

图 论

(Graph Theory)

第一章 和 第二章

南开大学数学科学学院

目 录

第一章 图的基本概念	1
1.1 图和子图	1
1.2 图的连通度	9
1.3 图的矩阵表示	14
1.4 图的同构	24
1.5 最短路(或最短通路)问题	27
第二章 几类特殊图及其性质	38
2.1 欧拉图 (Euler graph)	38
2.2 哈密尔顿图 (Hamilton graph)	42
2.3 树的基本概念与性质	48
2.4 树的算法及应用	55
2.5 平面图 (planar graph)	67

第一章 图的基本概念

图论中所讨论的“图”，不是微积分、解析几何、几何学中讨论的图形，而是客观世界中某些具体事务间联系的一个数学抽象. 如二元关系的关系图，在关系图中，我们不考虑点的位置及连线的长短曲直，而只关心哪些点之间有线相连，这种数学抽象就是“图”的概念.

§1.1 图和子图

一、引例

早期图论与“数学游戏”有密切关系. 1736年欧拉解决了当时很有名的哥尼斯堡七桥问题.

哥尼斯堡城（现名加里宁格勒，属于俄罗斯共和国）有一条普莱格尔河，河中有两个小岛. 有七座桥把普莱格尔河中的两个小岛与河岸联结起来，如图1.1所示.

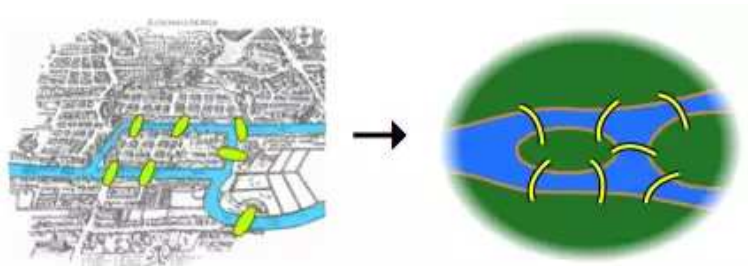


图 1.1

有人提出这样一个问题：从河岸或岛上任何一个地方开始，能否通过每一座桥一次且仅一次回到原地？

欧拉用四个点表示两岸和两个小岛，用两点间的连线表示桥，如图1.2.

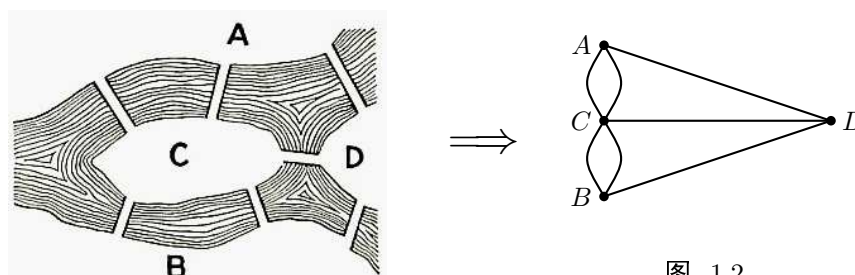


图 1.2

于是问题转化为，在图1.2中，从任何一点出发能否通过每条边一次且仅一次回到出发点(一笔画问题).

直观上不难发现，如要回到原来的地方，必须从一条边进，从另一条边出，只有一进一出才行. 这就是说，要求与每个顶点相关联的边均为偶数. 而从图1.2中可以看到，这个图所有的点均不与偶数条边相关联，所以七桥问题无解.

上面我们从直观上阐述了图的概念. 从上面的讨论中可以看到，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系. 至于顶点的位置以及边的长、短、曲、直都是无关紧要的. 即描述一个图的几何图形不是唯一的，它只描绘出它的顶

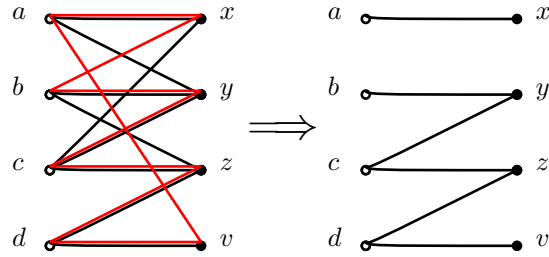
点和边之间保持的相互关系.

由此可以看出, 图是由点和边(或连线)所组成.

例 1.1 学生干部候选人: a, b, c, d . 具体分工为: x, y, z, v .

$$a \rightarrow \{x, y\} \quad b \rightarrow \{y, z\} \quad c \rightarrow \{x, y, z\} \quad d \rightarrow \{z, v\}$$

老师打算安排: $x \rightarrow \{a, b\} \quad y \rightarrow \{b, c\} \quad z \rightarrow \{c, d\} \quad v \rightarrow \{a, d\}$.



由此可以看出: $a \rightarrow x \quad b \rightarrow y \quad c \rightarrow z \quad d \rightarrow v$.

二、二元关系

有序对: 两个具体事物 a 和 b 按照一定的次序排列, a 在前, b 在后, 记作 (a, b) , 则称 (a, b) 为一个有序对.

例如, 在所有参加乒乓球比赛的选手中, 有序对 (a, b) 可以表示冠军和亚军. 因此, $(a, b) \neq (b, a)$.

有序积: 设 A 和 B 是两个集合. 由 $a \in A, b \in B$ 组成的形如 (a, b) 的所有有序对构成的集合, 称为 A 和 B 的笛卡儿积, 或称为有序积, 记作 $A \times B$. 即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

定义 1.1 有序积 $A \times B$ 的一个子集合, 称为 A 到 B 的一个二元关系.

特别地, 当 $A = B$ 时, 集合 A 到 B 的二元关系称为集合 A 上的二元关系.

例如, 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, d\}$, 则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{a, b, c\} \times \{a, b, d\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d)\} \end{aligned}$$

如果组成偶对的两个事物 a 和 b 与次序无关, 则称此偶对为无序对, 用符号 $\{a, b\}$ 来表示.

设 A, B 是两个集合, 由 $a \in A, b \in B$ 所组成的无序对构成的集合, 称为 A 和 B 的无序积, 记作 $A \& B$.

无序积 $A \& B$ 的一个子集称为 A 和 B 的一个二元关系.

特别地, 当 $A = B$ 时, 集合 A 到 B 的二元关系称为 A 上的二元关系.

例如, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则

$$A \& A = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 4\}\}$$

三、图的定义

定义 1.2 图 G (graph)是一个三元组, 记作 $G = (V(G), E(G), \varphi(G))$. 其中,

- 1) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V(G) \neq \emptyset$ 称为图 G 的顶点集合(vertex set), 称 v_i 为 G 的顶点(vertex);
- 2) $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 称为图 G 的边集合(edge set), 称 e_i 为 G 的边(edge);
这里, 若 $e_i = \{v_j, v_t\}$, 则称 e_i 为以 v_j 和 v_t 为端点(end vertices)的无向边, 此时, 称图 G 为无向图;
若 $e_i = (v_j, v_t)$, 则称 e_i 为以 v_j 为起点(origin), v_t 为终点(terminus)的有向边(directed edge),
此时, 称图 G 为有向图(directed graph 或 digraph);
- 3) $\varphi(G): E \rightarrow V \times V$ (或 $V \& V$) 称为关联函数(incidence function).
- 4) 对于无向图 G , 将 G 的边指定一个方向得到的有向图 D 称为 G 的定向图(oriented graph), 反之, 对于有向图 D , 去掉边上的方向得到的无向图 G 称为 D 的基础图(underlying graph).

注意: 对无向图 $G = (V, E, \varphi)$ 有:

1. 如果 V, E 是有限集, 则称图 $G = (V, E, \varphi)$ 为有限图.
其中, 称顶点数 $|V|$ 为图 G 的阶(order), 记作为 $\nu(G)$; 边数 $|E|$ 记为 $\varepsilon(G)$.
此时, 图 G 也称为 (ν, ε) 图.
2. 设 $e = \{x, y\} \in E$, 则称 x, y 相邻 (或简记为 $e = xy$), 并称 x 与 e (或 y 与 e) 关联.
3. 只有一个顶点的图称为平凡图(trivial graph).
4. 若连接同一对顶点的边数大于1, 则称这样的边为多重边, 其边数称为边的重数;
图 G 中形如 $\{v, v\}$ 的边 ($v \in V(G)$), 也就是端点重合为一点的边叫做环.
如果图 G 没有多重边(multiple), 也没有环(loop), 则称 G 为简单图(simple graph).
对有限简单图显然有: $0 \leq \varepsilon(G) \leq \binom{\nu(G)}{2} = \frac{1}{2}\nu(G)(\nu(G) - 1)$.
5. 关联函数 (映射) φ 既不一定是单射, 也不一定是满射, 而当 φ 为单射时, 无多重边。

今后, 我们没有特别说明的情况下, 所指的图是顶点集和边集有限的无向简单图.

几类特殊图:

1. **完全图**(complete graph):
每一对不同的顶点均有一条边相关联的简单图称为完全图. 把顶点个数为 n 的完全图记作 K_n .
显然, 完全图 K_n 有 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 条边.
2. **空图**: 没有任何边的图称为空图, 记作 \emptyset . 即, $\varepsilon(G) = 0$.
3. **二部图 (或偶图)** (bipartite graph):
若 $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 且 G 的任意一条边的两个端点分别属于 V_1 和 V_2 , 记作 $G = (V_1, V_2; E)$.
4. **完全二部图**(complete bipartite graph): 如果 V_1 中的顶点与 V_2 中的每一个顶点都相邻, 则称为完全二部图.
若 $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, 则完全二部图记作 $K_{m,n}$. 显然, $|E(K_{m,n})| = mn$.

四、图的运算

定义 1.3 子图(subgraph): 对图 $G = (V(G), E(G))$,

1. 若 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 $H = (V(H), E(H))$ 为图 G 的子图, 记为 $H \subseteq G$.
2. 若 $H \subseteq G$, 且 $H \neq G$ (即 $V(H) \subset V(G)$ 或 $E(H) \subset E(G)$), 则称 $H = (V(H), E(H))$ 为图 G 的真子图, 记为 $H \subset G$.

定义 1.4 生成子图(spanning graph): 若 $H \subseteq G$, 且 $V(H) = V(G)$, 则称 H 是 G 的生成子图或支撑子图.

导出子图(induced subgraph):

- 1) 设 $V_1 \subseteq V$, 且 $V_1 \neq \emptyset$. 以 V_1 为顶点集, 以两端点均为 V_1 中的全体边为边集合的 G 的子图称为 V_1 的导出子图. 记作 $G[V_1]$.
- 2) 设 $E_1 \subseteq E$, 且 $E_1 \neq \emptyset$. 以 E_1 为边集, 以 E_1 中的边关联的全部顶点为顶点集的 G 的子图称为 E_1 的导出子图. 记作 $G[E_1]$.
- 3) 特别地, 若 $V_1 \subset V$, 且 $V_1 \neq \emptyset$, 则以 $G - V_1$ 表示从 G 中删去 V_1 内的所有点以及与这些点相关联的边所得到的子图. 若 $V_1 = \{v\}$, 则常把 $G - \{v\}$ 简记为 $G - v$.

类似的, 若 $E_1 \subset E$, 且 $E_1 \neq \emptyset$, 则以 $G - E_1$ 表示从 G 中删去 E_1 中所有边所得到的子图. 同样, 把 $G - \{e\}$ 简记为 $G - e$.

定义 1.5 设 G 为简单图, H 是一个以 $V(G)$ 为顶点集的图, 且两个顶点在 H 中相邻当且仅当它们在 G 中不相邻, 则称 H 为 G 的补图, 记作 $H = \overline{G}$.

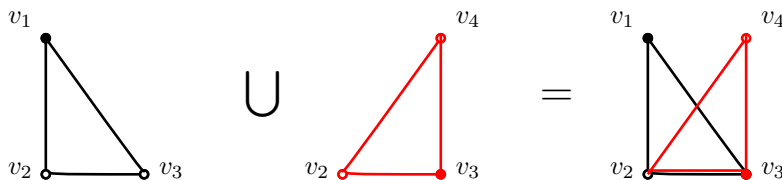
注意: 对 n 阶图 G 有:

- 1) $E(G) \cap E(\overline{G}) = \emptyset$; $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$;
- 2) $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)|$.

定义 1.6 设 G_1 和 G_2 都是图 G 的子图. 则定义

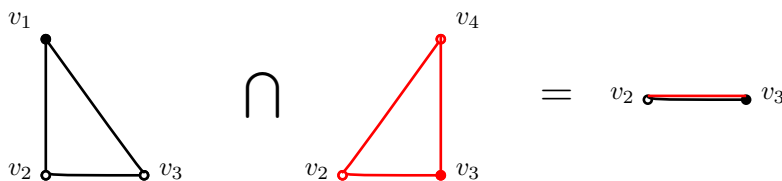
- 1) G_1 和 G_2 的并(union) $G_1 \cup G_2$: 仅有 G_1 和 G_2 中所有边组成的图;

例如,



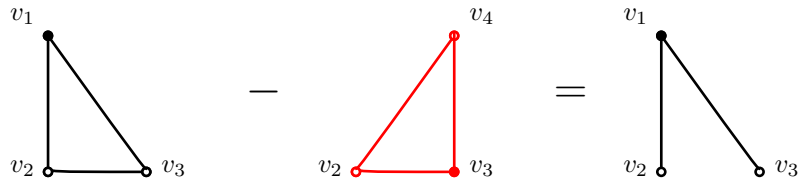
- 2) G_1 和 G_2 的交(cap) $G_1 \cap G_2$: 仅有 G_1 和 G_2 的公共边组成的图;

例如,



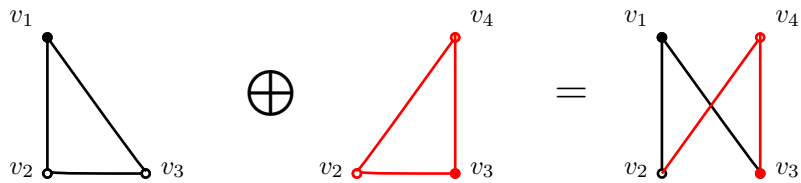
3) G_1 和 G_2 的差(difference) $G_1 - G_2$: 仅有 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图;

例如,



4) G_1 和 G_2 的环和(ring sum) $G_1 \oplus G_2$: 在 G_1 和 G_2 的并中去掉 G_1 和 G_2 的交所得到的图.

例如,



注意: 若 $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, 则若 $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$.

定义 1.7 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是任意两个无向图,

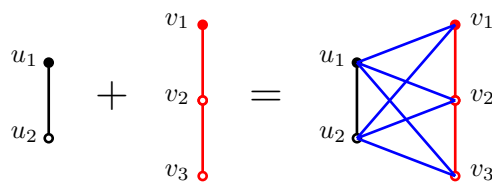
1) 若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 则称 G_1 与 G_2 是不相交的;

2) 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则称 G_1 与 G_2 是边不重的.

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个不相交的图, 则定义

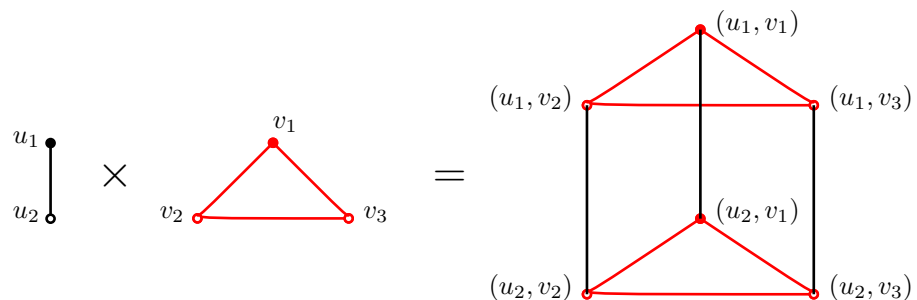
1) G_1 和 G_2 的和(Sum) $G_1 + G_2$: $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, 这里 $E_3 = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$;

例如,

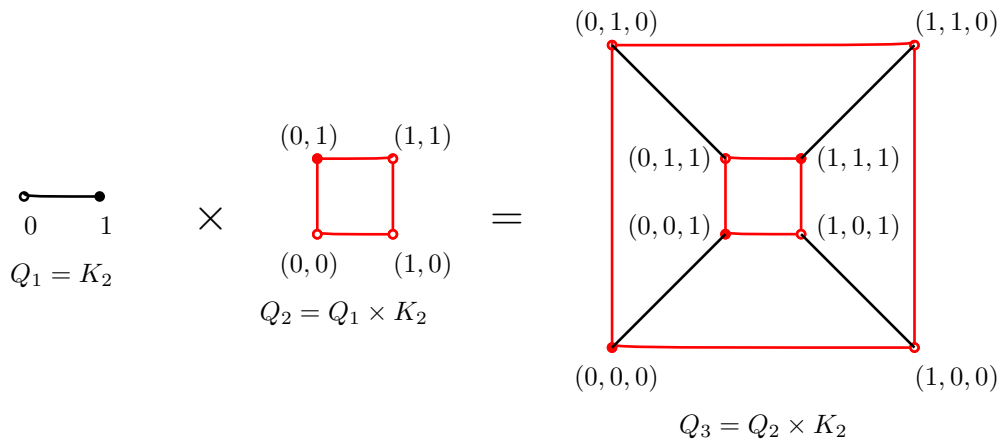


2) G_1 和 G_2 的笛卡尔积(Cartesian products) $G_1 \times G_2$: $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$, 其中边集 E 满足: G 中的两个顶点 (a, b) 和 (c, d) 是邻接的当且仅当 $a = c$ 且 $\{b, d\} \in E(G_2)$ 或者 $b = d$ 且 $\{a, c\} \in E(G_1)$.

例如,



又如,



注意：称 $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$ (其中, $Q_1 = K_2$) 为 n -方体.

五、图的顶点度

定义 1.8 设 $G = (V, E)$. 对任意的 $v \in V$, 与 v 关联边的数目 (一条环要计算两次) 称为 v 的度数 (degree), 记为 $d_G(v)$ 或简记为 $d(v)$ (或 $\deg(v)$). 此时, 当 G 为简单图时, 显然有 $0 \leq d_G(v) \leq \nu(G) - 1$.

定义 1.9 设 D 是有向图, v 为 G 的任一顶点, 射入 v 的边数称为 v 的入度 (in-degree), 记作 $\deg^+(v)$ 或 $d^+(v)$; 射出 v 的边数称为 v 的出度 (out-degree), 记作 $\deg^-(v)$ 或 $d^-(v)$.

注意:

- 1) 在无向图 G 中, 记: $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$, $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$.

其中, 称 $\Delta(G)$ 为图 G 的最大度, 称 $\delta(G)$ 为图 G 的最小度. 此时, 当 G 为简单图时, 显然有

$$0 \leq \delta(G) \leq \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{\nu(G)} \leq \Delta(G) \leq \nu(G) - 1.$$

- 2) 已知图 $G = (V, E)$, $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, $\forall v \in V$, 称 $N_s(v) = \{u \mid u \in S \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 相邻}\}$ 为 v 在 S 中的邻域. 特别地, $N_G(v)$ 常简记为 $N(v)$. 显然, 当 G 是简单图时, $d(v) = |N(v)|$.

- 3) 若 $\forall v \in V(G)$, $d(v) = k$, 则称 G 为 k -正则图 (regular graph);
 称度为零的顶点为孤立点; 称度为 1 的顶点为悬挂点;
 称度为奇数的顶点为奇点; 称度为偶数的顶点为偶点.

- 4) 在有向图 D 中, 对任意顶点 v 有, $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

记: $\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) \mid v \in V(D)\}$, $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) \mid v \in V(D)\}$;

$\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) \mid v \in V(D)\}$, $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) \mid v \in V(D)\}$.

对于 D 的每个顶点 u , 若 $d^+(u) = d^-(u)$, 则称 D 为平衡有向图, 其中 u 称为平衡点.

定理 1.1 设 $G = (V, E)$, 则 $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon(G)$.

证明: 由顶点度的定义可知, 每条边有两个端点. 所以, 每条边对 $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ 的贡献是 2.

从而, $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E(G)|$.

定理 1.2 (握手定理) 度数为奇数的顶点个数为偶数.

证明: 令 V_1 : 奇点集, V_2 : 偶点集, 则 $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$.
由定理 1.1 可知, $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 为偶数. 因此, $|V_1|$ 为偶数.

定理 1.3 在任何有向图 D 中, 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和. 即

$$\sum_{v \in D} d^+(v) = \sum_{v \in D} d^-(v)$$

证明: 因为每条弧中必对应一个入度和一个出度. 若一个顶点具有一个入度或出度, 则必关联一条弧.

因此, 有向图中各顶点的入度之和等于弧数, 各顶点的出度之和也等于边数.

所以, $\sum_{v \in D} d^+(v) = \sum_{v \in D} d^-(v)$.

定义 1.10 若 G 有顶点 v_1, v_2, \dots, v_p , 则序列 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p))$ 称为 G 的度序列.

若 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p))$ 是某一简单图的度序列, 则称 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p))$ 为图序列.

定理 1.4 非负整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_p) 是某个图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^p d_i$ 是偶数.

证明: 由定理 1.2 可知必要性成立. 对于充分性, 取 p 个相异顶点 v_1, v_2, \dots, v_p .

若 d_i 是偶数, 就在 v_i 处做 $\frac{d_i}{2}$ 个环; 若 d_i 是奇数, 就在 v_i 处做 $\frac{d_i-1}{2}$ 个环.

则由 $\sum_{i=1}^p d_i$ 为偶数可知, v_1, v_2, \dots, v_p 中有偶数个奇点.

因此, 将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i 两两配对并连上一条边.

最后所得到的度序列就是 (d_1, d_2, \dots, d_p) .

定理 1.5 设 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为非负整数的不增序列,

则 d 是图序列当且仅当 $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ 为图序列.

证明: 先证明充分性. 若 d' 是图序列, 令 G_1 是它的一个实现. $V(G_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ 且

$d_{G_1}(v_2) = d_2 - 1, d_{G_1}(v_3) = d_3 - 1, \dots, d_{G_1}(v_{d_1+1}) = d_{d_1+1} - 1, d_{G_1}(v_{d_1+2}) = d_{d_1+2}, \dots, d_{G_1}(v_n) = d_n$.

则在 G_1 上增加一个新的顶点 v_1 , 且令 v_1 与 G_1 中的顶点 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 相连边, 所得到的图记为 G .

显然图 G 的度序列为 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 从而 d 为图序列.

再证明必要性. 设 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是一个图序列. 令 G 是它的一个图实现,

并令 $V(G) = v_1, v_2, \dots, v_n$ 且 $d_i = d_G(v_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

如果图 G 的顶点 v_1 与顶点 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 相邻, 则 $G - v_1$ 的度序列恰好是 d' . 故 d' 是图序列.

如果顶点 v_1 在 G 中不是与 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 中的所有顶点相邻.

不失一般性, 假设与 v_1 相邻的各个顶点的度数的和最大且假设 v_1 与 v_2 不相邻,

但 v_1 与 $v_j \in \{v_{d_1+2}, v_{d_1+3}, \dots, v_n\}$ 相邻, 则有两种情况:

情况 1: $d_2 = d_j$, 则将 v_j 与 v_2 互换, 可认为 v_1 与 v_2 相邻.

情况 2: $d_2 > d_j$, 则必存在某个顶点 v_k , 使得 $v_k v_2 \in E(G)$, 但 $v_k v_j \notin E(G)$.

现在, 我们在 G 中删去边 $v_1 v_j$ 和 $v_2 v_k$, 加上边 $v_1 v_2$ 和边 $v_k v_j$, 得到的图记作 G' .

在新的图 G' 中 v_1 与 v_2 相邻, 即与 v_1 相邻的顶点的度数之和比原图中更大.

重复上述过程, 显然经过有限步, 使得所得的图满足 v_1 与 $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ 均相邻.

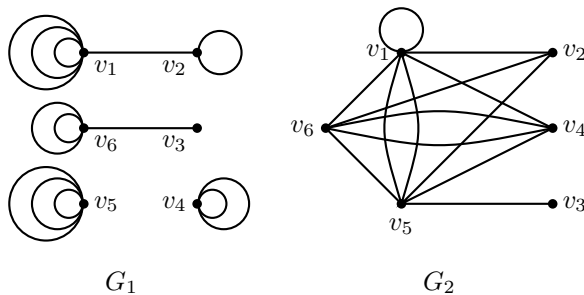
从而可知, $G - v_1$ 的度序列是 d' . 故 d' 是图序列.

例 1.2 下列序列是否为某一图的度序列, 是否为图序列.

- (1) $(5, 4, 3, 2, 2, 1)$; (2) $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$; (3) $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$

注意: 以非负整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_p) 为度(图)序列的图一般有很多.

例如, 下图所示的 G_1 与 G_2 的度序列均是 $(7, 3, 1, 4, 6, 5)$.



§1.2 图的连通度

一、路和连通

道(途径, 链)(walk): 有限非空点边交错序列

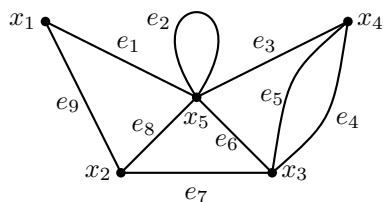
$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k.$$

使 e_i 的两个端点为 v_{i-1}, v_i ($1 \leq i \leq k$), 对简单图可记为 $w = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k$.

称 w 为 v_0 到 v_k 的一条道(或途径), 顶点 v_0 和 v_k 分别称为 w 的起点和终点. 整数 k 为 w 的长.

注意: 在道(途径)中, 点或边可以重复.

1. 迹(trail): 边不重复的道;
2. 路(path): 点不重复的迹;
3. 圈(cycle): 一条闭的起点和内部顶点不相同的迹.
长为 k 的圈称为 k 圈, 或称为 k 回路(circuit), 记作 C_k .
当 k 为奇数时称为奇圈; 当 k 为偶数时称为偶圈.



x_1-x_3 链: $x_1 e_9 x_2 e_8 x_5 e_2 x_5 e_3 x_4 e_3 x_5 e_6 x_3$

x_1-x_3 迹: $x_1 e_9 x_2 e_8 x_5 e_2 x_5 e_3 x_4 e_4 x_3$

x_1-x_3 路: $x_1 e_9 x_2 e_8 x_5 e_3 x_4 e_4 x_3$

定义 1.11 给定无向图 $G = (V(G), E(G), \varphi(G))$, $x, y \in V(G)$, 若图 G 中存在连接 x 和 y 的路, 则称顶点 x 和 y 是连通的(connected). 规定 x 到自身总是连通的.

容易验证, 顶点集 $V(G)$ 上的顶点之间的连通关系是 $V(G)$ 上的等价关系, 该等价关系确定 $V(G)$ 的一个划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$, 使得当且仅当两个顶点 x 和 y 属于同一子集 V_i 时, x 和 y 才是连通的.

V_i 在 G 中的导出子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_m]$ 称为图 G 的连通分支或分支(component), m 称为 G 的连通分支数(number of components), 记作 $\omega(G) = m$.

定义 1.12 如果无向图 G 中每一对不同的顶点 u 和 v 都有一条路(即连通分支只有一个, $\omega(G) = 1$), 则称 G 为连通图(connected graph). 反之, 称为非连通图.

