Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 6 月 15 日

目录

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \tag{2.1}$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \tag{2.2}$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化，于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P^{-1}_{c,t_0,t}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X (Y - P_{c,t_0,t} Y)(p) = \nabla_X Y(p) \tag{2.3}$$

3.∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回，M 的度量是 $f^* g$. 设 $f_* X = \bar{X}$。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z\rangle = X\langle f_* Y, f_* Z\rangle = f_*(X)\langle f_* Y, f_* Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.4}$$

4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 $\mathbb{R}^3$ 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \tag{2.5}$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$。所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的，从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间，则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点，走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{m}\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jm}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{im}-\frac{\partial}{\partial x_m}g_{ij}\}g^{km} \tag{2.6}$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的，且联络是无挠的，我们仍然有:

$$X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle=\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle+2\langle Z,\nabla_Y X\rangle \tag{2.7}$$

因为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z,\nabla_Y X\rangle$ 的值，我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇. 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D. 我们说明若 $\nabla_X Y=0$ 与 $D_X Y=0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}=0, 0\le i,j\le n$. 所以 $\nabla_{X^i\frac{\partial}{\partial x_i}}(Y^j\frac{\partial}{\partial x_j})=0$ 等价于：

$$X^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}Y^j)\frac{\partial}{\partial x_j}=0 \tag{2.8}$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}Y^j)\frac{\partial}{\partial x_j}=0 \tag{2.9}$$

于是 $D_X Y=0$ 与 $\nabla_X Y=0$ 等价。

3 第三章

1.(Geodesic of a surface of revolution)

(a) 计算:

$$\langle\frac{\partial v}{\partial,}\frac{\partial u}{\partial\rangle}=0,\langle\frac{\partial v}{\partial,}\frac{\partial v}{\partial\rangle}=f'^2+g'^2,\langle\frac{\partial u}{\partial,}\frac{\partial u}{\partial\rangle}=f^2 \tag{3.1}$$

(b) 设测地线 $\gamma(t)$ 为 $(u(t),v(t))$. 则切向量为:

$$\dot\gamma(t)=u'(t)\frac{\partial}{\partial u}+v'(t)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.2}$$

显然需要先计算联络系数。我们有:

$$\Gamma^1_{11}=0,\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{f'}{f},\Gamma^1_{22}=0 \tag{3.3}$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{ff'}{f'^2+g'^2},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,\Gamma^2_{22}=\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2} \tag{3.4}$$

带入测地线方程:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\frac{f'}{f}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}(\frac{du}{dt})^2+\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}(\frac{dv}{dt})^2=0 \tag{3.6}$$

(c)$|\gamma'(t)|^2=u'^2f^2+v'^2(f'^2+g'^2)$. 对其求导:

$$\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v''v'(f'^2+g'^2)+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.7}$$

$$=2u'u''f^2+2u'^2ff'v'+2v'[ff'u'^2-(f'f''+g'g'')v'^2]+2v'^3(f''f'+g''g') \tag{3.8}$$

$$=2fu'(u''f+2u'v'f')=0 \tag{3.9}$$

略去第二个有向角的计算。记录为:

$$r\cos\beta=\text{const} \tag{3.10}$$

(d) 我认为是一个错题。

2.(定义切丛上的 Riemann 度量)

(a) 对于给出的度量表达式，良定义意为选择的曲线 p,v,q,w 并不影响计算的结果. 其次，这是一个对称的正定二次型。

对称的正定二次型是平凡的。因而我们只需要考虑良定义问题。观察表达式：

$$\langle V,W\rangle_{p,v}=\langle d\pi(V),d\pi(W)\rangle_p+\langle\frac{Dv}{dt}(0),\frac{Dw}{ds}(0)\rangle_p \tag{3.11}$$

显然第一项是自然良定的。对于第二项, 注意到:

$$\frac{Dv}{dt}(0)=\nabla_{d\pi(V)}v(t),\frac{Dw}{ds}(0)=\nabla_{d\pi(W)}w(s) \tag{3.12}$$

我们需要说明 $\nabla_{d\pi(V)}v(t)$ 是不依赖 $v(t)$ 选取的向量。不妨根据联络的定义展开:

$$\nabla_{d\pi(V)}v(t) = ((d\pi(V))^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}(d\pi(V))^k Y^j)\frac{\partial x^i}{\partial,}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = V^{n+i} \tag{3.13}$$

于是该向量被 v,V 所表达，因而是良定义的。

(b) 纤维上 $d\pi(W) = 0$。因此 V 是水平向量等价于:

$$\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0)\rangle \equiv 0, \forall w(t) \tag{3.14}$$

因此 $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{p}(t)}v(t) = 0$ 恒成立, 即 $v(t)$ 沿着 $p(t)$ 平行移动。

(c) 设 $v(t)$ 是测地向量场 (M 上的)。这也可以写作 $v: M \to TM$ 表。我们断言 $v_*v(t)$ 是水平向量场。不妨设 $v(t)$ 对应的测地线是 $p(t)$。

于是在 $(p(t), v(t))$ 处,$\nabla_{\dot{p(t)}}v(t) = 0$ 恒成立，从而 $v_*v(t)$ 是水平向量场。

(d) 设 $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$, 其中 $v(t)$ 是沿着 $\alpha(t)$ 的向量场。则:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 \geq \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.15}$$

于是我们有:

$$l(\bar{\alpha}) \geq l(\alpha) \tag{3.16}$$

若 $\alpha(t)$ 是测地线且 $v(t)$ 是 $\alpha(t)$ 的切向量, 我们有:

$$\|\dot{\bar{\alpha}}(t)\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + \|\frac{Dv}{dt}\|^2 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 + 0 = \|\dot{\alpha}(t)\|^2 \tag{3.17}$$

于是 $l(\alpha) = l(\bar{\alpha})$。

现在考虑一个能使得测地线是最短线的凸邻域。于是 $\bar{\alpha}$ 成为了所有 $\bar{\gamma}(t)$ 中的最短线, 因而是测地线。

(e) 因为 $\dfrac{Dw}{dt} = 0$(W 水平), 所以第一个等式成立。

如果 W 垂直, 则 $d\pi(W) = 0$ 且 $\dfrac{Dw}{dt}$ 退化为 W. 所以第二个等式成立。

3. 设 G 是李群,$\mathcal{G}$ 是李代数. 给定 $X \in \mathcal{G}$, 有积分曲线:

$$\varphi: (-\epsilon, +\epsilon) \to G, \varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t)) \tag{3.18}$$

(a) 设 $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ 且 $\varphi(t_0) = y$. 根据左不变性, 可以推出 $t \mapsto y^{-1}\varphi(t)$ 是在 t_0 处经过 e 的 X 的积分曲线。

事实上, 该曲线的切向量场为 $L_{*,y^{-1}}X = X$。因此根据积分曲线的唯一性可知 $y^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$. 即 $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$.

由于 t_0 是任意的, 所以在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上, 我们有 $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$。用简单的微分方程知识可以推得 t 对于所有 $\mathbb{R}$ 都有定义。

(b) 对于 $Y \in \mathcal{G}$, 需要证明 $\nabla_Y Y = 0$.

