



Note for Homological Algebra

MORSE 理论笔记

EDITED BY

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-04-14 00:28



Contents

1	流形上的非退化光滑函数	3
1.1	Morse 函数	3
1.2	临界值处的伦形	6
1.3	Morse 不等式	6
2	Morse 理论的应用——测地线变分	7
2.1	道路的能量积分	7
2.2	指标定理	7
2.3	道路空间的伦型	7
3	Morse 不等式的解析证明	8
3.1	Witten 形变与 Hodge 定理	8
3.1.1	Witten 形变	8
3.1.2	Hodge 定理	9
3.2	算子在临界点的分析	9
3.3	Morse 不等式的证明	10
3.3.1	一个命题	10
3.3.2	Witten 形变算子	11
3.3.3	D_{Tf} 和 \square_{Tf} 的特征值和特征空间	13
3.3.4	命题的证明	14

这是笔者于 2023 年本科四年级下学期学习 Morse 理论的学习笔记。

我们假定大家拥有基础的微分几何知识和黎曼几何知识。

设 f 是流形 M 上的光滑函数。我们定义: 称一个点 $p \in M$ 是 f 的临界点 (critical point), 若诱导映射 $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} R$ 是 0 映射。

在流形上我们最好用各种各样的局部坐标讨论。设 $(U; x_i, 1 \leq i \leq n)$ 是 p 附近的一个局部坐标系, 则临界点的定义可以写为:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0 \quad (1)$$

此时 $f(p)$ 称为 f 的临界值。

在临界点处 f 的性质有着与非临界值完全不同的性质。Morse 理论则是研究临界点处, M 本身拓扑性质的改变的理论。

流形上的非退化光滑函数

§1.1 Morse 函数

我们先用一个引理说明在非临界点 M 的平凡性质。

Lemma 1.1.1: 非临界点

设 $M^a = \{p \in M | f(p) \leq a\}$ 。若 a 不是临界值, 则 M^a 是带边的光滑流形。

引理的证明留作练习。主要使用到隐函数定理以及带边流形的定义。

Definition 1.1.1: 非退化点

考虑 M 上的函数 f 。若在 f 的临界点 p 处存在一个局部坐标 $(U; x^i)$ 使得矩阵:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (p) \right) \quad (1.1)$$

非奇异, 则称 p 是一个非退化点。

这里需要注意的是, p 的非退化性显然与局部坐标 x^i 无关。因此 p 的非退化性是 f 内蕴的性质。

如果 p 是 f 的临界点, 我们就可以定义在 $T_p M$ 上的双线性函数 f_{**} 。若 $v, w \in T_p M$, 用 \tilde{v} 和 \tilde{w} 表示在 p 处值为 v, w 的向量场。定义:

$$f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}f) \quad (1.2)$$

我们断言:

Lemma 1.1.2

f_{**} 是对称的良定双线性函数。

Proof. 考虑:

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}f) - \tilde{w}_p(\tilde{v}f) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0 \quad (1.3)$$

最后一个等号成立, 是因为 p 是 f 的临界点。

从而 f_{**} 是对称的。因此, $\tilde{v}_p(\tilde{w}f)$ 与 \tilde{v} 的选取无关, $\tilde{w}_p(\tilde{v}f)$ 与 \tilde{w} 的选取无关。

于是 f_{**} 与 \tilde{v}, \tilde{w} 的选取都无关, 因而是良定的双线性函数。 ■

Definition 1.1.2: Hessian, 指数, 零化度

称 f_{**} 为函数 f 在 p 处的 Hessian 双线性函数。

而 f_{**} 的指数定义为满足 f_{**} 限制在上为负定双线性函数的子空间 V 的最大维数。 f_{**} 的零化度

定义为 f_{**} 的零空间 W 的维数, 即子空间 $W = \{v \in V | f_{**}(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ 的维数。

可以验算 f_{**} 在坐标 $(U; x^i)$ 下给出的就是矩阵 1.1. 显然, f 在 p 处非退化等价于 f_{**} 的零化度是 0。 f_{**} 的指数也称为 f 在 p 处的指数。

Lemma 1.1.3: Morse 引理

设 p 是 f 的非退化点, 则存在一个 p 处的局部坐标 $(U; y^i)$ 满足 $y^i(p) = 0, \forall i$ 且:

$$f(q) = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \cdots + (y^n)^2 \quad (1.4)$$

在整个 U 上都成立. 其中 λ 是 f 在 p 处的指数。

Proof. 我们首先说明如果 f 拥有这样的表达式, 则指数为 λ .

