Do Carmo 黎曼几何习题

颜成子游

2024 年 3 月 5 日

目录

1 第一章

2 第二章

1. 设 $c(t)$ 的切向量为 $\dot{c}(t)$。根据平行移动可知:

$$\nabla_{\dot{c}(t)} P_{c,t_0,t} = 0 \tag{1}$$

等距性:

$$s(t) = \|P_{c,t_0,t}\|^2, \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s(t) \equiv s(t_0) \tag{2}$$

保定向:

设 e_i 是 t_0 处的一组单位正交定向基, 则 $P_{c,t_0,t}(e_i)$ 是一组 t 处的单位正交基。这两组基诱导的定向必须连续变化，于是 P 是保定向的映射。

2.

$$\frac{d}{dt} P^{-1}_{c,t_0,t}(Y(c(t)))|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{Y(c(t)) - P_{c,t_0,t}(Y(p))}{t - t_0} = \nabla_X (Y - P_{c,t_0,t}Y)(p) = \nabla_X Y(p) \tag{3}$$

3.∇ 是联络是平凡的。我们需要说明这是黎曼联络。

根据拉回，M 的度量是 f^*g. 设 $f_*X = \bar{X}$。(其他向量场也同理)。从而:

$$X\langle Y, Z\rangle = X\langle f_*Y, f_*Z\rangle = f_*(X)\langle f_*Y, f_*Z\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{4}$$

4.(a) 借鉴上题的思路。设 ∇ 是 M 上的联络, 则 $\nabla_V V = 0$. 于是 $\mathbb{R}^3$ 上的平凡联络 D 满足:

$$D_V V \perp V \tag{5}$$

若上述公式成立, 则 $\nabla_V V = 0$。所以 V 沿着曲线平行移动。

(b)

5. 欧氏空间上平行移动与点无关。因为欧氏空间的联络是平凡的，从而对单位向量 e_i 求联络总是 0.

若不是欧氏空间，则可以举球面 S^2 的例子。从北极点平行移动到南极点，走不同经线得到的结果不同。

6.

7.

8.(a) 略。带入公式:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\} g^{km} \tag{6}$$

即可。

(b) 使用 Christoffel 记号计算平行移动的方程即可。

9.(a) 仿照 Levi-Civita 联络的证明即可。

因为联络和伪黎曼度量是相容的，且联络是无挠的，我们仍然有:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{7}$$

因为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 仍然是非退化的, 所以通过指定 $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ 的值，我们仍然可以给出 ∇ 的唯一性和存在性。

(b) 设洛伦兹度量下的 Levi-Civita 联络是 ∇. 平凡度量下的 Levi-Civita 联络是 D. 我们说明若 $\nabla_X Y = 0$ 与 $D_X Y = 0$ 等价。

对于 ∇ 而言, 带入式 (7), 不难发现 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, 0 \le i, j \le n$. 所以 $\nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}}(Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$ 等价于：

$$X^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j)\frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{8}$$

由于任何联络作用在函数上总是求李导数, 所以上述方程可以直接替换为:

$$X^i(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j)\frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{9}$$

于是 $D_X Y = 0$ 与 $\nabla_X Y = 0$ 等价。