考虑关系:

$$2\langle X, \nabla_Y Y\rangle = 2Y\langle X, Y\rangle - X\langle Y, Y\rangle + 2\langle Y, [X, Y]\rangle \tag{3.19}$$

因为 X,Y 是左不变的向量场, 所以 $\langle X,Y\rangle$ 和 $\langle Y,Y\rangle$ 恒定。于是:

$$\langle X,\nabla_Y Y\rangle=\langle Y,[X,Y]\rangle \tag{3.20}$$

而度量是双不变的, 于是:

$$\langle [U,X],Y\rangle=-\langle U,[V,X]\rangle \tag{3.21}$$

上述等式可以参考伴随表示 Ad 和 ad 之间的关系.

所以 $\langle Y,[X,Y]\rangle=0$ 恒成立。于是 $\langle \nabla_Y Y,X\rangle=0$ 恒成立。于是 $\nabla_Y Y=0$.

4.

(a) 取满足定理 3.7 的 W。对于任意点 $p\in W$, 有 $\exp_p$ 是 W 上的微分同胚。于是任何点 q 都与 q 有测地线连接，即 W 可缩。

(b) 使用 W_p 即可。有限交的情况下用测地线的唯一性可以保证可缩。

5.

(a) 设 V 是线性场且 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是矩阵。于是 V 的积分曲线:

$$\dot{x}(t)=Ax(t),x(t)=e^{tA}x(0) \tag{3.22}$$

所以 $\varphi(t_0,p)=e^{t_0A}p$. 若这个线性变换是等距, 则 $e^{t_0A}\in O(n)$. 即:

$$e^{t_0A}(e^{t_0A})^T=e^{t_0(A+A^T)}=\mathrm{Id}\Rightarrow \mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=0 \tag{3.23}$$

(b) 取 $q=\exp_p(v)\neq p,v\in T_pM$. 我们说明 $\langle X_q,(d\exp_p)_q v\rangle=0$.

取 q 处的 X 的积分曲线 $\gamma(t)$,$\gamma(0)=q$. 通过选择适当的 U 作为正规坐标系, 我们可以假定 $\gamma(t)\in U$ 且 X 在 U 上满足 Killing 场的定义。

从而存在 $v(t)\in T_pM$ 使得 $\exp_p v(t)=\gamma(t)$,$v(0)=v$.

于是 $X_q=\dot{\gamma}(0)=\dot{\exp_p}v(0)$. 因为 $\exp_p$ 是微分同胚, 于是 $X_q=d(\exp_p)_q\dot{v}(0)$.

而根据 X 是无穷小等距可知:

$$\|v(t)\|\equiv \mathrm{Const}\Rightarrow \langle v(t),\dot{v}(t)\rangle_p=0 \tag{3.24}$$

(c) 设 X 在 p 处生成的积分曲线是 φ_p. 我们断言 Y 在 $f(p)$ 生成的积分曲线是 $f\circ\varphi_p$.

事实上:

$$\dot{f\circ\varphi_p}(t)=f_{*,\varphi(t)}(\dot{\varphi_p}(t))=f_{*,\varphi(t)}(X(\varphi(t)))=Y(f(\varphi(t))) \tag{3.25}$$

f 是等距，意味着 φ 是等距与 $f\circ\varphi$ 是等距是等价的。

(d)(killing equation) X 是 killing field 当且仅当对于任何向量场 Y,Z, 有:

$$\langle\nabla_Y X,Z\rangle+\langle\nabla_Z X,Y\rangle=0 \tag{3.26}$$

我们说明上述结果。只需要对 $X(p)\neq 0$ 的地方说明。设 U 是 p 处的一个正规坐标系,S 是 U 的子流形, 满足与 X_p 正交。$\dim S=n-1$. 设 $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ 给出 S 在 p 的坐标,$(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ 给出 U 处的坐标,$\frac{\partial t}{\partial =}X_p$.

同时设 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 我们得到:

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_j \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X\langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle - \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial t}{\partial \langle} X_i, X_j \rangle \tag{3.27}$$

因为 X 是 Killing 场, 而 X_i 沿着 X 的积分曲线移动时仍为 X_i, 从而:

$$g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j) = g(X_i(p), X_j(p)) \tag{3.28}$$

这意味着上述式子为 0.

反过来, 若上述公式为 0，则 $g(X_i(0), X_j(0)) = g(\varphi_\epsilon X_i, \varphi_\epsilon X_j)$. 这意味着 g 在 X 的积分曲线上做拉回不变, 因此 X 是 Killing 场。

(e) 在 (d) 题下已经显然。

6. 用 X 生成局部单参数变换群 φ_t. 则 $\varphi_t(q) = 0$. 从而 $\varphi_{t,*,q}$ 是 T_pM 上的线性映射。我们断言这个映射是 Id.

实际上考虑:

$$0 = (\nabla_Y X - \nabla_X Y)(q) = [Y, X](q) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[d\varphi_{t,*,q} - \mathrm{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=0} \tag{3.29}$$

并且 $\varphi_{t,*,q} \circ \varphi_{s,*,q} = \varphi_{t+s,*,q}$。两边对 s 求导可得：

$$\varphi_{s,*,q} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi_{t,*,q})|_{t=s} = 0 \tag{3.30}$$

于是 $\varphi_{t,*,q} = \mathrm{Id}$.

因为 φ_t 是等距, 我们已经给出了其一个点处的值和微分, 从而 φ_t 被唯一确定为 Id.

引理 3.0.1 *设 M 是完备黎曼流形,f 是 M 的等距同构。则 f 被一个点 p 处的值和该处的微分唯一确定。*

证明 设 $q \in M$. 我们说明 $f(q)$ 只有一种选择。

取连接 p, q 的测地线 γ. 于是存在 $v \in T_pM$ 使得 $q = \exp_p v$. 我们断言:

$$f(q) = f(\exp_p v) = \exp_{f(p)}(f_* v) \tag{3.31}$$

为了证明上述断言, 我们说明曲线 $\gamma(t)$:

$$t \mapsto f(\exp_p(tv)) \tag{3.32}$$

是从 $f(p)$ 出发, 以 $f_* v$ 为测地线。

求 $\gamma(t)$ 的切向量 $\dot{\gamma}(t)$:

$$\dot{\gamma}(t) = f_*(\dot{\exp_p}(tv)) \tag{3.33}$$

于是:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma(t)} = f_*(\nabla_{\dot{\exp_p}(tv)} \dot{\exp_p}(tv)) = 0 \tag{3.34}$$

上述第一个等式用到了 f_* 是等距。

所以 $f(\exp_p(tv)) = \exp_{f(p)}(t f_*(v))$. 带入 $t = 1$ 可得结果。 □

7. 设 M 是 n 维黎曼流形,$p\in M$. 证明存在 p 在 M 中的邻域 U 和 n 个向量场 $E_1,\dots,E_n\in\Gamma(X)$ 在 U 上的每个点都正交，使得在 p 处:

$$\nabla_{E_i}E_j(p)=0 \tag{3.35}$$

这样的一族 E_i 被称为 p 处的局部测地标架。

解答: 取 $e_1,\dots,e_n$ 作为 p 处的一组单位正交基。取 U 是 p 处的一个正规坐标系，定义 $E_i(\exp_p w)$ 是 e_i 沿着 $\exp_p(tw)$ 平行移动得到的向量。

容易验证 E_i 正交。另外,$\nabla_{E_i}E_j(p)=\nabla_{e_i}E_j(p)=0$。因为 e_j 沿着 $\exp_p(te_i)$ 平行移动。

8. 定义向量场 X 的散度是函数 $\mathrm{div}X:M\to\mathbb{R}$, 在 p 处的值是线性映射 $Y(p)\mapsto\nabla_Y X(p)$ 的迹。函数 f 的梯度则是 df 在度量下的对偶向量场。

设 E_i 是测地标架。

(a) 证明 $\mathrm{div}X(p)=\sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p)$, 其中 $X=\sum_i f_iE_i$.