对于坐标 (z^i) , 若:

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \cdots - (z^\lambda(q))^2 + \cdots + (z^n(q))^2$$

则容易求出 f_{**} 在该坐标下的矩阵为 $\text{diag}(-2, \dots, -2, 2, \dots, 2)$. 其中 -2 一共有 λ 个。

因此存在一个 λ 维的子空间使得 f_{**} 是负定的, 存在一个 $n - \lambda$ 维的子空间 V 使得 f_{**} 是正定的。如果 p 处的指数大于 λ , 则对应的子空间与 V 相交不为空。但这是不可能的, 因此 λ 是 f 在 p 处的指数。

接下来我们说明 (y^i) 坐标存在。不妨设 p 是 \mathbb{R}^n 的原点且 $f(p) = f(0) = 0$. 从而有:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt \quad (1.5)$$

令 $g_j = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) dt$, 则 $f = \sum_j x_j g_j$ 在 0 处的一个邻域上成立。

因为 0 是 f 的临界点, 从而 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$. 这意味着 $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. 因而对 g_j 作上述 f 同样的分解:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

不妨假设 h_{ij} 关于 i, j 对称。通过计算, 不难验证矩阵 $(h_{ij}(0))$ 等于:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) \right)$$

因此 $h_{ij}(0)$ 是非奇异的矩阵。仿照模仿有理标准型的构造, 可以证明存在一组坐标 (y^i) 使得 f 呈现为引理中的形式。具体的构造办法详见 Milnor 原书。(附录) ■

Morse 引理的好处在于我们可以用指数唯一确定 f 在 p 处的一个标准形式。根据这个引理, 可以得知 f 在非退化点 p 的一个邻域内只有 p 一个临界点。

Corollary 1.1.1

非退化临界点是离散的。特别的, 紧致流形 M 上的非退化临界点只有有限个。

Definition 1.1.3: Morse 函数

若 $f \in \mathcal{O}(M)$ 且只有非退化的临界点, 则称该函数为 Morse 函数。

Morse 函数的好处是显而易见的。然而存在性则是一个问题。本节我们剩下的内容为下面的定理。

Theorem 1.1.1

任何流形 M 上都存在一个可微的函数 f , 满足不存在退化临界点, 且 M^a 对于任何 $a \in \mathbb{R}$ 都是紧致的。

根据 Whitney 嵌入定理, 任何流形都可以嵌入到维数足够高的欧氏空间。因而我们考虑 M 是 \mathbb{R}^n 的 k 维嵌入子流形 (之后统称为 “子流形”)。

定义 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 为:

$$N = \{(q, v) : q \in M, v \in T_q \mathbb{R}^n, v \perp M\}$$

即 N 是 M 在 \mathbb{R}^n 中的法丛。不难验证 N 是 n 维的流形, 且光滑的嵌入进 \mathbb{R}^{2n} 中。定义 $E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为映射 $(q, v) \mapsto q + v$ 。

Definition 1.1.4: 焦点

称 $e \in \mathbb{R}^n$ 是 (M, q) 重数为 μ 的焦点, 若 $e = E(q, v), (q, v) \in N$ 且 E 在 (q, v) 处的 Jacobian 矩阵有零化度 μ 。

根据 Sard 定理, 两个微分流形之间的可微映射的临界点是很有限制的——临界值只有 0 测度。显然焦点是 E 的临界值, 因而:

Corollary 1.1.2

对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n, x$ 都不是 M 的焦点。

现在固定 $p \in \mathbb{R}^n$. 定义函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$L_p = f : q \mapsto \|q - p\|^2 \quad (1.6)$$

在坐标 $(U; u^1, \dots, u^k)$ 下, f 的表达式为:

$$f(u^1, \dots, u^k) = \|\vec{x}(u^1, \dots, u^k) - \vec{p}\|^2 = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{p} + \vec{p}\vec{p}$$

因此可以计算:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

因此 q 是 f 的临界点, 当且仅当 $q - p$ 垂直与 M 垂直。

考虑 f 的二阶导数。我们有:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} u^j \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