定义 1.13 设 $D = (V(D), E(D), \varphi(D))$ 是有向图, 对 $x, y \in V(D)$, 若图 D 中存在 x 到 y 的有向路, 则称顶点 x 可达顶点 y .

- 1) 对有向图 D 的任何一对顶点之间, 至少有一个顶点可达另一个顶点, 则称 D 为单侧连通的;
- 2) 对有向图 D 的任何一对顶点之间是相互可达的, 则称 D 为强连通的(strongly connected);
- 3) 若有向图 D 的基础图是连通的, 则称 D 为弱连通的(weakly connected).

定义 1.14 在无向图 $G = (V(G), E(G), \varphi(G))$ 中, 对 $\forall x, y \in V(G)$, G 中所有从 x 到 y 的路的最小长度称为顶点 x 和 y 的距离(distance), 记作 $d(x, y)$ 或 $d(y, x)$. 若 G 中不存在 x 到 y 的路, 则规定 $d(x, y) = \infty$.

在有向图 $D = (V(D), E(D), \varphi(D))$ 中, 对 $x, y \in V(D)$, D 中所有从 x 到 y 的有向路的最小长度称为从 x 到 y 的距离, 记作 $d(x, y)$. 若 x 不可达 y , 则同样规定 $d(x, y) = \infty$.

称 $\mathfrak{R} = \max\{d(x, y) | \forall x, y \in V(G)\}$ 为图 G 的直径(diameter).

定理 1.6 图 $G = (V_1, V_2; E)$ 是一个二部图的充分必要条件是 G 中无奇圈.

证明: 必要性: 设 G 的任意圈为 $C = u_1 u_2 \cdots u_n u_1$. 不妨设 $u_1 \in V_1$ ($V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$).

由于 $u_1 u_2 \in E(G)$ 且 G 为二部图, 因此 $u_2 \in V_2$. 同样, $u_3 \in V_1$, $u_4 \in V_2, \dots$.

一般地, $u_{2k-1} \in V_1$, $u_{2k} \in V_2$. 由 $u_1 \in V_1$ 可知, $u_n \in V_2$.

因此, 对某一个 k 有 $n = 2k$, 从而 C 为偶圈.

充分性: 不妨设 G 是连通的. 任取 G 的顶点 u , 令

$$V_1 = \{v \in V(G) | d(u, v) \text{ 是偶数}\}; \quad V_2 = \{v \in V(G) | d(u, v) \text{ 是奇数}\}$$

则有 $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

设 $\forall v_1, v_2 \in V_1$ (或 V_2), 根据二部图的定义, 往证 v_1, v_2 不相邻.

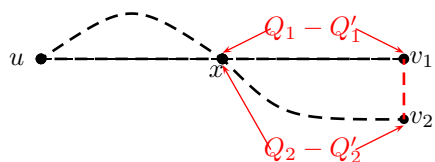
设 $Q_1 = P_1(u, v_1)$ 是 u, v_1 之间的最短路, $Q_2 = P_2(u, v_2)$ 是 u, v_2 之间的最短路.

则有 V_1 (或 V_2) 的定义可知, Q_1 和 Q_2 的长度的奇偶性相同.

假设 v_1, v_2 相邻. 则

1. 当 Q_1 和 Q_2 除了顶点 u 之外, 没有公共顶点时, 显然 $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{v_1, v_2\}$ 为奇圈, 矛盾.
2. 当 Q_1 和 Q_2 除了顶点 u 之外, 还有公共顶点时, 设 x 是 Q_1, Q_2 的最后一个交点, 则在 Q_1, Q_2 中从 u 到 x 的路 Q'_1, Q'_2 的长度相同, 均为 u 到 x 之间的最短路.
于是, $Q_1 - Q'_1$ 和 $Q_2 - Q'_2$ 的长度具有相同的奇偶性. 从而, $Q = (Q_1 - Q'_1) \cup (Q_2 - Q'_2) \cup \{v_1, v_2\}$ 是一个奇圈, 矛盾.

所以, G 为二部图.



因为, Q_1 和 Q_2 是长度的奇偶性相同的最短路.

所以, Q'_1, Q'_2 也是 u 到 x 的最短路.

故, Q'_1, Q'_2 的长度相同.

因此, x 到 v_1 ($Q_1 - Q'_1$) 和 x 到 v_2 ($Q_2 - Q'_2$) 的长度的奇偶性相同.

由此定理, 我们把二部图也称为偶图.

二、割点和割边

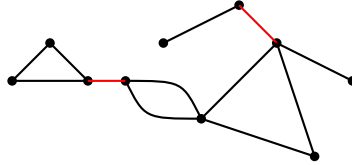
定义 1.15 割点(cut vertex): 如果 $\omega(G - v) > \omega(G)$, 则称顶点 v 为图 G 的割点.

注意: $\omega(G)$ 表示图 G 的连通分支个数.

定理 1.7 连通图 G 的一个顶点 v 是割点的充分必要条件是 $G - v$ 不连通.

证明: 由割点的定义, 这是很容易得到的.

定义 1.16 割边 (或桥) (cut edge): 如果 $\omega(G - e) > \omega(G)$, 则称边 e 为图 G 的割边.



定理 1.8 设 $\forall e \in E(G)$, 有 $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$. 则 e 是 G 的割边的充分必要条件是 $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$.

证明: G 可看作由 $G - e$ 添加边 e 而得到. 由于在一个图中添加一条边后其连通分支数要么不变要么减少1.

因此, 或者 $\omega(G) = \omega(G - e)$, 或者 $\omega(G) = \omega(G - e) - 1$. 从而,

$$\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1 \quad (1)$$

又该 e 是 G 的割边, 所以 $\omega(G - e) > \omega(G)$. 从而由(1)式可知, $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$.

反之, 若 $\omega(G - e) = \omega(G) + 1 > \omega(G)$, 则由割边的定义, e 是 G 的割边.

定理 1.9 e 是 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何一个圈上.

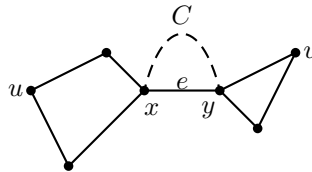
证明: 设 e 是 G 的割边, 则由 $\omega(G - e) > \omega(G)$ 可知, 必有两点 u 和 v 在 G 中连通但在 $G - e$ 中不连通.

因此, 在 G 中必有某一条 $u \rightarrow v$ 路 P 经过 e . 设 x 和 y 是 e 的两个端点, 并且在 P 上 x 前于 y .

则在 $G - e$ 中, u 被 P 的一节连到 x , y 被 P 的一节连到 v .

反证法, 假设 e 在某圈 C 中, 则在 $G - e$ 中 x 和 y 将被路 $C - e$ 所连.

于是, u 和 v 在 $G - e$ 就连通, 导致矛盾.



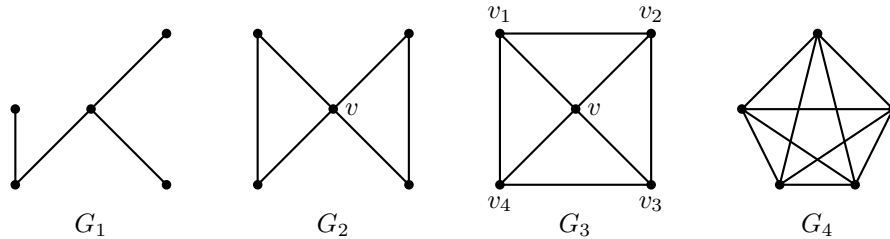
反之, 假设 $e = xy$ 不是 G 的割边, 则 $\omega(G - e) = \omega(G)$.

由于在 G 中存在一条 $x \rightarrow y$ 路(即 xy), 所以 x 和 y 都在 G 的同一个分支中.

从而, x 和 y 在 $G - e$ 的同一个分支中.

因此, 由 $\omega(G - e) = \omega(G)$ 可知, 在 $G - e$ 中存在一条 $x \rightarrow y$ 路 $P(\neq xy)$.

于是, e 就位于 G 的圈 $P + e$ 中, 矛盾.



G_1 : 去掉任何一条边都将使它不连通, 是最小连通图, 这样的图称为树;

G_2 : 去掉一条边不会影响连通性, 但去掉点 v 就使它不连通;

G_3 : 既无割边也无割点, 但去掉 v, v_1, v_3 就使它不连通;

G_4 : 既无割边也无割点, 去掉任何三点仍然连通.

三、连通度

定义 1.17 若对 $V(G)$ 的一个真子集 T 满足 $G - T$ 不连通或是平凡图, 则称 T 为 G 的一个顶点割(vertex cut).

k 顶点割: 具有 k 个元素的顶点割.

点连通度: 称 $\kappa(G) = \min\{|T| | T \text{ 是 } G \text{ 的顶点割}\}$ 为 G 的点连通度. 若 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 为 k 连通的.

边割: 若对 $E(G)$ 的一个真子集 S 满足 $G - S$ 不连通或是平凡图, 则称 S 为 G 的一个边割(edge cut).

k 边割: 具有 k 个元素的边割.

边连通度: 称 $\kappa'(G) = \min\{|S| | S \text{ 是 } G \text{ 的边割}\}$ 为 G 的边连通度. 若 $\kappa'(G) \geq k$, 则称 G 为 k 边连通的.

例如, 对上述图 G_1, G_2, G_3, G_4 有:

$$\begin{aligned} \kappa(G_1) &= 1; & \kappa(G_2) &= 1; & \kappa(G_3) &= 3; & \kappa(G_4) &= 4. \\ \kappa'(G_1) &= 1; & \kappa'(G_2) &= 2; & \kappa'(G_3) &= 3; & \kappa'(G_4) &= 4. \end{aligned}$$

注意: 对完全图 K_n , 有 $\kappa(K_n) = n - 1$; 而对孤立点 u , 规定 $\kappa(u) = 0$.

定理 1.10 $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$. 其中 $\delta(G)$ 是图 G 的最小顶点度.

证明: 若 G 不连通, 则 $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$, 故上式成立. 若 G 连通,

(1) 先证 $\kappa'(G) \leq \delta(G)$, 设 v 是 G 中度数最小的顶点, 即 $d(v) = \delta(v)$.

并设所有与 v 关联的边集合为 $S(v)$. 则显然 v 是图 $G - S(v)$ 的一个孤立点. 于是 $\kappa'(G) \leq |S(v)| = \delta(G)$.

(2) 再证 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, 对 $\kappa'(G)$ 用数学归纳法. 当 $\kappa'(G) = 1$ 时, 显然 $\kappa(G) = 1$, 故上式成立.

假设对所有 $\kappa'(G) = n$ ($n \geq 2$) 的图 G , 有 $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

今设 $\kappa'(H) = n + 1$, S 是图 H 的一个边割, 且 $|S| = n + 1$.

若边 $e = \{u, v\} \in S$, 易知 $\kappa'(H - e) = n$, 故由假设知, $\kappa(H - e) \leq \kappa'(H - e)$.

从而, 图 $H - e$ 有一个顶点割 T 使得 $|T| \leq n$.

但此时 $T \cup \{u\}$ 就是 H 的一个顶点割, 即 $\kappa(H) \leq |T \cup \{u\}| \leq n + 1 = \kappa'(H)$.

所以由归纳法原理可知, $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$.

定义 1.18 如果无向图 G 的连通度 $\kappa(G) \geq n$ ($n \geq 2$), 则称图 G 是 n 连通的或图 G 为 n 连通图;

如果无向图 G 的边连通度 $\kappa'(G) \geq n$ ($n \geq 2$), 则称图 G 是 n 边连通的或图 G 为 n 边连通图

注意：由定理可知， n 连通图一定为 n 边连通图，但 n 边连通图不一定为 n 连通图.

定理 1.11 一个 $\nu \geq 3$ 的图 G 是2连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连.

证明：若 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连，则显然 G 是连通的，并且没有1顶点割.

因此， G 是2连通的.

反之，设 G 是2连通图，对 u 和 v 之间的距离 $d(u, v)$ 用归纳法来证明.

首先，假设 $d(u, v) = 1$. 由于 G 是2连通的，因此边 uv 不是割边.

从而，它必包含在某个圈中. 由此可推出， u 和 v 被 G 中两条内部不相交的路所连.

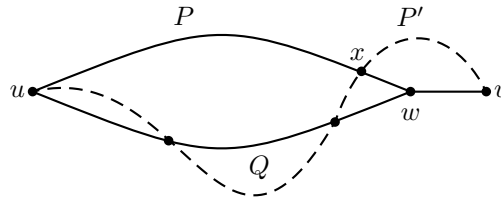
假设对于距离小于 k 的任意两个顶点均成立，并且设 $d(u, v) = k \geq 2$.

考察长为 k 的一条 (u, v) 路，并且设 w 是该路上 v 前面的那个顶点.

因为 $d(u, w) = k - 1$ ，所以由归纳法假设可知，在 G 中有两条内部不相交的 (u, w) 路 P 和 Q .

又因为 G 是2连通的，所以 $G - w$ 是连通的，并且包含一条 (u, v) 路 P' .

设 x 是在 P' 中又在 $P \cup Q$ 中的最后一个顶点.



由于 u 在 $P \cup Q$ 中，这样的顶点 x 是存在的，并不排除 $x = u$ 的可能性.

不失一般性，假定 x 在 P 中，则 G 有两条内部不相交的 (u, v) 路：

一条由 P 的一节(从 u 到 x)和 P' 的一节(由 x 到 v)联合组成，另一条由 Q 和路 wv 组成.

定义 1.19 没有割点的非平凡连通图称为块(block). G 中不含割点的极大连通子图称为图 G 的块.

推论 1.1 若 G 是 $\nu \geq 3$ 的块，则 G 的任意两个顶点都位于同一个圈上.

推论 1.2 若 G 是 $\nu \geq 3$ 的块，则 G 的任意两条边都位于同一个圈上.

§1.3 图的矩阵表示

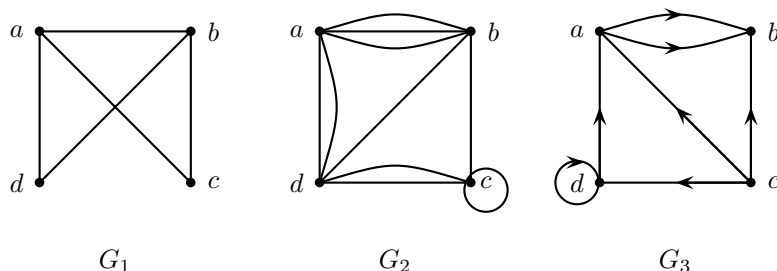
为了便于计算, 特别为便于用计算机处理图, 下面介绍图的一种表示方法——图的矩阵表示.

一、邻接矩阵

定义 1.20 设 $G = (V, E, \phi)$ 是任意图, 其中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

则 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 称为 G 的邻接矩阵, 其中 a_{ij} 为图 G 中以 v_i 为起点且以 v_j 为终点的边的数目.

例 1.3 求下面图 G_1, G_2, G_3 的邻接矩阵.



解:

$$G_1: \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad G_2: \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad G_3: \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

由定义可知, 无向图的邻接矩阵是实对称矩阵, 而有向图的邻接矩阵未必是对称矩阵. 特别地, 无向简单图的邻接矩阵为 0—1 实对称矩阵. 由此, 对无向简单图的邻接矩阵可定义如下:

定义 1.21 设简单图 G 的顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称由元素 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 所构成的 n 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 称为图 G 的邻接矩阵.

以下讨论的图均为无向简单图.

定理 1.12 设 $G = (V(G), E(G))$ 为顶点数为 n 的无向简单连通图, 则图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} 的 k 次方 $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^{(k)})$ 的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 为图 G 的长度为 k 的不同的 v_i-v_j 道的条数, 其中 $v_i, v_j \in V(G)$.

证明: 用数学归纳法. 当 $k = 1$ 时显然.

假设 $\mathbf{A}^{k-1} = (a_{ij}^{(k-1)})$ 的元 $a_{ij}^{(k-1)}$ 为图 G 的长度为 $k-1$ 的 v_i-v_j 不同道的条数. 则由 $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{A}$ 可知,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i1}^{(k-1)} a_{1j} + a_{i2}^{(k-1)} a_{2j} + \dots + a_{it}^{(k-1)} a_{tj} + \dots + a_{in}^{(k-1)} a_{nj}$$

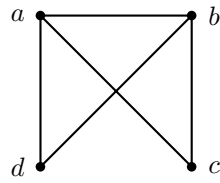
此时, 当 $v_t v_j \notin E(G)$ 时, $a_{tj} = 0$; 当 $v_t v_j \in E(G)$ 时, $a_{tj} = 1$.

而图 G 的长度为 k 的每条 $v_i - v_j$ 道是在长度为 $k-1$ 的 $v_i - v_t$ 道和边 $v_t v_j$ 所相连构成, 其中 $t = 1, 2, \dots, n$.

因此, $a_{ij}^{(k)}$ 为图 G 的长度为 k 的不同的 $v_i - v_j$ 道的条数. 命题得证.

例如, 在例1.3的图 G_1 中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



G_1

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= 3 & a \rightarrow b \rightarrow a \\ & & a \rightarrow c \rightarrow a \\ & & a \rightarrow d \rightarrow a \\ a_{12}^{(2)} &= 2 & a \rightarrow d \rightarrow b \\ & & a \rightarrow c \rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{(3)} &= 4 & a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \\ & & a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a \\ & & a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow a \\ & & a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a \\ a_{34}^{(3)} &= 2 & c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d \\ & & c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \end{aligned}$$

推论 1.3 对 n 阶无向简单图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} 的 k 次方 $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^{(k)})$ 有

- 1) $a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$, 即 $a_{ii}^{(2)}$ 为顶点 v_i 的度数;
- 2) $\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)}$ 是图 G 的边数;
- 3) $a_{ii}^{(3)}$ 是简单图 G 中以 v_i 为一个顶点的三角形数目的二倍;
- 4) $\frac{1}{6} \text{tr}(\mathbf{A}^3)$ 是由图 G 的边所构成的三角形的个数.

其中, $\text{tr}(\mathbf{A}^k) = a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} + \dots + a_{nn}^{(k)}$ 表示 \mathbf{A}^k 的迹, 即矩阵 \mathbf{A}^k 的主对角线上的元素之和.

证明:

- 1) 由 $a_{ii}^{(2)}$ 是长度为 2 的不同的 $v_i - v_i$ 道的条数可知, $a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$.

实际上, 对简单连通图来说, 在矩阵 \mathbf{A} 中, $d(v_i)$ 为 i 行(或 i 列)的元素之和.

- 2) 由 1) 和 $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon(G)$ 可知, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)}$ 是图 G 的边数.

- 3) 长为 3 的 $v_i - v_i$ 道只能是以 v_i 为一个顶点的三角形.

而每一个这样的三角形按两种不同方向对应于两条不同的道.

所以, $a_{ii}^{(3)}$ 是简单图 G 中以 v_i 为一个顶点的三角形数目的二倍.

例如, $v_i - v_j - v_k - v_i$ 和 $v_i - v_k - v_j - v_i$.

4) $a_{ii}^{(3)}$ 是长度为3的不同的 $v_i - v_i$ 道的条数, 且长为3的 $v_i - v_i$ 道只能是以 v_i 为一个顶点的三角形.

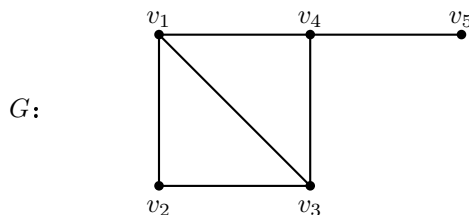
对图 G 的一个三角形, 其点集不妨设 $\{v_i, v_j, v_k\}$.

则由点 v_i 出发的 $v_i - v_i$ 道有两条 ($v_i - v_j - v_k - v_i$ 和 $v_i - v_k - v_j - v_i$).

同样, 包含 v_i, v_k 的 $v_j - v_j$ 道和包含 v_i, v_j 的 $v_k - v_k$ 道分别有两条.

故, 三角形的个数为 $\frac{1}{6}tr(\mathbf{A}^3)$.

例 1.4 由



可知,

$$\mathbf{A}(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

因此, $d(v_1) = 3, d(v_2) = 2, d(v_3) = 3, d(v_4) = 3, d(v_5) = 1$.

从而, 三角形的个数 $= \frac{1}{6}(4 + 2 + 4 + 2 + 0) = 2$.

给定 n 阶图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} , 做一个 n 阶方阵: $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1} = (r_{ij})_{n \times n}$.

显然, r_{ij} 就是 G 中连接顶点 v_i 和 v_j 长度不超过 $n-1$ 的不同道的数目. 因此, 可以利用矩阵 \mathbf{R} 来判断一个图的连通性.

定理 1.13 已知 \mathbf{A} 为 n ($n \geq 3$) 阶无向简单图 G 的邻接矩阵. 令 $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}$, 则 G 为连通图的充分必要条件为 \mathbf{R} 中的每个元素都不为零.

证明: 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{R} = (r_{ij})$.

必要性: 设 G 是连通图, 则 G 中任意两个不同的顶点 v_i 与 v_j 之间有一条路连接.

若记这条路的长度为 k , 显然 $k \leq n-1$, 则有 $r_{ij} \geq a_{ij}^{(k)} \geq 1$ ($i \neq j$).

而对于任意的 i ($1 \leq i \leq n$), 因为 G 为连通图, 且 $n \geq 3$. 所以, 由推论 1.3 可得, $r_{ii} \geq a_{ii}^{(2)} = d(v_i) > 0$.

因此, 矩阵 \mathbf{R} 中没有零元素.

充分性: 设 v_i 与 v_j 是 G 中任意两个不同的顶点.

则由 $r_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n-1)} \neq 0$ 可知, 存在 $1 \leq k \leq n-1$, 使得 $a_{ij}^{(k)} \neq 0$.

从而, 在 G 中必有一条长为 k 的道连接 v_i 和 v_j , 即 v_i 与 v_j 之间有一条路. 因此, 图 G 是连通图.

二、图的特征多项式

定义 1.22 图 G 的邻接矩阵 $\mathbf{A}(G)$ 的行列式 $|\mathbf{A}(G)|$ 称为图 G 的行列式, 记作 $|G|$.

定义 1.23 阶为 n 的图 G 的邻接矩阵 $\mathbf{A}(G)$ 的特征多项式称为图 G 的特征多项式, 记作 $P(G; \lambda)$. 即

$$P(G; \lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(G)| = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^{n-i}.$$

其中, \mathbf{I} 为与 $\mathbf{A}(G)$ 同阶的单位矩阵. 称 λ 为图 G 的特征值.

注意: 由于实对称矩阵的特征值均为实数. 因此, 由图 G 的邻接矩阵为实对称矩阵可知, 其特征值必为实数.

定理 1.14 简单图 G 的所有特征值之和为零.

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为图 G 的所有特征值, 则

$$P(G; \lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(G)| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

比较 λ^{n-1} 的系数得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

而简单图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} 的主对角线上的元素 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$,

所以, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$.

定理 1.15 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为简单图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值, 则 \mathbf{A}^k 的特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

证明: 由 \mathbf{A} 为实对称矩阵可知, 存在正交矩阵 \mathbf{Q} , 使得

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{因而, } \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{Q} = \underbrace{(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) \cdots (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

而 $P(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{Q}; \lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{Q}| = |\mathbf{Q}^{-1}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^k) \mathbf{Q}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^k| = P(\mathbf{A}^k; \lambda)$,

因此, \mathbf{A}^k 的特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

推论 1.4 设 n 阶简单图 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^2) = 2|E(G)|$.

证明: 由定理 1.15 可知, $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 为 \mathbf{A}^2 的特征值. 所以, $\text{tr}(\mathbf{A}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$

而 $\text{tr}(\mathbf{A}^2) = a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} + \cdots + a_{nn}^{(2)} = d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E(G)|$, 因此 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2|E(G)|$.

引理 1.1

$$\begin{aligned}
(|\mathbf{A}(x)|)' &= \left(\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \right)' \\
&= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned}
(|\mathbf{A}(x)|)' &= \left(\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \right)' \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} (f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x))' \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} (f'_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) + f_{1j_1}(x) f'_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) + \cdots \\
&\quad + f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f'_{nj_n}(x)) \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f'_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f'_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) + \cdots \\
&\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f'_{nj_n}(x) \\
&= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

定理 1.16 设 n 阶简单图 G 的特征多项式为 $P(G; \lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(G)| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_n$, 则

$$c_k = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

证明:

$$\begin{aligned}
 P'(G; \lambda) &= \left(\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \right)' \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
 &\quad + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & \lambda - a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

且 $P'(G; \lambda) = n\lambda^{n-1} + (n-1)c_1\lambda^{n-2} + \cdots + 2c_{n-2}\lambda + c_{n-1}$. 所以,

$$\begin{aligned}
 c_{n-1} &= P'(G; 0) \\
 &= \begin{vmatrix} -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{32} & -a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{31} & -a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n3} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & -a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_{n-1}} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_{n-1} i_1} & a_{i_{n-1} i_2} & \cdots & a_{i_{n-1} i_{n-1}} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

同理可得

$$c_k = \frac{P^{(n-k)}(G; 0)}{(n-k)!} = (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

定理 1.17 设 n 阶简单图 G 的特征多项式为 $P(G; \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$, 则

(1) $c_1 = 0$;

(2) $-c_2$ 等于图 G 的边数;

(3) $-c_3$ 等于图 G 中三角形数目的二倍.

证明:

(1) 由 G 为简单图可知, G 不包含环, 即 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 中, $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

所以, 由定理1.16可知, $c_1 = (-1) \sum_{i=1}^n |a_{ii}| = (-1) \sum_{i=1}^n 0 = 0$.

(2) 由 \mathbf{A} 为对称矩阵可知, \mathbf{A} 的所有2阶主子式中, 包含非零元的行列式的形式为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

而对 G 的任一边, 均为行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

因此, $c_2 = (-1)^2 \sum_{i_1 < i_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times (-1) \times |E(G)| = -|E(G)|$.

(3) 至少包含一个非零元的3阶主子式对应于具有1条边、2条边、3条边, 且它们分别对应于

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

而行列式的值为2的主子式对应于 G 的一个三角形, 所以, 若设三角形的个数为 m , 则

$$c_3 = (-1)^3 \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & a_{i_1 i_3} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & a_{i_2 i_3} \\ a_{i_3 i_1} & a_{i_3 i_2} & a_{i_3 i_3} \end{vmatrix} = (-1)^3 \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2m$$

因此, $-c_3 = 2 \times (\text{三角形的个数})$.

三、关联矩阵

定义 1.24 1) 若图 G 为无环 (p, q) 无向图. 令

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若边 } e_j \text{ 与顶点 } v_i \text{ 关联,} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

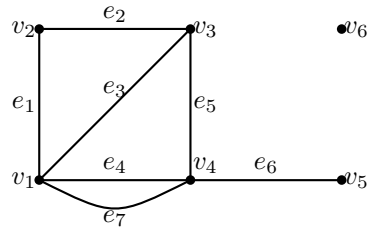
则称矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p \times q}$ 为无向图 G 的关联矩阵.

