Note for Homological Algebra

Morse 理论笔记

Edited by

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-04-08 12:03

Contents

这是笔者于 2023 年本科四年级下学期学习 Morse 理论的学习笔记。

我们假定大家拥有基础的微分几何知识和黎曼几何知识。

设 f 是流形 M 上的光滑函数。我们定义: 称一个点 $p \in M$ 是 f 的临界点 (critical point), 若诱导映射 $f_* : T_pM \to T_{f(p)}R$ 是 0 映射。

在流形上我们最好用各种各样的局部坐标讨论。设 $(U; x_i, 1 \leq i \leq n)$ 是 p 附近的一个局部坐标系, 则临界点的定义可以写为:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0 \tag{1}$$

此时 $f(p)$ 称为 f 的临界值。

在临界点处 f 的性质有着与非临界值完全不同的性质。Morse 理论则是研究临界点处,M 本身拓扑性质的改变的理论。

Chapter 1

流形上的非退化光滑函数

§1.1 Morse 函数

我们先用一个引理说明在非临界点 M 的平凡性质。

Lemma 1.1.1: 非临界点

设 $M^a = \{p \in M | f(p) \leq a\}$。若 a 不是临界值, 则 M^a 是带边的光滑流形。

引理的证明留作练习。主要使用到隐函数定理以及带边流形的定义。

Definition 1.1.1: 非退化点

考虑 M 上的函数 f. 若在 f 的临界点 p 处存在一个局部坐标 $(U; x^i)$ 使得矩阵：

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)) \tag{1.1}$$

非奇异，则称 p 是一个非退化点。

这里需要注意的是,p 的非退化性显然与局部坐标 x^i 无关。因此 p 的非退化性是 f 内蕴的性质。

如果 p 是 f 的临界点, 我们就可以定义在 T_pM 上的双线性函数 f_{**}。若 $v, w \in T_pM$, 用 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 表示在 p 处值为 v, w 的向量场。定义:

$$f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w} f) \tag{1.2}$$

我们断言:

Lemma 1.1.2

f_** 是对称的良定双线性函数。

Proof. 考虑:

$$\tilde{v}_p(\tilde{w} f) - \tilde{w}_p(\tilde{v} f) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0 \tag{1.3}$$

最后一个等号成立，是因为 p 是 f 的临界点。

从而 f_{**} 是对称的。因此，$\tilde{v}_p(\tilde{w} f)$ 与 $\tilde{v}$ 的选取无关,$\tilde{w}_p(\tilde{v} f)$ 与 $\tilde{w}$ 的选取无关.

于是 f_{**} 与 $\tilde{v}, \tilde{w}$ 的选取都无关，因而是良定的双线性函数。 ■

Definition 1.1.2: Hessian, 指数, 零化度

称 f_{**} 为函数 f 在 p 处的 Hessian 双线性函数。

而 f_{**} 的指数定义为满足 f_** 限制在上为负定双线性函数的子空间 V 的最大维数。f_{**} 的零化度

定义为 f_{**} 的零空间 W 的维数, 即子空间 $W=\{v\in V|f_{**}(v,w)=0,\forall w\in V\}$ 的维数。

可以验算 f_{**} 在坐标 $(U;x^i)$ 下给出的就是矩阵1.1. 显然,f 在 p 处非退化等价于 f_{**} 的零化度是 0。f_{**} 的指数也称为 f 在 p 处的指数。

Lemma 1.1.3: Morse 引理

设 p 是 f 的非退化点，则存在一个 p 处的局部坐标 $(U;y^i)$ 满足 $y^i(p)=0,\forall i$ 且:

$$f(q)=f(p)-(y^1)^2-\cdots-(y^\lambda)^2+(y^{\lambda+1})^2+\cdots+(y^n)^2 \tag{1.4}$$

在整个 U 上都成立. 其中 λ 是 f 在 p 处的指数。

Proof. 我们首先说明如果 f 拥有这样的表达式，则指数为 λ.