从而有

Lemma 1.1.4

q 是 $f = L_p$ 的退化临界点等价于 p 是 (M, q) 的焦点。根据推论 1.1.2, 总存在这样的 L_p 使得该函数不存在退化的临界点。另外, 若 q 是 L_p 的退化临界点, 则该点的零化度是 p 的重数。

§1.2 临界值处的伦形

§1.3 Morse 不等式

Morse 理论的应用——测地线变分

§2.1 道路的能量积分

§2.2 指标定理

§2.3 道路空间的伦型

Morse 不等式的解析证明

本节我们讨论 Witten 在上个世纪 80 年代关于 Morse 不等式给出的解析证明。

§3.1 Witten 形变与 Hodge 定理

设 M 是紧流形. 对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 令 β_i 表示 M 的第 i 个 Betti 数 $\dim(H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R}))$ 。下面的 De Rham 定理说明我们可以用 β_i 表示 Morse 不等式。

Theorem 3.1.1: De Rham 定理

光滑流形 M 的 De Rham 上同调和 \mathbb{R} 奇异上同调存在自然的同构。

该定理的思路是通过微分形式 ω 在复形 Δ^k 上的积分, 给出 \mathbb{R} 系数奇异上同调类, 在说明这是一个同构。具体的证明, 参见 82。

这个定理表明我们可以解析地研究流形的拓扑。其关键是研究 $\Omega^k(M)$ 在不同复形下的性质。

§3.1.1 Witten 形变

给定 M 上的 Morse 函数 f , 对外微分算子 d 做出如下的形变:

$$d_{Tf} = e^{-Tf} d e^{Tf} \quad (3.1)$$

考虑 $d^2 = 0$, 于是:

$$(d_{Tf})^2 = e^{-Tf} d^2 e^{Tf} = 0$$

因此一般的 de Rham 复形可以变形为 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$. 从而我们可以定义起上同调群:

$$H_{Tf, dR}^*(M, \mathbb{R}) = \frac{\ker(d_{Tf})}{\text{Im}(d_{Tf})}$$

其 \mathbb{Z} 分次结构为:

$$H_{Tf, dR}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^n H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^n \frac{\ker(d_{Tf}|_{\Omega^i(M)})}{\text{Im}(d_{Tf})|_{\Omega^{i-1}(M)}}$$

之所以考虑这样的形变, 是因为我们发现形变后得到的上同调群与原来的上同调群维数一致:

Proposition 3.1.1

对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 有:

$$\dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R}))$$

Proof. 对于形式 α , 定义映射 $i : \alpha \mapsto e^{-Tf}\alpha$. 若 α 是闭形式, 则 $i(\alpha)$ 满足 $d_{Tf}(i(\alpha)) = 0$. 另外, 若 $\alpha = d\beta$, 则 $d_{Tf}(e^{-Tf}\beta) = e^{-Tf}\alpha$. 从而 $d_{Tf}(i(\beta)) = i(\alpha)$.

因此 i 诱导了上同调的映射 $i^* : \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R}))$. 显然这是一个同构。 ■

§3.1.2 Hodge 定理

设 g^{TM} 是 M 的一个黎曼度量。我们给出 DeRham 复形上的 Hodge 定理。

Theorem 3.1.2: Hodge

对于任意的 $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$, 形式的有:

$$\langle d_{Tf}\alpha, \beta \rangle = \langle e^{-Tf}de^{Tf}\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, e^{Tf}d^*e^{-Tf}\beta \rangle$$

于是 d_{Tf} 的形式伴随可写为:

$$d_{Tf}^* = e^{Tf}d^*e^{-Tf} \quad (3.2)$$

仿照 Hodge 分解, 定义:

$$D_{Tf} = d_{Tf} + d_{Tf}^* \quad (3.3)$$

$$\square_{Tf} = D_{Tf}^2 = d_{Tf}d_{Tf}^* + d_{Tf}^*d_{Tf} \quad (3.4)$$

从而可知 \square_{Tf} 保持 $\Omega^i(M)$ 的次数。因为这样的操作并没有改变 Hodge 定理的关键部分, 所以我们可以给出形变后的 Hodge 定理:

$$\dim(\ker(\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)})) = \dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R})) \quad (3.5)$$

