Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 9 日

目录

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \tag{2.1}$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \tag{2.2}$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化，于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P^{-1}_{c,t_0,t}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X (Y - P_{c,t_0,t} Y)(p) = \nabla_X Y(p) \tag{2.3}$$

3.∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回，M 的度量是 f^*g. 设 $f_* X = \bar{X}$。（其他向量场也同理）。从而:

$$X\langle Y, Z\rangle = X\langle f_*Y, f_*Z\rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.4}$$

4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 $\mathbb{R}^3$ 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \tag{2.5}$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$。所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的，从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间，则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点，走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\} g^{km} \tag{2.6}$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的，且联络是无挠的，我们仍然有:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.7}$$

因为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ 的值，我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇. 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D. 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \le i, j \le n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于：

$$X^i (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.8}$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i (D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{2.9}$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。

3 第三章

1.(Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}\rangle=0,\langle\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\rangle=f'^2+g'^2,\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\rangle=f^2 \tag{3.1}$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t),v(t))$. 则切向量为:

$$\dot{\gamma}(t)=u'(t)\frac{\partial}{\partial u}+v'(t)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.2}$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma^1_{11}=0,\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{f'}{f},\Gamma^1_{22}=0 \tag{3.3}$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{ff'}{f'^2+g'^2},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,\Gamma^2_{22}=\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2} \tag{3.4}$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\frac{f'}{f}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(\frac{du}{dt})^2+\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}(\frac{dv}{dt})^2=0 \tag{3.6}$$

(c)$|\gamma'(t)|^2=u'^2f^2+v'^2(f'^2+g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v''v'(f'^2+g'^2)+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.7}$$

$$=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v'[ff'u'^2-(f'f''+g'g'')v'^2]+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.8}$$

$$=2fu'(u''f+2u'v'f')=0 \tag{3.9}$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r\cos\beta=\text{const} \tag{3.10}$$

(d) 我认为是一个错题。

2.(定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式，良定义意为选择的曲线 p,v,q,w 并不影响计算的结果. 其次，这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式：

$$\langle V,W\rangle_{p,v}=\langle d\pi(V),d\pi(W)\rangle_p+\langle\frac{Dv}{dt}(0),\frac{Dw}{ds}(0)\rangle_p \tag{3.11}$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0)=\nabla_{d\pi(V)}v(t),\frac{Dw}{ds}(0)=\nabla_{d\pi(W)}w(s) \tag{3.12}$$

我们需要说明 $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$ 是不依赖 $v(t)$ 选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}(d\pi(V))^k Y^j)\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \tag{3.13}$$

于是该向量被 v,V 所表达，因而是良定义的。

(b) 纤维上 $d\pi(W) = 0$。因此 V 是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0)\rangle \equiv 0, \forall w(t) \tag{3.14}$$

因此 $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 即 $v(t)$ 沿着 $p(t)$ 平行移动。

(c) 设 $v(t)$ 是测地向量场 (M 上的)。这也可以写作 $v: M \to TM$ 表。我们断言 $v_*v(t)$ 是水平向量场。不妨设 $v(t)$ 对应的测地线是 $p(t)$。

于是在 $(p(t), v(t))$ 处,$\nabla_{\dot{p(t)}}v(t) = 0$ 恒成立，从而 $v_*v(t)$ 是水平向量场。

(d) 设 $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$, 其中 $v(t)$ 是沿着 $\alpha(t)$ 的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.15}$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \tag{3.16}$$

若 $\alpha(t)$ 是测地线且 $v(t)$ 是 $\alpha(t)$ 的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.17}$$

于是 $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是 $\bar{\alpha}$ 成为了所有 $\bar{\gamma}(t)$ 中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为 $\dfrac{Dw}{dt} = 0$(W 水平), 所以第一个等式成立。

如果 W 垂直, 则 $d\pi(W) = 0$ 且 $\dfrac{Dw}{dt}$ 退化为 W. 所以第二个等式成立。