代数学方法 • 模论

整理者：颜成子游/南郭子綦

2023 年 3 月 21 日

目录

1 模的基本概念和操作 **2**
1.1 基本概念 2
1.2 基本操作 4

2 自由模 **6**
2.1 自由模的定义 6
2.2 自由模的秩 8
2.3 向量空间 9
2.4 生成引理 * 10

3 模的张量积 **10**
3.1 张量积的定义 10
3.2 张量积的重要性质 12
3.3 环变换 14

4 主理想整环上的有限生成模 **15**

5 正合列入门 **17**
5.1 同调的基础之基础 18

模论是同调代数，交换代数等多个方向的起点。于笔者而言，在本科二年级所学习的模论一是远远不够，二是也没学出个什么样子来。从而在学习深层次的课程时，强烈感受到了模论的缺乏。因而攥写一篇模论的笔记非常有必要。

本篇笔记开始攥写于 2023 年 2 月 20 日，计划用两周时间写完，也就是在 2023 年 3 月 6 前写完本篇笔记。该笔记的来源是李文威《代数学方法》的模论章节。在阅读前，读者需要一些范畴论的知识作为前置。读者可参见笔者所攥写的范畴论基础笔记，也可以直接阅读《代数学方法》的第二章。

任何疑问可致邮 Tsechiyuan@163.com。

1 模的基本概念和操作

在这一节我们介绍模的基本概念和基本操作。范围是《代数学方法》第六章的 1，2 节。

1.1 基本概念

定义 1.1 设 R 是环，所谓左 R-模是指以下资料：

1. 加法群 $(M,+)$
2. 映射 $R\times M\to M$，记为 $(r,m)\mapsto rm$。满足：$r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$,$(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$,$(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$,$1_Rm=m$。

若改为右乘法:$m(r_1r_2)=(mr_1)r_2$，则称之为右 R-模。

rm 也被称为是 r 对 m 的纯量乘法。

命题 1.1 下面的性质是所有左模都满足的：

(1)$0\cdot m=0,\forall m\in M$

(2)$(-1_R)\cdot m=-m$

(3)$(n\cdot 1_R)m=nm$

证明 显然。 □

我们现在换一个角度来思考模。注意到上面的定义与群作用特别类似。我们思考结构 $\mathrm{End}(M)$.

这个结构拥有自然的环结构。加法是逐点相加，0 元是零同态。乘法是同态的合成，幺元是恒等映射。那么，$(M,+)$ 被赋予左模结构意味着存在一个环同态：

$$\varphi:R\to\mathrm{End}(M)\quad r\mapsto[m\mapsto rm]$$

同理，右模意味着：

$$\varphi:R^{\mathrm{op}}\to\mathrm{End}(M)\quad r\mapsto[m\mapsto mr]$$

由此立刻得到: 左 R-模实际上可以被看作一个右 R^{op}-模。如果 R 是交换环，则左右模不区分，统称为模。

例 1.1 任何环对于自身的左乘构成左 R-模，对右乘法构成右 R-模。

整数环 $\mathbb{Z}$ 上的模只能是加法群。因为 $1\cdot m=m$，从而 $n\cdot m=nm$。

接下来我们考虑模的子结构——子模。

定义 1.2 设 M 是左 R-模，子集 $M'\subset M$ 若满足加法封闭，纯量乘法封闭，则称之为 M 的子模。

若 M 没有除了本身和 $\{0\}$ 的子模，则称为单模。

子模可以相加。这里的相加是指:

$$\sum_{i\in I}M_i=\{\sum_{k=1}^{r}m_{i_k}:i_1,\dots,i_r\in I\}$$

即有限个元素和组成的元素。

子模也可以相交。这里不赘述其形式。可以证明，子模相加和相交后仍然得到子模。

定义 1.3 设 S 是 M 的子集，定义 S 生成的子模 $\langle S\rangle$ 为包含 S 的最小子模。即:

$$\langle S\rangle = \bigcap_{M'\supset S} M'$$

若 S 是独点集，容易想到 $\langle S\rangle = \langle x\rangle$ 可以直接表达为 $Rx = \{rx|r\in R\}$。对于一般情况，$\langle S\rangle = \sum_{x\in S} Rx$。

能表达为 Rx 形式的模称为循环模。显然 $R=\mathbb{Z}$ 的时候，这就是循环群。

例 1.2 环对自身的乘法有天然的左模与右模结构。比较子模与理想的定义，则 R 作为左 R-模的子模意味着 R 的左理想，R 作为右 R-模的子模意味着 R 的右理想。

定义 1.4 (模同态) 设 M_1 和 M_2 是左 R-模，映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 既是加法群的群同态，也保持纯量乘法:$\varphi(rx) = r\varphi(x)$. 则称其为两个模之间的模同态。

由此可以定义范畴 $R-\mathrm{Mod}$。同样的，如果定义右模同态，可以定义 $\mathrm{Mod}-R$ 范畴。

同样，定义 $\ker(\varphi)$ 和 $\mathrm{im}(\varphi)$。两者都是对应更大的模的子模。

注解 我们用一种全新的视角来看模同态。首先考虑集合 $\mathrm{Hom}_R(M,M')$。这里 M 和 M' 我们都考虑为左模。

这个集合显然自然有加法群的结构。其中零元是零态射。而同态的合成运算:

$$\mathrm{Hom}_R(M',M'')\times\mathrm{Hom}_R(M,M')\to\mathrm{Hom}_R(M,M''):(\varphi,\phi)\mapsto\varphi\circ\phi$$

显然是 $\mathbb{Z}$-双线性映射。即:

$$\varphi(\phi_1+\phi_2) = \varphi\phi_1+\varphi\phi_2 \quad (\varphi_1+\varphi_2)\phi = \varphi_1\phi+\varphi_2\phi$$

现在考虑自同态 $\mathrm{End}(M)$。其中 M 是 R-右模。由以上的讨论，其自然构成一个环。于是我们思考，是否可以把 M 看作 $D:=\mathrm{End}(M)$ 的模?

