

黎曼曲面引论

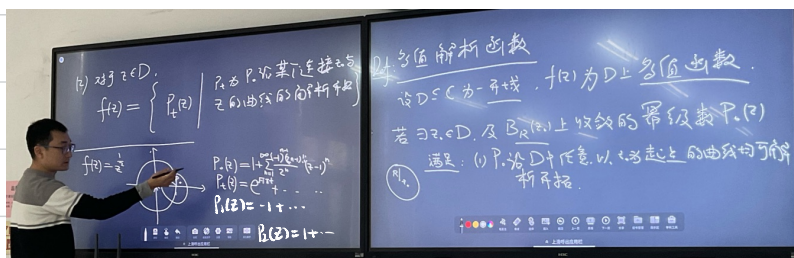
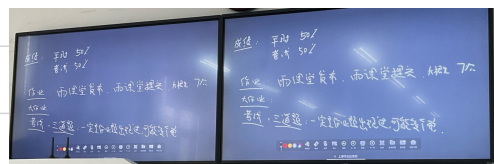
助教: 张峻铭

梅加强

GTM 81

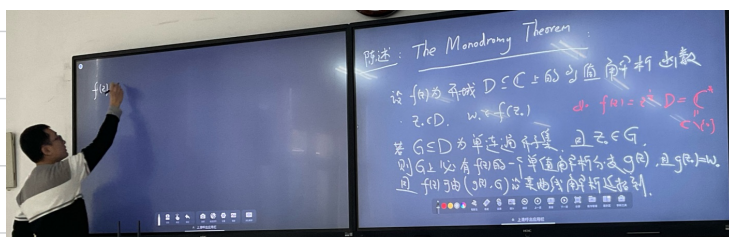
任鸿熙

Griffith 代数曲线、代数几何基础 第1-3章



多值解析函数

The Monodromy Theorem



利用黎曼映照  
定理证明



# A.C. analytic continuation

改变定义域

定义-等价类:

$\sim_1$ : 设  $D_1, D_2$  为  $P$  的两个邻域,  $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$ ,  $f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$   
 $(f_1, D_1) \sim_1 (f_2, D_2) \iff \exists B, p \subseteq D_1 \cap D_2$   
 $f_1 \equiv f_2 \text{ in } B, p$



记号:  $[f, p] :=$  所有  $(f, B, p)$  的等价类

从平面突破出去: 黎曼 1851 Thesis.

构造 Unramified Riemann Surface:

$F(z)$  为  $\mathbb{C}$  上的值函数

令  $U \subseteq \mathbb{C}$  为任一开域

$$(d, U = \mathbb{C}^*)$$

Step 1: 定义解析函数芽 germ:

任取  $p \in U$ ,  $f, p \in \mathcal{O}(U)$  意为  $\forall V(p)$  在  $V(p)$  上解析的函数

定义-等价类:

$\sim_1$ : 设  $D_1, D_2$  为  $P$  的两个邻域,  $f_1 \in \mathcal{O}(D_1)$ ,  $f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$   
 $(f_1, D_1) \sim_1 (f_2, D_2) \iff \exists B, p \subseteq D_1 \cap D_2$   
 $f_1 \equiv f_2 \text{ in } B, p$



记号:  $[f, p] :=$  所有  $(f, B, p)$  的等价类

Step 2: 定义:

$$RS(U, f, p) := \left\{ [f, p] \mid \begin{array}{l} p \in U, \text{ 且 } \exists B, p \text{ st.} \\ f \in \mathcal{O}(B, p) \text{ 且} \\ (f, B, p) \text{ 可由} \\ (f, B_s, p_s) \text{ 解析} \\ \text{延拓到} \end{array} \right\}$$

拓扑: 定义:  $[f, D] := \{ [f, p] \mid p \in D, \text{ 且 } (f, D) \text{ 可由 } (f, B, p) \text{ 解析延拓出} \}$   
 称  $[f, D]$  为开集,  $\{ [f, D] \}$  为拓扑基

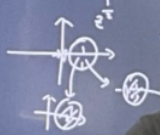
Case:  $P \neq \emptyset, \exists V(p)$

- 性质:
- 1)  $RS(U, f, p)$  是  $\mathbb{C}$  上的局部就是复平面上的开域
  - 2)  $RS(U, f, p)$  道路连通: 任两个  $[f, p], [g, q]$  均可沿某曲线互相 A.C.
  - 3)  $RS(U, f, p)$  is Hausdorff:  $\forall [f, p] \neq [g, q]$