2) 若图 G 为无环 (p, q) 有向图. 令

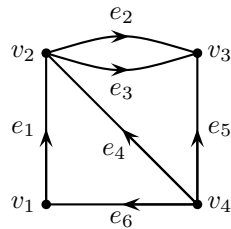
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若边 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的出边,} \\ -1, & \text{若边 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的入边,} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则称矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p \times q}$ 为有向图 G 的关联矩阵.

例如,



$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

注意:

1. 对一个无环无向图 G ,

- (1) 图 G 的关联矩阵 \mathbf{B} 的每一列中只有两个元素为1, 而其余的元素均为零. 即每一列元素之和为2.
- (2) \mathbf{B} 的第 i 行的元素之和为 $d(v_i)$. 即每一行中元素之和为对应顶点的度.
- (3) 若某行中元素全为零, 则对应的顶点为孤立点.
- (4) 重边所对应的列完全相同.

2. 对一个无环有向图 D ,

- (1) 图 D 的关联矩阵 \mathbf{B} 的每一列恰好一个1, 一个-1, 而其余元素均为零. 即每一列元素之和为0.
- (2) \mathbf{B} 的第 i 行, 其1的个数为 v_i 的出度, -1的个数为 v_i 的入度.
- (3) 若某行中元素全为零, 则对应的顶点为孤立点.
- (4) 重边所对应的列不一定完全相同.

定理 1.18 (1) 若 n 阶无向图 G 为连通, 则在模2的运算下 G 的关联矩阵 \mathbf{B} 的秩为 $n-1$.

(2) 若 n 阶有向图 D 为连通, 则 D 的关联矩阵 \mathbf{B} 的秩为 $n-1$.

证明: (1) 因为 \mathbf{B} 的每列恰有2个1, 其所有行的和在模2的运算下必为零.

所以 \mathbf{B} 至多有 $n-1$ 个线性无关的行向量.

又设 α_i 是 \mathbf{B} 的行, 它对应于 G 的顶点 v_i .

不妨设在模2的运算下 $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_r} = 0$ ($1 \leq r \leq n-1$),

则由 G 为连通图可知, 必有 $e = v_{i_j} v \in E(G)$, ($v \neq v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_r}$).

因此 $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_r}$ 相应于边 e 的分量是1, 与在模2的运算下 $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_r} = 0$ 矛盾.

于是 \mathbf{B} 的任意 $n-1$ 个行向量线性无关.

从而 \mathbf{B} 的秩为 $n-1$.

(2) 类似(1)的证明, 并利用有向图 D 的关联矩阵 \mathbf{B} 的每一列元素之和为0可以证明.

定理 1.19 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为图 G 的邻接矩阵和关联矩阵, 则 $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{A} + \mathbf{D}$.

其中, 称 $\mathbf{D} = (d_{ij})$ 为度矩阵, 即 $d_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

证明: 当 $i = j$ 时, 等式的左边表示的是各个顶点 v_i 的度, 等式的右边 \mathbf{A} 的对角线上为零.

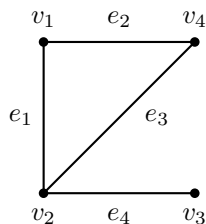
由 \mathbf{D} 的对角线上的元素表示是各个顶点 v_i 的度可知, 等式的左右两边是相等的.

当 $i \neq j$ 时, 在等式左边的 (i, j) 位置的元素是 \mathbf{B} 的第 i 行和第 j 行对应元素作相应的运算的得到的, 所得结果表示两行对应元素同时不为零的个数, 即表示了顶点 v_i 和顶点 v_j 的之间的边的条数.

等式的右边 \mathbf{A} 的 (i, j) 位置的元素也表示的是顶点 v_i 和顶点 v_j 的之间的边的条数.

而 $\mathbf{D}(i, j)$ 位置的元素为零, 因此, 左右两边相等. 证毕.

例如,



$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} + \mathbf{D}.$$

推论 1.5 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 k -正则图 G 的邻接矩阵和关联矩阵, 则 $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{A} + k\mathbf{I}$.

证明: $\mathbf{B}\mathbf{B}'$ 第 (i, j) 元 d_{ij} 为 $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}b_{jk}$.

若 G 为 k -正则图, 则 \mathbf{B} 的第 i 行有 k 个1, 所以 $d_{ii} = k$, 并且 $i \neq j$ 时,

$$d_{ij} = 1 \iff \text{存在边 } e = v_i v_j \text{ 使 } e \in E(G)$$

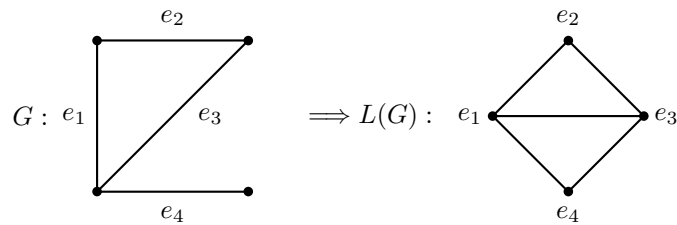
$$d_{ij} = 0 \iff \text{不存在边 } e = v_i v_j \text{ 使 } e \in E(G)$$

即, d_{ii} 为 $k\mathbf{I}$ 的元; d_{ij} 为 \mathbf{A} 的 (i, j) 元. 故, $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{A} + k\mathbf{I}$.

注意: d_{ij} 是与点 v_i 和 v_j 都关联的边 e_k 的条数.

定义 1.25 线图: 对图 G , 将 G 的边看作图 G' 的顶点, G' 中的两点连一条边当且仅当这两点对应于 G 中的边有公共端点, 则称 G' 为图 G 的线图(line graph), 记作 $L(G)$.

例如,



定理 1.20 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为具有 m 条边的 n 阶图 G 的邻接矩阵和关联矩阵, \mathbf{A}_L 为 $L(G)$ 的邻接矩阵, 则有 $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{A}_L + 2\mathbf{I}_m$.

证明: $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ 的第 (i, j) 元 c_{ij} 为 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}b_{kj}$. (注: c_{ij} 是与边 e_i 和 e_j 都关联的顶点 v_k 的个数).

由 \mathbf{B} 的第 j 列恰有2个1可知, $c_{ii} = 2$, 并且 $i \neq j$ 时,

$$c_{ij} = 1 \iff e_i \text{ 和 } e_j \text{ 有公共点}$$

$$c_{ij} = 0 \iff e_i \text{ 和 } e_j \text{ 没有公共点}$$

因此, $i = j$ 时, c_{ii} 为 $2\mathbf{I}_m$ 的元素; $i \neq j$ 时, c_{ij} 为 \mathbf{A}_L 的元素.

故, $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{A}_L + 2\mathbf{I}_m$.

§1.4 图的同构

定义 1.26 对图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, G_1 和 G_2 恒等当且仅当 $V_1 = V_2, E_1 = E_2$. 记作: $G_1 \equiv G_2$.

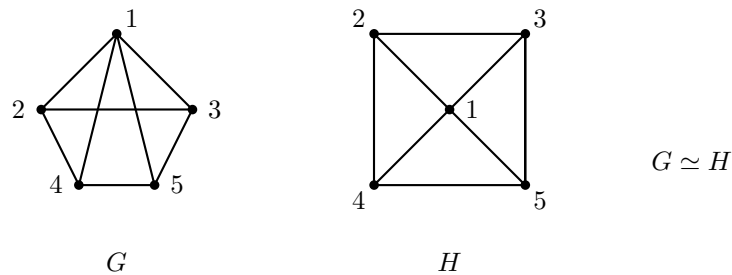
定义 1.27 对图 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, 设 ϕ 是 $V_1 \rightarrow V_2$ 的一个双射, 且满足以下条件:

$$\forall u, v \in V_1, uv \in E_1 \iff \phi(u)\phi(v) \in E_2.$$

则称 ϕ 是 G_1 到 G_2 的一个同构映射, 称 G_1, G_2 同构(isomorphic), 记作 $G_1 \cong G_2$.

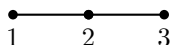
若 ϕ 为 G 到自身的同构映射, 则称 ϕ 为自同构映射.

例如,

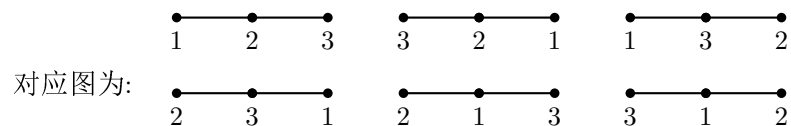


注意:

- 1) 当两个简单图同构时, 两个图的顶点之间具有保持相邻关系的一一对应.
- 2) 所谓同构, 显然两个图有相同的结构, 差异只是顶点和边的名称不同.
因此, 一个无标号的图可以认为是同构图的等价类的代表.
- 3) 所谓自同构就是对图 G 的点集合 $V(G)$ 上的置换, 保持相邻性.
因此, 一个标号的图可以认为是自同构图的等价类的代表.

例 1.5 图 G :  的所有同构映射为:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \phi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \phi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \phi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \phi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



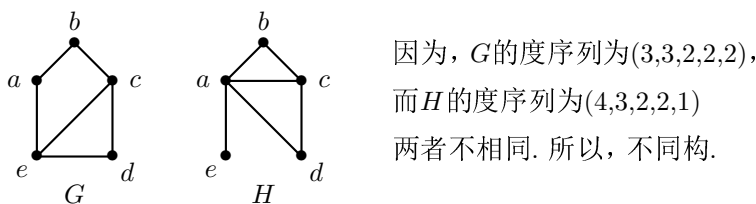
其中, ϕ_1 和 ϕ_2 为图 G 的自同构映射.

判断两个简单图同构的方法:

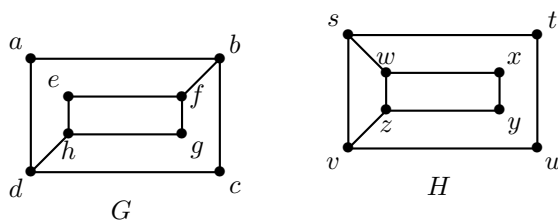
- (1) 两个简单图是否有相同的顶点数;
- (2) 两个简单图是否有相同的边数;
- (3) 两个简单图是否有相同的度序列 (不增序列).

注意: 若两个简单图, 不满足上述3个条件中的某一条, 则不同构, 但若均满足上述3个条件, 也不一定同构.

例 1.6 判定下列图 G 和 H 是否同构.



例 1.7 判定下列图 G 和 H 是否同构.



解: G 的度序列为 $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$, H 的度序列为 $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$.

显然满足上述三个条件, 但 G 和 H 不是同构的.

事实上, 在图 G 里每个3度点都与一个3度点和两个2度点相邻,

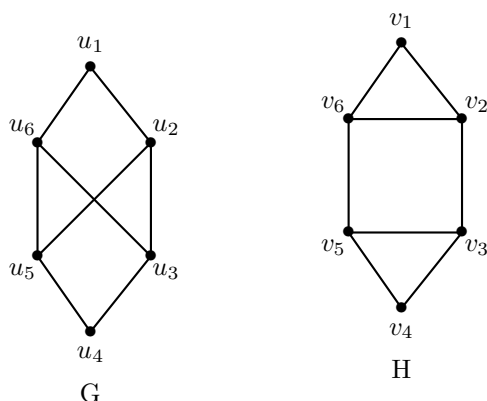
而在图 H 里每个3度点都与两个3度点和一个2度点相邻.

从而, 不同构.

注意: 可以利用通路和回路来帮助判定两个图是否同构.

例如: 具有特定长度的简单回路的存在性来判定是否同构. 另外, 利用通路来构造可能是同构的映射.

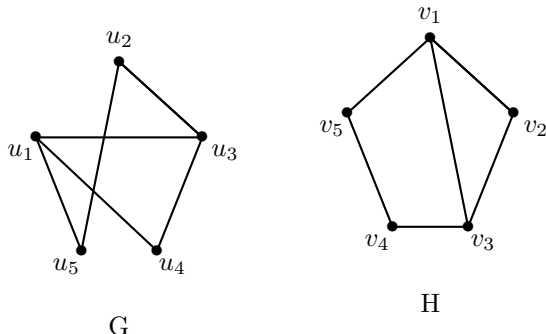
例 1.8 判定下列图 G 和 H 是否同构.



解: 因为, H 有长度为3的简单回路, 而 G 没有长度为3的简单回路.

所以, G 和 H 不是同构.

例 1.9 判定下列图 G 和 H 是否同构.



解: G 的度序列为 $(3,3,2,2,2)$, H 的度序列为 $(3,3,2,2,2)$,

且都具有1个长度为3的简单回路, 1个长度为4的简单回路, 以及1个长度为5的简单回路.

因此, G 和 H 可能是同构.

又 G 里的通路 u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 和 H 里的通路 v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 都经过图里的每一个顶点, 都在3度顶点上开始, 且均分别经过2、3和2度顶点且在2度顶点上结束.

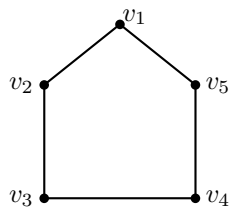
所以, 通过在图里跟随这些通路定义双射 f 为

$$f(u_1) = v_3, f(u_4) = v_2, f(u_3) = v_1, f(u_2) = v_5, f(u_5) = v_4$$

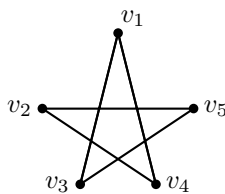
则不难证明, f 是同构映射.

定义 1.28 若简单图 G 同构于 G 的补图 \bar{G} , 则称 G 为自补图.

例如:



G



H

显然 G 与 H 同构,
且 H 为 G 的补图,
从而 G 为自补图.

例 1.10 证明: 若 G 为自补图, 则 $|V(G)| \equiv 0$ 或 $1 \pmod{4}$.

证明: 由 \bar{G} 的定义可知,

$$|E(G)| + |E(\bar{G})| = |E(K_{|V(G)|})| = \binom{|V(G)|}{2} = \frac{1}{2}|V(G)|(|V(G)| - 1)$$

又由 $G \simeq \bar{G}$ 可知, $|E(G)| = |E(\bar{G})|$.

所以, $|E(G)| = \frac{1}{4}|V(G)|(|V(G)| - 1)$. 故, $|V(G)| \equiv 0, 1 \pmod{4}$

§1.5 最短路(或最短通路)问题

一、最短路定义

边上有数的图称为**加权图**(weighted graph). 若边 e 标记数 k , 称边 e 的**权**(weight)为 k , 记作 $w(e) = k$.

在加权图中, 道(迹、路)的长度为道(迹、路)上的所有边的权值的和.

在加权图中, 我们经常需要找出两个指定点之间的最短路(如有最小长度的路), 通常称其为**最短路问题**(shortest path problem).

在实际工作中, 经常会遇到从甲地到乙地, 希望寻求一条最短的路程.

如, 矿井通风网络需要计算两点之间的最小通风阻力等问题. 这就是图论中有关最短路问题.

最短路问题是图论中的一个基本问题. 它在通讯、石油管线铺设、公路网等实际问题中有着广泛的应用.

例 1.11 已知如右图所示的单行线交通网. 每弧旁的数字表示通过这条单行线所需要的费用. 现在某人要从 v_1 出发, 通过这个交通网到 v_8 去. 求使总费用最小的旅行路线.

此问题转化为:

设在赋权有向图 $D = (V, A)$ 中, 所有弧上的权均非负.

如果 $(v_i, v_j) \notin A$, 则令权 $w(v_i, v_j) = +\infty$.

我们可以把权 $w(a_{ij})$ 看作弧 a_{ij} 的长度. 现在要求一条单向 $v_i \rightarrow v_j$ 通路 P , 使得 $w(P) = \sum_{a \in P} w(a)$ 最小.

若 $w(P_0) = \min_P w(P)$, 则称 P_0 为从 v_i 到 v_j 的最短路, 称 $w(P_0)$ 为从 v_i 到 v_j 的距离, 记作 $d(v_i, v_j)$ (注: $d(v_i, v_j) \neq d(v_j, v_i)$).

解决最短路问题存在几个不同的算法. 我们要介绍的是迪克斯屈拉(Edsger W. Dijkstra)算法, 这是荷兰计算机科学教授迪克斯屈拉在1959年发现的一个算法. 他在1972年获得美国计算机协会授予的图灵奖, 这是计算机科学中最具声望的奖项之一.

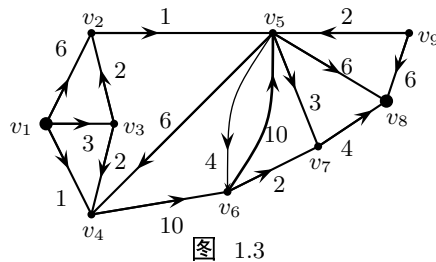


图 1.3

二、某一点到其他点的最短路算法

迪克斯屈拉算法是求出一个连通加权简单图中从顶点 a 到 z 的最短路.

其算法的基本思路为:

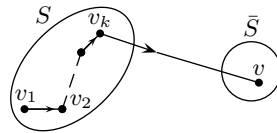
设 S 是 V 的真子集, 并且 $v_1 \in S$, 记 $\bar{S} = V - S$.

若 $P = v_1 v_2 \cdots v_k v$ 是从起点 v_1 到 \bar{S} 的最短通路, 用 $d(v_1, \bar{S})$ 来表示此通路的长,

则显然有 $v_k \in S$, $v \in \bar{S}$, 并且 P 上的通路 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必然是最短的 $v_1 \rightarrow v_k$ 通路.

所以, $d(v_1, v) = d(v_1, v_k) + w(v_k, v)$; $d(v_1, \bar{S}) = \min_{\substack{u \in S \\ v \in \bar{S}}} \{d(v_1, u) + w(u, v)\}$.

迪克斯屈拉算法可以在长度矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ij})$ 上直接实现.



定义 1.29 对赋权有向图 D (或无向图 G), 称 $\mathbf{W} = (w_{ij})$ 为图 D (或 G)的长度矩阵.

$$\text{其中 } w_{ij} = \begin{cases} w(v_i, v_j), & (v_i, v_j) \in E(D) \text{ (或 } E(G)), \\ \infty, & \text{其它.} \end{cases}$$

在长度矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ij})$ 上的迪克斯屈拉算法步骤如下:

- (1) 划掉矩阵 \mathbf{W} 的第一列, 并给第一行以标号 $\boxed{0}$;
- (2) 在已标号的行中的未被划去的元素中, 找一个最小的元素并圈起来, 不妨设是 w_{ij} . 那么就把第 j 列划掉, 同时给第 j 行以标号 \boxed{i} , 并把第 j 行各个元素都加上 w_{ij} .
- (3) 如果所有各行都已获得标号, 则步骤终止, 并由标号返回追踪, 则得到 v_1 到各点的最短路.

注意: 在计算过程中的矩阵中, 若在已标号的行中的未划去的元素都是 ∞ (例如 v_j 列), 则不存在最小元素. 此时, 没有从 v_1 到 v_j 的单向通路. 这时, 可划去第 j 列, 而第 j 行得标号 \boxed{j} .

例 1.12 利用长度矩阵求下列图中, 顶点 v_1 到其它各点的最短路.

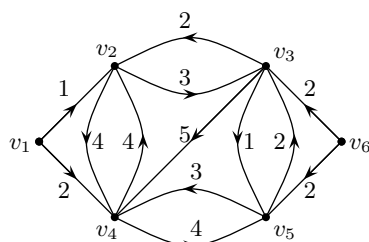


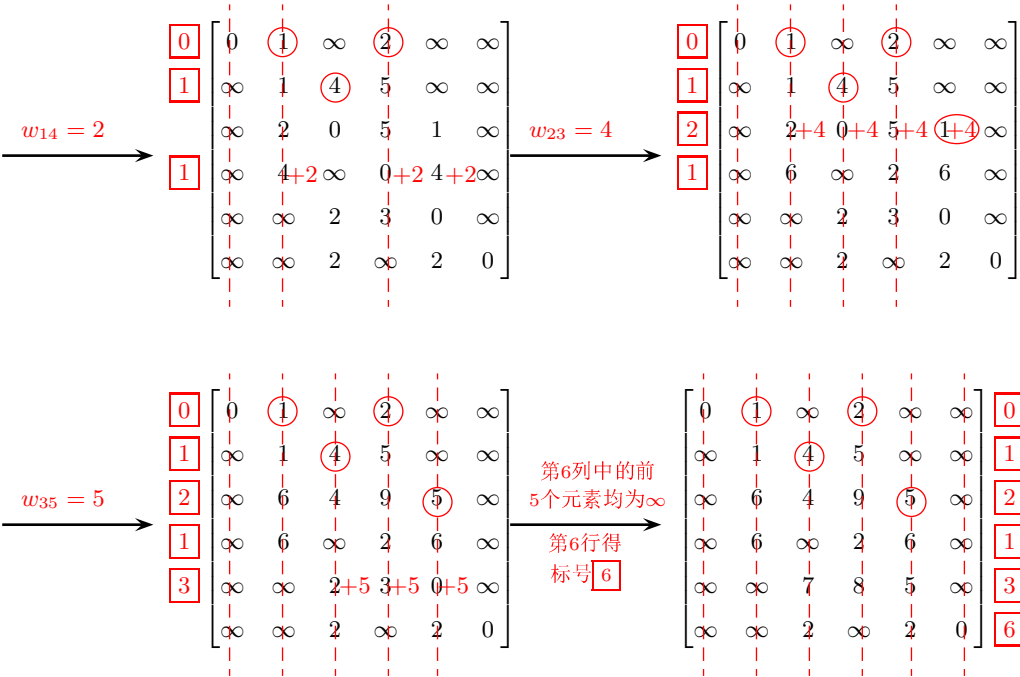
图 1.4

解: 其长度矩阵为

$$\mathbf{W} = (w_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 1 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

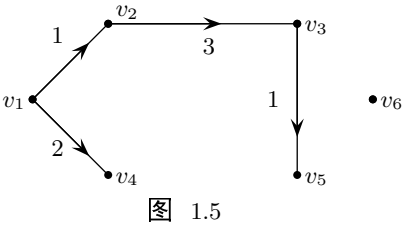
其中, w_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)表示弧 a_{ij} 的长(权). 若某个 $w_{ij} = \infty$, 则表示没有从点 v_i 到 v_j 的弧.

$$\begin{array}{c} \boxed{0} \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 1 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_{12}=1} \begin{array}{c} \boxed{0} \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & \infty & \textcircled{2} & \infty & \infty \\ \infty & 0+1 & 3+1 & 4+1 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 5 & 1 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \boxed{1} \end{array} \end{array}$$



此时，在最后一个矩阵中圈起来的元素恰好是 v_1 到各点的最短路的长。
即， $d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 4, d_4 = 2, d_5 = 5, d_6 = \infty$ 。

注意：矩阵中第 j 行所对应的 \boxed{i} 表示 $v_i \rightarrow v_j$ 的弧，
即以 v_j 为终点的弧的起点为 $v_{\boxed{i}}$ 。



三、应用举例—设备更新问题

例 1.13 某企业使用一台设备. 在每年年初, 企业领导部门就要决定是购置新的, 还是继续使用旧的. 若购置新设备, 就要支付一定的购置费用; 若继续使用旧设备, 则需支付一定的维修费用. 现在的问题是如何制定一个几年之内的设备更新计划, 使得总的支付费用最少. 我们用一个五年之内要更新某种设备的计划为例. 若已知该种设备在各年年初的购买价格为:

表 1.1

第1年	第2年	第3年	第4年	第5年
11	11	12	12	13

还已知使用不同时间(年)的设备所需要的维修费用为:

表 1.2

使用年数	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5
维修费用	5	6	8	11	18

此时,可供选择的设备更新方案是很多的.

例如,每年都购置一台新设备,则其购置费用为 $11 + 11 + 12 + 12 + 13 = 59$.

而每年支付的维修费用为5,五年合计为25. 于是五年总的支付费用为 $59 + 25 = 84$.

又如决定在第一、三、五年各购进一台.

这个方案的设备购置费为 $11 + 12 + 13 = 36$. 维修费用为 $5 + 6 + 5 + 6 + 5 = 27$. 五年的总的支付费用为63.

如何制定使得总的支付费用最少的设备更新计划呢? 可以把这个问题化为最短路问题.

用点 v_i 代表“第 i 年年初购进一台新设备”的状态(再增加一点 v_6 ,可理解为第5年年底).

从 v_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)到 v_{i+1}, \dots, v_6 各画一条弧. 弧 (v_i, v_j) 表示在第 i 年年初购进的设备一直使用到第 j 年年初(即第 $j-1$ 年底). 每条弧的权可按已知资料计算出来.

例如, (v_1, v_4) 是第一年年初购进一台新设备(支付购置费11),一直使用到第3年年底(支付维修费 $5+6+8=19$),故 (v_1, v_4) 上的权为30.

此时,制定一个最优的设备更新计划的问题就等价于寻求从 v_1 到 v_6 的最短路的问题. 其有向图如下:

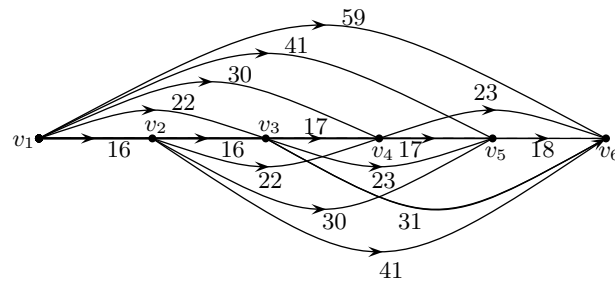
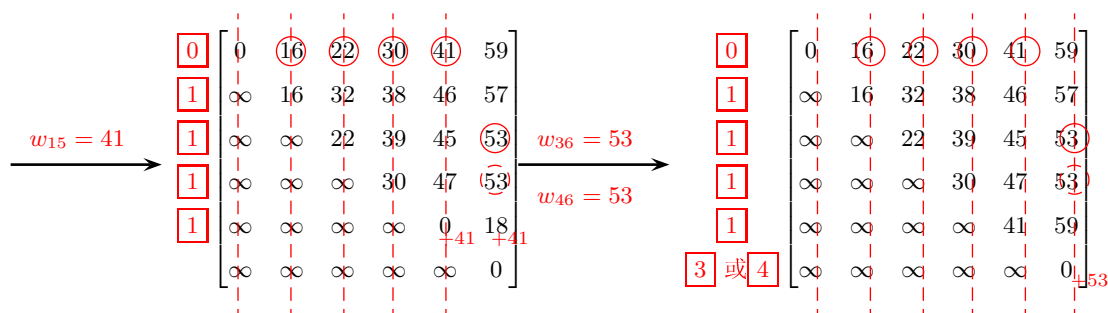


图 1.6

其长度矩阵为

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} \boxed{0} \\ \mathbf{W} = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59 \\ \infty & 0 & 16 & 22 & 30 & 41 \\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_{12}=16} \begin{matrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59 \\ \infty & 0 & 16 & 22 & 30 & 41 \\ \infty & 16 & 0 & 17 & 23 & 31 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{w_{13}=22} \begin{matrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59 \\ \infty & 16 & 32 & 38 & 46 & 57 \\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_{14}=30} \begin{matrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59 \\ \infty & 16 & 32 & 38 & 46 & 57 \\ \infty & \infty & 22 & 39 & 45 & 53 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



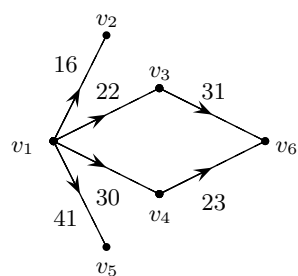
所以, $d_1 = 0$, $d_2 = 16$, $d_3 = 22$, $d_4 = 30$, $d_5 = 41$, $d_6 = 53$.