答案是可以的。即定义:

$$D\times M\to M,\quad (\varphi,m)\mapsto\varphi(m)$$

这里的要点是，M 作为 D-左模与 R-右模并不是毫无关系:

$$\varphi(m)r = \varphi(mr)$$

也就是左 D-模和右 R-模的作用可交换。

接下来考虑商结构。由于这类问题本身很平凡，我们只要定义了商结构，从而许多定理都是一模一样的证明思路。因此本节接下来的定理我们都不给出证明。

定义 1.5 (商模) 设 $N\subset M$ 是子模。加法群 M/N 是商群。我们在上面定义模结构, 使之成为 R-左模。

$$r(x+N) = rx+N, \forall r\in R, x\in M$$

此时，$M\to M/N$ 是模同态。

命题 1.2 商模满足泛性质:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M/N \arrow[d, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

即对于任何满足 $N \subset \ker(\varphi)$ 的同态 $\varphi : M \to M'$，都存在唯一的模同态 $\tilde{\varphi} : M/N \to M'$ 使上述交换图成立。

命题 1.3 设 $\varphi : M_1 \to M_2$，则 $M_1/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\varphi)$

命题 1.4 设 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是满同态，则 M_2 的子模集与 M_1 的包含 $\ker(\varphi)$ 的子模集存在典范的一一对应关系。

命题 1.5 设 M, N 是 $\mathcal{M}$ 的子模，合成同态 $M \hookrightarrow M + N \twoheadrightarrow (M+N)/N$ 诱导自然的模同构:

$$M/(M \cap N) \xrightarrow{\sim} (M+N)/N \quad m + (M \cap N) \mapsto m + N, m \in N$$

定义 1.6 对于模同态 $f : M \to M'$, 定义余核为 $M'/\mathrm{im}(f)$。其满足的泛性质是:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(f) \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & M'' & \end{tikzcd}$$

熟悉范畴论中余核定义的读者应该对这张图不陌生——这也是本篇笔记所要求的——对范畴论有一定的认识。

1.2 基本操作

本小节我们取定环 R 而讨论 R-左模。右模的情况是完全相似的。

先给出几个定义，用于之后章节的分析：

定义 1.7 设 M 是 R-模。则 $x \in M$ 的零化子定义为集合:

$$\mathrm{ann}_M(x) := \{r \in R : rx = 0\}$$

显然这是 R 的左理想。若 $\mathrm{ann}_M(x)$ 平凡，则称其为无挠的，否则称之为挠元。所有非零元都无挠的模称之为无挠模。

定义 1.8 M 的零化子定义为 R 的双边理想：

$$\mathrm{ann}(M) := \{r \in R | \forall x \in M, rx = 0\} = \bigcap_{x \in M} \mathrm{ann}_M(x)$$

若 R 的双边理想 I 含于 $\mathrm{ann}(M)$, 则自然 M 成为 R/I-模。其中, 加法不变, 纯量乘法定义为 $(r+I)m = rm$.

定义 1.9 M 对右理想 $\mathfrak{a}$ 的 $\mathfrak{a}$-挠部分定义为子模:

$$M[\mathfrak{a}] := \{m \in M : \forall a \in \mathfrak{a}, am = 0\}$$

这个定义颇有些玄妙。比如为什么是右理想？这是因为我们希望 $M[\mathfrak{a}]$ 成为左模:

$$\forall b \in R, m \in M[\mathfrak{a}], bm \in M[\mathfrak{a}]$$

而右理想正好满足：

$$a(bm) = (ab)m = 0, ab \in \mathfrak{a}$$

回顾第二个定义。我们当然可以把 M 看作 $R/\text{ann}(M)$-模。

命题 1.6 *M 作为 $R/\text{ann}(M)$-模是的零化子是平凡的*

证明 取 $x \in M$ 和 $r + \text{ann}(M)$ 满足:

$$(r + \text{ann}(M))x = 0$$

根据定义，则有 $rx = 0$。因此 $r \in \text{ann}_M(x)$. 由于 x 是任意的，所以 $r \in \text{ann}(M)$，从而 $r+\text{ann}(M)$ 是零元素。 □

接下来我们聚焦于问题：范畴 $R - \text{Mod}$ 是否是完备范畴。为此，我们需要给出其中等化子，余等化子，积，余积的形式。

定理 1.1 *范畴 $\mathbb{R}-Mod$ 是完备并且余完备的，并且有零对象。*

证明 先考虑零对象。显然是 $\{0\}$。其上的模结构只能是 $r \cdot 0$。而且出入零模的态射只能是 0 态射，因此这确实是零对象。

接着构造积和余积。设 I 是小集合，$\{M_i\}$ 是一族 R-模。我们给出积的构造:

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} | \forall i \in I, m_i \in M_i\}$$

这个构造当然和集合论上的构造类似。并且我们自然能给出模的结构。这里任何一个聪明的读者都能想到，因此就不再赘述此模的具体结构。

当然，严格的积必须还带有投射，这也是非常自然的：

$$p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j, j \in I$$

对于余积，我们更习惯称之为直和（对于没有学习范畴论的读者来说）:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i, \text{finite} \quad m_i \neq 0\}$$

以及包含同态：

$$M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i, m_j \mapsto (m_i)_{i\in I}, m_i = \delta_{ij} m_j$$

验证工作非常显然，就略去了。

接着构造等化子和余等化子。考虑 $f, g : X \to Y$，需要给出等化子 $\ker(f, g)$。这意味着 $f\iota = g\iota$ 的类似形式。但是由于模范畴 (或者是 Ab 范畴) 特有的加法群结构，我们可以把该问题归结于 $\ker(f - g, 0)$：

$$\begin{tikzcd}
\ker(f,g) \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
& L \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

这是因为 $f\iota = g\iota$ 就等价于 $(f-g)\iota$，从而范畴中的对象满足两个性质，因而对应的两个等化子典范同构。

余核同理。

而核与余核是显然存在的。读者只需要查看一下对应的章节即可。我们只需要指出余核:

$$\operatorname{coker}(f,0) = \operatorname{coker}(f) = Y/\operatorname{im}(f)$$

因此根据范畴论中众所周知的定理：范畴完备当且仅当积和等化子存在，余完备当且仅当余积和余等化子存在可知，R-Mod 是完备并且余完备的. □

注解 类似于集合的情形，模的滤过 $\varinjlim$ 具有更容易掌握的构造，其涵摄了代数学中俗称的“直极限”。

设 I 是滤过小范畴，定义可见范畴论笔记。并考虑函子 $\alpha : I \to R\text{-}Mod$。则 α 的极限作为集合可定义为:

$$\varinjlim_i M_i := (\bigoplus_{i\in \mathrm{Ob}(I)} M_i)/\sim$$

换句话说，它是合成函子 $I \xrightarrow{\alpha} R-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Set}$ 的极限。

举例明之：任何模 M 都可以表示为其有限生成子模的极限，并且这个极限是滤过的。记为:

$$M = \bigcup_{N\subset M} N$$

其中 N 是有限生成子模。

推论 1.2 范畴 R-Mod 是加性范畴。特别的，R-模的有限直和和直积相等。

引理 1.3 设环 R 为直积 $R = \prod_{i\in I} R_i$。其中 I 是有限集。对于每个 $i \in I$，定义 R 的双边理想:$\mathfrak{b}_i := \prod_{j\in I, j\neq i} R_j$. 以及:

$$e_i := (\delta_{i,j})_{j\in I} \in R$$

对任意的左 R-模 M 定义 $M_i := \{m \in M : \mathfrak{b}_i m = 0\}$. 则有直和分解:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} M$$