上式说明, 为了考量 β_i 的信息, 可以研究 \square_{Tf} 的行为。因为 T 值本身不改变上述结果, 从而可以考虑 T 值趋近于无穷的情况。

§3.2 算子在临界点的分析

不失一般性, 假设 f 在临界点 $x \in M$ 的开邻域 U_x 上有坐标 (y^i) 满足 Morse 引理, 并且:

$$g^{TM} = (dy^1)^2 + \cdots + (dy^n)^2 \quad (3.6)$$

Proposition 3.2.1

在上述假设下, 可以计算 d_{Tf} 和 d_{Tf}^* .

$$d_{Tf} = d + Tdf \wedge, \quad d_{Tf}^* = d^* + Ti_{(df)^*} \quad (3.7)$$

其中 $(df)^*$ 是 df 作为微分形式在度量 g^{TM} 的对偶。

Proof. 设 $\omega \in \Omega^*(M)$. 则:

$$d_{Tf}(\omega) = e^{-Tf}(e^{Tf}d\omega + Te^{Tf}df \wedge \omega) = d\omega + Tdf \wedge \omega \quad (3.8)$$

由于 $df \wedge$ 的形式伴随是 $i_{(df)^*}$, 于是 d_{Tf}^* 的表达式如上。 ■

于是可以给出:

$$D_{Tf} = D + T\hat{c}(df), \hat{c}(df) = df \wedge + i_{(df)*} \text{ 是 } df \text{ 的 Dirac 算子} \quad (3.9)$$

根据 Morse 引理, 在每个 U_x 上都有:

$$df(x) = -y^1 dy^1 - \cdots - y^{n_f(x)} dy^{n_f(x)} + y^{n_f(x)+1} dy^{n_f(x)+1} + \cdots + y^n dy^n \quad (3.10)$$

其中 $n_f(x)$ 是 f 在 p 处的指数。设 $e_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ 是 TU_x 的定向标准正交基础, 则在 U_x 上, 有:

$$\begin{aligned} \square_{Tf} &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + T \sum_{i=1}^{n_f(x)} (1 - c(e_i)\hat{c}(e_i)) + T \sum_{i=n_f(x)+1}^n (1 + c(e_i)\hat{c}(e_i)) \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + 2T \left(\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

不难发现算子:

$$\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i}$$

非负, 且具有由下述形式生成的一维核空间:

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)}$$

因此总结如下:

Proposition 3.2.2

对于任意 $T > 0$, 算子 \square_{Tf} 作用在 $\Gamma(\wedge^*(E_n^*))$ 上非负, 其由下述形式生成:

$$\exp\left(\frac{-T\|y\|^2}{2}\right) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)} \quad (3.12)$$

进而对于某个固定的常数 $C > 0$, 该算子所有的非零特征值大于 CT .

§3.3 Morse 不等式的证明

§3.3.1 一个命题

我们先不加证明的指出下面命题, 并借此证明 Morse 不等式。

Proposition 3.3.1

对于任意 $c > 0$, 存在 $T_0 > 0$ 使得当 $T \geq T_0$ 时, $\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 的落在区间 $[0, c]$ 的特征值的个数 (计重数) 为 $m_i, 0 \leq i \leq n$.

对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 设:

$$F_{Tf,i}^{[0,c]} \subset \Omega^i(M)$$

是 $\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 在 $[0, c]$ 中的特征值对应的特征向量所生成的向量空间。根据上述命题 3.3.1, 这个向量空间是 m_i 维的。

通过简单的计算, 可以注意到下面的事实:

$$[d_{Tf}, \square_{Tf}] = [d_{Tf}^*, \square_{Tf}] = 0$$

所以 d_{Tf} 和 d_{Tf}^* 对于 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 而言都是封闭的。(d_{Tf} 把 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 映射到 $F_{Tf,i+1}^{[0,c]}$, d_{Tf}^* 把 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 映射到 $F_{Tf,i-1}^{[0,c]}$) 因此我们构造了 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$ 有限维的子复形:

$$(F_{Tf,n}^{[0,c]}, d_{Tf}) : 0 \longrightarrow F_{Tf,0}^{[0,c]} \longrightarrow F_{Tf,1}^{[0,c]} \longrightarrow \dots F_{Tf,n}^{[0,c]} \longrightarrow 0 \quad (3.13)$$