其最短路图如图所示.

所以, v_1 到 v_6 的最短路为 $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6$ 或 $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$.

即有两个最优方案: 一个方案是在第1年、第3年各购置一台新设备;

另一个方案是在第1年、第4年各购置一台新设备. 五年总的支付费用为53.



四、任意两点间的最短路算法—福劳德 (Floyd) 算法

Dijkstra算法只求出图中一个特定顶点到其他各顶点的最短路. 但在许多实际问题中, 需求出任意两点之间的最短路, 如全国各城市之间最短的航线, 选址问题等. 当然, 要求出一个图的任意两点间的最短路, 只需将图中每一个顶点依次视为始点, 然后用Dijkstra算法就可以, 但这要用到大量的计算.

下面我们先简要介绍一个比较好的算法—— Floyd(1962)算法.

为了讨论方便, 先定义矩阵的一种运算.

定义 1.30 已知矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times l}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{l \times n}$, 规定 $\mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{B} = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中,

$$c_{ij} = \min(a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, \dots, a_{il} + b_{lj})$$

定义 1.31 已知矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, 规定 $\mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (d_{ij})_{m \times n}$, 其中,

$$d_{ij} = \min(a_{ij}, b_{ij})$$

可以利用上面定义的运算求任意两点间的最短距离.

已知 n 阶加权简单图 G . 设 $\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n}$ 是图 G 的边权矩阵, 即 $d_{ij} = w(v_i, v_j)$, 若顶点 v_i 到顶点 v_j 无边相连时, 则取 $d_{ij} = \infty$.

然后依次计算出矩阵 $\mathbf{D}^{[2]}, \mathbf{D}^{[3]}, \dots, \mathbf{D}^{[n]}$ 及矩阵 $\mathbf{S} = (s_{ij})$. 其中,

$$\mathbf{D}^{[2]} = \mathbf{D} * \mathbf{D} = (d_{ij}^{[2]})_{n \times n}$$

$$\mathbf{D}^{[3]} = \mathbf{D}^{[2]} * \mathbf{D} = (d_{ij}^{[3]})_{n \times n}$$

.....

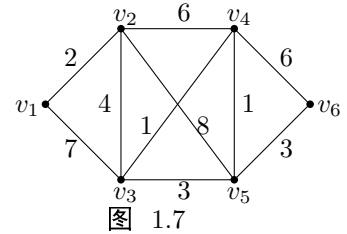
$$\mathbf{D}^{[n]} = \mathbf{D}^{[n-1]} * \mathbf{D} = (d_{ij}^{[n]})_{n \times n}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}^{[2]} \otimes \mathbf{D}^{[3]} \otimes \dots \otimes \mathbf{D}^{[n]} = (s_{ij})_{n \times n}$$

由定义可知, $d_{ij}^{[k]}$ 表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 经过 k 边的路(在有向图中即为有向路)中的长度最短者, 而 s_{ij} 为顶点 v_i 到 v_j 的所有路(若是有向图, 即为有向路)中的长度最短者.

不难看出, Floyd算法的时间复杂度是 $O(n^4)$.

例 1.14 利用Floyd算法求图1.7中任意两点间的最短路.



解: 由长度矩阵为 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 可知,

$$\mathbf{D}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 7 & 11 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 11 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 & 10 & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 7 & 11 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 11 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 9 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 10 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 9 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 10 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{[5]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 12 & 9 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 11 & 9 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{[6]} = \mathbf{D}^{[5]}.$$

所以, $S = D \circledast D^{[2]} \circledast D^{[3]} \circledast D^{[4]} \circledast D^{[5]} \circledast D^{[6]} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 11 & 9 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

从而, 由 $s_{14} = 7$ 可知, 从 v_1 到 v_4 的最短路的长度为7; 由 $s_{25} = 6$ 可知, 从 v_2 到 v_5 的最短路的长度为6.

五、应用举例—选址问题

例 1.15 已知有6个村庄. 各村庄间的距离和小学生人数如图1.8和表1.3所示.

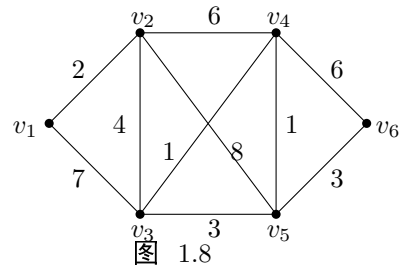


表 1.3

村庄	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
小学生	50	40	60	20	70	90

现在计划建造一所医院和一所小学. 问医院应建在那个村庄才能使最远村庄的人到医院看病所走的路最短? 又问小学建在哪个村庄使得所有学生上学走的总路程最短?

解: 首先求出任意两点 v_i, v_j 之间的最短路长(由例1.14已求出), 如表1.4所示.

表 1.4

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	2	6	7	8	11
v_2	2	0	4	5	6	9
v_3	6	4	0	1	2	5
v_4	7	5	1	0	1	4
v_5	8	6	2	1	0	3
v_6	11	9	5	4	3	0
	(11)	(9)	(6)	(7)	(8)	(11)

设想医院建在村庄 v_j , 则其他村庄的村民就要分别走 $d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{6j}$ 的路程. 其中, d_{ij} 表示第 i 村至第 j 村的实际距离, 且 d_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) 中必有最大者.

对每一点 v_j 求出这个最大值, 我们希望建在这些最大值之中的最小值所对应的村庄.

这相当于表1.4中每一列元素求出最大值. 他们分别是11, 9, 6, 7, 8, 11, 其最小值为6.

即, 第3列的最大元素达到最小, 所以医院应建在村庄 v_3 , 这样其它村庄到该村庄的就医距离最多为6.

设想把小学建在 v_j ，则其他村庄的小学生所走的总路程为：

$$50d_{1j} + 40d_{2j} + 60d_{3j} + 20d_{4j} + 70d_{5j} + 90d_{6j} \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

对每一点，求出这个值，它们的最小值所对应的 v_j 就是所要选择的最佳位置.

这相当于将表1.4中每一行元素分别乘上对应村庄里小学生的人数，然后分别求出各列的和(表1.5).

表 1.5

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
v_1	0	100	300	350	400	550	$\leftarrow 50 \cdot d_{1j}$
v_2	80	0	160	200	240	360	$\leftarrow 40 \cdot d_{2j}$
v_3	360	240	0	60	120	300	$\leftarrow 60 \cdot d_{3j}$
v_4	140	100	20	0	20	80	$\leftarrow 20 \cdot d_{4j}$
v_5	560	420	140	70	0	210	$\leftarrow 70 \cdot d_{5j}$
v_6	990	810	450	360	270	0	$\leftarrow 90 \cdot d_{6j}$
总和	2130	1670	1070	1040	1050	1500	

总和里的数表示

$$50d_{1j} + 40d_{2j} + 60d_{3j} + 20d_{4j} + 70d_{5j} + 90d_{6j} \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

即各列元素之和.

则其总和最小的列为 v_4 . 即小学应建在村庄 v_4 位置，才能使所有学生上学所走的总路程最短.

习 题 一

1. 若 G 是简单图, 证明: $|E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}$.

2. 设 G 为 (p, q) 简单图, 且 $q > \binom{p-1}{2}$. 求证 G 为连通图.

证明: 反证法, 假设 G 为非连通图, 不妨设 G 有两个连通分支 G_1 和 G_2 .

其中, $|V(G_1)| = p_1$, $|V(G_2)| = p_2$. 显然, $p_1, p_2 \geq 1$ 且 $p_1 + p_2 = p$.

3. **超图** H 是有序二元组 $(V(H), E(H))$, 其中 $V(H)$ 是顶点非空有限集合, $E(H)$ 是 $V(H)$ 的非空子集簇, 且 $\bigcup_{E_i \in E(H)} E_i = V(H)$. 其中, $E(H)$ 中的元素 E_i 称为超图的**边**, 没有相同边的超图称为**简单超图**.

证明: 若 H 是简单超图, 则 $\varepsilon \leq 2^\nu - 1$, 其中 ν, ε 分别是 H 的顶点数与边数.

4. 若 G 是二部图, 则 $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|^2}{4}$.

5. **m -部图:** 其顶点集合能划分成 m 个子集合, 且没有一条边其两端点都在同一子集合中的图;

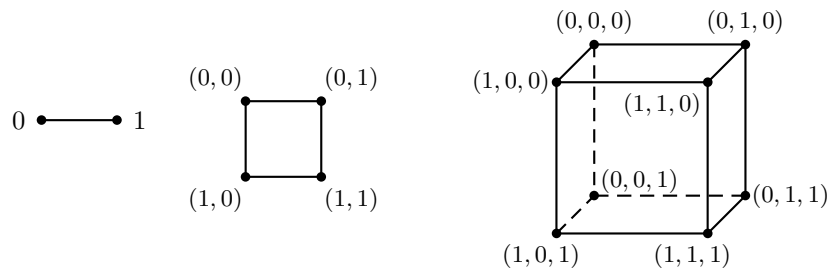
完全 m -部图: 不在同一子集中的每对顶点均存在边相连的 m -部简单图, 记为 K_{n_1, n_2, \dots, n_m} .

(1) 完全 m -部图 K_{n_1, n_2, \dots, n_m} 有多少个顶点和多少条边?

(2) 给出 $K_{1,2,3}$, $K_{2,2,2}$, $K_{1,2,2,3}$ 的图形表示.

6. **k -方体图**是其顶点为0与1的有序 k 元组, 并且两个顶点相邻当且仅当其一个坐标不相同.

证明: k -方体图是有 2^k 个顶点, $k \cdot 2^{k-1}$ 条边的二部图. 例如,



7. 已知 n 阶简单图 G 有 m 条边, 各顶点的度数均为3.

若 $m = 3n - 6$, 证明 G 在同构意义下唯一, 并求 m, n .

8. 无向图 G 有21条边, 12个3度数顶点, 其余顶点的度数均为2, 求 G 的阶数 n .

9. 设连通图 G 至少有两个顶点, 其边数小于顶点数, 则此图至少有一个悬挂点.

10. 若简单图 G 中恰有两个奇点, 则这两个奇点至少有一条通路.

11. 证明下列各题.

(1) 若 $\delta \geq 2$, 则 G 含有圈.

(2) 若 $\varepsilon \geq \nu$, 则 G 含有圈. 其中 ε, ν 分别为图 G 的边数和顶点数.

12. 对 n 阶简单图 G , 若 $\varepsilon(G) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p + 1$, 则 $\delta(G) \geq p + 1$.

13. 在平面上有 n 个点 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 其中任两个点之间的距离至少是1.

证明: 在这 n 个点中, 距离为1的点对数不超过 $3n$.

证明: 建立图 $G = (V, E)$, 其中 V 就取 S 中的 n 个点.

V 中的两个顶点相邻 \iff 这两点之间的距离恰好为1

则 G 为一个简单图. S 中距离为1的点对数就是 G 的边数. 所以, 只需要证明 $|E(G)| \leq 3n$.

14. 证明: 若 G 不连通, 则 \bar{G} 是连通的.

15. 设 G 为 n 阶简单图, $n > 2$, 且 n 为奇数. G 和 G 的补图 \bar{G} 中奇点个数是否一定相等? 试证明你的结论.

16. 下列非负整数序列哪些是图的度序列? 哪些是图序列(简单图的度序列)?

- (1) (1, 1, 1, 2, 3), (2) (0, 1, 1, 2, 3, 3), (3) (3, 3, 3, 3), (4) (2, 3, 3, 4, 4, 5),
 (5) (2, 3, 4, 4, 5), (6) (2, 2, 2, 2, 2), (7) (2, 3, 3, 4, 5, 6), (8) (1, 3, 3, 4, 5, 6, 6).

17. 若 G 是直径为2的 (p, q) 简单图, 且 $\Delta = p - 2$. 求证: $q \geq 2p - 4$.

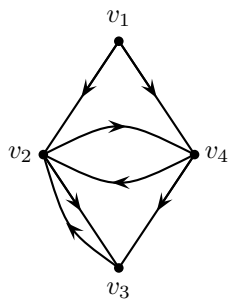
证明: 由 $\Delta = p - 2$ 可知, G 中有顶点 v 与 $p - 2$ 个顶点相邻, 从而有 $p - 2$ 条边.

剩下的另一个顶点 u 与 v 必不相邻.

为使 G 的直径为2, 即 u 到各顶点的距离不超过2, 至少要增加 $p - 2$ 条边.

因此, $q \geq 2(p - 2) = 2p - 4$.

18. 已知有向图 G 如下图所示.



(1) 求出 G 的邻接矩阵 \mathbf{A} .

(2) 求出 $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4$.

并说明从 v_1 到 v_4 长度为1, 2, 3, 4的有向链各有几条.

(3) 求出 $\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \mathbf{A} \mathbf{A}^T$.

并说明 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 中第(2, 3)和第(2, 2)个元素的意义.

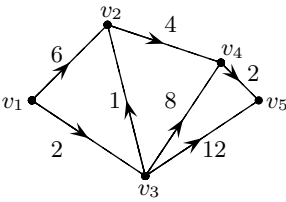
其中, \mathbf{A}^T 为矩阵 \mathbf{A} 的转置矩阵.

19. 设 G 为 k -正则图, 则有如下结论:

- (1) k 为 G 的特征根;
- (2) 如果 G 是连通的, 则 k 的重数为1;
- (3) 对 G 的任意特征值 λ , 都有 $|\lambda| \leq k$.

证明: (2) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 为特征值 k 的特征向量($x \neq 0$), 且设 x_j 为绝对值最大的 x 的一个分量, 则 $(Ax)_j = kx_j$ 且 $\sum x_i = kx_j$. 其中, \sum 表示与 v_j 相邻的那 k 个顶点 v_i 的求和.

20. 在如下图中, 求从 v_1 到 v_5 的最短路.



答: 最短路为: $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$, 最短距离为9.

21. 某航空公司正在制订5年内购买飞机的计划, 表1.6和表1.7给出一架新飞机的价格以及一架飞机的使用维修费用. 该公司可采用的最优策略是什么? 并用Floyd算法求出其赋权基础图的任意两点间的最短路长.

表 1.6 从第1年到第5年的飞机价格(单位: 千元)

年号	1	2	3	4	5
价格	200	210	230	240	260

表 1.7 不同使用年龄的飞机的维修费(单位: 千元)

飞机使用年龄	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5
费用	80	130	190	270	390

第二章 几类特殊图及其性质

§2.1 欧拉图 (Euler graph)

一、欧拉图的基本概念与性质

我们知道,“图论”是由欧拉于1736年解决的哥尼斯堡七桥问题作为最早渊源. 如图2.1所示:

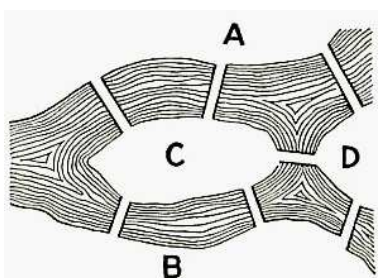


图 2.1

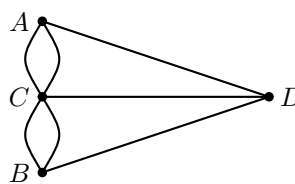
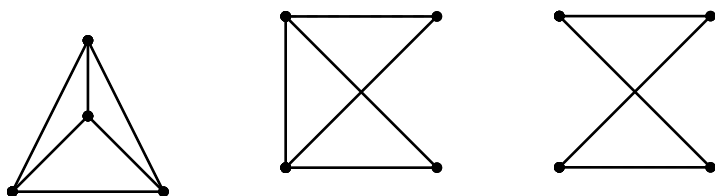


图 2.2

于是问题转化为, 在图2.2所示的图中, 从任何一点出发能否通过每条边一次且仅一次回到出发点.

与哥尼斯堡七桥问题非常相似的有趣问题是中国古代“一笔画问题”, 即要求用笔连续移动, 不离开纸面并且不重复地画出图形.

注意: 一笔画问题:



不可以画

可以画

可以画

但始点和终点不能重合

并且始点和终点重合

定义 2.1 在图 G 中, 经过 G 每条边一次且仅仅一次的迹, 称为欧拉路. 称闭的欧拉路为欧拉回路(欧拉圈、欧拉环游). 含欧拉回路的无向连通图与含有欧拉回路的弱连通有向图, 统称为欧拉图.

例如,

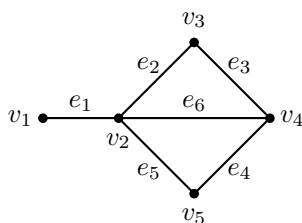


图 2.3

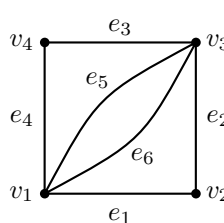


图 2.4

图2.3中, $w = v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_6v_2e_5v_5e_4v_4$ 是一条欧拉路.

图2.4中, $w = v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_1e_5v_3e_6v_1$ 是一条欧拉回路, 从而图2.4为欧拉图.

定理 2.1 连通图 G 是欧拉图的充分必要条件是 G 中无奇点.

证明: 必要性: 设 G 是欧拉图. C 是 G 的一条欧拉回路, 且其起点(也是终点)为 u , 即

$$C = ue_1v_1e_2 \cdots e_iv_ie_{i+1} \cdots u \quad (e_i \neq e_j)$$

则顶点 v_i 作为 C 的内部顶点每出现一次, 就有两条与它关联的边出现.

因为欧拉回路包含 G 的每一条边, 所以对于所有的 $v \neq u$, $d(v)$ 均为偶数.

又由以 u 开始并且终止于 u 可知, $d(u)$ 为偶数. G 没有奇点.

充分性: 证法一、反证法.

假设存在非空连通图, 它的每个顶点的度都是偶数, 但却不是欧拉图.

这种图中选取图 G , 使其边最少. 首先, 由 $\delta(G) \geq 2$ 可知, G 必包含圈(习题1.11).

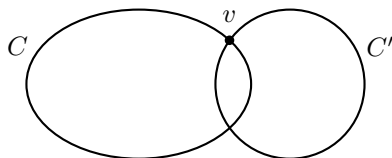
设 C 是 G 中的最长闭迹, 则根据假设, C 不是 G 的Euler环游.

因此, $E(G) - E(C) \neq \emptyset$. 故 $G - E(C)$ 中必有非平凡连通分支 G' , 且 G' 也没有奇点. 同时 $0 < \varepsilon(G') < \varepsilon(G)$.

因此, 由 G 的选择可知, G' 中含有Euler环游 C' .

其次, 由于 G 连通, 所以 C 与 C' 至少有一公共点, 设为 v , 不妨设 v 是 C 和 C' 的起点和终点.

则它们的衔接 CC' 是比 C 更长图 G 的一条闭迹, 这与 C 的选择矛盾.



证法二、

设 G 是连通无向图, 作一条 G 的较长闭迹 C , 并假设 C 不是欧拉回路,

则存在 $v_k \in V(C)$ 及关联 v_k 的边 $e = \{v_k, v'_1\}$, 且 $e \notin C$;

由于 $\deg(v'_1)$ 为偶数, 于是存在 $e_1 = \{v'_1, v'_2\}$, \cdots , 以此类推,

存在 $e_2 = \{v'_2, v'_3\}$, $e_3 = \{v'_3, v'_4\}$, \cdots , $e_n = \{v'_n, v_k\}$, 于是得到又一条闭迹 C' .

把 C 与 C' 组合在一起, 如果恰是 G , 则即得 G 的一条欧拉回路;

否则, 继续上面的过程, 总可以组合出 G 的一条闭迹, 使其经过 G 中每边一次且仅一次.

从而得证.

由此可知, 在图2.2所示的图中没有欧拉回路, 即不是欧拉图, 所以不能从城里某个地方出发, 经过每座桥一次且仅一次, 回到原来出发的地方.

定理 2.2 连通图 G 具有欧拉路充分必要条件是 G 恰好有两个奇点.

证明: 必要性: 设连通图 G 从顶点 a 到顶点 b 有欧拉路 C , 但不是欧拉环游.

则 C 每经过 G 中顶点 v_i (包括 a 和 b) 一次, 都为 v_i 贡献2度.

而 C 的第一条边为 a 贡献1度, C 的最后一条边为 b 贡献1度.

因此, a 和 b 的度数均为奇数, 而其余结点数均为偶数.

充分性：设连通图 G 恰好有两个奇点，不妨设为 a 和 b 。

在图 G 中添加一条边 $e = \{a, b\}$ 得新图 G' ，则 G' 的每个顶点的度数均为偶数。

因而 G' 中存在欧拉环游，故得证 G 中必存在欧拉路。

别证：

必要性：若 G 有Euler迹，则显然这条迹除起点和终点外的每个顶点都是偶点。

充分性：假设 G 是最多有两个奇点的非平凡连通图。

若 G 没有奇点，则由定理可知， G 有闭Euler迹。

否则，若 G 恰含有两个奇点 u 和 v ，此时令 $e = uv$ 。则 $G + e$ 的每个顶点都是偶点。

由定理可知， $G + e$ 有Euler环游 $C = ueve_1 \cdots e_\epsilon u$ 。

因此，迹 $ve_1 \cdots e_\epsilon u$ 是 G 的一条Euler迹。

二、欧拉图的应用——中国邮路问题

一个邮递员负责某些街道的邮件投递工作，每次都要从邮局出发走遍他负责的所有街道，在回到邮局。

那么，他应当如何安排投递路线，使得所走的总路程最短？

这个问题是首先由中国数学家管梅谷教授领导的运筹学小组于1962年研究而获得成果的，因此在国际上通称为中国邮路问题。

此问题可以归结为：

如果有一个连通图 $G = (V, E)$ 。它的每条边 e 都有一个长度 $w(e)$ (称 $w(e)$ 为边 e 的权)。

对于这样的赋权连通图，要求每条边至少通过一次的欧拉环游 P ，使得总权 $\sum_{e \in E(P)} w(e)$ 最小。

如果 G 恰是欧拉图，则从邮局出发，每边恰好走一次可回到邮局，这时总权必定最小。

如果 G 不是欧拉图，则某些边必然要重复走，当然要求重复走过的边的总长最小。

注意：

1) “中国邮路问题”要求每条边至少走一次，否则不能把邮件投递到街道路边（图中的边）上的每一家。

2) 关梅谷教授的结果：

连通图 G （每边权为1）中的“邮路”（最优环游）为 C 的充分必要条件是

在 C 中， G 的每一条边至多出现两次，且 G 的任一闭迹中至多有半数的边重复出现于 C 。

我们可以用奇偶点图上作业法来解决这个问题。计算步骤如下：

(1) 找出图 G 中的所有奇顶点(必有偶数个)，将它们两两配对。每对奇顶点间必有一条通路 P (因 G 是连通图)，将通路 P 上所有的边都重复一次，加到图 G 中，使所得到的新图为欧拉图 G' 。

(2) 如果边 $e = (u, v)$ 上重复边数多于一条，则可从 e 的重复边中去掉偶数条，使得 G' 中每一点均为偶点。

(3) 检查图中的每个圈。如果每一个圈的重复边的总长不大于该圈总长的一半时，则已求得最优方案。

如果存在一个圈，重复边的总长大于该圈总长的一半时，就进行调整：

将这个圈中的重复边去掉，而将该圈中原来没有重复边的各边加上重复边，其他各圈的边不变，返回(2)。

例 2.1 图2.5中各边所标注的数字表示该边的长度(权). 邮递员从邮局A出发, 求他的最优投递路线.

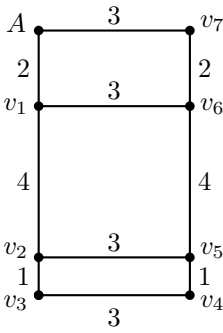


图 2.5

解: 图2.5中的奇顶点有 v_1, v_2, v_5, v_6 . 将 v_1, v_5 和 v_2, v_6 分别配成一对, 在图中直接求得

v_1-v_5 链 $v_1v_6v_5$ 和 v_2-v_6 链 $v_2v_1v_6$, 并将链上各边都重复一次, 得图2.6.

在图2.6中, 边 (v_1, v_2) 上的重复边多于一条, 因此可以去掉偶数条重复边, 得到图2.7.

在图2.7中, 共有六个圈, 要逐圈检查.

显然, 在圈 $v_2v_5v_6v_1v_2$ 中, 重复边总长为 $4 + 4 = 8$, 而该圈总长为 $4 + 3 + 4 + 3 = 14$.

所以, 由 $8 \geq \frac{14}{2}$ 可知, 需要进行调整.

将该圈中的重复边去掉, 原来圈中没有重复边的加上重复边, 而不在这圈中的其他边均不做改变, 得到图2.8.

然后再重新逐圈进行检查.

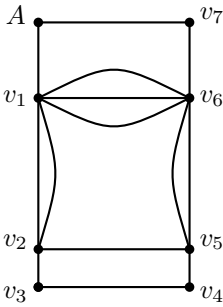


图 2.6

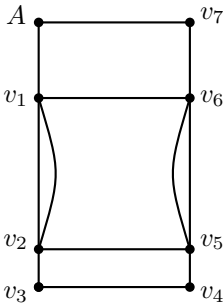


图 2.7

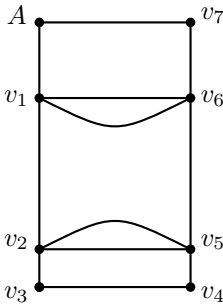


图 2.8

经检查, 每一个圈的重复边的总长都不大于该圈总长的一般.

因此, 得到最优投递路线. 其最优投递路线的具体行走路线为

$$Av_7v_6v_1v_6v_5v_2v_5v_4v_3v_2v_1A$$

总长度为 $3 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 1 + 3 + 1 + 4 + 2 = 32$.

注意: 在最优方案中, 图的每一条边上最多有一条重复边.

§2.2 哈密尔顿图 (Hamilton graph)

一、哈密尔顿图的基本概念与性质

Hamilton问题是图论中一直悬而未决的一大问题. 它起源于1856年, 当时英国数学家Hamilton设计了一种名为周游世界的游戏. 他在一个实心的正十二面体(图2.9)的二十个顶点上标以世界上有名的二十座城市的名字, 要求游戏者沿十二面体的棱从一个城市出发, 经过每座城市恰好一次, 然后返回到出发点, 即“绕行世界”.

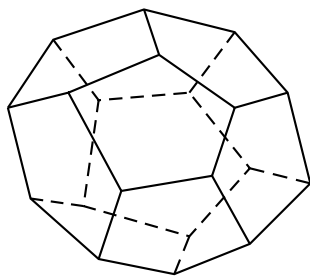


图 2.9

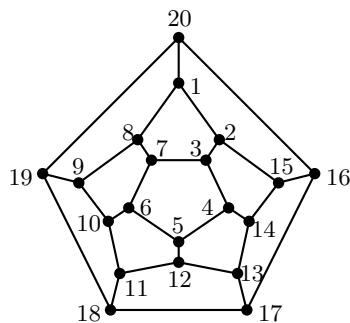


图 2.10

将这个正十二面体“拉平”成为一个如下平面图(图2.10). 则上面所提的问题相当于在图2.10中找一个回路, 它通过图中一切顶点, 且每一个顶点只通过一次. 从图2.10中可以看出, 这样的走法是存在的. 例如, 图2.10中按自然顺序用数字标示的顶点就是这样的一个回路. 当然, 这种回路未必是唯一的.