注解 反之，给定一组左 R_i-模 M_i，透过投影同态 $R \to R_i$ 将其拉回为左 R-模：

$$(r, m_i) = (p_i(r), m_i) = r_i m_i$$

可构造直和 $M = \bigoplus_i M_i$。这样的 M 与最开始分解得到的 M 在自然同构的意义下一样。因此，给定一个 R-模相当于给定一族 R_i-模。

2 自由模

2.1 自由模的定义

接着考虑 $\mathbb{R}$ 以及其左模 $\mathbb{R}$-模。对于集合 X, 我们形式的定义模 $Rx, x \in X$:$rx + r'x = (r + r')x$，$r(r'x) = (rr')x$。其实这就是形式的构造一个同构于 R 的模。

定义 2.1 以 X 为基的自由模定义为:$\mathbb{R}^{\oplus X}=\bigoplus_{x\in X}Rx$. 作为集合自然有包含映射:

$$X\to R^{\oplus X}\quad x\mapsto 1\cdot x$$

该模的元素可以写为有限和 $\sum_{x\in X}a_x x$。

上述其实是对我们期待的自由模的泛性质所给出的存在性定义。我们叙述泛性质如下。

命题 2.1 (自由模的泛性质) 对于任意 R-模 M 和集合的映射 $X\to M$, 存在唯一的模同态 φ 使得交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & R^{\oplus X} \arrow[d, "\exists!\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

成立

证明 对于每个 $x\in X$ 必然有 $\varphi(rx)=r\varphi(x)=r\phi(x)$。从而 φ 完全确定。 □

这里我们又一次见到了"自由是遗忘的左伴随":

$$\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus X},M)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X,M)$$

下面的定义来自于线性代数:

定义 2.2 设 X 是 R-模 M 的子集。根据上面的命题,包含映射 $X\to M$ 自然诱导模同态:$\sigma:R^{\oplus X}\to M$。

1. 称 X 是线性无关的，或者自由的，如果 σ 是单射。

2. 称 X 生成 M，若 σ 是满射。此时称 X 是 M 的生成集合。具有有限生成集的模称为有限生成模。

线性无关的生成集称为基；具有基的模也成为自由模。这是自由模的内禀版本。

例 2.1 多项式环 $R[X]=\bigoplus_{n\geq 0}RX^n$ 是一个自由模。其基向量是 $\Delta:=\{X^n:n\geq 0\}$，并且是左 R-模。

推论 2.1 任何模可以表示为自由模的商模。

证明 生成元 X 取自身。 □

如果 X 是有限集合，$R^{\oplus X}$ 就如同向量空间一样。因此其自同态环可以表成熟悉的矩阵环形式。不妨令 X 是 $\{1,2,\dots,n\}$, 我们先讨论右模 R-的有限积。

根据积和余积的泛性质，下面的同构是自然存在的:

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j=1}^{n}M_j,\bigoplus_{i=1}^{m}M_i')\xrightarrow{\sim}\prod_{i=1}^{m}\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j=1}^{n}M_j,M_i')\xrightarrow{\sim}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\mathrm{Hom}(M_j,M_i')$$

因此 $\varphi:\bigoplus_{j=1}^{n}M_j\to\bigoplus_{i=1}^{m}M_i'$ 完全由其分量之间的 $n\times m$ 个映射决定。不妨把这些映射写为矩阵的形式。

$$\varphi\rightleftarrows M(\varphi)=(\varphi_{ij}),\quad \varphi_{ij}=p_i'\varphi\iota_j$$

问题是这样的定义是否满足运算呢？即 $\varphi\circ\phi$ 的矩阵是否为各自矩阵的乘积？这里我们首先要定义元的乘法。不难想象就是复合。

引理 2.2 $\varphi:\bigoplus_{j=1}^{n}M_j\to\bigoplus_{i=1}^{m}M_i'$ 和 $\phi:\bigoplus_{i=1}^{m}M_i'\to\bigoplus_{k=1}^{l}M_k''$ 相应的矩阵满足:

$$M(\phi\varphi)=M(\phi)M(\varphi)$$

证明 计算的要点是分解后的映射并不是毫无关系。这些诱导的 p_i 和 ι_i 复合时都有关系。

计算复杂且不好做笔记。请读者自行计算。 □

从而我们有:

命题 2.2 模 R^n 的自同态环自然地同构于 $n\times n$ 矩阵环 $M_n(R^{\mathrm{op}})$, 此同构由 $\phi\mapsto M(\varphi)$。导出. 进一步, 加法群 $\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n},R^{\oplus m})$ 自然地同构于全体 $m\times n$ 矩阵的加法群 $M_{m,n}(R^{\mathrm{op}})$; 同态的合成对应到矩阵乘法.

如改用右 R-模, 则相应地有 $\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n},R^{\oplus m})\cong M_{m,n}(R)$.

证明 证明的关键是说明 $\mathrm{End}_R({}_RR)$ 与 R^{op} 同构。这是明显的。因为任意 $\varphi\in\mathrm{End}_R({}_RR)$，有:

$$\varphi(r)=r\varphi(1)=rm_\varphi$$

则定义映射:$\Gamma:\mathrm{End}({}_RR)\to R^{\mathrm{op}}$，$\Gamma(\varphi)=\varphi(1).\Gamma(\varphi\phi)=\varphi(\phi(1))=\phi(1)\varphi(1)$。 □

2.2 自由模的秩

我们讨论非 0 自由模 R-模的秩。自然的想法是定 $M\cong R^{\oplus X}$ 的秩为 $|X|$。因此关键的问题是说明 $|X|$ 的选择不改变其基的大小。

若 R 是我们熟知的域，那么秩良定是我们所清楚的。那么接下来要讨论的是交换环的情况。

定理 2.3 设 R 是交换环，则 $R^{\oplus X}\cong R^{\oplus Y}$ 当且仅当 $|X|=|Y|$.

