Complex Analysis Stduy Notes

颜成子游

2022 年 8 月 1 日

目录

1 复分析的基础前置

这一章主要是列举一些关于复数，复函数的前置知识。以及复平面作为拓扑结构，沿路径的复函数积分等等定义。很简单，只列举基本概念和基础定理，不做证明。

1.1 复数和复平面

首先要清楚复数的基本运算：加减乘除。

复数的模长和基础的三角不等式。

实部与虚部。注意实部可以用$z+\bar{z}$的一半来表示。

复数的收敛与实数类似：

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n-\omega|=0$$

即距离趋近于0.

定理 1.1.1 *复平面是完全的。*

作为复平面上的柯西列，必然分量也是柯西列。实数是完全的，从而复平面也是完全的。

现在考察复平面的拓扑结构。与$\mathbb{R}^2$的结构是极其类似的。由于点集拓扑学已经详细的研究了$\mathbb{R}^2$的拓扑性质，我们不再赘述。

1.2 复平面上的函数

复数可以由有序数对(x,y)唯一决定。某种意义上，复函数是一个向量函数：$s=f(x,y),t=g(x,y)$。但并不能用这样的视角来研究复函数。这样会掩盖掉复函数许多丰富的性质。

首先研究连续的复函数。比照实函数的定义，复函数的连续当然是毋庸置疑的。由于模长大于实部和虚部的绝对值，因此复函数连续也意味着实部函数和虚部函数作为二元函数连续。反之亦然。因此连续的复函数的模长函数也连续。

接着研究可导。与实函数的可导不同，实部函数与虚部函数都可微并不能带来复函数可导。我们先给出定义：

定义 1.1 对于复函数f,和其定义域Ω。Ω是一个开集。称f在z_0可导，若极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

存在。极限值是f在z_0的导数值，记为$f'(z_0)$。

必须注意，h可以是任何方向的复数。极限存在意味着任何一个方向的h趋近0时，上述式的极限相同。

定义 1.2 若f在整个Ω都可导，称其是一个Ω上的全纯函数。若Ω是整个复平面，称其为整函数。

例 1.1 $f(z)=\frac{1}{z}$在除了$z=0$外点都可导。$g(z)=\overline{z}$不可导。因为纯虚数和实数的h极限不同。

由于极限形式完全相同，从而复函数的求导四则运算与实函数一模一样。