定义 2.2 给定无向图 G (有向图 D), 若存在一条路 (有向路) L 经过图 G (D) 的每个顶点一次且仅一次,

则称 L 为 G 的一个Hamilton路 (Hamilton有向路), 简称为 H —路 (H —有向路).

若存在一条闭路 (有向闭路) C 经过图 G (D) 的每个顶点一次且仅一次,

则称 C 为 G 的一个Hamilton回路 (Hamilton有向回路), 简称为 H —回路 (H —有向回路).

定义 2.3 具有Hamilton回路的无向图与具有Hamilton有向回路的有向图, 统称为Hamilton图, 简称 H —图.

例如, 图2.10中图的回路 $C = 123 \cdots 20$ 是正十二面体图的一条 H —回路, 故十二面体图是 H —图.

从定义可知, 一个图的 H —回路与Euler环游是很相似的. 差别在于 H —回路是环游 G 的所有顶点回路, 而Euler环游是环游 G 的所有边的闭链.

对于一个图是否存在Euler环游存在一个非常简洁的判别法. 但对一个图是否存在 H —回路的判别法直到现在还没有找到. 也就是说, 到目前为止, 还没有找到 H —图的充要条件. 事实上, 寻找 H —图的充要条件几乎是无望的. 但是人们希望找到 H —图的简明有效的充分条件, 这就是图论中一个著名的问题: Hamilton 问题.

现在我们分别来讨论图存在 H —回路的充分条件与必要条件. 由于一个图 G 有 H —回路当且仅当 G 的基础简单图有 H —回路, 所以, 以下我们只考虑简单图.

定理 2.3 若 G 是 H —图, 则对 $V(G)$ 的每一个非空真子集 S , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

其中, $\omega(G)$ 表示 G 的连通分支个数.

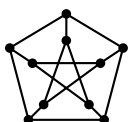
证明: 设 C 是 G 的一个 H —回路, 则 $\forall S \subset V(G), S \neq \emptyset$, 均有 $\omega(C - S) \leq |S|$.

由于 $C - S$ 是 $G - S$ 的生成子图, 故 $\omega(G - S) \leq \omega(C - S) \leq |S|$.

注意: 此定理是图存在 H —回路的必要条件, 而不是充分条件.

即 $\forall S \subset V(G), S \neq \emptyset$, 均有 $\omega(G - S) \leq |S|$, G 不一定为 H —图.

但若存在 $V(G)$ 中的一个真子集 S , 使得 $\omega(G - S) > |S|$, 则 G 一定不是 H —图.



例如, 左图所示的彼得森(Peterson)图, 满足 $\omega(G - S) \leq |S|$, 但它是非 H —图.

下面讨论 H —图的充分条件.

定理 2.4 设 n ($n \geq 3$)阶连通图 G 中任意两个不相邻的顶点 u 与 v , 均有

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

则 G 是 H —图.

证明: 仅就 G 是无向图加以证明. 反证法

假设定理不成立, 则存在一个阶为 n ($n \geq 3$)的满足定理的条件且边数最多的非 H —图 G .

即, 对 G 的任意两个不相邻的顶点 x, y , 图 $G + xy$ 是 H —图. 此时, G 不是完全图.

在图 G 中任取两个不相邻的顶点 u 和 v , 则 $G + uv$ 为 H —图, 且其中的每一个 H —回路均含边 uv .

因此, 在 G 中存在一条 u 到 v 的 H —路 $P = v_1 v_2 \cdots v_n$, 其中 $v_1 = u, v_n = v$.

令 $S = \{v_i | uv_{i+1} \in E(G)\}$, $T = \{v_j | v_j v \in E(G)\}$.

则由 $v_n \notin S \cup T$ 可知, $|S \cup T| < n$, 且 $S \cap T = \emptyset$.

否则, 假设存在 $v_k \in S \cap T$, 则 $uv_{k+1}, v v_k \in E$, 从而 G 中有 H —回路 $v_1 v_2 \cdots v_k v v_{n-1} \cdots v_{k+1} v_1$

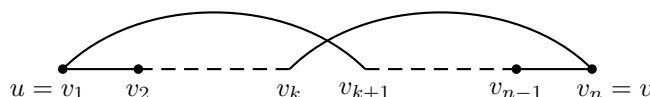


图 2.11

矛盾. 从而,

$$d_G(u) + d_G(v) = |S| + |T| = |S \cup T| < n$$

这与定理条件矛盾, 所以 G 是 H —图.

推论 2.1 若 G 是具有 n ($n \geq 3$)个顶点的简单图, 每个顶点的度至少是 $\frac{n}{2}$, 则 G 是 H —图.

证明: 因为每个顶点的度至少是 $\frac{n}{2}$, 因而 G 中任意两个不相邻的顶点 u 与 v , 均有

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

所以, 由定理2.4可知, G 是 H —图.

定理 2.5 设 G 是 n 阶连通图, u 与 v 是 G 中两个不相邻的顶点, 且满足 $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, 则 G 是 H —图当且仅当 $G + uv$ 是 H —图.

证明: 如果 G 是 H —图, 显然 $G + uv$ 也是 H —图, 这里 u 和 v 是不相邻的两个点.

反之, 假设 G 是一个 n 阶图, u 和 v 是不相邻的两个顶点, 且满足 $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, 则由 $G + uv$ 是 H —图可知, G 是 H —图.

否则, 如定理2.4证明的那样, 得到矛盾 $d_G(u) + d_G(v) \leq n - 1$, 证毕.

例 2.2 有一个 n ($n \geq 3$)人的团体. 这 n 个人中互相认识的对数(两个人认识就算作一对)至少是 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$.

证明: 这 n 个人可以围桌而坐, 使每个人与他相邻座位上的两个人认识.

证明: 构造图 G , 使得以顶点代表人, 两顶点相邻当且仅当两个人互相认识,

则 G 是至少有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ 条边的简单图.

只需证明 G 是 H —图.

假设 G 不是 H —图, 则 G 无 H —回路.

由定理2.4可知, G 中存在两个不相邻的顶点 u 与 v , 使得 $d_G(u) + d_G(v) < n$.

因而 G 中至多有 $n - 1$ 条边关联于 u 和 v .

作图 $G_1 = G - \{u, v\}$. 由于 u 和 v 不相邻, 因此由 $d_G(u) + d_G(v) < n$ 可知,

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G_1)| + d_G(u) + d_G(v) < \binom{n-2}{2} + n \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \end{aligned}$$

这与已知 $|E(G)| \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ 相矛盾. 所以, G 有 H —回路 C .

现在只需按照 C 的顺序安排人员围桌而坐, 就能使每个人与相邻座位的两个人认识.

二、哈密尔顿图的应用——旅行售货员问题

设有 n 个城镇. 已知每个城镇之间的距离. 一个售货员自某一城镇出发巡回售货. 问这个售货员应如何选择路线, 能使每个城镇经过一次且仅一次, 最后返回到出发地, 而使总的行程最短.

这个问题称为旅行售货员问题. 容易看出, 旅行售货员问题就是在一个赋权完全图中, 找出一个访问每个顶点恰好一次且返回出发点的总权最小的闭路, 又称之为最优 H —回路.

对旅行售货员问题, 若选定出发点, 对 n 个城市进行排列, 共有 $(n-1)!$ 条 H —回路, 再考虑相反顺序的一致, 共需要检查 $\frac{(n-1)!}{2}$ 条 H —回路, 从中找出权和最小的一条. 而这种方法的计算量非常大, 需要找一个有效算法.

到目前为止, 还没有求解最优 H —回路的有效算法, 所以希望找到一种简便易行又能获得相当好(但不必最优)的结果的方法.

下面介绍两种方法.

一、逐次改进的方法

在赋权完全图 G 中首先找出任意一条 H —回路 C , 然后适当修改 C 以便得到具有较小权的另一个 H —回路, 其修改方法为:

设 $C = v_1v_2 \cdots v_nv_1$ 是 G 的一个 H —回路. 若存在 i, j 满足:

(1) $1 < i+1 < j < n$ (记 $v_{n+1} = v_1$);

(2) $w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1})$;

则从圈 C 中去掉边 v_iv_{i+1} 和 v_jv_{j+1} , 而添加边 v_iv_j 和 $v_{i+1}v_{j+1}$,

得到一个新的 H —回路:

$$C_{ij} = v_1v_2 \cdots v_iv_jv_{j-1} \cdots v_{i+1}v_{j+1} \cdots v_nv_1$$

则

$$w(C_{ij}) = w(C) - w(v_iv_{i+1}) - w(v_jv_{j+1}) + w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(C)$$

因而, H —回路 C_{ij} 将是 C 的一个改进.

在接连进行上述的一系列修改之后, 最后得到的这个 H —回路不能再用此方法改进了.

注意: 这个 H —回路虽然未必是最优的, 但有理由认为它常常是比较好的.

例 2.3 某食品厂每天要用汽车将该厂的产品送到若干零售点, 再回到工厂继续送下一批货物. 由于该车的送货地点每天均有变化, 因此, 我们希望找到一个方法, 使得对任意需求该厂产品的若干零售点都确定一条最好的行驶路线. 假设某一天, 送货车要将货物送到五个零售点 A, B, C, D, E .

如果各零售点装卸货物的时间是固定的, 可不加考虑. 而且汽车在工厂与各零售点之间以及在各零售点之间的行驶时间均是已知的. 其赋权完全图为如右图(图中工厂用点 V 表示, 每条边旁的数字表示相应两点间汽车所需的行驶时间(单位: 分)).

求花费总时间最少的一条行驶路线.

解: 开始任意取一个哈密尔顿圈(图2.13), 该圈为 $V \xrightarrow{20} A \xrightarrow{15} B \xrightarrow{10} C \xrightarrow{35} D \xrightarrow{15} E \xrightarrow{40} V$,

总行驶时间为 $T = 20 + 15 + 10 + 35 + 15 + 40 = 135$ 分.

由 $w(V, B) + w(A, C) = 10 + 15 = 25$, $w(V, A) + w(B, C) = 20 + 10 = 30$ 可知,

$w(V, B) + w(A, C) < w(V, A) + w(B, C)$.

所以, 可得一个新的哈密尔顿圈: $V \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow V$, 且 $T = 130$ 分.

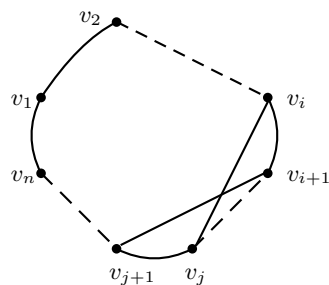


图 2.12

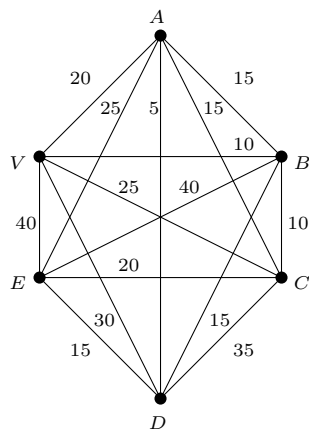


图 G

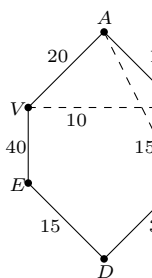


图 2.13

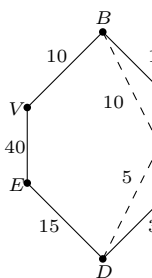


图 2.14

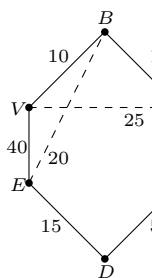


图 2.15

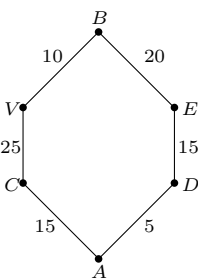


图 2.16

同理, 依次从图2.14到图2.16作二次修改, 就得到一条总行驶时间为 $T = 90$ 分钟的行驶路线.

即送货路线为: $V \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow V$.

二、最邻近算法

寻求旅行售货员问题的相当好的解, 还可以使用更为简便的方法——最邻近算法, 其算法为

- (1) 任选一个点 v_0 作为起点, 找与 v_0 关联其权最小的一条边 e_1 , e_1 的另一个端点记为 v_1 , 得到一条路 v_0v_1 ;
- (2) 设已选路 $v_0v_1 \cdots v_i$, 在 $V(G) - \{v_0, v_1, \cdots, v_i\}$ 中取一个与 v_i 最近(权最小)的相邻点 v_{i+1} , 得 $v_0v_1 \cdots v_iv_{i+1}$;
- (3) 若 $i+1 < |V(G)| - 1$, 用 i 代 $i+1$, 返回(2); 否则, 记 $C = v_0v_1 \cdots v_nv_0$, 停止.

最后所得的 C 就是 G 的一条近似最优的 H —回路.

例如, 在例2.3中的图 G (右图)中, 用最邻近法可求得
 起点为 V 的 H —回路为 $C_V = VBCADEV$, 其长度为 $T_V = 95$;
 起点为 A 的 H —回路为 $C_A = ADBVCEA$, 其长度为 $T_A = 100$;
 起点为 B 的 H —回路为 $C_B = BCADDEV B$, 其长度为 $T_B = 95$;
 起点为 C 的 H —回路为 $C_C = CBVADEC$, 其长度为 $T_C = 80$;
 起点为 D 的 H —回路为 $C_D = DABVCED$, 其长度为 $T_D = 90$;
 起点为 E 的 H —回路为 $C_E = EDABVCE$, 其长度为 $T_E = 90$.

由此可知, 近似最优的 H —回路与起点有关.

注意: 用最邻近法求得的 H —回路一般不是最优的, 但通过逐次改进法可获得更短的 H —回路.

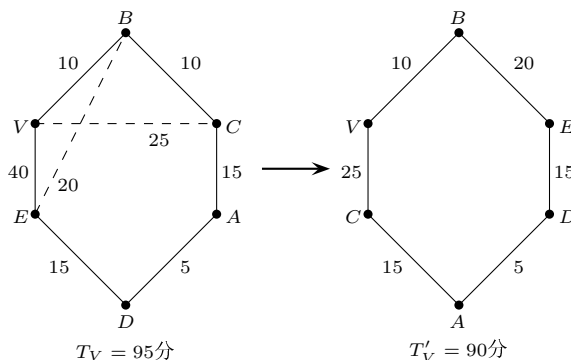
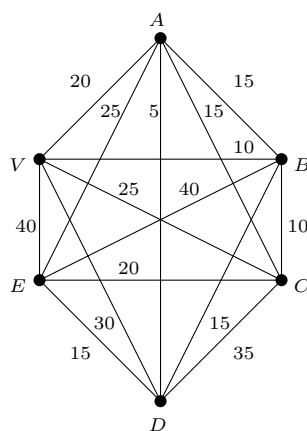
即, 近似最优的 H —回路与起点有关.

例如, 在例2.3中, 用最邻近法得到的图 G 的一个 H —回路为 $C_V = VBCADEV$, 且 $T_V = 95$.

而由 $w(VC) + w(BE) = 25 + 20 = 45$, $w(BC) + w(VE) = 10 + 40 = 50$ 可知,

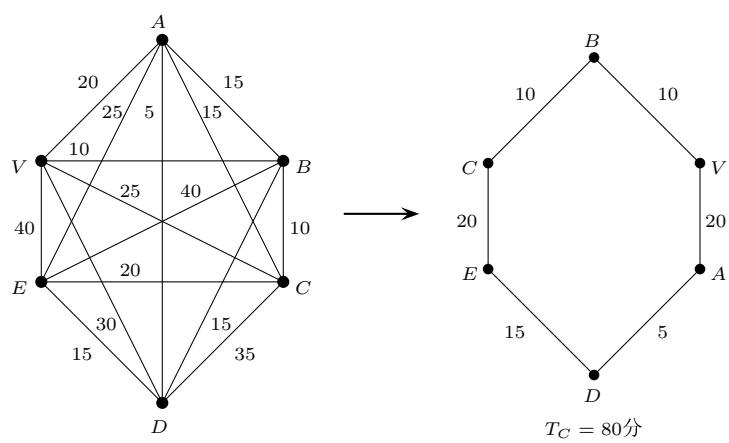
$w(VC) + w(BE) < w(BC) + w(VE)$.

所以, 用逐次改进法修改后可得新的 H —回路 $C'_V = VBEDACV$ (见下图), 且其长度为 $T'_V = 90$.



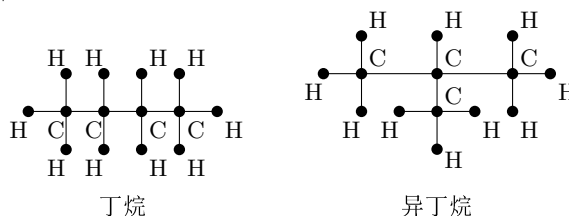
注意: 图 G 的最优 H —回路为 $C_C = CBVADEC$, 其长度为 $T_C = 80$.

从而, 起点为 V 的图 G 的最优 H —回路为 $C = VADECBV$, 且其长度为 $T_V = 80$.



§2.3 树的基本概念与性质

树的术语起源于植物学和家谱学. 早在1857年, 英国数学家亚瑟·凯莱(Arthur Cayley, 1821—1895)就发现了树, 当时他正在试图列举形为 C_nH_{2n+2} 的化合物的同分异构体. 例如, C_4H_{10} .



树既是图论中最简单、最重要的一类图, 也是应用最广泛的一类图, 特别是在计算机科学和管理科学中. 如, 用树构造存储和传输数据的有效编码, 用树构造最便宜的电话线连接分布式计算机网络, 用树模拟一系列决策完成的过程等等. 树中一类特殊的树——二叉树是计算机数据结构中的重要内容之一.

定义 2.4 树(tree)是无圈连通无向图.

1. 树中度数为1的顶点称为树的叶(或叶子点或悬挂点);
2. 树中度数大于1的顶点称为树的分枝点或内点;
3. 不相交的若干树称为森林(forest), 即森林的每个连通分支是树.

定理 2.6 设 T 是顶点数为 n 的简单图, 则下列命题等价:

- (1) T 是树;
- (2) T 是无圈图, 且 T 的任何两个顶点间有唯一一条路;
- (3) T 不包含圈, 且有 $n-1$ 条边;
- (4) T 是连通图, 且有 $n-1$ 条边;
- (5) T 是连通图, 但 $\forall e \in E(T)$, $T-e$ 是非连通图;
- (6) T 不包含圈, 但添加任何一条边后得到的图中将含有唯一的圈.

证明:

(1) \Rightarrow (2). 设 T 是树, 显然 T 中无圈.

假设 T 中存在两条不同的 (v_1, v_2) 路 P_1 和 P_2 , 则存在一条边 $e = xy \in E(P_1) - E(P_2)$. 如图2.17.

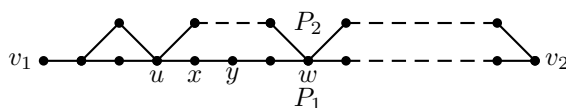


图 2.17

设 P_1 上的 (v_1, x) 路与 P_2 的最后一个公共顶点为 u , P_1 上的 (y, v_2) 路与 P_2 的第一个公共顶点为 w , 则 P_1 的 (u, w) 路 Q_1 与 P_2 上的 (u, w) 路 Q_2 无公共内部点, 从而 $Q_1 \cup Q_2$ 是 T 的一个圈. 矛盾.

(2) \Rightarrow (3). 设 T 满足(2), 则 T 为不包含圈的连通图.

下面对 T 的阶数 n 用归纳法证明 T 的边数为 $n - 1$.

当 $n = 1$ 时, T 是空图, 结论成立.

假设 $n < k$ 时, 结论成立. 现设 $n = k \geq 2$, $v_1 v_2 \in E(T)$, 则 $T - v_1 v_2$ 中不含 (v_1, v_2) 路.

从而 $T - v_1 v_2$ 是非连通图, 且 $T - v_1 v_2$ 恰好有两个连通分支 T_1 和 T_2 .

因为 T 不包含圈, 所以 T_1 和 T_2 也不包含圈.

从而, T_1 和 T_2 都满足(2), 且它们的阶数均小于 k .

因此, 由归纳假设有 $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1 (i = 1, 2)$, 于是有

$$|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 = |V(T)| - 1$$

(3) \Rightarrow (4). 设 T 满足(3), 只需证明 T 连通. 用反证法,

假设 T 不是连通图, 且其连通分支为 $T_1, \dots, T_\omega (\omega \geq 2)$.

则 $T_i (i = 1, 2, \dots, \omega)$ 是无圈连通图, 从而为树.

因此, 由(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)可知, $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1 (i = 1, 2, \dots, \omega)$. 于是

$$|E(T)| = \sum_{i=1}^{\omega} |E(T_i)| = \sum_{i=1}^{\omega} |V(T_i)| - \omega = |V(T)| - \omega < |V(T)| - 1.$$

这与已知 $|E(T)| = |V(T)| - 1$ 相矛盾, 故 T 是连通图.

(4) \Rightarrow (5). 设 T 满足(4). 只需证明: $\forall e \in E(T)$, $T - e$ 是非连通图.

假设 $T - e$ 连通, 则由连通图的边数至少为 $\nu - 1 (\nu$ 为图的阶数)可知, $|E(T - e)| \geq |V(T - e)| - 1$.

因此, $|E(T)| = |E(T - e)| + 1 \geq (|V(T - e)| - 1) + 1 = |V(T - e)| = |V(T)|$.

这与 $|E(T)| = |V(T)| - 1$ 的条件(4)相矛盾.

(5) \Rightarrow (6). 设 T 满足(5), 则 T 不包含圈(若 T 中含有圈, 则去掉圈上任何一条边仍连通).

且由 T 为连通图可知, 对不属于边集 $E(T)$ 的任意边 $e = uv$, 在 T 中必有一条 (u, v) 路 P .

从而, 在 $T + e$ 中有两条不相交的 (u, v) 路(路 P 和边 e). 于是, 在 $T + e$ 中存在含有边 e 的圈.

又由 T 中不含圈可知, $T + e$ 中任何圈都必含有边 e .

假设在 $T + e$ 中 C 和 C^* 为含有边 e 的两个不同的圈, 则 $C - e$ 和 $C^* - e$ 为 T 中的两个 (u, v) 不同的路.

因此, 由(1) \Rightarrow (2)的证明可知, T 中含有圈.

这与 T 不包含圈相矛盾. 从而, 在 $T + e$ 中含有唯一的圈.

(6) \Rightarrow (1). 设 T 满足(6). 只需证明 T 连通.

假设 T 是非连通图, 任取 T 的两个连通分支 T_1 和 T_2 .

设 $v_i \in V(T_i) (i = 1, 2)$, 则 $T + v_1 v_2$ 不含圈. 这与(6)矛盾.

极小连通图(minimal connected graph): 删去任何一条边后不再连通的连通图称为极小连通图.

由此可知, 树等价于极小连通图.

推论 2.2 若树 T 的阶数 $n \geq 2$, 则 T 至少有两个叶子点.

证明: 由 $n \geq 2$ 可知, $\forall v \in V(T)$, $d(v) \geq 1$. 且由定理2.6($|E(T)| = |V(T)| - 1$)可知,

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2|E(T)| = 2(|V(T)| - 1) = 2|V(T)| - 2$$

由此可知, T 至少有两个叶子点, 否则

1) 若 T 有唯一一个叶子点, 不妨设 $u \in V(T)$, $d(u) = 1$, 且 $\forall v \in V(T - u)$, $d(v) \geq 2$, 则有

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = \sum_{v \in V(T-u)} d(v) + d(u) \geq 2 \sum_{v \in V(T-u)} 1 + 1 = 2|V(T-u)| + 1 = 2(|V(T)| - 1) + 1 = 2|V(T)| - 1$$

这与 $\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2|V(T)| - 2$ 矛盾.

2) 若 T 没有叶子点, 即 $\forall v \in V(T)$, $d(v) \geq 2$, 则有

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) \geq 2 \sum_{v \in V(T)} 1 = 2|V(T)|$$

这也与 $\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2|V(T)| - 2$ 矛盾.

推论 2.3 设 G 有 ν 个顶点, ε 条边, ω 个连通分支, 则 G 为森林的充分必要条件是 $\varepsilon = \nu - \omega$.

证明: 必要性: 因为 G 的每个连通分支 $G_i (i = 1, 2, \dots, \omega)$ 都是树.

所以, 由定理2.6有, $\varepsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1 (i = 1, 2, \dots, \omega)$.

从而, $\varepsilon = \sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon(G_i) = \sum_{i=1}^{\omega} \nu(G_i) - \omega = \nu - \omega$.

充分性: 假设 G 不是森林, 则 G 含有圈, 从而至少存在 G 的一个连通分支含有圈.

而对于 G 中任何含有圈的连通分支 G_i , 都有 $\varepsilon(G_i) > \nu(G_i) - 1$;

对于 G 中任何不含圈的连通分支 G_j , 都有 $\varepsilon(G_j) = \nu(G_j) - 1$.

因此, $\varepsilon = \sum_{k=1}^{\omega} \varepsilon(G_k) > \sum_{k=1}^{\omega} (\nu(G_k) - 1) = \nu - \omega$, 矛盾.

定理 2.7 树 T 的每一个非叶子点(即内点)均为 T 的割点.

证明: 设 T 是 n 阶树, u 是 T 中一个非叶子点, 即 $d_T(u) \geq 2$. 不难看出 $T - u$ 含 $n - 1$ 个顶点, 其边数为

$$|E(T - u)| = |E(T)| - d_T(u) = n - 1 - d_T(u) = |V(T - u)| - d_T(u) < |V(T - u)| - 1$$

所以, $T - u$ 不是树.

显然, $T - u$ 不含圈, 所以 $T - u$ 非连通, 即 u 是 T 的割点.

由割边的性质($e \in E(G)$ 为图 G 的割边的充分必要条件是 e 不在 G 的任何圈上.)可知,

定理 2.8 T 为树的充分必要条件是 T 为每条边均为割边的连通图.

定义 2.5 设 T 是有向图, 若 T 的基础图是树, 则称 T 是有向树(directed tree).

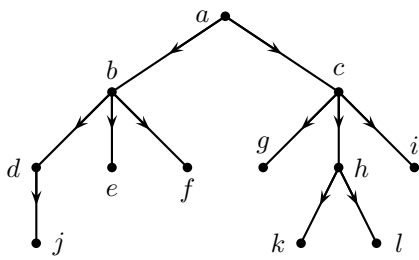
下面讨论根树:

定义 2.6 仅一个顶点的入度为0, 其余所有顶点的入度都为1的有向树称为**根树**(rooted tree). 其中,

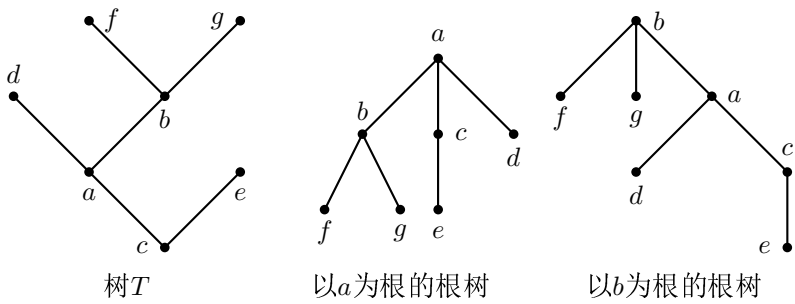
- 1. 入度为0的顶点称为根(root);
- 2. 由根到某一顶点 v 的有向路的长度，称为顶点 v 的层数(level).
- 3. 称顶点层数的最大值为根树的高度.