对于坐标 (z^i), 若:

$$f(q)=f(p)-(z^1(q))^2-\cdots-(z^\lambda(q))^2+\cdots+(z^n(q))^2$$

则容易求出 f_{**} 在该坐标下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-2,\dots,-2,2,\dots,2)$. 其中 -2 一共有 λ 个。

因此存在一个 λ 维的子空间使得 f_{**} 是负定的, 存在一个 $n-\lambda$ 维的子空间 V 使得 f_{**} 是正定的。如果 p 处的指数大于 λ, 则对应的子空间与 V 相交不为空。但这是不可能的，因此 λ 是 f 在 p 处的指数。

接下来我们说明 (y^i) 坐标存在。不妨设 p 是 $\mathbb{R}^n$ 的原点且 $f(p)=f(0)=0$. 从而有:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx_1,\dots,x_n)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)x_i\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

令 $g_j=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)\mathrm{d}t$, 则 $f=\sum_j x_jg_j$ 在 0 处的一个邻域上成立。

因为 0 是 f 的临界点, 从而 $\frac{\partial f}{\partial x)i}(0)=0$。这意味着 $g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. 因而对 g_j 作上述 f 同样的分解:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j}x_ix_jh_{ij}(x_1,\dots,x_n)$$

不妨假设 h_{ij} 关于 i,j 对称。通过计算, 不难验证矩阵 $(h_{ij}(0))$ 等于:

$$(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0))$$

因此 $h_{ij}(0)$ 是非奇异的矩阵。仿照模仿有理标准型的构造，可以证明存在一组坐标 (y^i) 使得 f 呈现为引理中的形式。具体的构造办法详见 Milnor 原书。(附录) ■

Morse 引理的好处在于我们可以用指数唯一确定 f 在 p 处的一个标准形式。根据这个引理，可以得知 f 在非退化点 p 的一个邻域内只有 p 一个临界点。

Corollary 1.1.1

非退化临界点是离散的。特别的, 紧致流形 M 上的非退化临界点只有有限个。

Definition 1.1.3: Morse 函数

若 $f\in\mathcal{O}(M)$ 且只有非退化的临界点, 则称该函数为 Morse 函数。

Morse 函数的好处是显而易见的。然而存在性则是一个问题。本节我们剩下的内容为下面的定理。

Theorem 1.1.1

任何流形 M 上都存在一个可微的函数 f, 满足不存在退化临界点, 且 M^a 对于任何 $a \in \mathbb{R}$ 都是紧致的。

根据 Whitney 嵌入定理, 任何流形都可以嵌入到维数足够高的欧氏空间。因而我们考虑 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维嵌入子流形（之后统称为“子流形”)。

定义 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 为:

$$N = \{(q, v) : q \in M, v \in T_q\mathbb{R}^n, v \perp M\}$$

即 N 是 M 在 $\mathbb{R}^n$ 中的法丛。不难验证 N 是 n 维的流形, 且光滑的嵌入进 $\mathbb{R}^{2n}$ 中。定义 $E : N \to \mathbb{R}^n$ 为映射 $(q, v) \mapsto q + v$.

Definition 1.1.4: 焦点

称 $e \in \mathbb{R}^n$ 是 (M, q) 重数为 μ 的焦点, 若 $e = E(q, v), (q, v) \in N$ 且 E 在 (q, v) 处的 Jacobian 矩阵有零化度 μ.

根据 Sard 定理, 两个微分流形之间的可微映射的临界点是很有限的——临界值只有 0 测度。显然焦点是 E 的临界值, 因而:

Corollary 1.1.2

对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$,x 都不是 M 的焦点。

现在固定 $p \in \mathbb{R}^n$. 定义函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 为:

$$L_p = f : q \mapsto \|q - p\|^2 \tag{1.6}$$

在坐标 $(U; u^1, \ldots, u^k)$ 下,f 的表达式为:

$$f(u^1, \ldots, u^k) = \|\vec{x}(u^1, \ldots, x^k) - \vec{p}\|^2 = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{p} + \vec{p}\vec{p}$$