将 $\Omega^*(M)$ 的 Hodge 分解限制在该有限维复形上, 可以给出:

$$\beta_{Tf,i}^{[0,c]} := \dim\left(\frac{\ker(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})}{\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-1}^{[0,c]}})}\right) \quad (3.14)$$

就等于 $\dim(\ker(\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}))$, 从而等于 β_i . 由于 $\beta_{Tf,i}^{[0,c]}$ 总是小于 m_i 的, 因此弱 Morse 不等式证毕。

下面我们说明强 Morse 不等式。具体写出 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 的分解:

$$\begin{aligned} \dim(F_{Tf,n}^{[0,c]}) &= \dim(\ker(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) \\ &= \dim\left(\frac{\ker(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})}{\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-1}^{[0,c]}})}\right) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-1}^{[0,c]}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) \end{aligned} \quad (3.15)$$

结合上述分解和命题 3.3.1, 可以得到:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^i (-1)^j m_{i-j} \\ &= \sum_{j=0}^i (\beta_{i-j} + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-j-1}^{[0,c]}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-j}^{[0,c]}}))) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \beta_{i-j} + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) \end{aligned} \quad (3.16)$$

可见这就是强 Morse 不等式。若 $i = n$, 可知上式的最右边一项为 0, 于是给出取等条件。

§3.3.2 Witten 形变算子

解析证明的灵魂是命题 3.3.1. 为了说明这个命题, 我们需要用到不少解析的技巧。

首先做两个记号. 对于 $T > 0$ 和 f 的临界点 $x \in M$, 定义

$$\begin{aligned} \alpha_{x,T} &= \int_{U_x} \gamma(|y|^2) \exp(-T|y|^2) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ \rho_{x,T} &= \frac{\gamma(|y|)}{\sqrt{\alpha_{x,T}}} \exp\left(\frac{-T|y|^2}{2}\right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n_f(x)} \end{aligned}$$

其中 γ 是选定的一个光滑函数 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 满足 $\gamma(x) = 1, |x| \leq a, \gamma(x) = 0, |x| \geq 2a$. 这样的光滑函数的存在性是基础的。

于是在上述记号下, $\rho_{x,T}$ 是在 Hodge 范数下的单位向量, 且拥有在 U_x 里面的紧支撑集。

固定 T , 从而每个临界点 x 处都存在一个 $\rho_{x,T}$. 用 E_T 表示这些 $\rho_{x,T}$ 生成的有限维向量空间。(因为 x 的个数是有限的) 这个向量空间是 Sobolev 空间 $\mathbb{H}^0(M)$ 的子空间。其中 \mathbb{H}^0 是 $\Omega^*(M)$ 结合 Hodge 内积给出的 Hilbert 空间。

因此可以考虑正交补 E_T^\perp .

$$\mathbb{H}^0(M) = E_T \oplus E_T^\perp$$

再设 p_T 和 p_T^\perp 是对应的正交投影。

Definition 3.3.1: Witten 形变算子

定义如下四个算子。

$$D_{T,1} := p_T D_{Tf} p_T, D_{T,2} := p_T D_{Tf} p_T^\perp, D_{T,3} := p_T^\perp D_{Tf} p_T, D_{T,4} := p_T^\perp D_{Tf} p_T^\perp \quad (3.17)$$

这四个算子有非常好的估计式:

Proposition 3.3.2

对于任意 $T > 0, D_{T,1} = 0$.

Proof. 设 f 的临界点集合为 $\text{zero}(df)$. 则对于任何 $s \in \mathbb{H}^0(M)$:

$$p_T s = \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}$$

我们代入 D_{Tf} 计算:

$$D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}) \in \Omega^{n_f(x)-1}(M) \oplus \Omega^{n_f(x)+1}(M) \quad (3.18)$$

因为上述结果在 U_x 外全为 0, 因此 $D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T})$ 与 $\rho_{y,T}$ 在 $x \neq y$ 的时候做内积显然为 0. 其次, 若 $x \neq y$, 则根据形式的阶数不相同, 也得到内积为 0. 综上:

$$p_T D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}) = 0 \quad (3.19)$$

■

Proposition 3.3.3

存在常数 $T_1 > 0$, 使得对于任意的 $s \in (E_T)^\perp \cap \mathbb{H}^1(M), s' \in E_T$ 和 $T \geq T_1$, 有:

$$\|D_{T,2}s\|_0 \leq \frac{\|s\|_0}{T}, \|D_{T,3}s'\|_0 \leq \frac{\|s'\|_0}{T} \quad (3.20)$$