证明 显然右边的条件蕴含左边的条件。假设 $R^{\oplus X}\cong R^{\oplus Y}$。我们取 R 的一个极大理想 $\mathfrak{m}$。(这样的理想总是存在的，证明要用到选择公理)。对于 M 是 R-模，定义 $\mathfrak{m}M$ 是形如 $\{am|a\in\mathfrak{m},m\in M\}$ 的元素生成的子模。

注意上述定义是生成的子模。

于是 $M/\mathfrak{m}M$ 是 $R/\mathfrak{m}$ 模（验证留给读者）。由于 $\mathfrak{m}$ 是极大理想，所以 $R/\mathfrak{m}$ 是域。当 $M=R^{\oplus X}$ 时容易看出来 $\mathfrak{m}M=\mathfrak{m}^{\oplus X}$. 于是有同构:

$$M/\mathfrak{m}M\xrightarrow{\sim}(R/\mathfrak{m})^{\oplus X}\quad (a_x)_{x\in X}+\mathfrak{m}M\mapsto(a_x+\mathfrak{m})_{x\in X}$$

于是 $|X|=\dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)$。等式右边只与 M 本身的模结构有关，并不依赖基的选取。 □

定义 2.3 对于交换环的自由模 M，存在极大线性无关组 X 使其生成 M。从而定义 M 的秩为 $|X|$。

对于一般的环，令人感到有趣的是，如果 I 为无穷集合，并且 $R^{\oplus I}\cong R^{\oplus J}$，则 $|J|=|I|$。因此如果我们想要秩的良定问题，只需要讨论:

$$R^{\oplus n}\cong R^{\oplus m}\Rightarrow n=m?$$

是否成立。

遗憾的是，上述命题对所有的环并非都是成立的。因而该性质被称为“左不变基数”性质 (IBN)。

除环, 交换环和有限环皆有不变基数性质。

2.3 向量空间

本节我们不讨论线性代数课程里面所学习的向量空间。与一般的交换环，或者 PID 相比，我们发现域多了除环的性质。因此有必要把除环的模拿出来进行考虑。

定义 2.4 设 D 是除环，我们称右 D-模是 D-向量空间。其子模，商模也成为子空间和商空间。

这里选取右模的原因是为了符号上的方便。其实写为左模也无所谓。若 φ 是两个向量空间的同态，则:

$$\varphi(vd) = (\varphi v)d$$

这种形式很像结合律。如果能加以定义，就能给出真正的结合律。

定理 2.4 设 V 是 D-向量空间，X 是 V 的子集。以下性质等价:

1. X 是 V 的极大线性无关子集。
2. 包含映射 $X \to V$ 诱导同构 $D^{\oplus X} \xrightarrow{\sim} V$
3. X 是 V 的极小生成集。
4. V 中任何元素均可写为 $\sum_{x\in X} xd_x$ 的有限和。其中 $(d_x)_x$ 是唯一的。

证明 $1 \to 2$: 线性无关说明映射是单射。对于任何 $v \in V$, 根据极大线性无关知 v 可以被线性表出。（除环保证了能对纯量乘法做逆运算）

$2 \to 3$：若不是极小，则去除一个 y 后 X 仍然可以表出 V。但此时 $y \in D^{\oplus X}$ 已经无法被表出。

$3 \to 4$:X 是生成集则说明 V 的任何元素可以被写为有限和。若不唯一，则同样有 $y \in X$ 被表出，从而 $X \setminus \{y\}$ 也是生成集。

$4 \to 1$: 极大显然，线性无关显然。 □

从而这样的 X 定义为 V 的基。

命题 2.3 (基的存在性) V 中的线性无关子集 X 必然包含在某个基 B 中。特别的，V 有基。

证明 使用的定理是 Zorn 引理。构造线性无关的集合族，对于其中的全序列，我们不难想到其上界为该列所有集合的并集。需要验证其为线性无关的集合。

不如设有线性相关的等式。由于线性相关的式子必然是有限个不为 0 的元素在做加减，因而这有限个元素必然从属于某个线性无关集合。从而命题得证。 □

下面的若干性质则是向量空间很有特点的体现:

引理 2.5 (Steinitz 换元性质) 设 X,Y 是 V 的两组有限基，$y \in Y \setminus X$。则存在 $x \in X \setminus Y$ 使得 $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ 仍然是基。

证明 把 X 中元素表示为 Y 中元素的组合。显然总有 x 的表示中出现 y. 设 $Z = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$, 则任何 V 中元素可以展开为 Z 中元素组合（替换 y）。

Z 也是线性无关的。不然显然有 Y 线性相关，矛盾！

最后 $x \notin Y$。若 $x \in Y$，根据 $y \notin X$ 知 $Z = (Y \setminus \{y\})$。这与 Y 极大矛盾！ □

书中提到了拟阵的概念。但由于目前没有看到应用，就略去了。

定理 2.6 (维数不变) 设 X 和 Y 是两组基，则 $|X| = |Y|$。于是定义 V 的维数为 $|X|$。

证明 我们不证明无穷的情况。对于有限的情况，取 X, Y 使得 $|Y| > |X|$ 且 $|Y - X|$ 尽可能小。但是通过换元性质可以得到更小的 $|Y' - X|$。矛盾！ □

2.4 生成引理 *

该节主要阐述无穷的情况下秩和维的关系。

引理 2.7 设 I 是无穷集合，$(M_i)_{i\in I}$ 是一族非零模。则 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 的任意生成集合 S 皆满足 $|S| \geq |I|$。

证明 对于 $s \in S$, 设 I 的子集 $E_s = \{i \in I | s_i \neq 0\}$。$E_s$ 是有限集合。

由于 S 生成了 M，则 $\bigcup_{s\in S} E_s = I$。我们考虑基数不等式 (可见教材的推论 1.4.9):

$$\max\{|S|, \mathbb{N}\} = |S| \cdot \mathbb{N} \geq |\bigcup_{s\in S} E_s| = |I|$$

最左端无非是 $|S|$。 □

引理 2.8 若 $R^{\oplus I} \cong R^{\oplus J}$，且 I 是无穷集合，则 $|I| = |J|$。

证明 J 生成了 $R^{\oplus I}$。则 $|J| \geq |I|$。由对称性 $|I| \geq |J|$. □

3 模的张量积

模的张量积是本笔记的重点。我们不会关注张量积具体是怎么构造的——其怎么构造都无所谓，关键是其有很好的泛性质。张量积是十分常用的构造，其蕴含许多有用的性质。

3.1 张量积的定义

首先定义双模:

定义 3.1 (双模) 设 R, S 都是环，所谓 (R, S)-双模意味着一个兼具左模 R-和右模 S-结构的加法群 M。并且满足:

$$(rx)s = r(xs), \forall r, x, s$$

定义十分自然。因为我们不可能让两个模结构毫无关系。而最简单的关系就是满足形式上的结合律。

双模上可以定义显然的同态，同构，商模等诸多概念，从而形成 (R, S)-Mod 范畴。之后我们会展示如何把双模理论划归到单模的情况。

例 3.1 设 $S = \mathbb{Z}$。我们可以想象此时 $\mathbb{Z}$ 作为右乘的环实际上对于 M 的结构来说没有太大关系。从而:

$$(R, \mathbb{Z})\text{−Mod} \cong R\text{−Mod}$$

当环 R 是交换环的时候，任何左 R 模自然成为双模。这是因为我们有形式的交换律：

$$rmr' = rr'm$$

这个交换律来自于交换环的时候左模等于右模。

我们使用 $_RM$ 表示左模，M_S 表示右模, 用 $_RM_S$ 表示双模。

定义 3.2 (平衡积：单边情形) 设 R 是环，考虑 M_R 和 $_RM$ 和交换群 $(A,+)$。称映射:

$$B : M \times N \to A$$

是平衡积，若其满足双线性且:$B(xr,y) = B(x,ry)$。所有的平衡积构成集合 $\mathrm{Bil}(M,N;A)$。对加法构成加法群。

现在我们考虑不同的 $(A,+)$。此时所有从 $M \times N$ 出发的平衡积构成了一个范畴:$\mathrm{Bil}(M,N;*)$. 态射自然的定义为交换图表中的群同态 φ:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "\varphi"] \\ M \times N \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B'"'] & \\ & A' \end{tikzcd}$$

定义 3.3 (张量积) 满足下列泛性质的平衡积 $M \times N \to M \otimes_R N$ 称为 M 和 N 的张量积：对于任何平衡积 B，都存在唯一的群同态:$M \otimes_R N \to A$ 满足：

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "B"'] & M \otimes N \arrow[d, "\exists! \varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

也就是范畴 $\mathrm{Bil}(M,N;*)$ 的始对象。记 $x \otimes y$ 是 (x,y) 在 $M \otimes_R N$ 中的像。

引理 3.1 对于任意的 M_R 和 $_RN$，张量积 $M \times N \to M \otimes_R$ 存在。

只需要商去最必要的关系：双线性和交换律即可构造。

引理 3.2 张量积对 M, N 满足函子性。即若有 $\varphi : M \to M'$ 和 $\psi : N \to N'$ 是模同态，则存在唯一的同态：$\varphi \otimes \psi : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi \times \psi"] \arrow[d] & M' \times N' \arrow[d] \\ M \otimes N \arrow[r, dashed, "\text{Induce:}\varphi \otimes \psi"'] & M' \otimes N' \end{tikzcd}$$

证明 这是因为合成映射 $M \times N \to M' \otimes N'$ 显然也是一个平衡积。从而根据泛性质自然诱导最下面的同态。 □

我们具体研究一下这个诱导的 $\varphi \otimes \psi$:

$$\varphi \otimes \psi(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$$

因此诱导的同态在集合元素上也非常简单和自然。由此知:

$$(\varphi \otimes \psi) \circ (\varphi' \otimes \psi') = (\varphi \circ \varphi') \otimes (\psi \circ \psi)$$

我们现在考虑两个双模 ${}_QM_R, {}_RN_S$.

引理 3.3 双模 ${}_QM_R, {}_RN_S$ 具有自然的双模 (Q, S) 结构:

$$q(x \otimes y)s = (qx \otimes ys)$$

证明 根据双模定义，q 在 M 的左乘实际上是 M 作为 R-右模的模同态。同理有 s 在 N 的右乘。 □

注：文章还介绍了关于 (Q, S) 平衡积的问题。但是其本身与我们最开始介绍的平衡积并无大异。所以笔记就略去了。

实际上，(Q, S) 平衡积 $B : M \times N \to A$ 还要求 $B(qx, ys) = qB(x, y)s$，其中 ${}_QM_R, {}_RN_S$ 以及 A 是双模 ${}_QA_S$. 此时范畴 $\mathrm{Bil}(M, N;)$ 的始对象定义为两个双模的张量积。

注意到引理3.3给出的 M, N 在只考虑单边情况下给出的张量积的双模结构。就算考虑双模结构，这也是一个双模的平衡积。并且由于只商去了最必要的零关系，因此 $M \otimes N$ 也是双模意义下的张量积。

3.2 张量积的重要性质

接下来我们要介绍几个模张量积中比较重要的定理。分别是结合约束，交换约束，幺元，保持直和。

定理 3.4 (张量积保持直和) 对于任意的左，右 $R-$ 模族 $(N_j)_{j\in J}$ 和 $(M_i)_{i\in I}$，存在自然的同态:

$$(\prod_{i\in I} M_i) \otimes_R (\prod_{j\in J} N_j) \to \prod_{(i,j)\in I\times J} M_i \otimes_R N_j$$

和

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R (\bigoplus_{j\in J} N_j) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} M_i \otimes N_j$$

证明 这里的自然意指由张量积的定义诱导。即我们要构造一个平衡积。

$$\prod_{i\in I} M_i \times \prod_{j\in J} N_j \to \prod_{(i,j)\in I\times J} M_i \otimes N_j, \quad ((m_i), (n_j)) \mapsto ((m_i \otimes n_j)_{(i,j)\in I\times J})$$

因而第一个同态自然存在。

注意到上述的同态把直和映射到直和。也就是说限制在直和的张量积上即得到张量积的直和。我们只用说明其为同构。

回忆米田引理，则函子 $S \mapsto \mathrm{Hom}(S, \cdot)$ 是全忠实的函子。从而若 $\mathrm{Hom}(S, \cdot)$ 与 $\mathrm{Hom}(T, \cdot)$ 作为函子同构，则 $S \cong T$。于是我们画出交换图:

如果不是直和而是直积，上述交换图中从 $\mathrm{Bil}(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j; A)$ 到下方的映射并非同构。下方给出的映射一般来说会多一些。

交换图的验证从略。 □

$$\begin{CD}
\mathrm{Hom}((\bigoplus_{i\in I} M_i)\otimes_R(\bigoplus_{j\in J} N_j), A) @>{\sim}>> \mathrm{Bil}(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j; A) \\
@A{\Phi^*}AA @VV{\cong}V \\
@. \prod_{i,j}\mathrm{Bil}(M_i, N_j; A) \\
@. @AA{\cong}A \\
\mathrm{Hom}(\bigoplus_{(i,j)\in I\times J} M_i\otimes N_j, A) @>{\sim}>> \prod_{i,j}\mathrm{Hom}(M_i\otimes N_j, A)
\end{CD}$$