因此可以计算:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

因此 q 是 f 的临界点, 当且仅当 $q - p$ 垂直与 M 垂直。

考虑 f 的二阶导数。我们有:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}u^j \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

从而有

Lemma 1.1.4

q 是 $f = L_p$ 的退化临界点等价于 p 是 (M, q) 的焦点。根据推论1.1.2, 总存在这样的 L_p 使得该函数不存在退化的临界点。另外, 若 q 是 L_p 的退化临界点，则该点的零化度是 p 的重数。

§1.2 临界值处的伦形

§1.3 Morse 不等式

Chapter 2

Morse 理论的应用——测地线变分

§2.1 道路的能量积分

§2.2 指标定理

§2.3 道路空间的伦型

Chapter 3

Morse 不等式的解析证明

本节我们讨论 Witten 在上个世纪 80 年代关于 Morse 不等式给出的解析证明。

§3.1 Witten 形变与 Hodge 定理

设 M 是紧流形. 对于 $0 \le i \le n$ 的任意整数 i, 令 β_i 表示 M 的第 i 个 Betti 数 $\dim(H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{R}))$。下面的 De rham 定理说明我们可以用 β_i 表示 Morse 不等式。

Theorem 3.1.1: De rham 定理

光滑流形 M 的 Derham 上同调和 $\mathbb{R}$ 奇异上同调存在自然的同构。

该定理的思路是通过微分形式 ω 在复形 Δ^k 上的积分, 给出 $\mathbb{R}$ 系数奇异上同调类, 在说明这是一个同构。具体的证明，参见 82.

这个定理表明我们可以解析地研究流形的拓扑。其关键是研究 $\Omega^k(M)$ 在不同复形下的性质。

§3.1.1 Witten 形变

给定 M 上的 Morse 函数 f, 对外微分算子 d 做出如下的形变:

$$d_{Tf} = e^{-Tf} d e^{Tf} \tag{3.1}$$

考虑 $d^2 = 0$, 于是:

$$(d_{Tf})^2 = e^{-Tf} d^2 e^{Tf} = 0$$

因此一般的 de Rham 复形可以变形为 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$. 从而我们可以定义起上同调群:

$$H^*_{Tf,dR}(M,\mathbb{R}) = \frac{\ker(d_{Tf})}{\mathrm{Im}(d_{Tf})}$$

其 $\mathbb{Z}$ 分次结构为:

$$H^*_{Tf,dR}(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^{n} H^i_{Tf,dR}(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^{n} \frac{\ker(d_{Tf}|_{\Omega^i(M)})}{\mathrm{Im}(d_{Tf})|_{\Omega^{i-1}(M)}}$$

之所以考虑这样的形变，是因为我们发现形变后得到的上同调群与原来的上同调群维数一致:

Proposition 3.1.1

对于 $0 \le i \le n$ 的任意整数 i, 有:

$$\dim(H^i_{Tf,dR}(M,\mathbb{R})) = \dim(H^i_{dR}(M,\mathbb{R}))$$

Proof. 对于形式 α, 定义映射 $i:\alpha\mapsto e^{-Tf}\alpha$. 若 α 是闭形式, 则 $i(\alpha)$ 满足 $d_{Tf}(i(\alpha))=0$. 另外, 若 $\alpha=d\beta$, 则 $d_{Tf}(e^{-Tf}\beta)=e^{-Tf}\alpha$. 从而 $d_{Tf}(i(\beta))=i(\alpha)$.

因此 i 诱导了上同调的映射 $i^*:\dim(H^i_{dR}(M,\mathbb{R}))=\dim(H^i_{Tf,dR}(M,\mathbb{R}))$. 显然这是一个同构。

■

§3.1.2 Hodge 定理

设 g^{TM} 是 M 的一个黎曼度量。我们给出 DeRham 复形上的 Hodge 定理。

Theorem 3.1.2: Hodge

对于任意的 $\alpha,\beta\in\Omega^*(M)$, 形式的有:

$$\langle d_{Tf}\alpha,\beta\rangle=\langle e^{-Tf}de^{Tf}\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,e^{Tf}d^*e^{-Tf}\beta$$