Case 1:  $p \neq q, \exists V_1 \ni p, V_2 \ni q, V_1 \cap V_2 = \emptyset$   
 $[f, V_1] \cap [g, V_2] = \emptyset$

Case 2:  $p = q$ , 由  $[f, p] \neq [g, p]$   
 由  $f$  与  $g$  在任意  $p$  的邻域中至多  
 有限个相等  
 $\Rightarrow \forall \epsilon \in B_r(p), [f, \epsilon] \neq [g, \epsilon] \Rightarrow [f, B_r(p)] \cap [g, B_r(p)] = \emptyset$



拓扑性质:

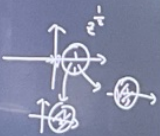
1)  $RS(U, f, p.)$  是  $\mathbb{C}$  子集 局部就是复平面上的子集

2)  $RS(U, f, p.)$  道路连通 任两点  $[f, p], [g, q]$  均可经某曲线互相 A.C.

3)  $RS(U, f, p.)$  is Hausdorff:  $[f, p] \neq [g, q]$

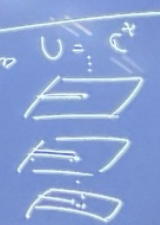
Case 1:  $p \neq q, \exists V_1 \ni p, V_2 \ni q, V_1 \cap V_2 = \emptyset$   
 $[f, V_1] \cap [g, V_2] = \emptyset$

Case 2:  $p = q$ , 由  $[f, p] \neq [g, p]$   
 由  $f$  与  $g$  在任意  $p$  的邻域中至多  
 有限个相等  
 $\Rightarrow \forall \epsilon \in B_r(p), [f, \epsilon] \neq [g, \epsilon] \Rightarrow [f, B_r(p)] \cap [g, B_r(p)] = \emptyset$



Step 3:  $RS(U, f, p.)$

Canonical map:

projection: $\pi: RS(U, f, p.) \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$	$[f, p] \mapsto p$	$U \subseteq \mathbb{C}^* \quad F = \text{Log } z$ 
Function: $F: RS(U, f, p.) \rightarrow \mathbb{C}$	$[f, p] \mapsto f(p)$	

## 1920s Weyl 《黎曼曲面的概念》

1920s Weyl 《黎曼曲面的概念》

定义: 称  $M$  为一个 Riemann Surface.  
 若:  $M$  是一个有至可数拓扑基的 Hausdorff 空间, 且  $M$  上有开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  及连续映射  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$

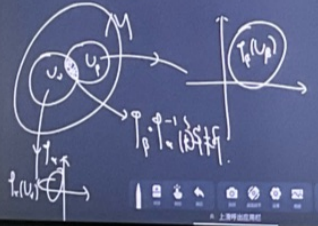
满足:

(1)  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}, \varphi_\alpha(U_\alpha)$  为开集, 且  $\varphi_\alpha$  为同胚映射.

(2) 在  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时,  
 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$   
 为一个解析映射  
 称为 transition map

粗略地讲:

R.S. 把  $\mathbb{C}$  子域用解析函数粘起来.

