t)\frac{\partial}{\partial u}+v'(t)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.2}$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma_{11}^1=0,\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{f'}{f},\Gamma_{22}^1=0 \tag{3.3}$$

$$\Gamma_{11}^2=-\frac{ff'}{f'^2+g'^2},\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=0,\Gamma_{22}^2=\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2} \tag{3.4}$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\frac{f'}{f}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(\frac{du}{dt})^2+\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}(\frac{dv}{dt})^2=0 \tag{3.6}$$

(c)$|\gamma'(t)|^2=u'^2f^2+v'^2(f'^2+g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v''v'(f'^2+g'^2)+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.7}$$

$$=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v'[ff'u'^2-(f'f''+g'g'')v'^2]+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.8}$$

$$=2fu'(u''f+2u'v'f')=0 \tag{3.9}$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r\cos\beta=\text{const} \tag{3.10}$$

(d) 我认为是一个错题。