(b) 验证上式和 $M=\mathbb{R}^n$ 时在数学分析中定义的表达式相同。

解答:

(a)

$$\nabla_{E_i}(f^jE_j)=\nabla_{E_i}(f^j)E_j=E_i(f_j)E_j \tag{3.36}$$

于是该映射的迹是 $\sum_i E_i(f_i)(p)$。

(b) 平凡。

9. 定义 Laplacian 算子 Δ 为:

$$\Delta(f)=\mathrm{divgrad}f, f\in C^\infty(M) \tag{3.37}$$

解答:

(a)

$$\Delta(f)=\sum_i E_i(E_i)(p) \tag{3.38}$$

(b)

$$\Delta(fg)=\sum_i E_iE_i(fg)=\sum_i E_i(fE_ig+E_ifg)=2\sum_i E_ifE_ig+\sum_i E_iE_ifg+\sum_i fE_iE_ig \tag{3.39}$$

10. 计算:

$$\frac{d}{ds}\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle=\langle\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}\rangle \tag{3.40}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle=0 \tag{3.41}$$

11. 对于可定向黎曼流形 ν，证明:

$$d(i_X\nu)=\mathrm{div}X\nu \tag{3.42}$$

其中 ν 是 M 的体积形式。

解答: 取 $p\in M$ 和 E_i 作为测地标架。设 $X=X^iE_i$. 设 $\omega^i\in\Omega^1(U)$ 满足 $\omega^i(E_j)=\delta_{ij}$.

则 $\omega^1\wedge\dots\omega^n$ 是 M 上的体积形式。于是 $i_X\nu=\sum_i(-1)^{i-1}X^i\theta_i$。其中 θ_i 是缺少 ω^i 的 $n-1$ 形式。

$$d(i_X\nu)=\sum_i(-1)^{i-1}dX^i\wedge\theta_i+\sum_i(-1)^{i-1}X^i\wedge d\theta_i \tag{3.43}$$

$$=\sum_i E_i(X^i)\nu+\sum_i(-1)^{i-1}X^i\wedge d\theta_i \tag{3.44}$$

但是在 p 处 $d\theta_i=0$. 这是因为:

$$d\omega^k(E_i,E_j)=\omega^k(\nabla_{E_i}E_j-\nabla_{E_j}E_i)=0 \tag{3.45}$$

再根据 p 的任意性, 可知上述方程成立哦。

12.(E.Hopf 定理)

对 $\Delta f\nu$ 给出的 n 形式积分。设 $X=\mathrm{grad}f$（因为是紧流形）。

$$\int_M\Delta(f)\nu=\int_M\mathrm{div}X\nu=\int_M d(i(X)\nu)=\int_{\partial M}i(X)\nu=0 \tag{3.46}$$

因为 $\nabla f\geq 0$, 所以上式给出 $\nabla f=0$.

接着对 $\nabla(f^2/2)$ 积分:

$$\int_M\nabla(f^2/2)\nu=\int_M 2\|\mathrm{grad}f\|^2\nu \tag{3.47}$$

对上式使用 Stokes 公式，可以得到 $\mathrm{grad}f=0$.

所以 f 是常数。

13.

$$\mathrm{div}X\nu=d(i_X\nu)=dg\wedge dx_2\wedge\dots dx_n=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}\nu \tag{3.48}$$

14.(Liouville 定理)

选取 $p\in M$。我们只需要说明任意 p 以及经过 p 的测地线 γ 都有 $\mathrm{div}G(p,\dot\gamma(p))=0$.

为此, 选取 p 周围的测地坐标系。给定 T_pM 处的单位正交基 $e_1,\dots,e_n$, 用 $q=\exp_p(\sum_i u_ie_i)$ 中的 $(u_1,\dots,u_n)$ 表示 q 的坐标。

在这样的坐标下, 我们有:

$$\Gamma_{ij}^k(p)=0 \tag{3.49}$$

这是因为经过 p 的测地线由线性方程给出。(或者观察测地线微分方程)。

现在设 (u_i) 是 $p\in U\subset M$ 周围的正规坐标系。设 (u_i,v_j) 是 TM 上的坐标。我们断言 TM 上的在 (q,v) 处的体积形式同构于是 $U\times U$ 在 (q,q) 上的体积形式。

实际上根据第二题 e 问的垂直水平向量可知，选取 TM 上垂直的 n 个正交向量即可。

由于 G 是测地的, 从而 G 是水平的向量场。而散度可以只依照体积形式来计算，从而我们可以在乘积度量下计算 $\mathrm{div}G$。让 G 作用在函数 u^i,v^i 上:

$$G(u_i)=v_iG(v_j)=-\sum_{ik}\Gamma_{ik}^jv_iv_k\quad\text{第二个等式来自于}G\text{是测地线} \tag{3.50}$$

最终我们有:

$$\mathrm{div}G=\sum_i\frac{\partial v_i}{\partial u_i}-\sum_j\frac{\partial v_j}{\partial(}\sum_{ik}\Gamma_{ik}^jv_iv_k)=0\quad u_i,v_i\text{ 是 }TM\text{ 在 }(p,p)\text{ 处的单位正交基.Christoffel 记号在 }(p,p)\text{ 处退化。} \tag{3.51}$$

4 第四章

1.(双不变度量的李群)

(1) 设 $X=W+Z$,$Y=W-Z$。则:

$$\nabla_X Y=\nabla_{W+Z}(W-Z)=\nabla_W(-Z)+\nabla_Z W \tag{4.1}$$

$$\nabla_Y Z=\nabla_{W-Z}(W+Z)=\nabla_W Z+\nabla_{-Z} W \tag{4.2}$$

因此 $\nabla_X Y=\nabla_Y X$。根据无挠性:

$$\nabla_X Y=\frac{1}{2}[X,Y] \tag{4.3}$$

(2)

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{4}([X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]])-\frac{1}{2}([[X,Y],Z])=\frac{1}{4}[[X,Y],Z] \tag{4.4}$$

