泛函分析课程笔记 • 2023 春

整理者：颜成子游/南郭子綦

2023 年 5 月 16 日

目录

1 课程简介与参考书

参考书：

1. 刘炳初《泛函分析》
2. 武大。刘培德《泛函分析基础》
3. 哈工大-武大许全华，马涛，尹智《泛函分析讲义》
4. 清华步尚全《泛函分析习题集》
5. 英文：J.Conway GTM /W Rudin

2 度量空间

2.1 基本概念

定义 2.1 (度量空间（距离空间）) 天天用，已经不想写了

例 2.1 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 都是距离空间。距离定义为 $d(x,y) = (\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$. 因为有三角不等式；

$$|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^{N} a_k^2)(\sum_{k=1}^{N} b_k^2)$$

例 2.2 (描述性的"一致收敛"距离化) $[a,b]$ 上连续函数的全体 $C[a,b]$：$d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$, $\forall f, g \in C[a,b]$.

例 2.3 集合 $S = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in \mathbb{R}\}$。设 $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$,$y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in S$. 其距离可定义为：

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

这是对数列列逐点收敛的刻画。因为会被 $\frac{1}{2^k}$ 给控制住。

例 2.4 $S[a,b]$ 记为几乎处处有限的可测函数全体。定义:

$$d(f,g) = \int_a^b \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt$$

若 $f_n \to g$,$d(f_n, g) \to 0$. 这是依测度收敛的距离化。即 $\forall \delta > 0$,$m(\{t \in [a,b] : |f_n(t) - g(t)| \geq \delta\}) \to 0$。

当然可以用距离定义收敛：

定义 2.2 $\{x_n\} \subset X$,$x_0 \in X$。称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限，若 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0，$x_n \xrightarrow{d} x_0$, 若 $d(x_n, x_0) \to 0$.

命题 2.1 若 $x_n \to x_0$，$y_n \to y_0$，则 $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$。这说明 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 是二元连续的。

定义 2.3 设 X_1 和 X_2 是两个度量空间，$f : X_1 \to X_2$。若 $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)), \forall x, y \in X_1$, 则称其为 X_1 到 X_2 的等距嵌入。若 f 还是满射，则 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) 等距。

命题 2.2 等距嵌入一定是连续嵌入。等距嵌入一定是单射，因而被视为嵌入。

等距的条件是比较强的。我们给出弱一点的条件：

定义 2.4 $f : X_1 \to X_2$ 是满射。且存在 $A, B \geq 0$,$Ad_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Bd_1(x, y), \forall x, y \in X_1$。

2.2 度量空间中的点集和可分性

用 $\overline{B}(x_0, r)$ 表示闭球，$B(x_0, r)$ 表示开球。值得注意的是，下面的命题是错误的！

命题 2.3 (错误的命题) $\overline{B(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r)$

边界取两次后就保持不变，聚点可以一直严格减少且不为空集。

定义 2.5 (X, d) 是度量空间。若 X 中存在一个可列的稠密子集，则称 X 是可分的。

例 2.5 $C[a, b]$，$d(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)$ 是一个可分集合。只需要使用有理系数的多项式来做即可。

例 2.6 $L^\infty = \{\{a_n\}\}$ 且 $\{a_n\}$ 有界。距离定义为 $d_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$。则该空间不可分。原因是子集 $A = \{\{a_n\}\}$,$a_n = 0$ 或者 1。该集合不可数且每个点之间的距离为 1.

命题 2.4 (X, d) 不可分等价于 $\exists \delta > 0$，$\exists$ 不可数集 $A \subset X$, 使得 $\forall x \neq y \in A$，$d(x, y) \geq \delta$。

证明 充分性显然。关键是必要性。 □

2.3 距离空间的完备性与压缩映像原理

略

3 赋范线性空间

3.1 基本概念

定义 3.1 X 是线性空间（实或复），映射 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足：

1. $\|x\| \geq 0$ 且只在 $x = 0$ 时取等。

2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3. $\|x+y\| \geq \|x\|+\|y\|$。

称为 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数。$(X,\|\cdot\|)$ 称为赋范空间。

显然范数诱导度量:

$$\forall x,y \in X, d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\|$$

从而我们有一系列度量空间的概念：收敛，柯西列, 完备等等。

定义 3.2 完备的赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 被称为 Banach 空间。

命题 3.1 X 是赋范空间，则:

(1) 范数是连续函数，即:

$$x_n \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$$

(2) 线性运算都是多元连续的。

证明 只需要调教三角不等式即可。并不困难。 □

命题 3.2 $(X,\|\cdot\|)$ 赋范空间，若 X 完备且级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛。