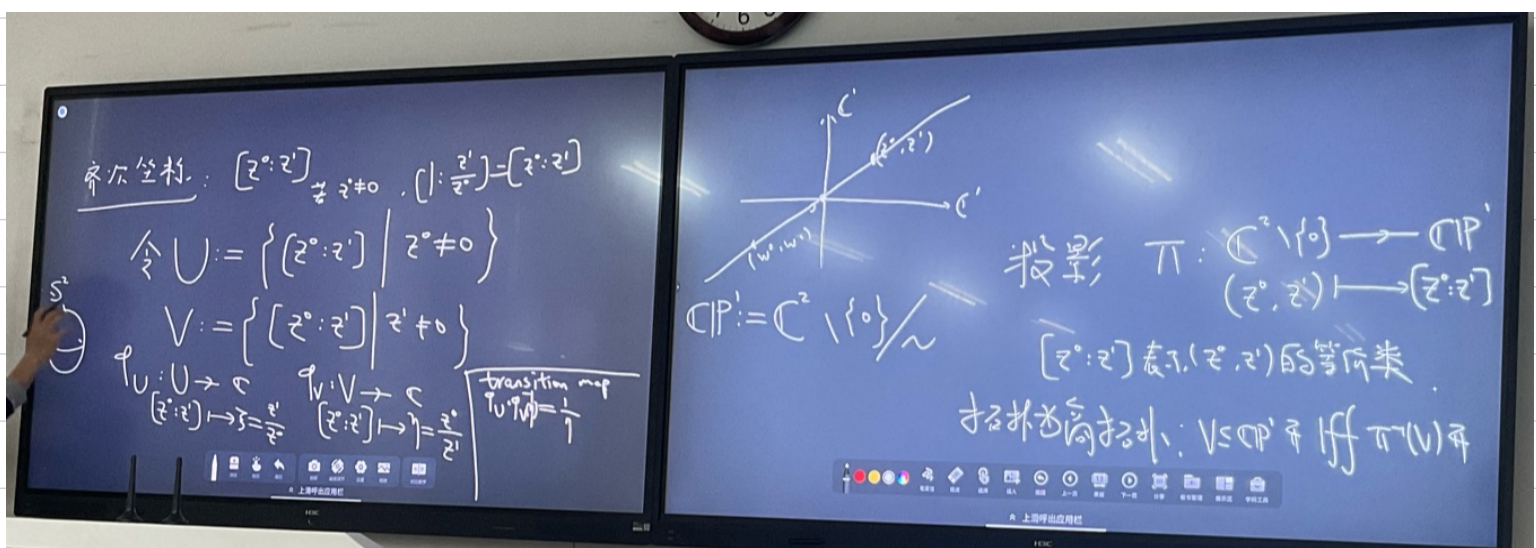
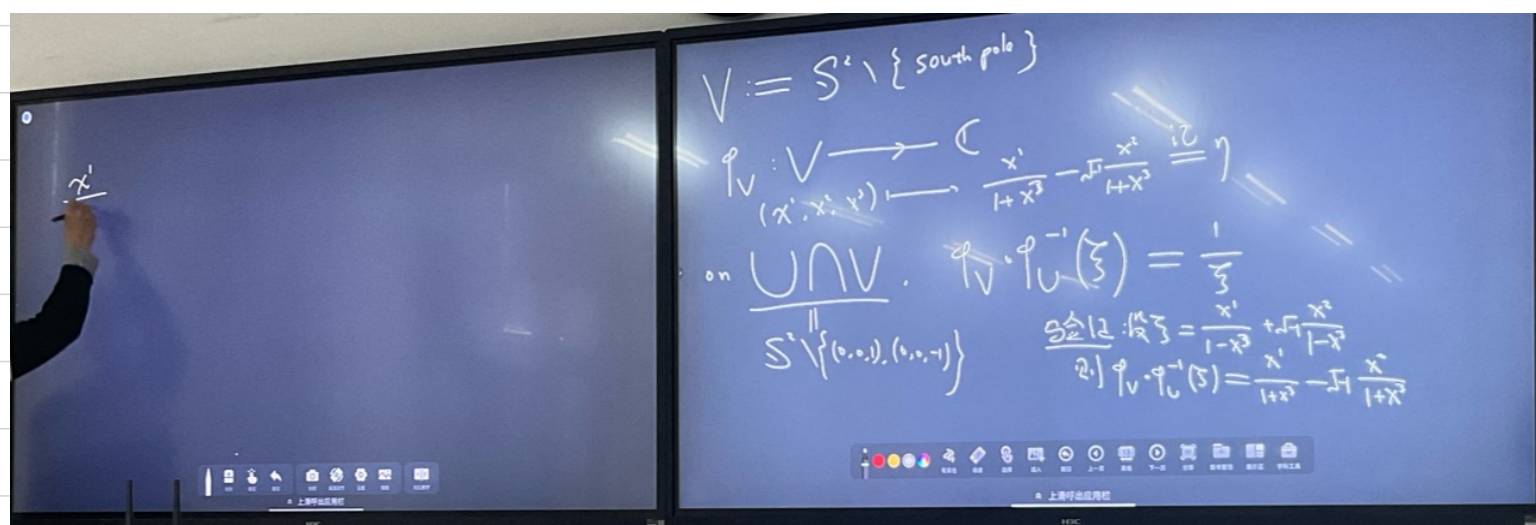
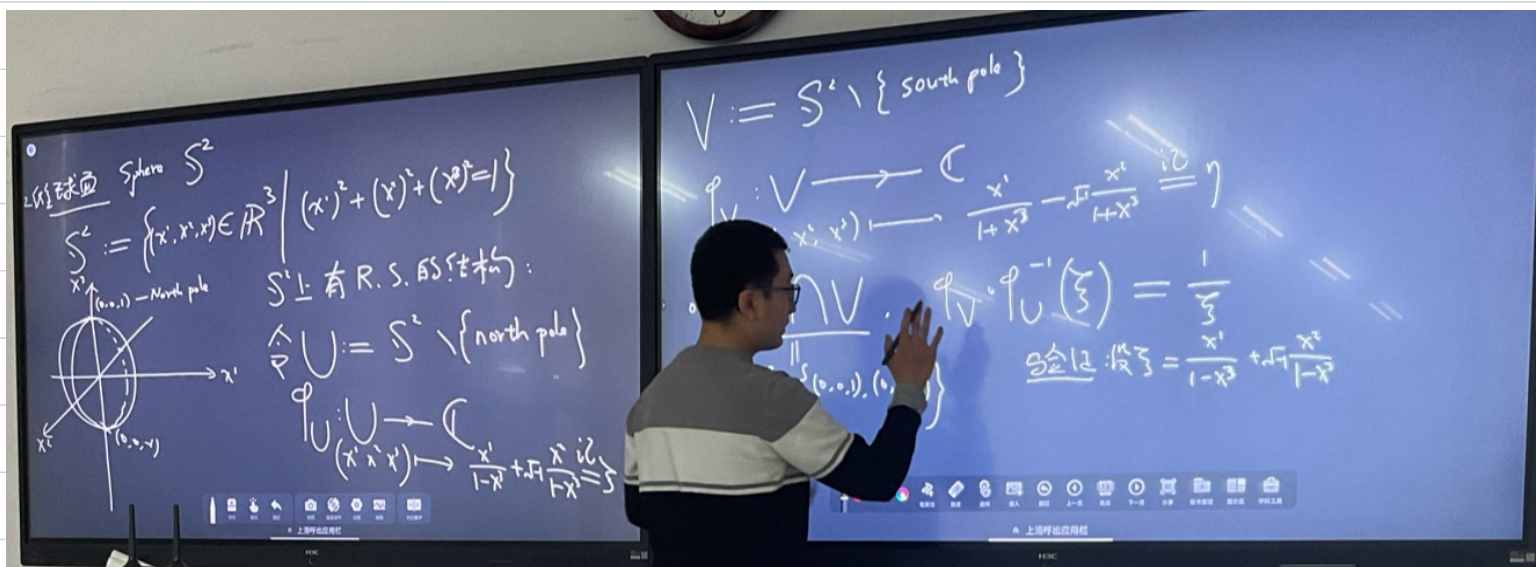