(c)

$$K(\sigma)=\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2}=\frac{1}{4}\frac{\langle[[X,Y],X],Y\rangle}{|X|^2|Y|^2}=\frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 \tag{4.5}$$

2.X 是 Killing 场。

(a) 对 f 求导, 作用 Z 向量场。

$$2\langle\nabla_Z X,X\rangle(p)=Z\langle X,X\rangle(p)=(df,Z)(p)=0 \tag{4.6}$$

(b) 设 S 为:

$$S=\frac{1}{2}ZZ\langle X,X\rangle+\langle R(X,Z)X,Z\rangle \tag{4.7}$$

根据 Killing 方程, 我们有:

$$\langle\nabla_X X,Z\rangle+\langle\nabla_Z X,X\rangle=0 \tag{4.8}$$

从而可以把 S 写为:

$$S=Z\langle\nabla_Z X,X\rangle-\langle\nabla_X\nabla_Z X,Z\rangle+\langle\nabla_Z\nabla_X X,Z\rangle+\langle\nabla_{[X,Z]}X,Z\rangle \tag{4.9}$$

$$=-\langle\nabla_X X,\nabla_Z Z\rangle-\langle\nabla_X\nabla_Z X,Z\rangle+\langle\nabla_{[X,Z]}X,Z\rangle \tag{4.10}$$

$$=-\langle\nabla_X X,\nabla_Z Z\rangle-X\langle\nabla_Z X,Z\rangle+\langle\nabla_Z X,\nabla_X Z\rangle+\langle\nabla_{[X,Z]}X,Z\rangle \tag{4.11}$$

$$=-\langle\nabla_X X,\nabla_Z Z\rangle+\langle\nabla_Z X,\nabla_X Z\rangle+\langle\nabla_{[X,Z]}X,Z\rangle \tag{4.12}$$

$$=-\langle\nabla_X X,\nabla_Z Z\rangle+\langle\nabla_Z X,\nabla_Z X\rangle+\langle\nabla_Z X,[X,Z]\rangle-\langle\nabla_Z X,[X,Z]\rangle \tag{4.13}$$

$$=-\langle\nabla_X X,\nabla_Z Z\rangle+\langle\nabla_Z X,\nabla_Z X\rangle \tag{4.14}$$

带入 p 且根据 $\nabla_X X(p)=0$ 可得结果。

3. 命题: 设 M 是紧致偶数维黎曼流形且截面曲率恒正。则 M 上的 Killing 场总有 0 点。

解答：设 $f:M\to\mathbb{R}$ 是函数 $f(q)=\langle X,X\rangle(q)$. 因为 M 是紧流形, 从而 $f(q)$ 有最小值 p. 在该点处 $df=0$。假设 $X(p)\neq 0$.

定义线性映射 $A: T_pM \to T_pM$. 其中 $A(y) = \nabla_Y X(p)$, 其中 Y 是 y 在该处的 extension。显然 $A(y)$ 与 Y 的选取无关。

因为 $X(p) \neq 0$, 所以存在 E 作为 T_pM 的子空间正交于 $X(p)$。把 A 限制在 E 上, 我们断言这是 E 的一个线性变换 (a)。设 $\tilde{A}$ 是 $E \times E \to \mathbb{R}$ 的双线性函数:$\tilde{A}(v,w) = \langle Av, w\rangle$. 我们同时断言 $\tilde{A}$ 非退化且反对称。(b)

根据两个断言，E 的维数必须是偶数。然而 M 的维数也是偶数, 这产生了矛盾！因此 $X(p) = 0$.

先证明断言 (a)。首先说明 $A(E) \subset E$. 事实上, 设 $y \in E$, 则 $\langle \nabla_Y X, X\rangle(p) = \dfrac{1}{2} Y\langle X, X\rangle = 0$. 因此 $A(y) \in E$.

再证明断言 (b)。选取 E 的基 $\{e_2, \ldots, e_n\}$. 令 E_i 是 e_i 的一个延拓。于是 $\langle A(e_i), e_j\rangle = \langle \nabla_{E_i} X, E_j\rangle(p) = -\langle \nabla_{E_j} X, E_i\rangle(p)$. 最后一个等号来源于 Killing 方程。于是 $\tilde{A}$ 是反对称的双线性函数。

为了说明 $\tilde{A}$ 非退化, 假设 $A(y) = 0$ 且 $y \neq 0$. 从而:

$$0 = \langle A(y), A(y)\rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2} y(Y\langle X, X\rangle) + \langle R(X,Y)X, Y\rangle \tag{4.15}$$

因为 p 处 $f(p)$ 给出最小值, 从而 $y(Y(f))$ 在 p 处必须非负. 而截面曲率大于 0, 因此等式右边大于 0。这产生了矛盾！因而 $y = 0$, 于是 A 是同构。

4. 第 4 题是一个非常好的结论。

命题 4.1 *设 M 是黎曼流形且满足性质: 给定 $p, q \in M$, 从 p 到 q 的平行移动与连接 p, q 的道路的选取无关。则 M 是曲率算子是 0, 换句话说,$\forall X, Y, Z \in \Gamma(M), R(X,Y)Z = 0$.*

证明 考虑参数化曲面 $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M$:

$$U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; -\epsilon < t + 1 + \epsilon, -\epsilon < s < 1 + \epsilon, \epsilon > 0\} \tag{4.16}$$

且 $f(s,0) = f(0,0), \forall s$. 设 $V_0 \in T_{f(0,0)}(M)$ 且定义沿着 f 的向量场 V 满足 $V(s,0)$ 是沿着 $s \mapsto f(s,0)$ 得到的向量,$V(s,t)$ 是 $V(s,0)$ 沿着曲线 $t \mapsto f(s,t)$ 平行移动得到的向量。从而:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} V = 0 = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} V + R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})V \tag{4.17}$$

另一方面, 因为 M 上的平行移动与选取的曲线无关, 因此 $V(s,1)$ 可以看作 $V(s,0)$ 移动的结果, 也可以看作 $V(0,1)$ 沿着曲线 $s \mapsto f(s,1)$ 移动的结果。所以:

$$\frac{D}{\partial s} V(s,1) = 0 \tag{4.18}$$

因此:

$$R_{f(0,1)}(\frac{\partial f}{\partial t}(0,1), \frac{\partial f}{\partial s}(0,1))V(0,1) = 0 \tag{4.19}$$

然而 $f(0,1)$,V_0 是我们随意指定的,f 也是随意给出的, 因而 $R = 0$ 恒成立。 □

5.