于是 d_{Tf} 的形式伴随可写为:

$$d^*_{Tf}=e^{Tf}d^*e^{-Tf} \tag{3.2}$$

仿照 Hodge 分解，定义:

$$D_{Tf}=d_{Tf}+d^*_{Tf} \tag{3.3}$$

$$\Box_{Tf}=D^2_{Tf}=d_{Tf}d^*_{Tf}+d^*_{Tf}d_{Tf} \tag{3.4}$$

从而可知 $\Box_Tf$ 保持 $\Omega^i(M)$ 的次数。因为这样的操作并没有改变 Hodge 定理的关键部分，所以我们可以给出形变后的 Hodge 定理:

$$\dim(\ker(\Box_{Tf}|_{\Omega^i(M)}))=\dim(H^i_{Tf,dR}(M,\mathbb{R}))=\dim(H^i_{dR}(M,\mathbb{R})) \tag{3.5}$$

上式说明, 为了考量 β_i 的信息, 可以研究 $\Box_{Tf}$ 的行为。因为 T 值本身不改变上述结果, 从而可以考虑 T 值趋近于无穷的情况。

§3.2 算子在临界点的分析

不失一般性，假设 f 在临界点 $x\in M$ 的开邻域 U_x 上有坐标 (y^i) 满足 Morse 引理, 并且:

$$g^{TM}=(dy^1)^2+\cdots+(dy^n)^2 \tag{3.6}$$

Proposition 3.2.1

在上述假设下，可以计算 d_{Tf} 和 d^*_{Tf}.

$$d_{Tf}=d+Tdf\wedge,\quad d^*_{Tf}=d^*+Ti_{(df)^*} \tag{3.7}$$

其中 $(df)^*$ 是 df 作为微分形式在度量 g^{TM} 的对偶。

Proof. 设 $\omega\in\Omega^*(M)$. 则:

$$d_{Tf}(\omega)=e^{-Tf}(e^{Tf}d\omega+Te^{Tf}df\wedge\omega)=d\omega+Tdf\wedge\omega \tag{3.8}$$

由于 $df\wedge$ 的形式伴随是 $i_{(df)^*}$, 于是 d^*_{Tf} 的表达式如上。 ■

于是可以给出:

$$D_{Tf} = D + T\hat{c}(df), \hat{c}(df) = df \wedge + i_{(df)^*} \text{是} df \text{的 Dirac 算子} \tag{3.9}$$

根据 Morse 引理, 在每个 U_x 上都有:

$$df(x) = -y^1 dy^1 - \cdots - y^{n_f(x)} dy^{n_f(x)} + y^{n_f(x)+1} dy^{n_f(x)+1} + \cdots + y^n dy^n \tag{3.10}$$

其中 $n_f(x)$ 是 f 在 p 处的指数。设 $e_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ 是 TU_x 的定向标准正交基础, 则在 U_x 上, 有:

$$\square_{Tf} = -\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial y^i})^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + T \sum_{i=1}^{n_f(x)} (1 - c(e_i)\hat{c}(e_i)) + T \sum_{i=n_f(x)+1}^{n} (1 + c(e_i)\hat{c}(e_i)) \tag{3.11}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial y^i})^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + 2T (\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i}) \tag{3.12}$$

不难发现算子:

$$\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i}$$

非负, 且具有由下述形式生成的一维核空间:

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)}$$

因此总结如下:

Proposition 3.2.2

对于任意 $T > 0$, 算子 $\square_{Tf}$ 作用在 $\Gamma(\bigwedge^*(E_n^*))$ 上非负, 其由下述形式生成:

$$\exp(\frac{-T\|y\|^2}{2}) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)} \tag{3.13}$$

进而对于某个固定的常数 $C > 0$, 该算子所有的非零特征值大于 CT.

§3.3 Morse 不等式的证明

§3.3.1 一个命题

我们先不加证明的指出下面命题，并借此证明 Morse 不等式。

Proposition 3.3.1

对于任意 $c > 0$, 存在 $T_0 > 0$ 使得当 $T \geq T_0$ 时,$\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 的落在区间 $[0, c]$ 的特征值的个数（计重数）为 $m_i, 0 \leq i \leq n$.