反之，若上述收敛性质对所有收敛 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 成立，则 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间。

证明 证明的要点是取子列和三角不等式。构造收敛的子列 + 本身是 Cauthy 列即可说明收敛。而子列的收敛则来源于对应范数列的收敛。 □

定义 3.3 凸集是指线性空间 X 这样的一个子集 A, 对于 $\forall x,y \in A$，和 $\forall \alpha \in (0,1)$，都有 $\alpha x+(1-\alpha)y \in A$。

凸包是指 X 这样的一个子集：为 X 钟包含 A 的最小凸集。由于凸集的交显然是凸集，则可以写为:

$$\mathrm{Co}(A) = \bigcap_{A\subset F\subset X} F$$

也可以从内到外写凸集：

$$\mathrm{Co}(A) = \{z \in X | \exists n \in \mathbb{N}, \alpha_k \geq 0, 1 \leq k \leq n, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\}$$

例 3.1 l^∞ 是有界数列的全体:

$$\|(\xi_k)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$$

容易证明这是一个范数，并且完备，因而是 Banach 空间。

设 $l^p = \{(\xi_k) | \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}$。定义范数为:

$$\|(\xi_k)\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$$

这也是完备的度量。我们先给出逐点收敛的极限：

$$|\xi_k^{(n)-\xi_k^{(m)}}| \leq \|x_n - x_m\|_p$$

因此根据逐点收敛的 Cauthy 定理，自然有:

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(0)}$$

从而我们构造数列:$x_0=(\xi_k^{(0)})$。要说明:

$$x_0\in l^p\quad \|x_n-x_0\|\to 0$$

$\forall\epsilon>0$，$\exists N$,$\forall n.m>N,\|x_n-x_m\|_p<\epsilon$。

例 3.2 (变差空间) 空间 $V[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上有界变差的函数的空间。即：

$$\sup\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})||\forall n\in\mathbb{N},\forall a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

是有限的。

定义该空间上的范数：

$$\|f\|=V_a^b(f)=\sup\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})||\forall n\in\mathbb{N},\forall a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

定义有界变差数列为:

$$(a_n):\sum_{k=1}^{\infty}|a_{k+1}-a_k|<+\infty$$

命题 3.3 给定各项非零的数列 (x_n), 定义:

$$A=\{(a_n)|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\quad\text{convergence}\}$$

若数列 (y_n) 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}y_nb_n$ 对于任意的 $(b_n)\in A$ 都收敛，则存在一个有界变差数列 (υ_n) 满足 $y_n=\upsilon_nx_n,\forall n$。反之亦然。

命题 3.4 给定非零数列 $(x_n),(y_n)$。定义 $A=\{(a_n)|a_nx_n,a_ny_n\quad\text{convergence}\}$。则 (z_n) 满足对 $\forall b_n\in A$ 有 z_nb_n 收敛当且仅当存在有界变差数列 $(\upsilon_n^{(1)})$ 和 $(\upsilon_n^{(2)})$ 使得:

$$z_n=\upsilon_n^{(1)}x_n+\upsilon_n^{(2)}y_n$$

3.2 $L^p[0,1]$ 空间

几乎处处相等的函数将被视为同一元。

3.3 赋范空间进一步的性质

定义 3.4 (子空间) $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，子空间 $X_1\subset X$。沿用 $\|\cdot\|$ 作为范数，称 $(X_1,\|\cdot\|)$ 为 $(X,\|\cdot\|)$ 的子空间。若 X 是闭集，称为闭子空间。

例 3.3 设 l^∞ 是有界数列全体。$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$。考虑其子空间 c 为所有收敛数列的全体。其为 l^∞ 的闭集，因为数列一致收敛意味着极限列也是收敛的。

考虑 c_0 为收敛于 0 的数列全体。同样定义范数为 $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$。则 c_0 是 $l^\infty(c)$ 的闭子空间。从而 $c_0 \subset c \subset l^\infty$

由于 l^∞ 是完备空间，并且完备性是闭遗传的，因此 c 和 c_0 也是 Banach 空间。

继续考虑更小的子空间 c_{00} 为有限项非零的数列全体，范数仍定义:$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$。同样其 c_{00} 是子空间。但其不是闭子集。

相同于度量空间的完备化，赋范空间定义距离 $d(x,y)$ 为 $|x-y|$。沿用度量空间的完备化 $\tilde{X}$：

定义 3.5 设 X 中任意柯西列 $\overline{x}, \overline{y}$。可以定义自然的加法和数乘运算。定义其范数为:

$$\|\overline{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

此时 $(\tilde{X}, \|\|)$ 是一个 Banach 空间。

完备化后，X 等距同构于 $\tilde{X}$ 的一个稠子集。

思考问题: 回忆刚才的例子，试证明:c 不等距同构于 c_0 的任何子空间。关键在于 c 内有个特殊的元 (1)(恒为 1), 其与 c 中其它元产生的关系无法嵌入到 c_0 里面。