命题 4.2 *设 $\gamma: [0,l] \to M$ 是测地线且 X 是 M 上的向量场, 满足 $X(\gamma(0)) = 0$. 则:*

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0) \tag{4.20}$$

其中 $X' = \frac{DX}{dt}$. 换句话说, 求导穿进了曲率算子。

证明 考虑 (0,4) 型的算子 R。对于任意的向量场 Z, 在 $t=0$ 时:

$$(\nabla_{\gamma'}R)(\gamma',X,\gamma',Z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R(\gamma',X)\gamma',Z\rangle-\langle R(\gamma',X')\gamma',Z\rangle-\langle R(\gamma',X)\gamma',Z'\rangle \tag{4.21}$$

$$=\langle\nabla_{\gamma'}(R(\gamma',X)\gamma'),Z\rangle-\langle R(\gamma',X')\gamma',Z\rangle \tag{4.22}$$

事实上, 上式左边是 0. 因为 $X(\gamma(0))=0$, 从而 (0,4) 张量 $\nabla_{\gamma'}R$ 在 $t=0$ 时为 0. □

6.(a)

命题 4.3 (局部对称空间) 设 M 是黎曼流形。称 M 是局部对称空间, 若 $\nabla R=0$. 其中 R 是 M 的曲率张量。设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是 M 的测地线, 且 X,Y,Z 是沿着 γ 平行移动的向量场。则 $R(X,Y)Z$ 也是沿着 γ 平行移动的向量场。

证明

$$0=(\nabla_{\gamma'}R)(X,Y,Z,W)=\gamma'(R(X,Y,Z,W))-R(X,Y,Z,\nabla_{\gamma'}W) \tag{4.23}$$

于是:

$$\gamma'\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(X,Y)Z,\nabla'_{\gamma}W\rangle \tag{4.24}$$

根据联络适配度量性, 可知:

$$\langle\nabla'_{\gamma}R(X,Y)Z,W\rangle=0 \tag{4.25}$$

总成立。 □

(b)

命题 4.4 若 M 是 2 维的局部对称空间, 连通。则 M 有常截面曲率。

证明 根据连通, 我们只需要说明任何点 $p\in M$ 都存在 $p\in U$ 使得其上的截面曲率为常数。因为是 2 维的流形, 所以实际上是 T_pM 的曲率。

考虑在上一章习题给出的正规坐标系。取 E_1,E_2 是对应的标架。则 $E_i(\exp_p v)$ 是 $E_i(p)$ 沿着曲线 $t\mapsto\exp_p(tv)$ 平行移动到 $\exp_p(v)$ 的向量。显然 E_1,E_2 总是标准正交基。

于是 $K(\exp v)=R(E_1,E_2,E_1,E_2)$。根据上个命题的结果, 该值沿着曲线 $t\mapsto\exp_p(tv)$ 不变, 因而在整个测地坐标系上 R 是恒定的。 □

(c)

命题 4.5 若 M 有常截面曲率, 则 M 是局部的对称空间。

证明 常曲率空间中可以计算:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle=K_0(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle) \tag{4.26}$$

对其求 ∇ 可得结果。 □

7.

命题 4.6 (第二 Bianchi 不等式)

$$(\nabla R)(X,Y,Z,W,T)+(\nabla R)(X,Y,W,T,Z)+(\nabla R)(X,Y,T,Z,W)=0 \tag{4.27}$$

略。这个恒等式的证明很经典的。

8.

定理 4.0.1 (Schur 定理) 若 M 是 n 维黎曼流形且 $n \geq 3$. 设 M 是各向同性的, 即 $K(p,\sigma)$ 并不依赖于 $\sigma \subset T_pM$. 则 M 有着常截面曲率。

证明 定义:

$$R'(W,Z,X,Y)=\langle W,X\rangle\langle Z,Y\rangle-\langle Z,X\rangle\langle W,Y\rangle$$

如果截面曲率不依赖于该点处平面的选取, 则我们有:

$$R=KR' \tag{4.28}$$

对 R 求联络:

$$\nabla_U R=(UK)R' \tag{4.29}$$

根据第二 Bianchi 恒等式:

$$\begin{aligned}0=(UK)(\langle W,X\rangle\langle Z,Y\rangle-\langle Z,X\rangle\langle W,Y\rangle)+(XK)(\langle W,Y\rangle\langle Z,U\rangle-\langle Z,Y\rangle\langle W,U\rangle)+\\(YK)(\langle W,U\rangle\langle Z,X\rangle-\langle Z,U\rangle\langle W,X\rangle)\end{aligned}$$

选取固定的 $p\in M$ 和 X 在 p 的值。因为 $n\geq 3$，则存在 Y,Z 使得 $\langle X,Y\rangle=\langle Y,Z\rangle+\langle Z,X\rangle=0$ 且 $\langle Z,Z\rangle=1$.

把 U 带入为 Z, 则:

$$\langle (XK)Y-(YK)X,W\rangle=0$$

因而 $(XK)Y-(YK)X=0$. 从而 $XK=0$ 恒成立, 于是 K 是常数。 □

9.

命题 4.7 常数曲率 $K(p)$ 可以用公式:

$$K(p)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\mathrm{Ric}_p(x)dS^{n-1}$$

计算。其中 ω_{n-1} 是 S^{n-1} 的面积,$\mathrm{d}S^{n-1}$ 是 S^{n-1} 的体积元。

证明 提示已经做完了。 □

10.

命题 4.8 若 M^n 是连通的 *Einstein* 流形, 则 *Einstein* 数是常数。若 M^3 是连通的 *Einstein* 流形则 M^3 的截面曲率恒定。

提示也做完了。第二个命题直接带入正交基 e_1,e_2,e_3 就得到三个方程。

5 第五章

命题 5.1 设 M 是黎曼流形且截面曲率是 0. 则任意 $p \in M$, 映射 $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to B_\epsilon(p)$ 是等距同构。其中 $B_\epsilon(p)$ 是在 p 处的正规球。

证明 设 $w \in T_v(T_pM)$ 且满足 $\|w\| = 1$。则 Jacobi 场:

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw) \tag{5.1}$$

我们需要说明 $\|J(t)\| = t$. 因为 $\|tw\| = t$, 从而给出 $\exp_p$ 是一个等距同构。

计算:

$$\langle J, J\rangle'(t) = 2\langle J', J\rangle(t), \langle J, J'\rangle'(t) = \langle J', J'\rangle + \langle J, J''\rangle = \langle J', J'\rangle - \langle J, R(\gamma', J(t))\gamma'\rangle \tag{5.2}$$

因为截面曲率总是 0, 所以:

$$\langle J, J'\rangle'(t) = \langle J', J'\rangle(t) \tag{5.3}$$

对右边的表达式求导:

$$\langle J', J'\rangle'(t) = 2\langle J'', J'\rangle = -2\langle R(\gamma', J)\gamma', J'\rangle = 0 \tag{5.4}$$

从而 $\langle J', J'\rangle(t) = t$, 于是 $\langle J, J\rangle(t) = t^2$. □

命题 5.2 设 M 是黎曼流形.$\gamma : [0,1] \to M$ 是测地线,J 是沿着 γ 的 *Jacobi* 场。则存在一个参数化的曲面 $f(t,s)$, 使得 $f(t,0) = \gamma(t)$,$t \mapsto f(t,s)$ 是测地线, 且 $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$.

证明 是 Jacobi 场的典范构造。 □

命题 5.3 设 M 是有非正截面曲率的黎曼流形。则对于任何 $p \in M$, 对偶 $locusC(p)$ 总是空集。

证明 假设存在非平凡的 Jacobi 场使得 $J(0) = J(1) = 0$.