定理 3.5 (张量积的结合约束) 设 Q, R, S, T 是环，则存在典范的同构:

$$M\otimes_R(M'\otimes_S M'')\xrightarrow{\sim}(M\otimes_R M')\otimes_S M''$$

这里的“典范”意指双模 ${}_QM_R, {}_RM'_S, {}_SM''_T$ 视为变元，而同构的两端均视为从:

$$((Q,R))-\mathrm{Mod}\times((R,S))-\mathrm{Mod}\times((S,T))-\mathrm{Mod}$$

到 $((Q,T))-\mathrm{Mod}$ 的函子

证明 证明的关键是说明三元平衡积与上述两边都是同构的。由于证明冗长，就不再记述了。 □

定理 3.6 (张量积的幺元) 设环 R, S。利用乘法结构视两者为双模，则存在典范的同构:

$$M\otimes_S S\xrightarrow{\sim} M\xleftarrow{\sim} R\otimes_R M$$

其中 $m\otimes s\mapsto ms; r\otimes m\mapsto rm$。

把 ${}_RM_S$ 视为变元，上述三项都视为 (R,S)-*Mod* 到自身的函子。也可以说这是函子的典范同构。

证明 我们只考虑 $M\otimes_S S\cong M$ 这一边。对于任何双 (R,S) 模 A，我们有:

$$\mathrm{Hom}(M,A)\overset{1:1}{\leftrightarrow}\{M\times S\to A\}\overset{1:1}{\leftrightarrow}\mathrm{Hom}(M\otimes S,A)$$

第一个双射来自于 $B(m,s)=B(ms,1)=\varphi(ms)$ 和 $\varphi(m)=B(m,1)$。给定一个 B，定义的 φ 是 (R,S) 同态，因为 $r\varphi(m)s=rB(m,1)s=B(rm,s)=B(rms,1)=\varphi(rms)$. 给定 φ，也能得到平衡积 B。这是比较显然的。

对于第二个，则是张量积的泛性质。即 $\psi(m\otimes s)=B(m,s)=\varphi(ms)$。

从而加法群的同构无非是对 $m\otimes s\mapsto ms$ 作拉回；这样典范的同构也是函子的同构。 □

交换约束仅在 R 交换时候才有意义。因为此时一切 R 模都是双模。

定理 3.7 (张量积的交换约束) 设 R 是交换环。存在典范同构:

$$c(M,N): M\otimes_R N\xrightarrow{\sim} N\otimes_R M$$

并且 $c(M,N)\circ c(N,M)=\mathrm{id}_{M\times N}$

证明 由于 R 是交换环，因而此时的 r 可以作用在 $x\otimes y$ 的任何地方。这是上述同构的保证。 □

我们介绍这些性质的一个小结论:

推论 3.8 设 M 和 N 是交换环 R 上的自由模。分别取 X, Y 作为基，则 $M\otimes_R N$ 也是自由 R-模。以 $X\times Y\overset{1:1}{\leftrightarrow}\{x\otimes y|x\in X, y\in Y\}$ 作为基。特别的，有秩的关系:

$$\mathrm{rk}_R(M\otimes_R N)=\mathrm{rk}_R(M)\mathrm{rk}_R(N)$$

3.3 环变换

给定两个环 R, S，若存在 $f: R \to S$ 是一个同态，我们可以通过一定操作将 S 模变为 R 模。

用 af 表示左模同态的作用，用 ga 表示右模同态的作用。这样的记法是为了更好的表示结合律:

$$(ra)f = r(af) \quad g(ar) = (ga)r$$

从而我们有:

定理 3.9 设 Q, R, S 是环。对于双模 ${}_QM_R$ 和 ${}_QM'_S$, 其 $\mathrm{Hom}_Q(M, M')$ 具有天然的 (R, S) 模结构:

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_Q(M, M'), (m)rfs = ((mr)f)s$$

同样的，对于双模 ${}_QM_R$ 和 ${}_SM'_R$，$\mathrm{Hom}_R(M, M')$ 具有天然的 (S, Q) 模结构:

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(M, M'), sfq(r) = s(f(qr))$$

双模的定义是容易验证的。

例 3.2 (对偶函子) 取 $M = {}_RR_R$。则 $\mathrm{Hom}(\cdot, {}_RR)$ 是一个 $(R\text{-}Mod)^{\mathrm{op}}$ 到 $Mod\text{-}R$ 模的函子。$\mathrm{Hom}(\cdot, R_R)$ 是一个从 $(\mathrm{Mod} - R)^{\mathrm{op}}$ 到 $R\text{-}Mod$ 模的函子.

下面叙述张量积的重要性质，即与 Hom 函子的伴随性。

定理 3.10 设 ${}_QM_R, {}_RN_S, {}_QA_S$ 是双模。存在典范的同构:

$$\mathrm{Hom}_{(Q,S)}(M \otimes N, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(R,S)}(N, \mathrm{Hom}_Q(M, A))$$

如果写为函子伴随的形式,则函子 $(M \otimes_R \cdot)$ 作为 $(R, S)\text{-}Mod$ 到 $(Q, S)\text{-}Mod$ 的函子拥有右伴随:$\mathrm{Hom}(M, \cdot)$，其是从 $(Q, S)\text{-}Mod$ 到 $(R, S)\text{-}Mod$ 的函子。

类似的，我们也有:

$$\mathrm{Hom}_{(Q,S)}(M \otimes N, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(Q,R)}(M, \mathrm{Hom}_S(N, A))$$

如果写为函子伴随的形式,则函子 $(\cdot \otimes_R N)$ 作为 $(Q, R)\text{-}Mod$ 到 $(Q, S)\text{-}Mod$ 的函子拥有右伴随:$\mathrm{Hom}(N, \cdot)$，其是从 $(Q, S)\text{-}Mod$ 到 $(Q, R)\text{-}Mod$ 的函子。

证明 证明并不复杂。我们只关注第二条（因为第一条书中有证明）。注意到张量积到 A 的映射自然与平衡积一一对应。如果存在一个平衡积 $B: M \times N \to A$，自然可以定义:

$$\Phi: M \to \mathrm{Hom}_S(N, A), \quad m \mapsto B(m, \cdot)$$

整个命题的关键在于验证定义的 Φ 是满足要求的 (Q, R) 同态。而这就牵扯到 $\mathrm{Hom}_S(N, A)$ 的模结构 (Q, R)。

同理，如果有 Φ，也可以构造平衡积。需要验证平衡积对 (Q, S) 的平衡性质。 □

现在正式处理环变换的问题。我们给定一个环同态 $\varphi: R \to S$。现在我们把一些 S 模变成 R 模。

首先是 S 本身。其自然可以成为 (R, S) 模或者 (S, R) 模。现在我们考虑一般的 S 模。

介绍函子 $\mathcal{F}_{R \to S}$，该函子将右 S 模映射为右 R 模。对于 $x \in M$，$xr = xf(r)$. 在介绍函子 ${}_{R \to S}\mathcal{F}$。该函子将右 S 模映射为右 R 模。对于 $x \in M$，$xr = xf(r)$.