例如，用根树可以表示家庭之间的关系.

设某祖先 a 有两个儿子 b, c , b 和 c 又分别有三个儿子 d, e, f 和 g, h, i . 而 d 有一个儿子 j , h 有两个儿子 k, l . 这样的家庭关系可以用如下的根树表示.



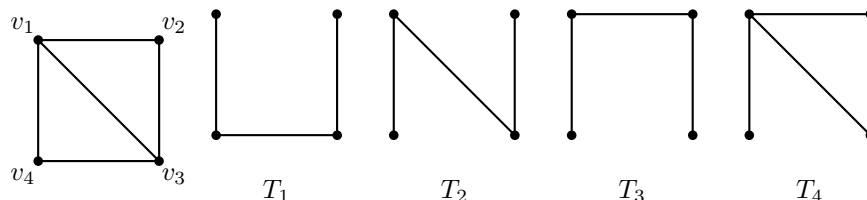
注意：通常把指示根树中边的方向的箭头可以省略. 例如，



下面讨论生成树.

定义 2.7 给定一个图 G , 如果图 G 的一个生成子图 T 是一棵树, 则称 T 是 G 的一个生成树(spanning tree). 生成树也称为支撑树.

例 2.4



定理 2.9 图 G 有生成树的充分必要条件是 G 为连通图.

证明: 必要性显然. 只需证明充分性.

若 G 中无回路, G 为自己的生成树.

若 G 中含有圈, 任取一圈, 随意删去圈上的一条边, 若还有圈再删去圈上的一条边, 直到最后无圈为止, 易知所得图无圈(当然无回路)、连通且为 G 的生成子图, 所以为 G 的生成树.

给定一个连通图, 求它的生成树的数目, 是图论中树的计数问题, 这在化学分子结构理论及计算机科学中有着重要的应用.

在一个标号连通图 G 中, 若 T_1 与 T_2 是 G 的两个非自同构的生成树, 则认为 T_1 与 T_2 是 G 的两个不同的生成树. G 的生成树个数用 $\tau(G)$ 表示.

对一个标号完全图 K_n , 英国数学家凯莱(Cayley)在1889年给出了 $\tau(K_n)$ 的一个简单公式.

定理 2.10 对于 $n \geq 2$, $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

证明: 设 K_n 的顶点集是 $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

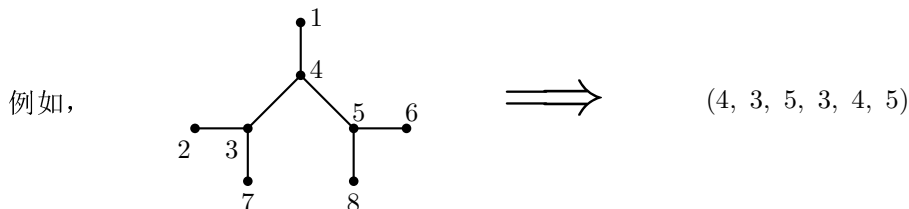
此时, 若 N 中取 $n-2$ 个元的可重排列的集合记为 A , 则 $|A| = n^{n-2}$.

所以, 只需在 K_n 的生成树的集合和 A 之间建立一一对应即可,

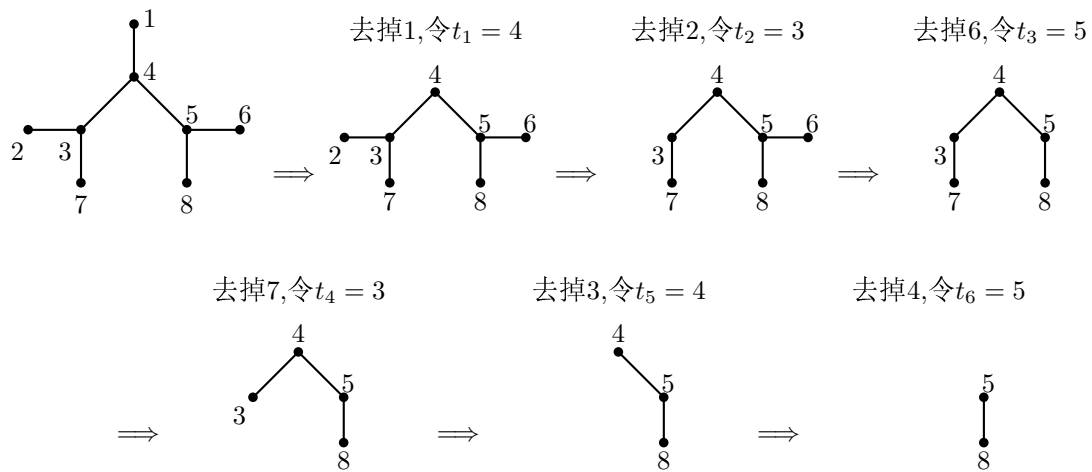
即对于 K_n 的每棵生成树 T , 使它与唯一的序列 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ 相联系.

- 1) 设 s_1 是 T 中标号最小的叶子点, 把与 s_1 相邻的那个顶点取作 t_1 ;
- 2) 用 s_2 记 $T - s_1$ 中标号最小的叶子点, 并把与 s_2 相邻的那个顶点作为 t_2 ;
- 3) 继续上述过程, 直到树中只剩下有两个顶点的一棵树为止.

此时得到一个序列 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$.



事实上,



从而, 所给树对应于序列 $(4, 3, 5, 3, 4, 5)$

并由此可见, K_n 的不同的生成树确定不同的序列.

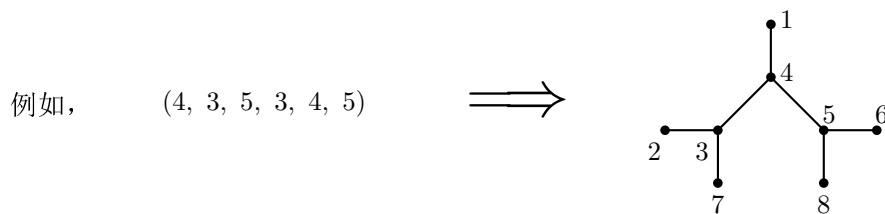
反过来, T 的任一顶点 v 在 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ 中出现 $d_T(v) - 1$ 次.

于是 T 中1度顶点(叶子点)恰好是在该序列中未出现的那些顶点.

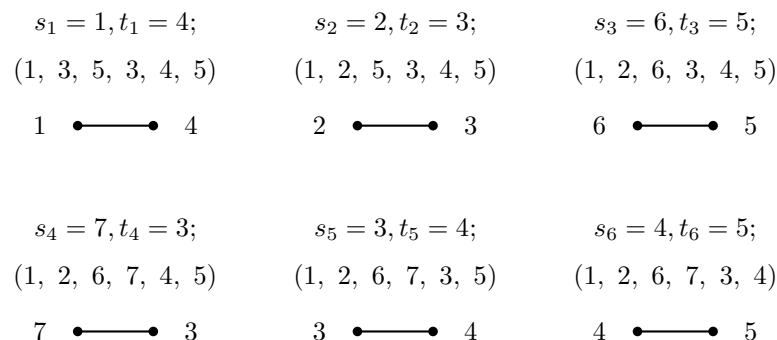
为了从 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ 中重新构造 T , 可按下列方法进行:

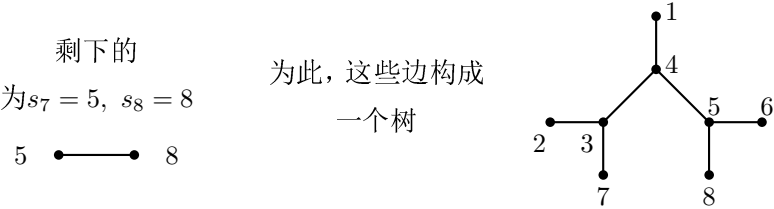
- 1) 设 s_1 是不在 $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ 中出现的标号最小的点, 连接 s_1 与 t_1 ;
- 2) 设 s_2 是不在 $(s_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ 中出现的标号最小的顶点, 并且连接 s_2 与 t_2 ;
- 3) 如此一直下去, 直至确定 $n - 2$ 条边: $s_1 t_1, s_2 t_2, \dots, s_{n-2} t_{n-2}$.

再加上 $N - \{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}\}$ 中剩下的两个顶点. 则即可得到 T .

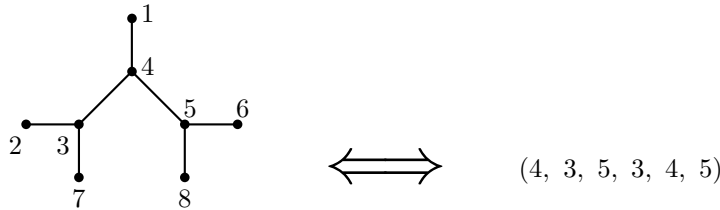


事实上,





由此可知,



容易验证: 不同的排列产生 K_n 的不同的生成树. 这样就建立了所要的一一对应.
因此, $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

§2.4 树的算法及应用

一、构造生成树的算法

下面利用根树讨论一些构造生成树的算法.

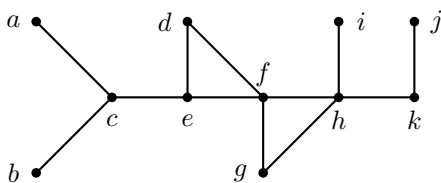
(一) 深度优先搜索法 (称为回溯)

基本思想:

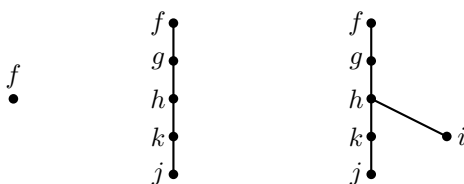
1. 任意选择图 G 的一个顶点 v_0 作为根;
2. 通过相继地加边来形成在顶点 v_0 开始的路,
其中, 每条新边都与路上的最后一个顶点以及不在路上的一个顶点相关联;
3. 继续尽可能多地添加边到这条路;
4. 若这条路经过图 G 的所有顶点, 则这条路即为 G 的一棵生成树;
5. 若这条路没有经过图 G 的所有顶点, 不妨设形成这条路的顶点顺序为 v_0, v_1, \dots, v_k , 则
 - (1) 返回到路里的次最后顶点 v_{k-1} .
 - (2) 若有可能, 则形成在顶点 v_{k-1} 开始的经过还没有访问过的顶点的的路;
 - (3) 否则, 则返回到路里的顶点 v_{k-2} , 然后再试.
 - (4) 重复这个过程, 在所访问过的最后一个顶点上开始, 在路上一次返回一个顶点, 只要有可能就形成新的路, 直到不能添加更多的边为止.

因为图 G 是有限边数的连通图, 所以这个过程以产生生成树而告终.

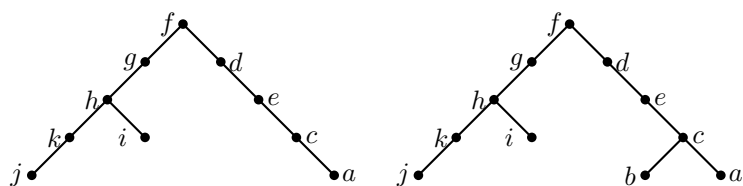
例 2.5 用深度优先搜索法求下列图的一个生成树.



- 解: (1) 任意选择图中一个顶点为根, 不妨设 f 为根;
- (2) 相继地添加与还不在路上的顶点相关联的边, 不妨设产生路 $fghkj$;
- (3) 回溯到 k , 不存在从 k 开始包含还没有访问过的顶点的的路, 所以回溯到 h , 形成路 hi ;



- (4) 回溯到 g , 然后再回溯到 f , 从 f 建立路 $fdeca$;
 (5) 再回溯到 c 并且形成路 cb , 从而产生了一棵生成树.



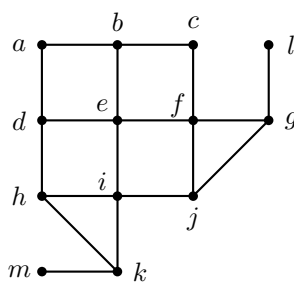
(二) 宽度优先搜索法(或广度优先搜索法)

基本思想(步骤):

1. 从图的顶点中任意地选择一个根;
2. 添加与这个顶点相关联的所有边, 在这个阶段所添加的新顶点称为生成树里在1层上的顶点, 并任意地排序它们;
3. 按顺序访问1层上的每个顶点, 只要不产生简单回路就添加与这个顶点相关联的每条边到树里, 这样产生了树里在2层上的顶点;
4. 遵循同样的原则继续下去, 知道添满图里的所有顶点.

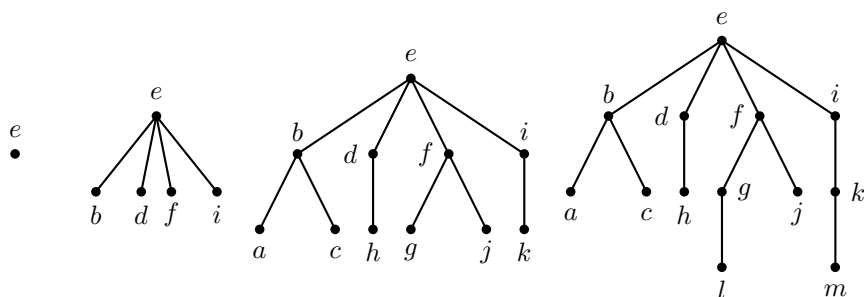
则产生一棵有根生成树.

例 2.6 利用宽度优先搜索法求下列图的生成树.



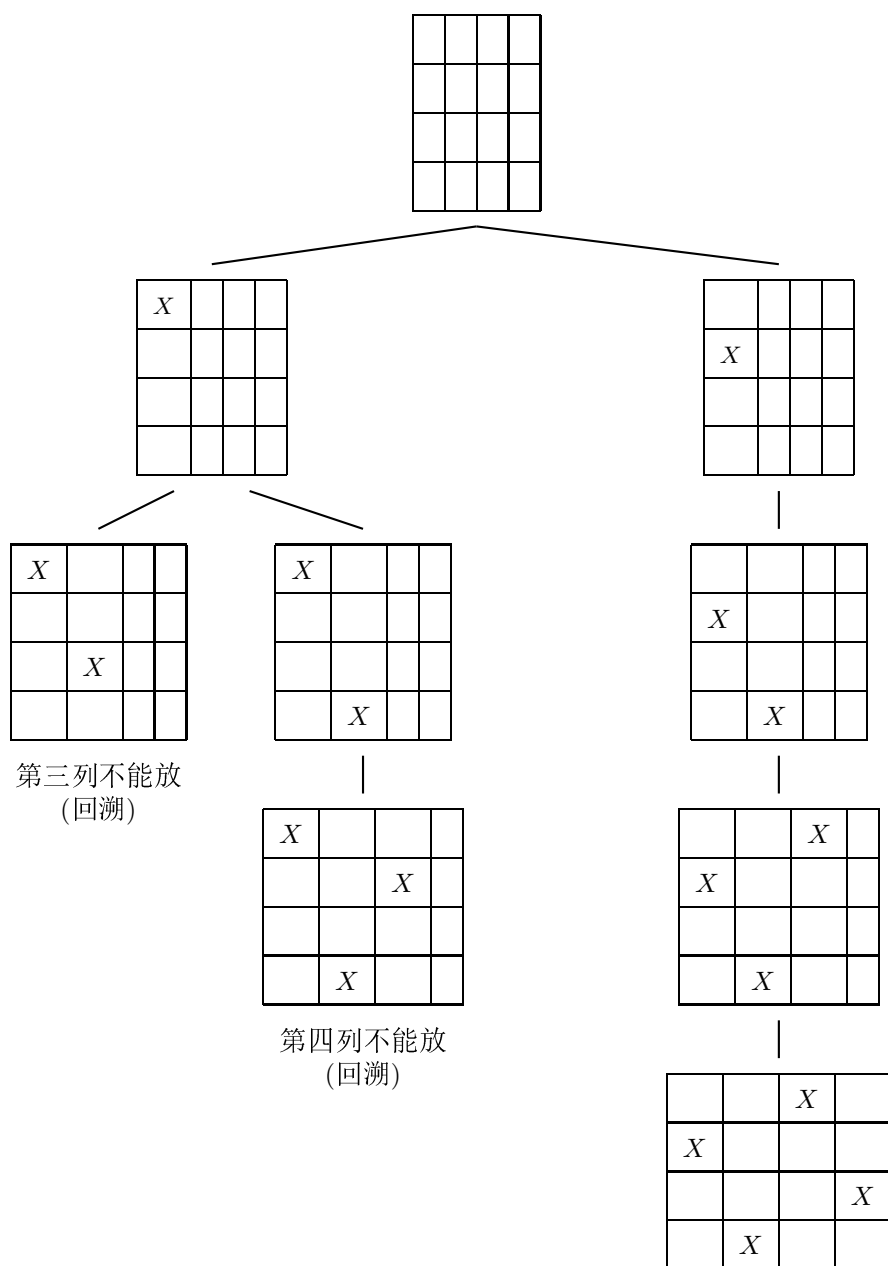
解: (1) 选择顶点 e 作为根;

- (2) 添加与 e 相关联的所有边, eb, ed, ef, ei , 并把 b, d, f, i 放在树的第一层上;
 (3) 添加在一层上的顶点到还不在于树上的相邻顶点的边, 并把新添加的点放在第二层上;
 (4) 添加在二层上的顶点到还不在于树上的相邻顶点的边.
 已包含所有顶点, 从而得到一棵有根生成树.



例 2.7 n 皇后的问题: 要求在 $n \times n$ 格的国际象棋盘上摆放 n 个皇后, 使其不能互相攻击, 即任意两个皇后都不处于同一行、同一列或同一斜线上, 问有多少种摆法?

用回溯法来解决4皇后的问题(其中, X 代表皇后).



注意:

- (1) 当在第一行第一列里放置一个皇后后, 得不出解;
- (2) 回溯到空棋盘, 在第一列的第二行里放置一个皇后, 则得出解. 此解为右子树.

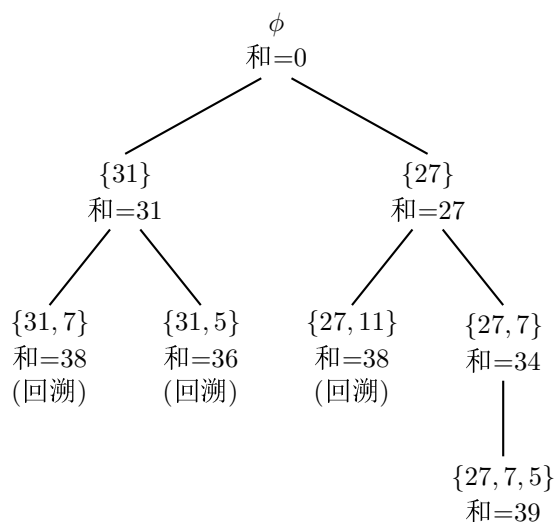
例 2.8 子集和: 给定一组正整数 x_1, x_2, \dots, x_n , 求这组整数的和为 M 的一个子集.

如何用回溯来解决这个问题?

解: 从空无一项的和来开始, 通过相继地添加项来构造这个和.

1. 若当添加这个序列里的一个整数到和里, 而这个和仍然小于 M 时, 则包含这个整数;
2. 若得出使得添加任何一项就大于 M 的一个和, 则通过去掉这个和的最后一项来回溯.

例如: 求集合 $\{31, 27, 15, 11, 7, 5\}$ 的和等于 39 的一个子集.



由此可知, 集合 $\{31, 27, 15, 11, 7, 5\}$ 的和等于 39 的一个子集为 $\{27, 7, 5\}$.

二、求最优生成树(最小生成树)的算法

定义 2.8 连通赋权图中具有最小权的生成树,称为最优生成树.

下面讨论最优生成树的算法.

(一) 避圈法

1956年,克拉斯科(Kruskal)给出了在连通赋权图 G 中求最小树的算法—避圈法.

其方法是,开始选一条最小权的边,以后每一步中,总从未被选取的边中选一条权最小的边,并使之与已选取的边不构成圈(每一步中,如果有两条或两条以上的边都是权最小的边,则从中任选一条).

算法的具体步骤如下:

- (1) 在阶为 p 的图 G 中选取边 e_1 ,使 $w(e_1)$ 尽可能小;
- (2) 若已选定边 e_1, e_2, \dots, e_i ,则从 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取边 e_{i+1} ,使满足一下两条:
 - (a) $G[e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}]$ 不含回路;
 - (b) 在满足(a)的前提下,使 $w(e_{i+1})$ 尽可能小.
- (3) 当(2)不能继续执行时,停止.即直到选取的边数为 $p - 1$ 为止.

例 2.9 求图2.18的最优生成树.

解: 设 $e_{ij} = (v_i, v_j)$.

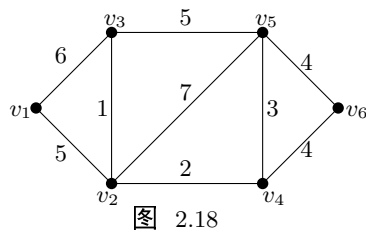


图 2.18

- (1) 从 E 中选最小权边 e_{23} ;
- (2) $E - \{e_{23}\}$ 中选最小权边 e_{24} ;

$E - \{e_{23}, e_{24}\}$ 中选最小权边 e_{45} ;

$E - \{e_{23}, e_{24}, e_{45}\}$ 中选最小权边 e_{56} (或 e_{46});

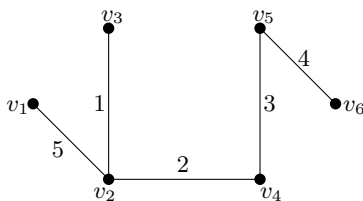
$E - \{e_{23}, e_{24}, e_{45}, e_{56}\}$ 中选最小权边 e_{12}

(注意: 因 e_{46} 与 e_{45}, e_{56} 构成圈,所以虽然 $w(e_{46}) = 4 < 5 = w(e_{12})$,但不能选 e_{46} .);

而在 $\{e_{23}, e_{24}, e_{45}, e_{56}, e_{12}\}$ 中,若再增加边则含有圈,所以停止.

所以,由 $\{e_{23}, e_{24}, e_{45}, e_{56}, e_{12}\}$ 构成的生成树为最优生成树. 其总造价为

$w(e_{12}) + w(e_{23}) + w(e_{24}) + w(e_{45}) + w(e_{56}) = 15$ (单位).

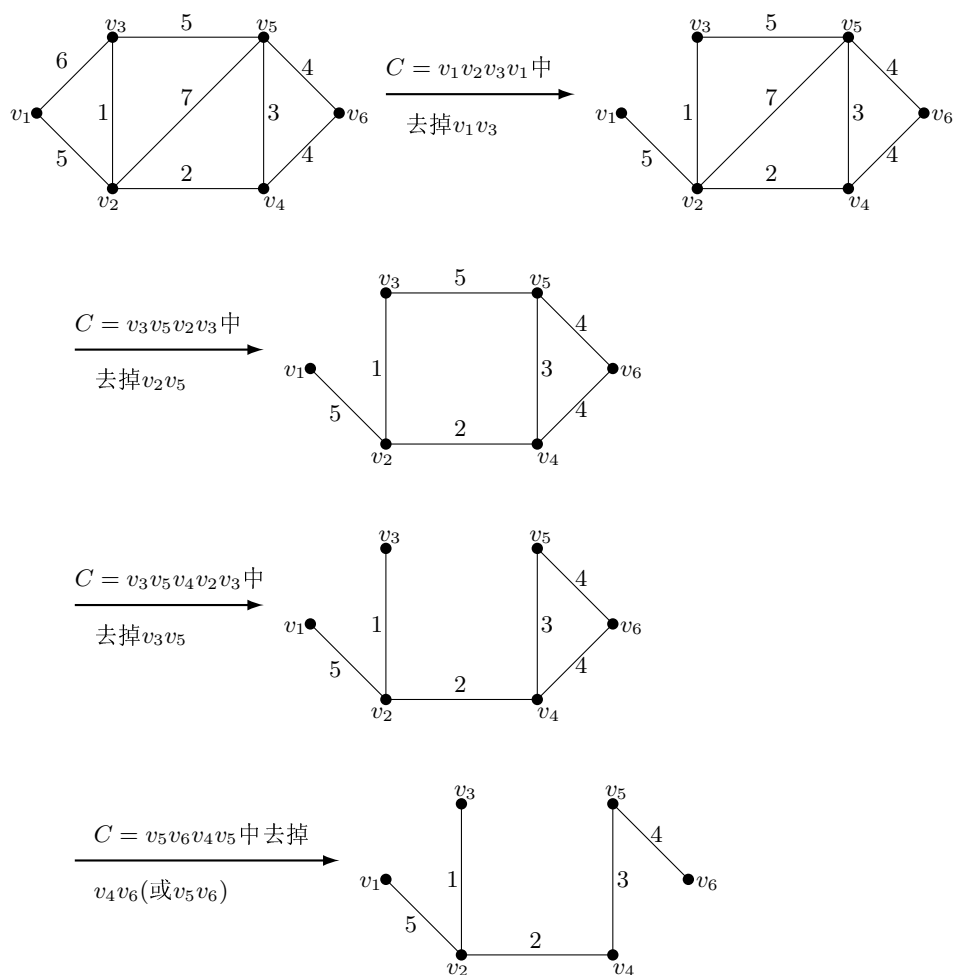


(二) 破圈法

此方法是Rosenstic和管梅谷各自独立给出的.

其方法是: 对连通赋权图 G ,

1. 若 G 不是树, 则 G 中必有回路, 任取一个回路, 从回路中删去一条权最大的边 (如果有两条或两条以上的边都是权最大的边, 则任意去掉其中一条边), 所得图记为 G_1 ;
2. 若 G_1 不是树, 又从 G_1 的某回路内删去权最大的一条边.
3. 如此下去, 一直到一个不含回路的连通图为止, 则得到的图便是最优生成树.



三、 m 叉树(或 m 元树)的基本概念与性质

定义 2.9 如果在根树中规定了每一层上的顶点的次序, 则称此根树为有序树.

一般地, 在画出的有序树中, 规定同一层次的顶点的次序为从左至右(即不能互换).

如图2.19所示的(a), (b)是两棵不同的有序树.