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{D}{dt}J, J\rangle = \langle J'', J\rangle + \langle J', J'\rangle \geq 0 \tag{5.5}$$

根据 $J(0) = J(1) = 0$, 可以得知:

$$\langle \frac{D}{dt}J, J\rangle = 0 \tag{5.6}$$

这意味着 $\|J\|^2 = 0$ 恒成立, 矛盾! □

命题 5.4 设 $b < 0.M$ 有恒负的常曲率 b. 设 $\gamma : [0,l] \to M$ 是正规测地线,$v \in T_{\gamma(l)}M$ 且 $\langle v, \gamma'(l)\rangle = 0, \|v\| = 1$. 因为 M 的曲率是负数, 从而 $\gamma(l)$ 与 $\gamma(0)$ 不共轭。

则沿着 γ 的 *Jacobi* 场 $J(J(0) = 0, J(l) = v)$ 为:

$$J(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{-b})}{\sinh(l\sqrt{-b})}w(t) \tag{5.7}$$

其中 $w(t)$ 是沿着 γ 平行移动的向量场:

$$w(0) = \frac{u_0}{\|u_0\|}, u_0 = (d\exp_p)^{-1}_{l\gamma'(0)}(v) \tag{5.8}$$

证明 因为 M 是常曲率空间, 于是给定初值的 Jacobi 场有表达式:

$$J_1(t) = \frac{\sinh t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} w(t) \tag{5.9}$$

其中 $J_1(t)$ 满足 $J_1(0) = 0, J_1'(0) = \frac{u_0}{\|u_0\|}$.

我们用指数映射写出 J_1:

$$J_1(l) = (d\exp_p)_{l\gamma'(0)}(lw(0)) \tag{5.10}$$

因为 v 满足:

$$v = d(\exp_p)_{l\gamma'(0)}(u_0) \tag{5.11}$$

从而 $v = \frac{\|u_0\|}{l} J_1(l)$. 因此:

$$J(t) = \frac{\|u_0\|}{l} \frac{\sinh t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} w(t) \tag{5.12}$$

余下的工作是解算 $\|u_0\|$. 事实上,$\|v\| = 1$。从而:

$$1 = \|v\| = \frac{\|u_0\| \sinh l\sqrt{-b}}{l\sqrt{-b}} \tag{5.13}$$

于是:

$$J(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{-b})}{\sinh(l\sqrt{-b})} w(t) \tag{5.14}$$

命题 5.5 (局部对称空间的 Jacobi 场) *设 γ 是 M 中测地线且 M 是局部对称空间。v 是 γ 在起点的切向量。定义线性映射 $K_v : T_pM \to T_pM$:*

$$K_v(x) = R(v, x)v \tag{5.15}$$

则 (1)K_v 是自伴随的。

(2) 选取 T_pM 的正交基 $\{e_i\}$ 以对角化 K_v. 把 e_i 沿着 γ 平行移动, 则 $K_{\gamma'(t)}(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t)$ 恒成立。

(3) 设 $J(t) = \sum x_i(t)e_i(t)$ 是沿着 γ 的 Jacobi 场。则 Jacobi 方程等价:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0 \tag{5.16}$$

(4)p 沿着 γ 的共轭点 (p 是 γ 的起点) 由 $\gamma(\pi k/\sqrt{\lambda_i})$ 给出。其中 k 是正整数,λ_i 是 K_v 的正特征值。

证明 (1) 计算:

$$\langle R(v, x)v, y\rangle = \langle R(v, y)v, x\rangle \tag{5.17}$$

这是因为 R 的对称性。

(2)$R(v, e_i)v = \lambda_i e_i$. 则 $R(\gamma', e_(t)i)\gamma'$ 是沿着曲线 γ 的平行移动的向量场。于是其和 $e_j(t)$ 的内积保持不变。因此 $R(\gamma', e_(t)i)\gamma' = \lambda_i e_i(t)$.

(3) 代入 Jacobi 场即可。

(4) 观察 $x_i(t)$. 若 λ_i 是正数, 则 $x_i(t)$ 有周期解。周期为 $\pi k/\sqrt{\lambda_i}$. □

命题 5.6 见书。不再抄写。

证明 1. 极坐标。验证一下 p 处的非退化性即可。

2. 根据坐标变换公式平凡。

3. 沿着测地线 $f(\rho, 0)$, 有:

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho} = -K(p)\rho + R(\rho) \tag{5.18}$$

实际上,$\frac{\partial f}{\partial s}$ 是 Jacobi 场, 于是:

$$\sqrt{g_{22}} = \rho - \frac{1}{6}K(p,\sigma)\rho^3 + o(\rho^3) \tag{5.19}$$

求两次导:

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho} = -K(p)\rho + R(\rho) \tag{5.20}$$

4.

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{g_{22}}_{\rho\rho}}{\sqrt{g_{22}}} = -K(p) \tag{5.21}$$

泰勒展开一除即可得到答案。 □

命题 5.7 设 M 是 2 维黎曼流形。设 $p \in M$ 且 $V \subset T_pM$ 是原点处的一个邻域。设 $S_r(0)$ 是半径为 r 的圆, 且 L_r 是 $\exp_p(S_r)$ 的周长。证明:

$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi}\frac{2\pi r - L_r}{r^3} \tag{5.22}$$

证明 容易求出 L_r 关于 r 展开。 □

命题 5.8 设 γ 测地且 X 是 M 上的 *killing* 场。则 $X(\gamma(s))$ 作为 X 在 $\gamma(s)$ 上的限制是一个 *Jacobi* 场。

证明 用 X 给出局部单参数变换群, 从而有曲面 $f(s,t)$ 满足 $\forall s, t \mapsto f(s,t)$ 是测地线。从而:

$$X'' = \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) - R(\gamma', X)\gamma' = -R(\gamma', X)\gamma' \tag{5.23}$$

6 第六章

命题 6.1 设 M_1 和 M_2 都是黎曼流形。考虑 $M_1 \times M_2$ 作为乘积度量。设 ∇^1 是 M_1 的黎曼联络,∇_2 是 M_2 的黎曼联络。

1. 乘积流形的黎曼联络是原本两个联络的和。

2. 给定 $p \in M_1$, 集合 $(M_2)_p = \{(p,q)|q \in M_2\}$ 是 $M_1 \times M_2$ 的子流形, 自然同构于 M_2. 并且 $(M_2)_p$ 是测地子流形。

3. 设 σ 是由 $x \in T_pM_1$ 和 $y \in T_qM_2$ 的在 (p,q) 处生成的二维切空间。则 $K(\sigma) = 0$

证明 1. 用 Koszul 公式。注意到乘积流形下李括号, 内积均可拆分，从而联络可以拆分。

2. 显然 $(M_2)_q$ 与 M_2 微分同胚。而 $(M_2)_q$ 上的联络总不会计算出 M_2 以外的切向量, 因此 M_2 是测地子流形。

3.x 延拓为 X,y 延拓为 Y 且使得 X,Y 李括号为 0. 容易计算 $R(X,Y)X = 0$

命题 6.2 设 $\S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ 给出*:*

$$\S(\theta,\varphi) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi) \tag{6.1}$$

是 $\mathbb{R}^4$ 上的环面。该环面的曲率是 0.