对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i, 设:

$$F_{Tf,i}^{[0,c]} \subset \Omega^i(M)$$

是 $\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 在 $[0, c]$ 中的特征值对应的特征向量所生成的向量空间。根据上述命题3.3.1, 这个向量空间是 m_i 维的。

通过简单的计算，可以注意到下面的事实:

$$[d_{Tf}, \square_{Tf}] = [d^*_{Tf}, \square_{Tf}] = 0$$

所以 d_{Tf} 和 d^*_{Tf} 对于 $F^{[0,c]}_{Tf,i}$ 而言都是封闭的。(d_{Tf} 把 $F^{[0,c]}_{Tf,i}$ 映射到 $F^{[0,c]}_{Tf,i+1}$,d^*_{Tf} 把 $F^{[0,c]}_{Tf,i}$ 映射到 $F^{[0,c]}_{Tf,i-1}$)

因此我们构造了 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$ 有限维的子复形:

$$(F^{[0,c]}_{Tf}, d_{Tf}) : 0 \longrightarrow F^{[0,c]}_{Tf,0} \longrightarrow F^{[0,c]}_{Tf,1} \longrightarrow \dots F^{[0,c]}_{Tf,n} \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

将 $\Omega^*(M)$ 的 Hodge 分解限制在该有限维复形上, 可以给出:

$$\beta^{[0,c]}_{Tf,i} := \dim(\frac{\ker(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})}{\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i-1}})}) \tag{3.15}$$

就等于 $\dim(\ker(\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}))$, 从而等于 β_i. 由于 $\beta^{[0,c]}_{Tf,i}$ 总是小于 m_i 的，因此弱 Morse 不等式证毕。

下面我们说明强 Morse 不等式。具体写出 $F^{[0,c]}_{Tf,i}$ 的分解:

$$\dim(F^{[0,c]}_{Tf,n}) = \dim(\ker(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})) \tag{3.16}$$

$$= \dim(\frac{\ker(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})}{\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-1}{}^{[0,c]}})}) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i-1}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})) \tag{3.17}$$

结合上述分解和命题3.3.1, 可以得到:

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j m_{i-j} \tag{3.18}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} (\beta_{i-j} + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i-j-1}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i-j}}))) \tag{3.19}$$

$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \beta_{i-j} + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F^{[0,c]}_{Tf,i}})) \tag{3.20}$$

可见这就是强 Morse 不等式。若 $i = n$, 可知上式的最右边一项为 0, 于是给出取等条件。

§3.3.2 命题3.3.1的证明:Witten 形变算子

解析证明的灵魂是命题3.3.1. 为了说明这个命题，我们需要用到不少解析的技巧。

首先做两个记号. 对于 $T > 0$ 和 f 的临界点 $x \in M$, 定义

$$\alpha_{x,T} = \int_{U_x} \gamma(|y|^2) \exp(-T|y|^2) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

$$\rho_{x,T} = \frac{\gamma(|y|)}{\sqrt{\alpha_{x,T}}} \exp(\frac{-T|y|^2}{2}) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n_f(x)}$$

其中 γ 是选定的一个光滑函数 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。满足 $\gamma(x) = 1, |x| \leq a, \gamma(x) = 0, |x| \geq 2a$. 这样的光滑函数的存在性是基础的。

于是在上述记号下，$\rho_{x,T}$ 是在 Hodge 范数下的单位向量, 且拥有在 U_x 里面的紧支撑集。

固定 T, 从而每个临界点 x 处都存在一个 $\rho_{x,T}$. 用 E_T 表示这些 $\rho_{x,T}$ 生成的有限维向量空间。(因为 x 的个数是有限的) 这个向量空间是 Sobolev 空间 $\mathbb{H}^0(M)$ 的子空间。其中,$\mathbb{H}^0$ 是 $\Omega^*(M)$ 结合 Hodge 内积给出的 Hilbert 空间.