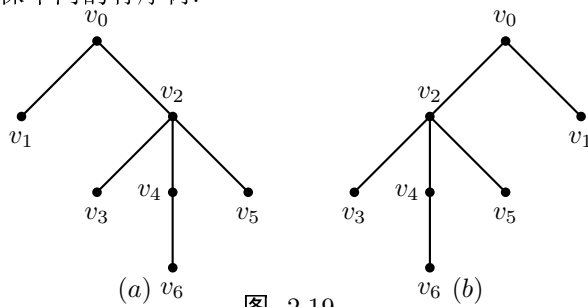


图 2.19

定义 2.10

1. 每个顶点的出度不大于 m 的有序根树称为 m 叉树;
2. 每个顶点的出度(或儿子)恰好为 m 或零的 m 叉树称为完全 m 叉树;
3. 所有树叶层次相同的完全 m 叉树称为正则 m 叉树.
4. 特别地, 把 $m = 2$ 的完全 m 叉树称为二叉树.

例如,

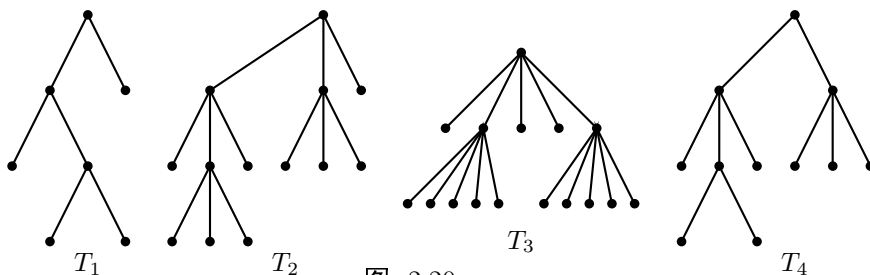


图 2.20

T_1 为二叉树, T_2 为完全3叉树, T_3 为完全5叉树, T_4 为3叉树, 但不是完全3叉树.

定理 2.11 带有 i 个内点的完全 m 叉树含有 $n = mi + 1$ 个顶点.

证明: 除根之外的每个顶点都是内点的儿子.

因为每个内点均有 m 个儿子, 所以在完全 m 叉树中除根之外还有 mi 个顶点.

因此, 该完全 m 叉树含有 $n = mi + 1$ 个顶点.

定理 2.12 一个完全 m 叉树满足下列命题:

- (1) n 个顶点有 $i = \frac{n-1}{m}$ 个内点和 $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$ 个树叶;

(2) i 个内点有 $n = mi + 1$ 个顶点和 $l = (m - 1)i + 1$ 个树叶;

(3) l 个树叶有 $n = \frac{ml - 1}{m - 1}$ 个顶点和 $i = \frac{l - 1}{m - 1}$ 个内点.

证明: 由定理2.11有 $n = mi + 1$, 又 $n = l + i$, 从而可推出(1), (2), (3).

例 2.10 假定某人寄出一封连环信, 要求收到信的每个人再把它寄给另外四个人. 有一些人这样做了, 但是其他人则没有寄出信. 若没有人收到超过一封的信, 而且若有100个人读过信, 但是不寄出之后, 连环信就终止了, 则包括第一个人在内, 有多少人看过信? 有多少人寄过信?

解: 此问题为完全4叉树问题, 且内点对应于寄出信的人, 而树叶对应于不寄出信的人.

因为有100个人不寄出信, 所以在这个根树里, 树叶数是100.

所以由定理2.12的(3)可知, 已经看过信的人数是 $n = (4 \times 100 - 1)/(4 - 1) = 133$,

且内点数是 $133 - 100 = 33$, 即33个人寄出过信.

四、最优二叉树与前缀码

定义 2.11 设 T 是有 t 片叶子的二叉树, 其中 t 片叶子分别带有权 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$, 则称 T 为加权二叉树.

称 $W(T) = \sum_{i=1}^t \omega_i l_i$ 为二叉树的权, 其中 l_i 为带权 ω_i 的树叶 v_i 的层数.

在所有的带权 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ 的二叉树中, 带权最小的二叉树称为最优二叉树.

例如, 对于带权3, 5, 7, 9的二叉树, 如图2.21所示.

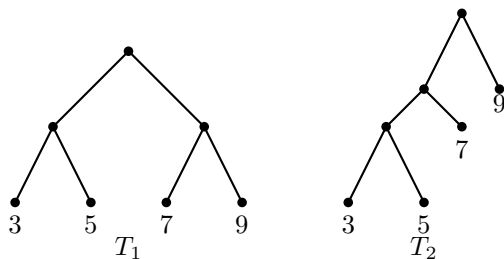


图 2.21

$$W(T_1) = 3 \times 2 + 5 \times 2 + 7 \times 2 + 9 \times 2 = 48$$

$$W(T_2) = \sum_{i=1}^4 \omega_i l_i = 9 \times 1 + 7 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 3 = 47$$

事实上, T_2 为最优二叉树.

最优二叉树问题源于计算机科学、生产管理等领域.

1952年, 哈夫曼(D. A. Huffman)给出了求最优二叉树的算法, 其步骤如下:

给定实数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ 且 $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_t$.

(1) 连接 ω_1, ω_2 为权的两片树叶, 得一内点, 其权为 $\omega_1 + \omega_2$;

(2) 在 $\omega_1 + \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_t$ 中选出两个最小的权, 连接它们对应的顶点(不一定是叶子点)得内点及所带的权;

(3) 重复(2), 直到形成 $t - 1$ 个内点, t 片树叶为止.

例 2.11 求带权为3, 4, 7, 8, 10, 12的最优二叉树.

解: 构造的过程如图2.22所示.

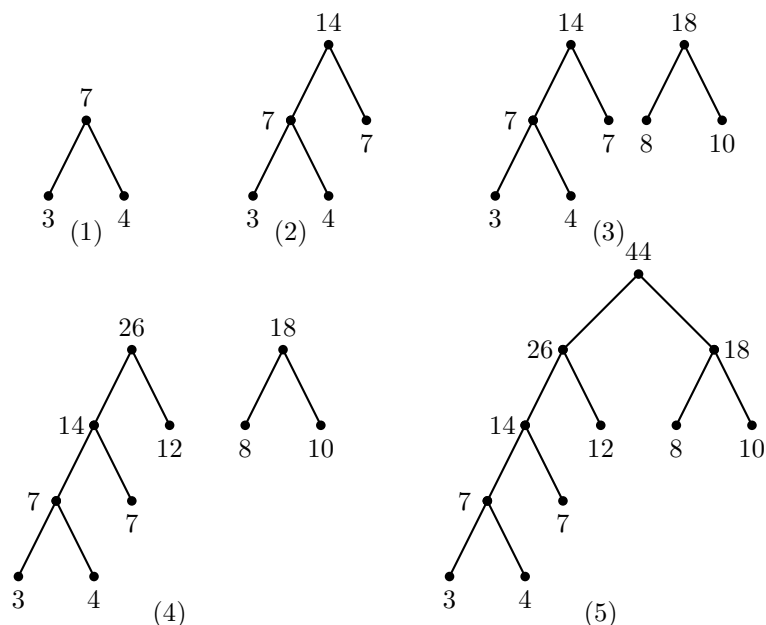


图 2.22

其最优二叉树的权为

$$W(T) = 3 \times 4 + 4 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 10 \times 2 + 12 \times 2 = 109$$

注意: 一般来说, 带权 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$ 的最优二叉树不一定是唯一的.

下面我们讨论最优二叉树在编码中的一个具体应用——前缀码.

在通信中, 常用0和1组成的二进制序列表示26个英文字母.

我们知道, 长度为 n 的二进制序列有 2^n 个, 所以可以用长度为5的二进制序列来表示26个不同的英文字母. 当每个字母都用5位来编码时, 用来编码数据的总位数是5乘以文本中的字符数.

因此, 需要找出这些字幕的编码方案, 使得在编码数据时, 尽可能使用的位数少一些, 即考虑用不同长度的二进制序列来编码字母.

也就是较为频繁地出现的字幕应当用较短的二进制序列来编码. 较长的二进制序列应当用来编码不经常出现的字母.

但在接收端, 必须把收到的一长串二进制序列分割成单个字母对应的二进制序列, 即正确译码.

比如, 我们用00表示 e , 用01表示 t , 用0001表示 q , 那么当接收端收到信息串0001时, 就不能决定传递的信息是 et 还是 q .

为此我们要引入前缀码.

定义 2.12 设 $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ 为长度是 n 的符号串, 称其子串 $a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ 分别是 $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ 的长度为1, 2, $\dots, n-1$ 的前缀. 若在一个序列的集合中, 任何序列都不是另一个序列的前缀, 则称这个集合为前缀码.

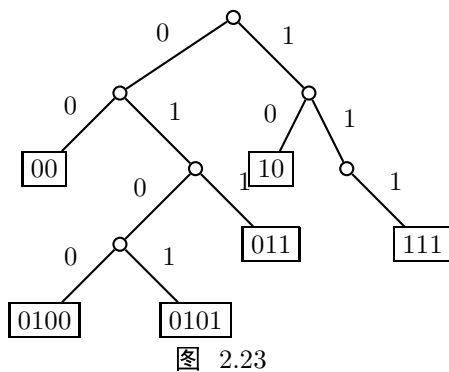
例如, 001是001011的前缀, 而不是010011的前缀. 集合 $\{000, 001, 01, 10, 11\}$ 是前缀码, 而集合 $\{1, 00, 01, 000, 0001\}$ 不

是前缀码.

下面介绍用二叉树来构造二元前缀码.

将一棵二叉树的每个内点与它左儿子之间的边记为0, 和它右儿子之间的边记为1, 把从根到每个叶子所经过边的记号序列作为叶子的记号, 这些叶子标记的集合就是一个前缀码.

例如, 图2.23所示二叉树产生的前缀码为{00, 10, 011, 111, 0100, 0101}.

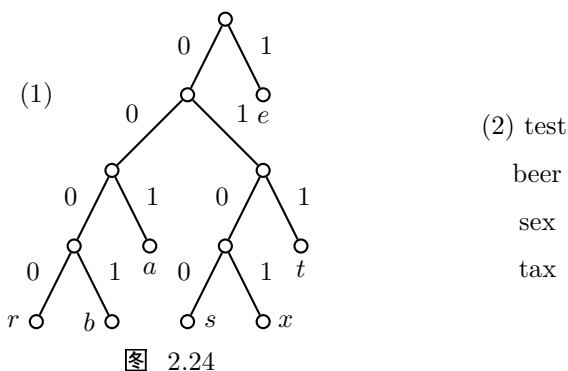


例 2.12 当给定下列编码方案时, 回答下列问题:

$$a:001, \quad b:0001, \quad e:1, \quad r:0000, \quad s:0100, \quad t:011, \quad x:0101.$$

- (1) 构造表示上述编码方案的前缀码的二叉树;
(2) 找出用下面的信息来表示的单词.
(I) 01110100011; (II) 0001110000; (III) 010010101; (IV) 0110010101.

解：



当我们知道了要传送的符号的频率时,如何选择二元前缀码,使传送的二进制位最少(称为最优前缀码)?这可以利用最优二叉树来产生最优前缀码.其步骤为:

- (1) 用各符号出现的频率 (或100乘各频率) 当权;
- (2) 用Huffman算法求最优二叉树 T .

则由 T 产生的前缀码为最优前缀码,即能使传送的二进制位最少.

下面通过例题说明最优前缀码的产生过程.

例 2.13 在通讯中, 已知字母 A, B, C, D, E, F 出现的频率依次为 30%, 25%, 20%, 10%, 10%, 5%. 求传送它们的最优前缀码.

解: 用100乘各频率, 并由小到大排序, 得 $\omega_1 = 5, \omega_2 = 10, \omega_3 = 10, \omega_4 = 20, \omega_5 = 25, \omega_6 = 30$.

用Huffman算法求得带权为5, 10, 10, 20, 25, 30的最优二叉树 T , 如图2.25所示.

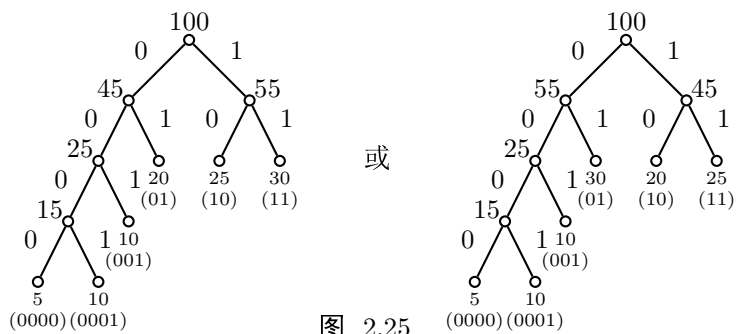


图 2.25

其最优前缀码为 $A: 11, B: 10, C: 01, D: 001, E: 0001, F: 0000$

或 $A: 01, B: 11, C: 10, D: 001, E: 0001, F: 0000$

用以上方法构造的 A, B, C, D, E, F 的最优前缀码传送1000个这样的字母所用二进制为

$$[4 \times (5 + 10) + 3 \times 10 + 2 \times (20 + 25 + 30)] \times \frac{1}{100} \times 1000 = 2400$$

而若用等长码传送由1000个 A, B, C, D, E, F 组成的字母(每个字母的二进制位为3),

则需要二进制位为 $1000 \times 3 = 3000$.

五、求二叉树搜索决策树的算法

利用树的方法可以使得搜索过程中状态变化复杂的现在变得条理清晰, 从而找到最有效的方法.

例 2.14 若有 n 根火柴, 甲、乙两人依次从中取走1根或2根, 但不能不取, 谁取走最后一根谁就是胜利者.

不妨设 $n = 7$, 在下图中 \boxed{i} 表示轮到甲取时, 有 i 根火柴, \textcircled{i} 表示轮到乙取时有 i 根火柴.

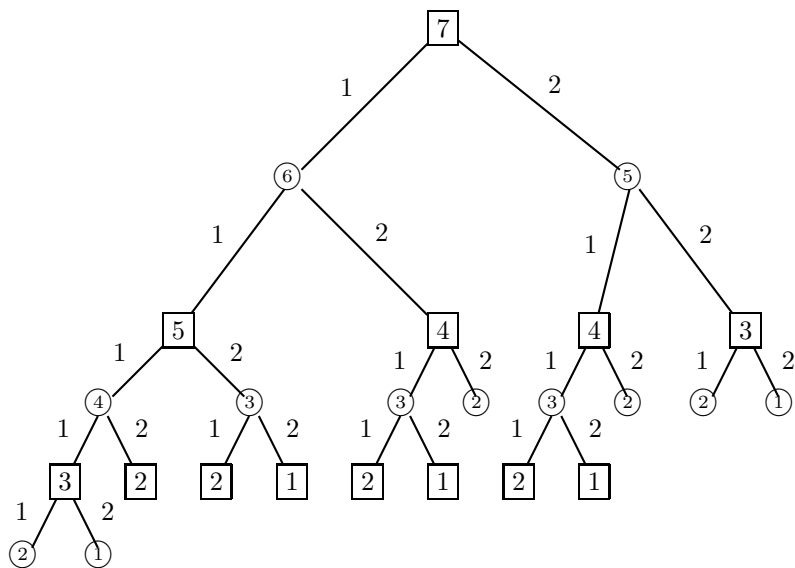


图 2.26

显然, 当出现 $\boxed{1}$ 或 $\boxed{2}$ 状态时, 甲取胜; 当出现 $\textcircled{1}$ 或 $\textcircled{2}$ 状态时, 乙取胜.

定义 2.13 每个内点都对应某一决策, 这些顶点的子树都对对应着该决策的每种可能结果, 这样的有序树称为决策树.

注意: 一个决策树是所有可能的解决路的集合. 其中,

1. 决策树的每一内点对应于一个部分解;
2. 每个叶子对应于一个解;
3. 一个解决过程的执行对应于通过从根到叶子的一条路.

例 2.15 有8枚外观相同的硬币, 其中有7枚重量相同, 而剩余的一枚伪币的重量较轻. 要求以比较重量的方法用一架天平去找出伪币, 需要多数次称重?

解: 为了便于描述这一问题的解决过程, 我们用1—8标记硬币.

每次量衡有3种可能: 左盘低下、保持水平、右盘低下. 所以, 由这3种可能可建立称重序列的决策树.

图2.27给出了这一解决过程的决策图. 图中 \emptyset 表示不会出现结果的情况.

决策树的顶点左侧标记着状态, 这里表示包含有伪币的硬币集合, 右侧标记测试内容.

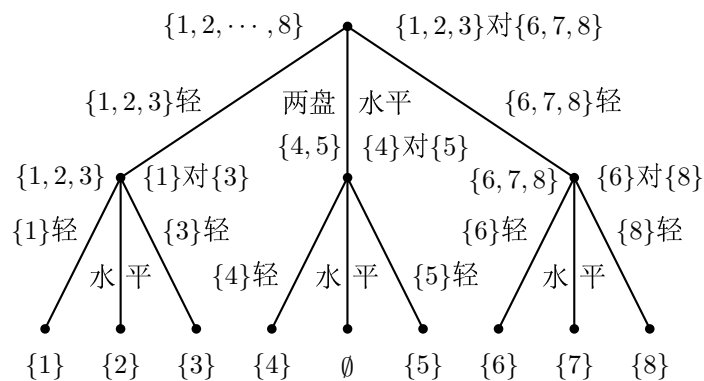


图 2.27

因为决策树的高度至少是2, 因此至少需要两次称重.

§2.5 平面图 (planar graph)

一、平面图的基本概念与性质

前面我们已经讨论了一类最简单的图——树和森林. 我们所看到的树和森林的图形表示都是画在平面上, 使其边仅在端点处相交, 而且每条边都可以画成直线段. 这个事实对任何图都成立吗? 本节将讨论并回答这个问题.

图的平面性问题, 除了它的理论意义外, 有许多实际应用. 例如, 单面印刷电路板和集成电路的布线问题. 近年来, 大规模集成电路的发展促进了图的平面性研究.

定义 2.14

- 1) 如果图 G 能够示画在曲面 S (如平面、球面、双曲面等)上, 且使得它的边仅在端点处相交, 则称 G 可嵌入曲面 S (embeddable in the surface).
- 2) 如果图 G 可以嵌入平面上, 则称 G 是可平面图(plan graph).
- 3) 已经嵌入平面上的图 \overline{G} 称为 G 的平面表示.

注意: 可平面图 G 与 G 的平面表示 \overline{G} 是同构的.

在不产生混淆的情况下, 这两个概念通常不加以区别, 都简称为平面图(planar graph).

例如,

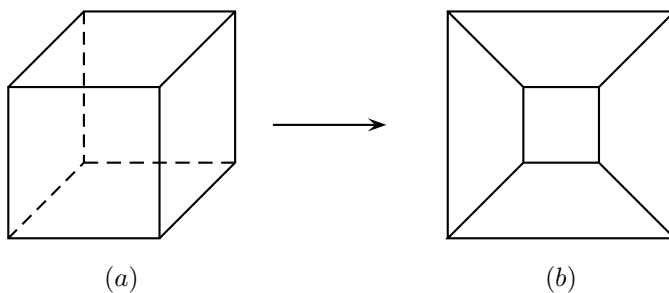


图 2.28

所以, (a)是可平面图.

定义 2.15 设 G 是一个平面图.

- 1) 由 G 中的边所包围的区域, 在区域内既不包含 G 的顶点, 也不包含 G 的边, 则称此区域为 G 的一个面(face).
- 2) 有界区域称为内部面, 无界区域称为外部面.
- 3) 包围面的长度最短的圈称为该面的边界(boundary).
- 4) 面 f 的边界的长度称为该面的度数, 记作 $d(f)$.

例 2.16 指出图2.29所示平面图的面、面的边界、面的度数.

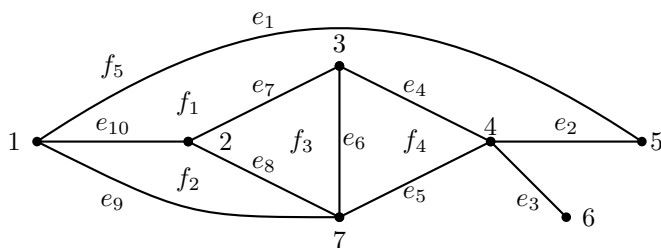


图 2.29

解:

面 f_1 , 其边界为 $1e_15e_24e_3e_42e_51$, $d(f_1) = 5$;

面 f_2 : 其边界为 $1e_{10}2e_87e_91$, $d(f_2) = 3$;

面 f_3 : 其边界为 $2e_73e_67e_82$, $d(f_3) = 3$;

面 f_4 : 其边界为 $3e_14e_57e_63$, $d(f_4) = 3$;

外部面 f_5 : 其边界为 $1e_15e_24e_36e_34e_57e_91$, $d(f_5) = 6$.

定理 2.13 对任何平面图 G , 面的度数之和为边数的二倍.

证明: 根据面的度数定义, 平面图 G 的每一条非割边恰好含于两个面的边界,

而每一条割边虽然只在一个面的边界上, 但在计算这个面的度数时, 被计算了两次.

因此, 在计算各个面的度的总和时, G 的每条边都恰好计算两次.

从而, 面的度数之和为边数的二倍.

推论 2.4 在任何平面图中, 度数为奇数的面的个数必为偶数.

定理 2.14 (Euler 公式) 设 G 是一个有 p 个顶点, q 条边和 r 个面的连通平面图, 则

$$p - q + r = 2.$$

证明: 对面数 r 进行归纳证明.

由 G 为连通的平面图可知, 当 $r = 1$ 时, G 是树, 因而 $q = p - 1$.

所以, $p - q + r = 1 + 1 = 2$.

假设对于一切面数小于 r ($r > 1$) 的所有连通平面图, Euler 公式成立.

现假设 G 是一个有 p 个顶点, q 条边和 r 个面的连通平面图.

由 $r > 1$ 可知, G 至少有一个回路, 取这回路中的一条边 e ,

则 $G - \{e\}$ 仍是连通平面图且有 p 个顶点, $q - 1$ 条边和 $r - 1$ 个面.

根据归纳假设, $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$. 因此, $p - q + r = 2$.

推论 2.5 设 G 是带有 p 个点, q 条边的连通平面简单图, 其中 $p \geq 3$, 则 $q \leq 3p - 6$.

证明: 因为 G 是连通平面简单图, 所以 G 的每个面的度数至少为 3.

从而, $2q = \sum_f d(f) \geq 3r$, 其中 r 为 G 的面数.

因此, 由欧拉公式 $p - q + r = 2$, 得 $2q \geq 3r = 3(2 - p + q) \Rightarrow q \leq 3p - 6$.

例如, 图 K_5 有5个顶点10条边, 而 $3|V(K_5)| - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9$, 即 $|E(K_5)| > 3|V(K_5)| - 6$. 所以, 由推论2.5可知, K_5 是非平面图.

推论 2.6 设 G 是带有 p 个点, q 条边的连通平面简单图, 其中 $p \geq 3$ 且没有长度为3的圈, 则 $q \leq 2p - 4$.

证明: 因为 G 没有长度为3的圈的简单图. 所以, $2q = \sum_f d(f) \geq 4r$, 其中 r 为 G 的面数.

从而, 由欧拉公式得 $2q \geq 4r = 4(2 - p + q) \Rightarrow q \leq 2p - 4$.

例如, 图 $K_{3,3}$ 没有长度为3的圈, 且有6个顶点9条边. 所以, $|E(K_{3,3})| = 9 > 2 \times 6 - 4 = 2|E(K_{3,3})| - 4$. 从而, 由推论2.6可知, $K_{3,3}$ 是非平面图.

推论 2.7 设 G 是任意平面简单图, 则 $\delta(G) \leq 5$ ($\delta(G)$ 为 G 的最小顶点度).

证明: 设 G 的任一连通分支 G_i ($i = 1, 2, \dots, \omega$), 有 p_i 个顶点, q_i 条边. 对于 $p_i = 1, 2$, 结论显然成立.

若 $p_i \geq 3$, 则由第一章定理1.1和推论2.5可知,

$$\delta(G_i)p_i = \sum_{v \in V(G_i)} \delta(G_i) \leq \sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 2q_i \leq 2(3p_i - 6) = 6p_i - 12$$

从而, $\delta(G_i) \leq 6 - \frac{12}{p_i} < 6$. 于是, $\delta(G_i) \leq 5$. 故, $\delta(G) \leq 5$.

例 2.17 平面上给出 n ($n \geq 3$)个点时, 在所有两点间的距离 (共有 C_n^2) 中, 出现最短距离的次数不会超过 $3n - 6$.

证明: 构造图 G , 使得顶点为 n 个点, 两点间相邻当且仅当这两点间的距离为最短距离 l . 此时, 图 G 为平面图.

否则, 在图 G 的某一连通分支 G_i 中必存在相交的两条边. 不妨设不同的边 uv 和 xy 相交于非端点处 o , 其夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$).

若 $\theta = \pi$ (或 0), 则如图2.30 (a) 所示, 存在两点 (点 u 与 x , 或点 y 与 v) 其距离小于最短距离, 矛盾.

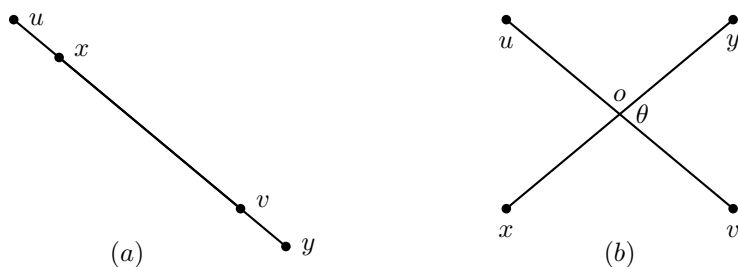


图 2.30

因而, $0 < \theta < \pi$, 如图2.30 (b) 所示.

又由边 uv 和 xy 的距离均为最短距离 (长度相等) 可知, 在 u, v, x, y 中至少有两点, 使得从交点 o 到这两点的距离不超过最短距离 l 的一半. 不妨设这两点为 u, x , 则有 $|ou| \leq \frac{1}{2}l$, $|ox| \leq \frac{1}{2}l$.

此时, 在三角形 uox 中有 $|ux| < |ou| + |ox| \leq \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}l = l$.

因而, 点 u 与 x 之间的距离小于最短距离 l , 矛盾. 因此, G_i 是平面图.

从而, 由推论2.5可知, 图 G 的每一连通分支 G_i 的边数 $|E(G_i)|$ 不会超过 $3|V(G_i)| - 6$.

于是, 平面上给出 n ($n \geq 3$)个点时, 出现最短距离的次数不会超过

$$\sum_{i=1}^{\omega(G)} |E(G_i)| = \sum_{i=1}^{\omega(G)} (3|V(G_i)| - 6) = 3n - 6\omega(G) \leq 3n - 6.$$

二、库拉图斯基(Kuratowski)定理与极大平面图

1930年波兰数学家库拉图斯基(Kuratowski)给出了一个图为平面图的充分必要条件.

定义 2.16 设 G 是一个平面图.

- 1) 通过删去 G 的一条边 uv 后, 添加一个新的顶点 w 及两条新的边 wu 和 wv , 这样的操作称为初等细分(或称为剖分).
- 2) 若图 G 经过有限次的剖分得到另一个图 G' , 则称图 G' 为剖分图, 即 G' 为在 G 的边上插入有限个顶点所得到的图.
- 3) 若可以从相同的图 G 通过一系列剖分来获得图 G_1 和 G_2 , 则称 G_1 和 G_2 是同胚的(homeomorphism).