Proof. 容易验证 D_3 是 D_2 的形式伴随。

$$\begin{aligned} \langle D_2 s, s' \rangle &= \langle p_T D_{Tf} p_T^\perp s, s' \rangle \\ &= \langle p_T^\perp s, D_{Tf} p_T s' \rangle \\ &= \langle s, p_T^\perp D_{Tf} p_T s' \rangle = \langle s, D_{T,3} s' \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

因此只需要验证第一个不等式。直接计算有

$$D_{T,2}s = \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle \rho_{x,T}, D_{Tf}s \rangle \rho_{x,T} = \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle D_{Tf}\rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T} = \sum_{x \in \text{zero}(df)} \int_{U_x} D_{Tf}\rho_{x,t} \wedge (*s) dv_p \rho_{x,T} \quad (3.22)$$

根据 $\rho_{x,T}$ 的构造, 我们不难发现上述积分只在 $|y| \in [a, 2a]$ 的区间上有意义. ($\ker D_{Tf} = \ker D_{Tf}^2$.) 而此时上述积分的值就取决于 $\|s\|_0$ 和 T . 具体可以描述为:

存在 $T_0 > 0, C_1 > 0, C_2 > 0$, 使得:

$$\|D_{T,2}s\|_0 \leq C_1 T^{n/2} \exp(-C_2 T) \|s\|_0 \quad (3.23)$$

于是命题得证。

■

Proposition 3.3.4

存在常数 $T_2 > 0, C > 0$ 使得对于任何的 $s \in E_T^\perp \cap \mathbb{H}^1(M)$ 和 $T \geq T_2$, 有:

$$\|D_{Tf}s\|_0 \geq C_2\sqrt{T}\|s\|_0 \quad (3.24)$$

Proof. 参照参考文献 84 页。 ■

§3.3.3 D_{Tf} 和 \square_{Tf} 的特征值和特征空间

现在对于任意的正整数 $c > 0$, 设 $E_T(c)$ 表示 D_{Tf} 在 $[-c, c]$ 中的特征值所对应的特征空间的直和. 我们需要用到 $E_T(c)$ 下面的两个性质。

Proposition 3.3.5

$E_T(c)$ 是 $\mathbb{H}^0(M)$ 有限维的子空间。

Proof. By 参考文献 (spin geometry)196 页, 只需要验证 D_{Tf} 是自伴的椭圆算子。而形变本身不改变 D 的椭圆性和自伴性。 ■

Proposition 3.3.6

$E_T(c)$ 同时也是 \square_{Tf} 在 $[0, c^2]$ 的中的特征值所对应的特征空间的直和。

Proof. 设 \square_{Tf} 的特征值为 c^2 的特征空间为 E_c . 将 D_{Tf} 视作有限维空间 E_c 上的算子, 则 $D_{Tf}^2 = c^2 \text{Id}$. 从而 D_{Tf} 在 E_c 可以对角化, 且有特征值 $-c$ 和 c . 因此 E_c 是 D_{Tf} 以 $-c$ 和 c 为特征值的特征空间的直和。从而命题得证。 ■

记 $P_T(c)$ 是 $\mathbb{H}^0(M)$ 到 $E_T(c)$ 的正交投影算子。下面的引理给出了 E_T 和 $E_T(c)$ 的估计:

Lemma 3.3.1

存在常数 $C > 0, T_0 > 0$, 使得对于任何的 $T \geq T_0$, 和任意的 $\sigma \in E_T$, 有:

$$\|P_T(c)\sigma - \sigma\|_0 \leq \frac{C}{T}\|\sigma\|_0 \quad (3.25)$$

设 $T \rightarrow +\infty$, 此时可以看出 $P_T(c)\sigma$ 和 σ 相差很小。此时可以近似的研究 E_T 和 $E_T(c)$ 的关系。