因此可以考虑正交补 $E_T^\perp$.

$$\mathbb{H}^0(M) = E_T \oplus E_T^\perp$$

再设 p_T 和 $p_T^\perp$ 是对应的正交投影。

Definition 3.3.1: Witten 形变算子

定义如下四个算子。

$$D_{T,1} := p_T D_{Tf} p_T, D_{T,2} := p_T D_{Tf} p_T^{\perp}, D_{T,3} := p_T^{\perp} D_{Tf} p_T, D_{T,4} := p_T^{\perp} D_{Tf} p_T^{\perp} \tag{3.21}$$

这四个算子有非常好的估计式:

Proposition 3.3.2

对于任意 $T > 0$,$D_{T,1} = 0$.

Proof. 设 f 的临界点集合为 $\mathrm{zero}(df)$. 则对于任何 $s \in \mathbb{H}^0(M)$:

$$p_T s = \sum_{x \in \mathrm{zero}(df)} \langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}$$

我们代入 D_{Tf} 计算:

$$D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}) \in \Omega^{n_f(x)-1}(M) \oplus \Omega^{n_f(x)+1}(M) \tag{3.22}$$

因为上述结果在 U_x 外全为 0, 因此 $D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T})$ 与 $\rho_{y,T}$ 在 $x \neq y$ 的时候做内积显然为 0. 其次, 若 $x \neq y$, 则根据形式的阶数不相同，也得到内积为 0. 综上:

$$p_T D_{Tf}(\langle \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T}) = 0 \tag{3.23}$$

■

Proposition 3.3.3

存在常数 $T_1 > 0$, 使得对于任意的 $s \in (E_T)^{\perp} \cap \mathbb{H}^1(M)$,$s' \in E_T$ 和 $T \geq T_1$, 有:

$$\|D_{T,2}s\|_0 \leq \frac{\|s\|_0}{T}, \|D_{T,3}s'\|_0 \leq \frac{\|s'\|_0}{T} \tag{3.24}$$

Proof. 容易验证 D_3 是 D_2 的形式伴随。

$$\langle D_2 s, s' \rangle = \langle p_T D_{Tf} p_T^{\perp} s, s' \rangle \tag{3.25}$$
$$= \langle p_T^{\perp} s, D_{Tf} p_T s' \rangle \tag{3.26}$$
$$= \langle s, p_T^{\perp} D_{Tf} p_T s' \rangle = \langle s, D_{T,3} s' \rangle \tag{3.27}$$

因此只需要验证第一个不等式。直接计算有

$$D_{T,2}s = \sum_{x \in \mathrm{zero}(df)} \langle \rho_{x,T}, D_{Tf} s \rangle \rho_{x,T} = \sum_{x \in \mathrm{zero}(df)} \langle D_{Tf} \rho_{x,T}, s \rangle \rho_{x,T} = \sum_{x \in \mathrm{zero}(df)} \int_{U_x} D_{Tf} \rho_{x,t} \wedge (*s) dv_p \rho_{x,T} \tag{3.28}$$

根据 $\rho_{x,T}$ 的构造, 我们不难发现上述积分只在 $|y| \in [a, 2a]$ 的区间上有意义。($\ker D_{Tf} = \ker D_{Tf}^2$.) 而此时上述积分的值就取决于 $\|s\|_0$ 和 T. 具体可以描述为:

存在 $T_0 > 0$,$C_1 > 0$,$C_2 > 0$, 使得:

$$\|D_{T,2}s\|_0 \leq C_1 T^{n/2} \exp(-C_2 T) \|s\|_0 \tag{3.29}$$

于是命题得证。 ■

Proposition 3.3.4

存在常数 $T_2 > 0$,$C > 0$ 使得对于任何的 $s \in E_T^{\perp} \cap \mathbb{H}^1(M)$ 和 $T \geq T_2$, 有:

$$\|D_{Tf}s\|_0 \geq C_2\sqrt{T}\|s\|_0 \tag{3.30}$$

Proof. 参照参考文献 84 页。 ■