证明 详细的计算不论。注意到覆叠:$p : \mathbb{R}^4 \to \S$ 保度量。根据曲率是局部性质, 可得 $\S$ 曲率是 0. □

命题 6.3 $K \subset N \subset M$ 是黎曼流形的浸入。设 N 是 M 的完全测地子流形,K 是 N 的完全测地子流形, 则 K 是 M 的完全测地子流形。

证明 平凡。 □

命题 6.4 省略。平凡的命题。

命题 6.5 黎曼流形 $S^2 \times S^2$ 的截面曲率非负。另外，可以给出平坦 T^2 到 $S^2 \times S^2$ 的完全测地嵌入。

证明 根据命题 6.1, 我们只需要说明 S^2 的截面曲率非负。事实上,S^2 是常曲率空间。其截面曲率是 1.

第二问用 S^1 嵌入 S^2, 嵌入为赤道即可。 □

命题 6.6 设 G 是李群, 拥有一个双不变度量。设 H 是李群且 $h : H \to G$ 是浸入, 同时也是群同态。*(*H 是 G 的李子群*)*. 则 h 是完全测地的浸入。

证明 因为 G 拥有双不变度量, 根据在第四章的习题可知:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \tag{6.2}$$

对于 H, 把 G 拉回到 H 上。则该度量在 H 上也是双不变度量。

对于 $X, Y \in T_eH$, 可以延伸出 H 的左不变向量场和 G 的左不变向量场。于是 $\nabla^G_X Y$ 和 $\nabla^H_X Y$ 相同。 □

命题 6.7 若 M 是 $\bar{M}$ 的测地子流形, 则对于 M 的任何切向量场,∇ 和 $\bar{\nabla}$ 一致。

证明 完全测地子流形说明 $B(X,Y)=0$ 成立。 □

命题 6.8 这是一道计算题。我们省略 *(a)(b)* 的解答。

证明 对于 (c), 我们需要说明这个浸入是极小浸入。使用 (b) 的结果.$n_2 \in T_pS^3$. 而 $Tr(S_{n_2})=0$. □

命题 6.9 提示做完了。实际上这个题目在说明这样的事情: 选定了法向量 η 后, 第二基本形式就与其他法向量无关了。

命题 6.10 选定 M 到 $\bar{M}$ 的等距嵌入, 并且给定一个 η 作为向量场。我们可以给出一个 *(1,1)* 张量 $S_\eta : TM \to TM$. 则对于所有的 $V \in \Gamma(M)$,$\nabla_V S_\eta$ 仍然是对称的。

证明 因为度量的联络是 0. 所以可以考虑张量 $S_\eta(X,Y)=\langle S_\eta X, Y\rangle$.
按照定义计算即可。或者看书上提示。 □

命题 6.11 题目见书。

证明 (a) 根据定义计算即可。$\Delta f = \mathrm{divgrad} f$.
(b) 相减，依照联络的无挠性可得结果。
(c) 选取正交基 $E_1,\dots,E_n,E_{n+1}=\dfrac{\mathrm{grad} f}{|\mathrm{grad} f|}$. 用定义计算平均曲率:

$$nH = \mathrm{trace} S_{E_{i+1}} = \sum_i \langle S_{E_{n+1}}(E_i), E_i\rangle \tag{6.3}$$
$$= \sum_i \langle B(E_i,E_i), E_{n+1}\rangle \tag{6.4}$$
$$= \sum_i \langle \nabla_{E_i} E_i, E_{n+1}\rangle \tag{6.5}$$
$$= -\sum_i \langle E_i, \nabla_{E_i} E_{n+1}\rangle \tag{6.6}$$
$$= -\mathrm{div} E_{n+1} \tag{6.7}$$

(d) 总结性话语。 □

命题 6.12 (Killing 场的奇异点) 设 X 是 *Killing* 场。N 是 X 的奇异点集合。
(a) 设 $p \in N$,V 是 p 的正规邻域。证明连接奇异点 p,q 的测地线 $\gamma \subset N$.
(b) 若 $p \in N$, 则存在 p 的邻域 V 使得 $V \cap N$ 是 M 的子流形。
(c)N_k 作为 N 连通分支的余维数是偶数。

证明 回忆 Killing 方程:

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\langle \nabla_Z X, Y\rangle \tag{6.8}$$

(a)X 是沿着测地线的 Jacobi 场。注意到 X 生成的单参数变换群是等距同构, 从而 X 生成的 φ_t 把 γ 映射为 γ。于是在 γ 上 X 总是 0.

(b) 若 p 是孤立点, 则命题直接成立。若不然, 设 q_1 是一个奇异点。于是连接 p,q_1 的测地线在 N 中。若 $\gamma = N\cap V$, 则命题成立。若不然, 则存在 q_2 使得 q_2 是 X 的零点。设 γ_2 是连接 p,q_2 的测地线。

设 Q 是由 $\exp^{-1}(q_1)$ 和 $\exp^{-1}(q_2)$ 生成的 T_pM 的子空间。设 $v' = \exp^{-1}(V).Q$ 的维数是 2 维。考虑 $N_2 = \exp(Q \cap V')$. 我们断言 $N_2 \subset V \cap N$.

考虑 X 生成的单参数变换群 $X_t : M \to M$. 在 $Q \subset T_P M$ 上,$dX_t|_Q = \mathrm{id}$. 从而, 任取 $v \in Q$, 有 $X_t(\exp_p(sv)) = \exp_p(sv)$.(一组基上是恒同。) 因此 X 在 N_2 上为 0.

这样对维数做归纳即可。

(c) 设 E_p 是 N_k 在 p 处的法空间,V 是 p 处的正规坐标。定义 $(N_k)^\perp = \exp_p(E_p \cap \exp^{-1} V)$。于是我们局部上给出了一个 N_k 的垂直子流形。

考虑到 N_k 上 X 总为 0, 因此 $X_t : M \to M$ 限制在 N_k 上为 0,$dX_t|_{T_p N_k} = \mathrm{id}$. 作为等距映射, 我们有 $dX_t(E_p) \subset E_p$.