Proof. 令 $\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| = c\}$ 是逆时针定向的圆周。对于任意的 $\lambda \in \delta, T \geq T_1 + T_2$ 和 $s \in \mathbb{H}^1(M)$, 有:

$$\begin{aligned} & \|(\lambda - D_{Tf})s_0\|_0 \\ & \geq \frac{1}{2}\|\lambda p_T s - D_{T,2}p_T^\perp s\|_0 + \frac{1}{2}\|\lambda p_T^\perp s - D_{T,3}p_T s - D_{T,4}p_T^\perp s\|_0 \\ & \geq \frac{1}{2}((c - \frac{1}{T})\|p_T s\|_0 + (C_2\sqrt{T} - c - \frac{1}{T})\|p_T^\perp s\|_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中第一个不等式利用了正交分解, 第二个不等式利用上一节的三个命题。

上述估计式说明算子 $\lambda - D_{Tf}$ 具有一定的下界——取 T 足够大。即存在 $T_3 \geq T_1 + T_2$ 和 $C > 0$ 使得对于任意的 $T \geq T_3$ 和 $s \in \mathbb{H}^1(M)$ 有:

$$\|(\lambda - D_{Tf})s\|_0 \geq C\|s\|_0 \quad (3.27)$$

因此对于任意的 $T > T_3, \lambda \in \delta$, 有:

$$\lambda - D_{Tf} : \mathbb{H}^1(M) \rightarrow \mathbb{H}^0(M) \quad (3.28)$$

可逆。

从而预解式 $(\lambda - D_{Tf})^{-1}$ 良定。依据算子理论的谱定理: 参考文献。

$$P_T(c)\sigma - \sigma = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\delta} ((\lambda - D_{Tf})^{-1} - \lambda^{-1})\sigma d\lambda \quad (3.29)$$

另外我们也有:

$$((\lambda - D_{Tf})^{-1} - \lambda^{-1})\sigma = \lambda^{-1}(\lambda - D_{Tf})^{-1}D_{T,3}\sigma \quad (3.30)$$

上述式子只需要利用 $D_{T,1} = 0$ 即可。同时, 对于任意的 $T \geq T_3, \sigma \in E_T$, 有:

$$\|(\lambda - D_{Tf})^{-1}D_{T,3}\sigma\|_0 \leq C^{-1}\|D_{T,3}\sigma\|_0 \leq \frac{1}{CT}\|\sigma\|_0 \quad (3.31)$$

■

§3.3.4 命题的证明

现在我们准备好了所有的内容, 以证明命题3.3.1。

考虑引理3.3.1作用在所有的 $\rho_{x,T}$ 上。因为这样的 $\rho_{x,T}$ 是有限个数的, 从而存在足够大 T 使得 $P_T(c)\rho_{x,T}$ 线性无关。(用范数估计)

Proposition 3.3.7

在 T 足够大的时候, 有:

$$\dim E_T(c) = \dim E_T = \sum_{i=0}^n m_i \quad (3.32)$$

并且 $E_T(c)$ 由 $P_T(c)\rho_{x,T}$ 生成。

Proof. 如上所言, 在 T 足够大时候, $P_T(c)\rho_{x,T}$ 线性无关。而这样的 $\rho_{x,T}$ 有 $\sum_{i=0}^n m_i$ 个, 因此总有:

$$\dim E_T(c) \geq \dim E_T = \sum_{i=0}^n m_i \quad (3.33)$$

假设存在一个非零的形式 $y \in E_T(c)$ 不由上述 $\{P_T(c)\rho_{x,T}\}$ 生成, 且 y 与它们都正交:

$$\langle y, P_T(c)\rho_{x,T} \rangle_{\mathbb{H}^0(M)} = 0, \forall x \in \text{zero}(df)$$

显然对 $p_T^\perp y$ 进行估计是一个好的选择。为此我们先计算 $p_T y$:

$$\begin{aligned} p_T s &= \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle y, \rho_{x,T} \rangle \rho_{x,T} \\ &= \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle y, \rho_{x,T} \rangle \rho_{x,T} - \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle y, P_T(c)\rho_{x,T} \rangle P_T(c)\rho_{x,T} \\ &= \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle y, \rho_{x,T} \rangle (\rho_{x,T} - P_T(c)\rho_{x,T}) + \sum_{x \in \text{zero}(df)} \langle y, \rho_{x,T} - P_T(c)\rho_{x,T} \rangle P_T(c)\rho_{x,T} \end{aligned} \quad (3.34)$$