满足:

(1)  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}, \varphi_\alpha(U_\alpha)$  为开集, 且  $\varphi_\alpha$  为同胚映射.

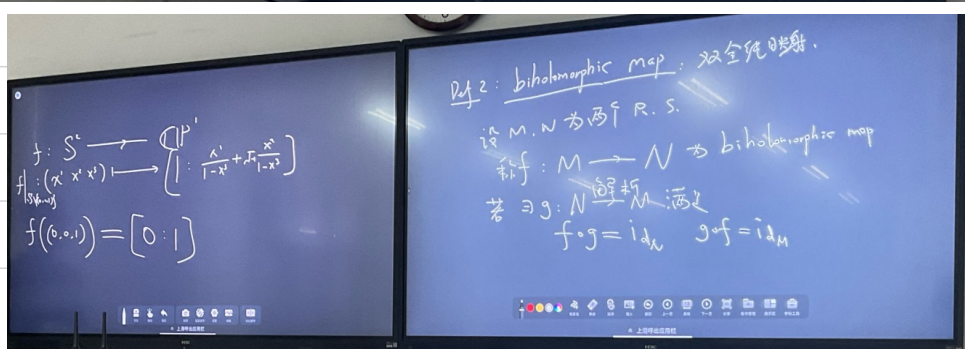
(2) 在  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时,  
 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$   
 为一个解析映射  
 称为 transition map





$S^2 \cong \mathbb{CP}^1$

两个 Riemann Surface "一样"



$$\begin{aligned}
 f: S^2 &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\
 f|_{S^2 \setminus \{0,1\}}: (x^1, x^2, x^3) &\longmapsto \left[ 1 : \frac{x^1}{1-x^1} + i \frac{x^2}{1-x^1} \right] \\
 f(0,0,1) &= [0:1] \\
 \text{验证: } f \text{ 解析, } f^{-1} &\text{ 也解析.}
 \end{aligned}$$

Remark: 可在定义里加入极大坐标卡集的条件.