因此 X 作为向量场与 $(N_k)^\perp$ 相切。另外, 在 $(N_k)^\perp$ 上 $X \neq 0$. 从而我们给出了 N_k 上测地球的一个处处不为 0 的向量场。因此这个测地球面维数必须是奇数, 而 $(N_k)^\perp$ 的维数就必须是偶数。 □

7 第七章: 完备黎曼流形与 Hopf-Rinow Hadamard 定理

备注：本节没有写计算题的答案。

命题 7.1 *设 M, N 是黎曼流形,$i : M \subset N$ 是等距浸入。存在这样的例子:$d_M > d_N$ 严格成立。*

证明 根据经典的 8 字形浸入即可构造。 □

命题 7.2 *设 $\tilde{M}$ 是 M 的覆叠空间。显然可以用拉回给出 $\tilde{M}$ 上度量。证明:$\tilde{M}$ 是完备的当且仅当 M 是完备的。*

证明 拉回度量为:

$$\pi^* g \tag{7.1}$$

因为是局部等距，外加覆叠的曲线提升性质, 显然两者的完备性是等价的。 □

命题 7.3 *舍弃掉覆叠空间给出反例。*

证明 $(0, 1)$ 单射到 S^1 上。显然 $(0, 1)$ 不是完备的。 □

命题 7.4 *考虑 $M \to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 是泛覆叠映射。给定 M 上的覆叠度量, 说明 M 是不可延拓的, 但是是不完备的。*

证明 根据命题 7.2,M 是不完备的黎曼流形。若存在 M' 使得:$M \subset M'$ 且是等距. 设 $p' \in M'$ 是 M 边界上的点, 设 $W' \subset M'$ 是 p' 的一个凸邻域。

我们断言 $W' - \{p'\}$ 全部在 M 中。从而 $\pi(W' - \{p'\})$ 是包含 $(0, 0)$ 的邻域 U. 考虑 U 中环绕 $(0, 0)$ 的圈. 显而易见这个圈可以被提升。然而 M 是万有覆叠, 这样的提升是做不到的。

我们现在证明上述断言。因为 p' 是 M 的边界点, 于是 W' 中必定含有 M 的点 x. 对于 $W' \cap M$ 的任一点 y, 根据 M 的性质, 在 M 上且从 y 出发的测地线中, 只有一条使得其不能延申到无穷。在 M' 上考虑 p' 和 x 的测地线 γ. 根据 M 是开集, 则 γ 是从 x 出发的测地线。而 γ 不能延申到无穷, 因此 γ 正是 x 所对应的那条测地线。

现在 W' 的点 (不包含 q') 分为测地线上的和非测地线上的。如果 y 不在测地线上, 则 y 与 x 的测地线 (M') 上不会经过 q'. 因而这条测地线一定在 M 上。若 y 在测地线上, 则根据 M 自身测地线的性质可知,y 也在 M 上。

所以 $W' - \{p\} \subset M$. □

命题 7.5 *定义发散曲线 $\alpha : [0, +\infty) \to M$ 是在非紧的黎曼流形 M 上的可微曲线, 使得对于任何紧集 $K \subset M$, 都存在 $t_0 \in (0, +\infty)$ 使得 $\alpha(t) \notin K$ 对于所有 $t > t_0$ 都成立。*

定义发散曲线的长度为积分:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t |\alpha'(t)| dt \tag{7.2}$$

则 M 完备等价于任何一条发散曲线的长度都是无界的。

证明 假设 M 完备, 且存在发散曲线 α_0 的长度有界。则 $\alpha(0,\infty)$ 的闭包是 M 中的有界闭集。因而根据 Hopf-Rinow 定理可知是 M 的紧集。然而 α 并不能超出该紧集, 矛盾！因此不存在这样的发散曲线。

反之, 假设任意发散曲线的长度都无界且 M 不完备。设 $p \in M$ 且存在 v 使得 $\exp_p(tv)$ 只在 $t < t_0$ 上有定义。不失一般性, 设 $|v| = 1$。记这条测地线为 γ, 则:

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_0 - \frac{t_0}{t+1}) \tag{7.3}$$

重参数化后 $\tilde{\gamma}$ 长度不变, 但是定义域变化。因此 $\tilde{\gamma}$ 不是发散曲线，存在 K 作为紧集使得 $\tilde{\gamma} \subset K$.

在 γ 的像上取点列 t_n 使得 $t_n \to t_0$. 于是 $\gamma(t_n)$ 是 K 中的点。K 是紧集, 于是 $\gamma(t_n)$ 有聚点 q. 从而可以定义 $\gamma(t_0) = q$. 这产生了矛盾！因此 M 完备。 □

命题 7.6 *一条测地线 $\gamma : [0, \infty) \to M$ 称为 ray 射线, 若其总是实现 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(s)$ 的距离。设 M 是完备, 非紧的黎曼流形. 则对于任何 $p \in M$，都有从 p 出发的 ray 射线。*

证明 对于 $v \in T_pM$, 定义映射 $S : T_pM \to \mathbb{R}$:

$$S(v) = d(p, \exp_p(v)) - |v| \tag{7.4}$$

则 $S \geq 0$, 且若测地线 $\exp_p(tv)$ 实现距离, 则 $S(tv) = 0$ 对于任何 $0 \leq t \leq 1$ 都成立。

根据连续性,S 是连续映射。因此 $S^{-1}(0)$ 是 T_pM 中的闭集，且是 Star 形的闭集。

因为 M 非紧完备, 所以 M 无界。选取 q_n 使得 $d(p, q_n) \to +\infty$。因此存在 $w_n \in T_pM$ 使得 $\exp_p(w_n) = q_n$. 考虑 $w_n/|w_n| \in T_pM$, 则有一个聚点 w_0. 我们断言 $\exp_p(tw_0)$ 是一条 ray 射线。

我们只用说明 $S(tw_0) = 0$ 总是成立的。这等于说任意 $N > 0$,$S(Nw_0) = 0$ 都成立。然而任意 $N > 0$, 总存在 $n > N'$ 使得 $S(Nw_n/|w_n|) = 0, n > N'$. 根据 S 连续性 $S(Nw_0) = 0$ 也成立。 □

命题 7.7 *设 M 和 $\bar{M}$ 是非紧的黎曼流形且 $f : M \to \bar{M}$ 是微分同胚。假定 $\bar{M}$ 是完备的, 且存在常数 c 使得:*

$$|v| \geq c|(df)_p v| \tag{7.5}$$

则 M 也是完备的。

证明 用 7.5 结果。选取一条发散曲线 $\gamma \subset M$。由微分同胚可知 $f(\gamma)$ 也是发散曲线。 □

命题 7.8 *见书。*

证明 显然 $\bar{M}$ 上不存在闭测地线。于是若 p, q 不同且 $f(p) = f(q)$, 则测地线 γ 连接 p, q 被 f 全部映射为 $f(p)$。这与局部等距矛盾！

考虑 $p, f(p)$。设 $\bar{q} \in \bar{M}$ 和 $\bar{\gamma}$ 是连接 $\bar{q}$ 和 $f(q)$ 的测地线。局部等距说明 $(df)_p$ 是向量空间的同构映射, 因而存在 $v \in T_pM$ 使得 $(df)_p(v) = \dot{\bar{\gamma}}(0)$. 则 $f(\exp_p(v)) = \bar{q}$. □

命题 7.9 *设 M 是完备黎曼流形,X 是 M 的向量场。假设存在 $c > 0$ 使得 $|X(p)| > c$ 恒成立, 则 X 是完备的向量场。*

证明 错题。反转不等号是显然的。 □

命题 7.10 *称一个黎曼流形是齐次的, 若任意 $p, q \in M$ 都有等距同构 $f : M \to M$ 使得 $f(p) = q$. 试证明任何齐次黎曼流形都是完备的。*

证明 用正规坐标系即可。 □