从而不难估计出:

$$\|p_T y\|_0 \leq \frac{C_3}{T} \|y\|_0 \quad (3.35)$$

因此只要 T 足够大, 就有:

$$\|p_T^\perp y\|_0 \geq C_4 \|y\|_0 \quad (3.36)$$

根据命题3.3.4, 我们可以做如下估计:

$$\begin{aligned} CC_4 \sqrt{T} \|y\|_0 &\leq C \sqrt{T} \|p_T^\perp y\|_0 \\ &\leq \|D_{Tf} p_T^\perp y\|_0 \\ &= \|D_{Tf} y - D_{Tf} p_T y\|_0 \\ &\leq \|D_{Tf} y\|_0 + \|D_{Tf} p_T y\|_0 \\ &\leq \|D_{Tf} y\|_0 + \frac{1}{T} \|y\|_0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

于是:

$$\|D_{Tf} y\|_0 \geq CC_4 \sqrt{T} \|y\|_0 - \frac{1}{T} \|y\|_0 \quad (3.38)$$

只要 T 充分大, 右边的表达式蕴含 $D_{Tf} y$ 的范数也充分大。但这是矛盾的! 因为 $\|D_{Tf} y\|$ 的范数至多是 $|c|$ 倍的 $\|y\|_0$. ■

记 Q_i 是 $\mathbb{H}^0(M)$ 到 $\Omega^i(M)$ 的正交投影算子。

Proposition 3.3.8

在 T 充分大时, 有 $\dim(Q_i E_T(c)) = m_i$.

Proof. 设 $s \in E_T(c)$ 且是特征值为 μ 的特征向量。因而 $\square_{Tf} s = D_{Tf}^2 s = \mu^2 s$. 注意到 \square_{Tf} 是 $\mathbb{H}^0(M)$ 上保 \mathbb{Z} 分次结构的算子, 因此 Q_i 和 \square_{Tf} 交换:

$$\square_{Tf} Q_i s = Q_i \square_{Tf} s = \mu^2 Q_i s \quad (3.39)$$

从而 $Q_i E_T(c)$ 是 \square_{Tf} 的特征空间直和的子空间, 且这样的特征空间对应的特征值小于 \sqrt{c} .

另一方面, 根据 Hodge 定理, 紧自伴算子 \square_{Tf} 的特征向量给出了 $\mathbb{H}^0(M)$ 的一组正交基。因此 \square_{Tf} 的以小于 \sqrt{c} 的特征值对应的特征空间的直和正好是 $E_T(c)$ 。

根据 $Q_i E_T(c)$ 互不相交, 我们有:

$$\bigoplus_{i=0}^n Q_i E_T(c) \subset E_T(c), \quad \sum_{i=0}^n \dim Q_i E_T(c) \leq \dim E_T(c) \quad (3.40)$$

另一方面, 我们考虑 $\{Q_i P_T(c) \rho_{x,T} : x \in \text{zero}(df)\}$ 。注意到 $\rho_{x,T}$ 是 $n_f(x)$ 次的形式, 且结合引理3.3.1:

$$\|Q_{n_f(x)} P_T(c) \rho_{x,T} - \rho_{x,T}\|_0 \leq \frac{C_1}{T} \quad (3.41)$$

于是当 T 足够大的时候, $Q_{n_f(x)} P_T(c) \rho_{x,T}$ 互相线性无关。这意味着:

$$\dim(Q_i E_T(c)) \geq m_i \quad (3.42)$$

结合式3.42和3.40可知命题成立。 ■

回忆命题3.3.1, 我们需要说明 \square_{Tf} 在 $[0, c]$ 上的特征值个数在 $T \geq T_0$ 时等于 m_i , 其中 $0 \leq i \leq n$. 不妨将 c 改为 c^2 , 从而我们可以直接使用上面所有命题的记号。

因为 T 充分大的时候有 $Q_i E_T(c)$ 的维数为 m_i . 我们只需要证明 T 充分大的时候 \square_{Tf} 在 $\Omega^i(M)$ 上且特征值小于 c^2 的特征空间直和就是 $Q_i E_T(c)$.

因为 \square_{Tf} 保 \mathbb{Z} 分次, 所以上面的命题等价于 T 充分大时, \square_{Tf} 在 $\mathbb{H}^0(M)$ 上且特征值小于 c^2 的特征空间直和就是 $E_T(c)$. 这一点在命题3.3.8中已经使用。

因此命题3.3.1得证, 随即 Morse 不等式得证。