例如, (1) 图2.31 分别给出了 K_5 和 $K_{3,3}$ 的一个剖分.

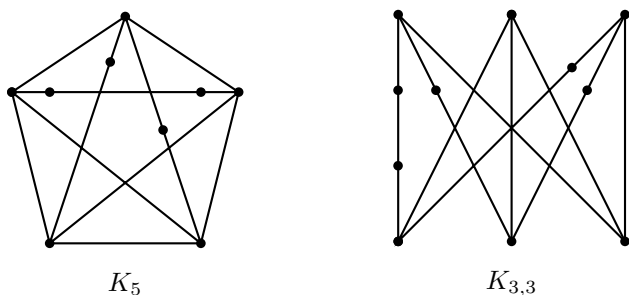


图 2.31

(2) 图2.32所示的三个图 G_1, G_2, G_3 都是同胚的.

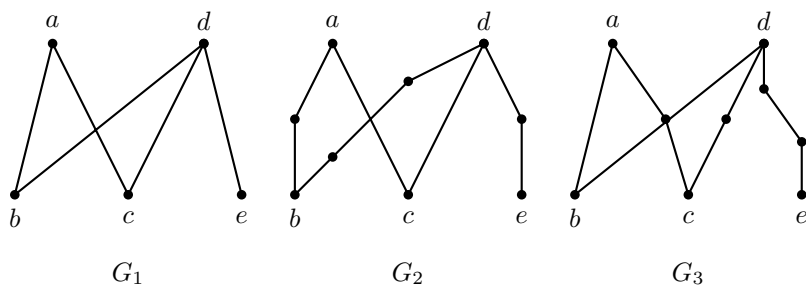


图 2.32

定理 2.15 (Kuratowski 定理) 图 G 是平面图当且仅当它的任何子图都不是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分.

例如, 彼得森(Petersen)图不是平面图.

事实上, 删去图2.33(a)彼得森图的顶点 b , 得到它的一个子图为图2.33(b)所示 H , 而 H 同胚于 $K_{3,3}$. 故彼得森图不是平面图.

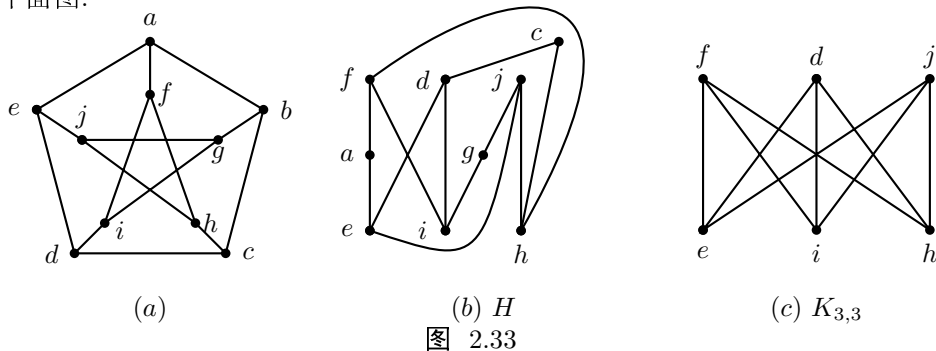


图 2.33

下面讨论Kuratowski 定理的证明.

证明: 必要性: 我们知道, 若 G 是非平面图, 则 G 的每个剖分图也是非平面.

若 G 是平面图, 则 G 的每个子图也是平面图.

由于 $K_5, K_{3,3}$ 是非平面图, 因而, 若图 G 是平面图当且仅当它的任何子图都不是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分.

充分性: 反证法.

假设存在一个非平面图 G , 它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图, 且有尽可能少的边, 则 G 是3连通简单图.

显然 G 也必然是一个极小非平面图. 设 uv 是 G 的一条边, H 是平面图 $G - uv$ 的一个平面嵌入.

由于 G 是3连通的, 所以 H 是2连通的, 则 u 和 v 同在 H 的一个圈上,

选择 H 的一个包含 u 和 v 的图 C , 使得 H 在 C 中有尽可能多的边.

由于 H 是2连通的简单图, 所以 H 中 C 的每座桥必然至少有两个接触顶点.

于是, C 的所有外桥必然是交叠于 u, v 的2桥.

因为, 如若某一外桥是 $k \geq 3$ 的 k 桥, 或是回避 u, v 的2桥,

则将存在一个包含 u 和 v 而在它的内部具有比 C 的内部更多变的圈 C' , 这与 C 的选择矛盾.

事实上, H 中 C 的所有外桥必然是单边的.

因为如若具有接触顶点 x 和 y 的一座2桥由第三个顶点, 则集 $\{x, y\}$ 将是 G 的一个2顶点割,

这与 G 是3连通的事实矛盾.

根据内外桥是相互回避的, 没有两座内桥是交叠的所以偏斜于 uv 的某一内桥必然是交叠于某一外桥的.

因为否则, 由于每座外桥都相互回避的内桥都是可移动的, 所以这种内桥都是可移动的(逐个的),

因而边 uv 可画在某圈 C 中, 从而得到 G 的一个平面嵌入, 这与 G 为非平面图矛盾.

因此, 存在一内桥 B , 他偏斜于 uv , 有偏斜于某一外桥 xy .

现按照 B 是否具有不同于 u, v, x 和 y 的接触顶点, 分两种情形讨论.

情形1: B 有不同于 u, v, x 和 y 的接触顶点, 记 B 在 $C(y, v)$ 中有一个接触顶点为 v_1 .

我们在按照 B 在 $C(y, v)$ 中是否有接触顶点, 分两种情形来考察.

(1a) B 在 $C(y, v)$ 中有一个接触顶点为 v_2 , 此时, 在 B 中存在一条 (v_1, v_2) 路 P , 它与 C 是内部不相交的.

因此 $(C \cup P) + \{uv, xy\}$ 是 G 中 $K_{3,3}$ 的一个剖分图, 导致矛盾.

(1b) B 在 $C(y, v)$ 中没有接触顶点, 由于 B 对于 uv 和 xy 都是偏斜的, B 必然在 $C(y, v)$ 中有一个接触顶点为 v_2 , 并在 $C(v, x)$ 中有一个接触顶点为 v_3 .

于是 B 有三个接触顶点 v_1, v_2, v_3 .

则在 $V(B) - V(C)$ 中存在一个顶点 v_0 , 以及在 B 中存在分别从 v_0 到 v_1, v_2, v_3 的三条路 P_1, P_2, P_3 , 使得当 $i \neq j$ 时 P_i, P_j 仅有一个公共的顶点 v_0 .

于是 $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) + \{uv, xy\}$ 包含 $K_{3,3}$ 的一个剖分图, 导致矛盾.

情形2: 除了 u, v, x, y 之外, B 没有其他接触顶点.

由于 B 对于 uv 和 xy 来说都是偏斜的, 由此推知 u, v, x, y 必然全部都是 B 的接触顶点.

所以在 B 中存在一条 (u, v) 路 P 和一条 (x, y) 路 Q , 使得

(I) P 和 Q 都与 C 内部不相交;

(II) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

我们在按照 P 和 Q 由一个或多个公共顶点,分两种情形来考察.

(2a) $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. 此时, $(C \cup P \cup Q) + \{uv, xy\}$ 是 G 中 K_5 的一个剖分图, 又出现矛盾.

(2b) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$, 设 u' 和 v' 是 Q 上 P 的第一个和最后一个顶点,

并设 P_1 和 P_2 表示 P 的 (u, u') 节和 (v', v) 节.

则 $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup Q) + \{uv, xy\}$ 在 G 中包含 $K_{3,3}$ 的一个剖分图, 再次出现矛盾.

所有可能的情形都导致矛盾, 证明完毕.

除以上平面图的判别以外, 在1937年互格纳(K. Wager)给出了平面图的另一判别准则.

定义 2.17 设 $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 是 G 的一个边子集. e_i 的两个端点为 $u_i, v_i (i = 1, 2, \dots, k)$. 在 G 中除去边子集 E_1 , 并分别将 u_i 与 v_i 重合为一个新的顶点 $w_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 所得的图称为 G 收缩 E_1 , 记为 $G \circ E_1$.

定理 2.16 一个图为平面图当且仅当它的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$.

证明: 必要性: 反证法, 若图 G 存在一个可收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图,

则 G 存在一个由 K_5 或 $K_{3,3}$ 剖分得到的子图. 而由定理2.15可知, 这是不可能的.

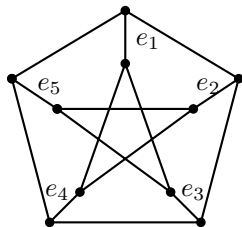
因此, 一个图是平面图它的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$.

充分性: 若图 G 的任何子图都不能收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$, 则其任何子图都不能由 K_5 或 $K_{3,3}$ 剖分得到.

因此, 由定理2.15可知, 图 G 必为平面图.

例如, Petersen图 G , 关于边子集 $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ 的一个收缩, 所得图 $G \circ E_1$ 为 K_5 .

所以由定理2.16可知, Petersen图不是平面图.



定义 2.18 设 G 是阶大于等于3的简单可平面图.

- 1) 若在任意两个不相邻的顶点 u, v 之间加入边 uv 就会破坏图的平面性, 则称 G 是极大平面图(maximal planar graph).
- 2) 极大平面图的平面表示称为三角剖分平面图, 简称为三角剖分图.

若 G 是极大平面图, 显然 G 是连通图, 且 G 中不存在割边.

定理 2.17 阶为 p ($p \geq 3$)的简单平面图 G 是极大平面图的充要条件为

- (1) G 中每个面的度数均为3;
- (2) 设 G 有 q 条边 r 个面, 则 $3r = 2q$;
- (3) 设 G 有 p 个顶点, q 条边和 r 个面, 则 $q = 3p - 6$, $r = 2p - 4$.

证明: 由 G 为简单图可知, G 中没有环和多重边, 因此不存在度数为1或2的面, 即 $d(f) \geq 3$.

(1) 必要性: 假设 G 存在度大于3的面 f , 不妨设其边界为 $v_1 v_2 v_3 v_4 \cdots v_n v_1$ ($n \geq 4$)).

显然 v_1 与 v_3 不相邻, 在面 f 内加入边 $\{v_1, v_3\}$, 不改变图 G 的平面性, 这与 G 是极大平面矛盾.

充分性显然.

(2) 必要性: 由(1)可知, 平面图 G 的任一面 f , 有 $d(f) = 3$.

$$\text{所以, } 2q = \sum_f d(f) = \sum_f 3 = 3r.$$

充分性: 由 $d(f) \geq 3$, $\sum_f d(f) = 2q = 3r = \sum_f 3$ 可知, $d(f) = 3$.

(3) 必要性: 由 $3r = 2q$ 和欧拉公式 $p - q + r = 2$ 可知, $2q = 3(2 - p + q)$.

所以, $q = 3p - 6$, 且 $r = 2 - p + q = 2 - p + (3p - 6) = 2p - 4$.

充分性: 由 $q = 3p - 6$, $r = 2 - p + q = 2 - p + (3p - 6) = 2p - 4$ 可知, $3r = 2q$.

因此, 由 $d(f) \geq 3$, $\sum_f d(f) = 2q = 3r = \sum_f 3$ 可知, $d(f) = 3$.

三、平面图的应用—正多面体

平面图的理论与凸多面体的研究有着紧密的联系. 事实上, 每个凸多面体都对应着一个平面图.

定义 2.19 设 P 是凸多面体, 以 P 的顶点为顶点, P 的棱为边而得到的平面图 $G(P)$ 称为对应于 P 的平面图.

显然, $G(P)$ 是连通的, 而且 $\delta(G(P)) \geq 3$. P 的面就是 $G(P)$ 的面, 而且 $G(P)$ 的每条边正好在两个面的边界上. 凸多面体 P 和对应于 P 的平面图 $G(P)$ 如图2.34 所示.

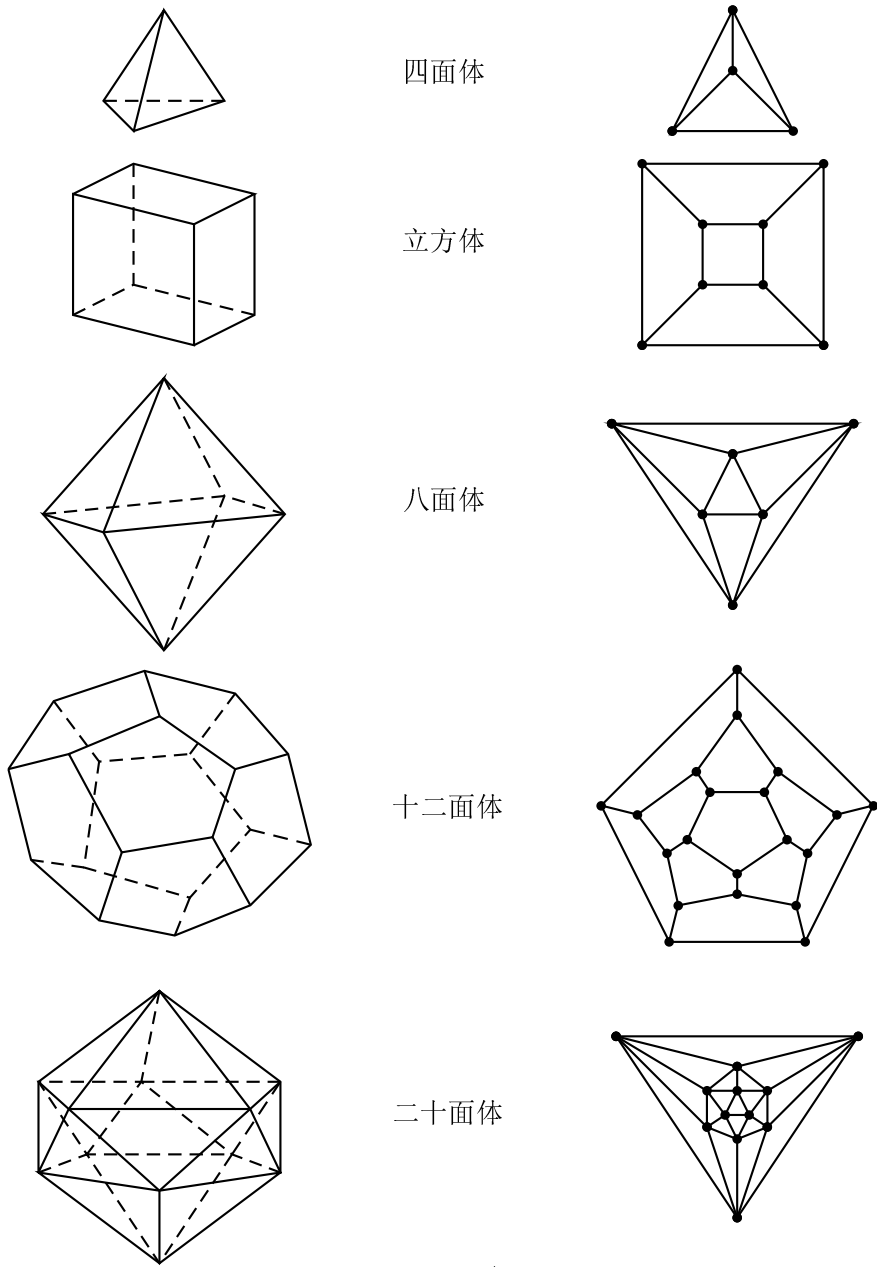


图 2.34 正多面体

用 V_n 和 F_n 分别表示凸多面体 P (或对应的平面图 $G(P)$)的 n 度点和 n 度面的数目, 则有

$$2E = \sum_{n \geq 3} nV_n = \sum_{n \geq 3} nF_n. \quad \text{由此可得:}$$

定理 2.18 每个凸多面体中都至少有一个 n 度面 F_n , 其中 $3 \leq n \leq 5$.

证明: 反证法: 设 $F_3 = F_4 = F_5 = 0$, 则由 $2E = \sum_{n \geq 3} nV_n = \sum_{n \geq 3} nF_n$ 可知,

$$2E = \sum_{n \geq 6} nF_n \geq \sum_{n \geq 6} 6F_n = 6 \sum_{n \geq 6} F_n = 6F$$

所以, $F \leq \frac{1}{3}E$. 又由 $2E = \sum_{n \geq 3} nV_n \geq 3 \sum_{n \geq 3} V_n = 3V$ 可知, $V \leq \frac{2}{3}E$.

从而, 由Euler凸多面体公式有 $E = V + F - 2 \leq \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}E - 2 = E - 2$.

矛盾. 因此命题成立.

每个面并且每个多面角都相等的凸多面体称为正多面体.

下述定理是Euclid(约公元前330年—前275年)的13卷《几何原本》书中的最后一个结果.

定理 2.19 存在且只存在5种正多面体: 正四面体、正方体、正八面体、正十二面体和正二十面体.

证明: 设 P 是正多面体且 $G(P)$ 是对应的平面图.

则由 $V - E + F = 2$, $2E = \sum_{n \geq 3} nV_n = \sum_{n \geq 3} nF_n$ 可知, 对任何凸多面体, 均有

$$\begin{aligned} -8 &= 4E - 4V - 4F = 2E + 2E - 4V - 4F \\ &= \sum_{n \geq 3} nF_n + \sum_{n \geq 3} nV_n - 4 \sum_{n \geq 3} V_n - 4 \sum_{n \geq 3} F_n \\ &= \sum_{n \geq 3} (n-4)F_n + \sum_{n \geq 3} (n-4)V_n \end{aligned} \quad (1)$$

因为 P 是正多面体, 所以存在两个整数 $h(\geq 3)$ 和 $k(\geq 3)$ 使 $F = F_h$ 且 $V = V_k$.

因此, 由 $\sum_{n \geq 3} (n-4)F_n = (h-4)F_h$, $\sum_{n \geq 3} (n-4)V_n = (k-4)V_k$ 和(1)式可知,

$$-8 = (h-4)F_h + (k-4)V_k. \quad (2)$$

且由 $2E = \sum_{n \geq 3} nV_n = \sum_{n \geq 3} nF_n$ 和 $\sum_{n \geq 3} nF_n = hF_h$, $\sum_{n \geq 3} nV_n = kV_k$ 可知, $hF_h = kV_k$. (3)

而由定理2.18可知, $3 \leq h \leq 5$. 所以

$$(I) \text{ 当 } h=3 \text{ 时, 由(2)和(3)式得 } \begin{cases} -F_3 + (k-4)V_k = -8 \\ 3F_3 = kV_k \end{cases} \implies (6-k)V_k = 12 \quad (4)$$

所以, $3 \leq k \leq 5$. 从而由(4)和 $3F_3 = kV_k$ 式有

当 $k=3$ 时, $V_3 = 4, F_3 = 4$, 因此 P 是四面体.

当 $k=4$ 时, $V_4 = 6, F_3 = 8$, 因此 P 是八面体.

当 $k=5$ 时, $V_5 = 12, F_3 = 20$, 因此 P 是二十面体.

$$(II) \text{ 当 } h=4 \text{ 时, 由(2)和(3)式得 } \begin{cases} (4-k)V_k = 8 \\ 4F_4 = kV_k \end{cases}$$

所以, $k=3$. 从而, $V_3 = 8, F_4 = 6$, 即 P 是立方体.

$$(III) \text{ 当 } h=5 \text{ 时, 由(2)和(3)式得 } \begin{cases} F_5 + (k-4)V_k = -8 \\ 5F_5 = kV_k \end{cases} \implies (10-3k)V_k = 20$$

所以, $k=3$. 从而, $V_3 = 20, F_5 = 12$, 即 P 是十二面体.

习 题 二

1. 给定一个由16条线段构成的图形(见图2.35). 证明: 不能引一条折线与每一线段恰好相交一次(折线可以是不封闭的和自由相交的, 但它的顶点不在给定的线段上).

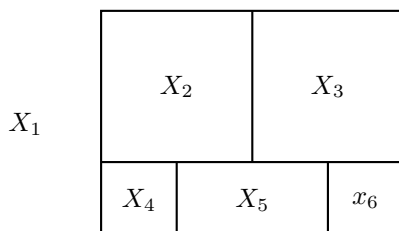


图 2.35

证明: 建立一个图 G : 顶点 v_i 代表图形的区域 X_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

顶点 v_i 与 v_j 之间连接的边数等于区域 X_i 与 X_j 公共线段的数目.

2. 图2.36是某个展览馆的平面图, 其中每个相邻的展览室有门相通.

证明: 不存在一条从 A 进入, 经过每个展览室恰好一次再从 A 处出来的参观路线.

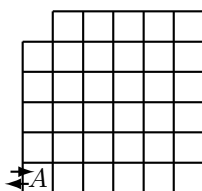


图 2.36

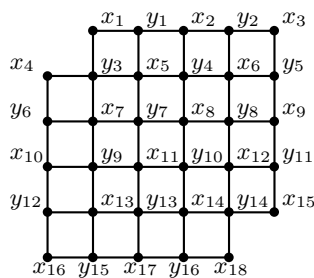


图 2.37

证明: 用顶点代表展览室, 两顶点相邻当且仅当这两点所对应的展览室有门相通,

则可得一个连通简单图 G (见图2.37). 因此, 只要证明 G 中不存在 H -回路即可.

3. 某次会议有20人参加, 其中每个人都至少有10个朋友. 这20人围一桌入座, 要想使与每个人相邻的两位都是朋友是否可能?

解: 用顶点代表人, 两人是朋友时相应顶点间连一边, 得到一个无向图 $G = (V, E)$.

只要证明 G 中存在 H -回路即可.

4. 设 G 是划分为 X, Y 的二部图, 且 $|X| \neq |Y|$, 则 G 一定不是 H -图.

证明: 利用定理2.3.

5. 设简单图 $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, 若有 $m \geq C_{n-1}^2 + 2$, 则 G 是 H -图.

证明: 利用定理2.4.

6. 证明: 若一棵树恰好有两个顶点的度为1, 则它是一条路.

7. 证明: 若 G 是 $\Delta(G) \geq k$ 的树, 则 G 中度为1顶点至少有 k 个.
8. 设无向图 G 中有 n 个顶点 m 条边, 且 $m \geq n$, 则 G 中必有圈.
9. 已知一棵无向树 T 有三个3度顶点, 一个2度顶点, 其余的都是1度顶点, 试求 T 中叶子数.
10. 若 G 连通且 $e \in E$, 则 e 属于 G 的每一个生成树当且仅当 e 是 G 的割边.
11. 证明: 若 G 不含环, 且恰好有一棵生成树 T , 则 $G = T$.
12. 设正整数序列 (d_1, d_2, \dots, d_n) 满足 $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$, 证明以 (d_1, d_2, \dots, d_n) 为度序列的连通分支数目最少的图 G 为一棵树.

证明: 用反证法: 设 G 为非连通图, 即其连通分支数 $\omega > 1$, 则得出矛盾, 从而 G 为连通图, 即为一棵树.

13. 证明下列各题:

- 1) 若完全二叉树 T 有 m 个内点和 k 个叶子点, 则 $m = k - 1$;
- 2) 完全二叉树 T 的边数 ε , 满足 $\varepsilon = 2(k - 1)$. 其中, k 为叶子点数.

14. 完全二叉树 T 必有奇数个顶点.

15. 一次连环信开始时有一人寄出一封信给其他5个人. 收到这信的每个人或者寄出这信给从来没有收到过它的其他5个人, 或者不把它寄给任何人. 假定在这个连环终止以前有10000人寄出过这信, 并且没有人收到过超过一封信. 有多少人收到过信? 又有多少人收到过信但是没有寄出过它?

16. 根据图2.38回答下列问题.

(a) 对下列每个二进制序列进行解码.

(1) 100111101 (2) 10001011001 (3) 10000110110001 (4) 0001100010110000

(b) 对下列单词进行解码.

(1) *den* (2) *need* (3) *lead* (4) *penned*

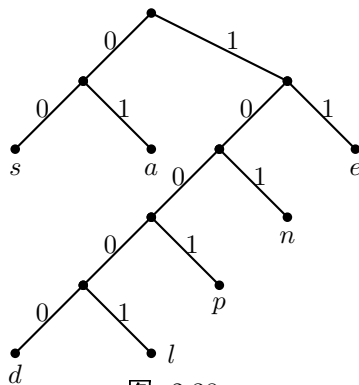


图 2.38

17. 试画一棵带权1, 3, 8, 9, 12, 15, 16的最优二叉树, 并计算它的权.

18. 设七个符号在通讯中出现的频率如下:

$$a: 30\%, b: 25\%, c: 15\%, d: 10\%, e: 10\%, f: 5\%, g: 5\%$$

编一个最优前缀码, 画出相应的最优二叉树. 问传递1000个符号, 需要多少个二进制位?

19. 设 G 是带有 p 个点, q 条边和 r 个面的简单平面图, 则 $p - q + r = 1 + \omega$. 其中, ω 为连通分支数.

20. 假定一个连通平面图有6个顶点, 每个顶点的度均为4, 问这个平面图有多少个面?

解: 8

21. 假定一个连通平面图有30条边和20个面, 问这个平面图有多少个顶点?

22. 假定一个连通的平面性二部图有 p 个顶点和 q 条边. 证明: 若 $p \geq 3$, 则 $q \leq 2p - 4$.

23. 平面上有 n 个点, 其中任两个点之间的距离至少是1. 证明在这 n 个点中, 距离恰好为1的点对数至多是 $3n - 6$.

证明: 首先建立图 $G = (V, E)$, 其中 V 就取平面上给定的 n 个点(位置也不变).

两个点之间的距离为1时, 该两顶点之间用一条直线段连接. 只要证明 G 是平面图即可.

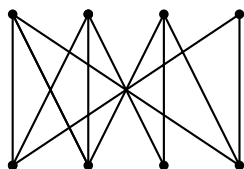
24. 设连通图 G 是面数 r 小于12的简单平面图, 且 G 中每个顶点的度数至少为3.

证明: G 中必存在至多由4条边围成的面.

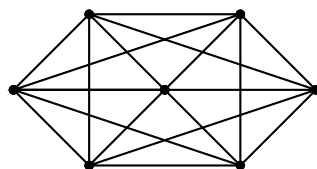
证明: 由欧拉公式可证.

25. 设简单平面图 G 中顶点数 $p = 7$, 边数 $q = 15$. 证明 G 是连通图.

26. 用库拉图斯基定理来确定下列图所示的图 G_1, G_2 是否为平面图.



G_1



G_2

27. 证明: 极大平面图 G 一定是连通图.

28. 证明: 在顶点数 $v \geq 4$ 的极大平面图 G 中, G 中最小度 $\delta(G) \geq 3$.

证明: 用反证法. 若 $\delta(G) \leq 3$, 分 $\delta(G) = 1$ 和 $\delta(G) = 2$ 情况讨论.

29. 如果 G 是 $p(p \geq 3)$ 个顶点 q 条边的极大平面图, 则 $q = 3p - 6$.

30. 将 G 画在平面上, 两条边相交的最小数目称为 G 的交叉数, 记为 $r(G)$. 显然 $r(G) = 0 \iff G$ 是平面图.

证明: (a) $r(K_5) = 1$; (b) $r(K_{3,3}) = 1$; (c) $r(K_6) = 3$.