这两个函子不仅仅只有定义上的作用，其本身有很好的同构:

引理 3.11 *存在函子间的同构:*

$$\mathrm{Hom}({}_SS, {}_S(-)) \cong {}_{R\to S}\mathcal{F} \cong {}_RS \otimes_S -$$

$$\mathrm{Hom}(S_S, (-)_S) \cong \mathcal{F}_{R\to S} \cong - \otimes_S S_R$$

证明 我们证明第二个式子。设 $g \in \mathrm{Hom}(S_S, M_S)$. 则 g 右乘上 r:

$$gr : s \mapsto grs = g(f(r)s)$$

设 g 对应 M 中的 $g(1_S)$。则此时 $(gr)(1) = g(f(r)1) = g(f(r)) = g(1_S)f(r)$。这正好是 $\mathcal{F}_{R\to S}(M)$ 中的 R 模结构。

接着考虑 $M \otimes S$。这个模自然同构于 M。注意到此时 S 的右乘其实不影响这里面的结构。从而可知右边也是同构。 □

剩下该节的部分个人认为做笔记也不能很好的帮助记忆。唯一需要记住的是 $\mathcal{F}$ 作为函子也拥有伴随函子。并且其同时拥有左右伴随。这是因为引理3.11说明其不仅同构于 Hom, 而且同构于张量积。所以根据两者的伴随关系即可得到。

同时 $\mathcal{F}$ 也是可以复合的。即 $\mathcal{F}_{Q\to R} \circ \mathcal{F}_{R\to S} = \mathcal{F}_{Q\to S}$

4 主理想整环上的有限生成模

这一节是大学二年级模论课学习的重点。教材花了很大的精力来阐述有限生成模的结构定理。对于这篇 notes 而言，我们当然志不在此。因此简要阐述结构和证明思路即可。

首先我们注意到有限生成模 M 种有很多复杂的关系。因此先定义:

定义 4.1 *设 M 是 R-模. 其无挠商定义为商模:*

$$M_{tf} := M/M_{tor}$$

其中 M_{tor} 是 M 的挠子模，即所有挠元构成的模。(容易验证其确实是一个子模)。

注意到任何同态都把挠元映射到挠元。因此两个模之间的同态自然诱导 $\varphi_{tf} : M_{tf} \to N_{tf}$。

引理 4.1 *任何 R-模 M 的无挠商模都是无挠模，对于商同态:$M \to M_{tf}$ 的拉回给出了自然同构:*

$$\mathrm{Hom}_R(M_{tf}, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

这里的 N 是无挠模。

上述自然同构实际上给出来无挠 R-模范畴，其作为 R-Mod 的全子范畴到 $R-$ 模范畴的包含函子的左伴随。即自然同态给出函子 $R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}_{tf}$ 是包含函子的左伴随。

证明 设 $r(a + M_{tor}) = 0$。则 $ra \in M_{tor}$。则 $sra = 0$。于是 $a \in M_{tor}$。

第二个命题是显然的。 □

我们假设之后的环都是主理想整环。首先考虑如下的命题:

引理 4.2 *自由 $R-$ 模的子模都是自由模，并且子模的秩小于等于原模的秩。*

值的注意的是，真子模的秩不一定严格小于原模的秩。因此这里的小于等于不能再真子模的情况下精细化为小于。对于例子，可以看 $\mathbb{Z}$ 和 $2\mathbb{Z}$。

证明 M 作为自由模 E 的子模自然是无挠的。(因为是主理想整环)。

选定 E 的基 X 并考虑如下集合:

$$P = \{(Y, Y', b) : Y' \subset Y \subset X, M_Y := M \cap \sum_{y \in Y} Ry, b : Y' \to M, \{b(y), y \in Y'\}\}$$

其中 M_Y 要求是自由模，M_Y 有基为 $\{b(y)\}$.

集合 P 存在自然的偏序关系。即 $Y \subset Y_1$,$Y' \subset Y_1'$，$b_1|_Y' = b$。对于全序列，自然有上界. 这一点留给读者自证。

我们证明由 zorn 引理和此得到的极大元 (Y', Y, b) 满足 $Y = X$。此时 M 的基为 Y'，符合我们的要求。

这个思路风格很符合 zorn 引理。即我们构造符合某种特点的全序集，以此得到极大元。对极大元分析，证明是我们想要的东西。这里的特点是，X 的部分子集能生成的自由群能和 M 相交出自由群。

假设 $X = Y$，则 $x \in X \setminus Y$ 存在。我们定义理想:

$$\mathfrak{a} = \{a \in R | (ax + \sum_{y \in Y} Ry) \cap M \neq 0\}$$

对于 $ra, r \in R, a \in \mathfrak{a}$，容易知道:

$$rax + \sum_{y \in Y} rRy \cap rM \neq 0$$

然而这式子中两个项都没变。因此 $\mathfrak{a}$ 确实是理想。

设 $\mathfrak{a} = (a)$。若 $(a) = 0$，则 $M_Y = M_{Y \cup \{x\}}$。矛盾于极大元定义！

若 $(a) \neq 0$，则 $a \neq 0$。设 $m_x \in M$ 满足：

$$m_x \in ax + \sum_{y \in Y} Ry$$

任意 $M_{Y \cup \{x\}}$ 中的元素 m' 若在 E 中以 $Y \cup \{x\}$ 展开，则 x 的系数必然属于 (a)。因而存在 $r \in R$:

$$m' - rm \in M_Y$$

于是:

$$M_{Y \cup \{x\}} = Rm_x \oplus M_Y$$

于是取 $Y_1 := Y \cup \{x\}$，$Y_1' = Y' \cup \{x\}$,$b_1 : Y_1 \to M$ 满足 $b|_Y' = b, b(x) = m_x$，其构成大于 (Y', Y, b) 的元。

因此极大元 (Y', Y, b) 必然满足 $Y = X$。 $\square$

引理 4.3 设 M 是 R 模，且 M_{tf} 有限生成。则 M_{tf} 是自由模，并且存在有限秩自由子模 E 使得 $M = M_{tor} \oplus E$。

证明 每个有限生成模都是自由模的商模。对于 M_{tf}，取有限生成集 X, 其中的极大线性无关子集 Y 虽然不一定能表达所有 X，但是对于 $x \in X \setminus Y$，总可以找到:

$$a_x x \in \sum_{y \in Y} Ry$$

设 $a=\prod_{x\in X\setminus Y}a_x$，则下面的同态是单同态:

$$M_{tf}\to R^{\oplus Y},\quad m\mapsto am$$

这是因为若 $am=0$，则 $m=0$。因为 M_{tf} 是无挠模。于是 M_{tf} 可以被堪为自由模的子模。

现在选定 M_{tf} 的基 B。为 $b\in B$ 挑选原像 $\bar{b}$。容易验证 E 由 $\bar{b}$ 生成是自由模。M 的分解也是显然的。 □

这个引理说明我们之研究 M_{tor} 是合理的。此时:

命题 4.1 *设 R 模 M 满足 $\mathrm{ann}(M)\neq 0$。且元素 $\prod_{i=1}^m p_i^{n_i}$ 生成 $\mathrm{ann}(M)$。其中 $p_1,\dots,p_m$ 是互不整除的不可约元。从而 M 有直和分解:*

$$M=\bigoplus_{i=1}^m M[p_i^{n_i}]$$

证明 视 M 是 $R/\prod_{i=1}^m p_i^{n_i}$ 模。设 $I_i=(p_i^{n_i})$。根据 CRT,$R/\prod_{i=1}^m p_i^{n_i}$ 与 $\prod_{i=1}^m R/(p_i^{n_i})$ 是同构的。

根据引理1.3的论述，我们可以对 M 做分解。此时，M_i 是 $R/(p_i^{n_i})$ 模。这也意味着:

$$M_i=M[p_i^{n_i}]=M[p_i^\infty]$$

定理 4.4 *主理想环 R 上的有限生成模 N 皆同构于:*

$$N\cong\bigoplus_{i=1}^n R/\wr_i,\quad R\neq\wr_1\supset\dots\supset\wr_n$$

其中真理想链 $\wr_1\supset\dots\supset\wr_n$ 被 N 的同构类唯一的确定，是 N 的初等因子。

李文威此时还给出了关于指数 abel 群的一点应用。在这里也不多阐述了。我们需要抓紧篇幅进入正合列的学习。

5 正合列入门

我们在这节主要叙述最最基本的正合列的知识。因为本身在模上进行讨论，因此问题也不会复杂。之后在同调代数做的工作是把这些推广到更广泛的范畴上，以及搞更多有意思的结果。

定义 5.1 *由 R-模构成的复形系指一列 R-模, 连同其间循序相连的同态, 形如:*

$$\dots\to W\to Z\to Y\to X\to\dots$$

该链可以是双边的，单边的，无边的无穷。我们只要求这些同态复合两次后全为 0。即 $\mathrm{im}(W\to Z)\subset\ker(Z\to Y)$。复形在 Z 处的同调群即定义为:$\ker(Z\to Y)/\mathrm{im}(W\to Z)$，是一个 R-模

若 Z 处的同调群是平凡的，则称复形在 Z 处正合。处处正合的列称为正合列。

习惯上我们把一个复形记为 M 或者 (M,d)，其中第 n 号的模记为 M_i。从 M_i 到 M_{i-1} 的同态记为 d_i。从而 $d_i\circ d_{i+1}=0$.

由此我们可以定义同调群。其在每个 i 处都有定义:

$$H_i(M) := \frac{\ker d_i}{\mathrm{im} d_{i+1}} \tag{1}$$

正合列的同调群处处平凡。

无端点的复形 M 可以是上有界的，即当 k 足够大时 $M_k = 0$。也可以是下有界的，即 $M_k = 0$，当 k 足够负的多的时候。有界的定义同样如此。有界的复形写为:

$$0 \to M_n \to M_{n-1} \cdots \to M_1 \to 0$$

改用上标为复形编号。并要求 $d^i : M^i \to M^{i+1}$。此时我们得到的链复形拥有类似的理论。定义:

$$H_i(M) := \frac{\ker d_i}{\mathrm{im} d_{i-1}} \tag{2}$$

称为 i 处的上同调群。上同调拥有与同调同样丰富的性质。

5.1 同调的基础之基础

定义 5.2 两个复形之间可以定义同态。即一系列模的同态 f。使得下列交换图成立:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & M_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r] & N_i \arrow[r] & N_{i-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

因而复形具有同构的概念。即这些同态都是同构。并且所有的 R 模复形做成一个范畴。

同态 f 诱导了一系列同调群 $H(M)$ 到 $H(N)$ 的同态。这是因为 $f(\ker) = \ker$,$f(\mathrm{im}) = \mathrm{im}$。当同态把大群映射到大群，把被商掉的群映射到被商掉的群时，就会诱导商群的同态。

同调构成了一族从复形范畴到 Ab 的加性函子 $(H_i)_{a<i<b}$。这种观点实际上是同调公理的思维模式。可见 J.P.May 的关于代数拓扑的教材。

可以逐项构造一族复形的

1. 积 $\prod_i M_i$
2. 直和 $\oplus_i M_i$
3. 极限和余极限 $\varprojlim_i M_i$，$\varinjlim_i M_i$。

我们说明极限的情况确实能构成复形。假定 I 是小范畴并且 $i \to j$ 给出了转移同态 $M_i \to M_j$ 注意这里的下标不表示具体的模，而是复形。

对于极限复形中的 P_k 到 P_{k-1}，为了给出微分算子，我们自然会依照泛性质来。需要给出若干 k 号模到 P_{k-1} 的态射。这一点由 k 号模到 $k-1$ 号模的微分算子得到。我们不多赘述其中的细节。

微分算子复合为 0 由泛性质中的唯一导出。此时 0 同态是可选的方案，而唯一性告诉我们只有这一种方案。

一个值得考虑的问题是，正合性在这些运算中会如何变化？

引理 5.1 正合复形族 $(M_{;i})_i$ 的滤过极限仍然正合。特别的，复形族的积正合当且仅当每个都正合。

证明 滤过极限暂时用的还很少，我们先不给出证明。

我们考虑三项的复形:$L_i \to M_i \to N_i$。$f_i : L_i \to M_i, g_i : M_i \to N_i$。考虑积。显然 $\mathrm{im}(\prod_i f_i) = \prod_i \mathrm{im}(f_i)$，$\ker(\prod_i f_i) = \prod_i \ker f_i$。直和同样显然。

上述两个等式就说明了等价关系。 □

定义 5.3 (短正合列) 短正合列是形如:$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 的正合列。

根据正合的关系，在复形同构的意义下，短正合列无非是商模的构造。我们关注的是分裂的概念。

命题 5.1 设 $0 \to M' \to M \to M''$ 是 R 模范畴中的短正合列。则下面的陈述等价。并且当任意一个条件满足时，我们称之为分裂的短正合列。

1. 存在 $s : M'' \to M$ 使得 $gs = \mathrm{id}_{M''}$
2. 存在 $r : M \to M'$ 使得 $rf = \mathrm{id}_{M'}$
3. 存在图表: $M' \underset{r}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M \underset{s}{\overset{g}{\rightleftarrows}} M''$ 使得 M 成为双积分 $M' \otimes M''$
4. 映射 $g_* : \mathrm{Hom}(X, M) \to \mathrm{Hom}(X, M'')$ 对每个 R 模 X 都是满射。
5. 映射 $f_* : \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(M'', X)$ 对每个 R 模都是 X 射。