在赋范空间的意义下，我们默认两个空间的同构代表 X 首先与 Y 线性同构，以及存在 $T : X \to Y$ 作为线性双射满足:

$$\exists A, B > 0, s.t. A\|x\| \le \|T(x)\| \le B\|x\|, \forall x \in X$$

定理 3.1 (Mazur) if V and W are normed spaces over $\mathbb{R}$ and the mapping:

$$f : V \to W$$

is a surjective isometry, then f is affine. If $f(0) = 0$，f is linear isomorphic mapping.

我们目前有两种空间关系：同构和等距同构。我们接着引入商空间：

定义 3.6 (赋范线性空间的商空间) X 是线性空间，M 是 X 的线性子空间。定义 X/M 是线性空间的商。我们在上面定义范数:

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y\in\tilde{x}} \|y\| = d(x, M) = \inf_{y\in M} \|x - y\|$$

上述定义自然的不能再自然了。

定理 3.2 X 是 Banach 空间，M 是 X 的闭子空间，则 X/M 是 Banach 空间。

证明 设 $\{\tilde{x_n}\}$ 是一个 X/M 中的 Cauthy 列。那么存在子列:

$$\|\widetilde{x_{n_{k+1}}} - \widetilde{x_{n_k}}\| \le 1/2^k$$

根据商范数的定义，则存在:

$$y_k \in \widetilde{x_{n_{k+1}}} - \widetilde{x_{n_k}} = \widetilde{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}} \quad \|y_k\| < 1/2^k$$

$\sum y_k$ 是收敛的 (其有限项是容易计算的)。从而任取 $x_{n_1} \in \tilde{x_{n_1}}$，有:

$$x_{n_1} + y_1 + \cdots +$$

收敛于 x。

其实 $\tilde{x_{n_k}}$ 收敛于 $\tilde{x}$。记 $S_k = x_{n_1} + y_1 + \cdots + y_k$，由于 $x_{n_1} \in \tilde{x_{n_1}}$，$y_k \in \tilde{x_{n_{k+1}}} - \tilde{x_{n_k}}$，:

$$\|\tilde{x} - \tilde{x_{n_{k+1}}}\| \leq \|x - S_k\| \to 0$$

3.4 赋范空间的基

我们不介绍 Hamel 基，其只是理论意义上存在。由于很多 Hamel 基都是不可数的，因而难以进行加减运算。

我们介绍 Schauder 基:

设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}$ 是 X 的可数子集。称其为 X 的 Schauder 基。若 $\forall x \in X, \exists!(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ 使得:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n$$

显然若 X 有 Schauder 基，则其可分。但可分的赋范线性空间空间 X 不一定有 Schauder 基。可见 Mazur 和 Enflo 的故事。

3.5 习题讲解

命题 3.5 (X, d) 是度量空间不可分当且仅当存在不可数的子集 Γ 使得存在 $\delta > 0$, 满足 $\forall x \neq y \in \Gamma, d(x,y) \geq \delta$

证明 若 X 可分，$\{x_n\}$ 是稠密，则 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \delta/3) \supset X$。从而至少有一个 $B(x_{n_0}, \delta/3)$ 与 Γ 相交。Γ 不可数，则 $\exists x \neq y$ 满足 $x, y \in B(x_{n_0}, \delta/3)$，矛盾！

若 X 不可分。对于 n 是正整数，$A \subset X$ 称为 $1/n$ 分离集，若 $\forall x \neq y \in A$，有:

$$d(x,y) \geq 1/n$$

设 $\mathcal{F}_n$ 是所有 $1/n$ 分离集的全体。使用包含关系作为偏序。这显然是一个满足 Zorn 引理的集族，故其存在极大元 A_n。

设 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。我们断言 B 是不可数的集合。若不是，任取 $y \notin B$，根据 Zorn 引理的极大元断言，则对于 $\forall n, d(y, A_n) < 1/n$。从而 B 是 X 的一个稠子集。由于 X 是不可分的，从而 B 一定是不可数的。

从而存在 A_n 是不可数集。这个 A_n 就是我们想要找的集合。 □

命题 3.6 任何线性空间都存在范数（内积）

证明 Hamel 基。 □

命题 3.7 $[a, b]$ 上多项式空间上不存在完备范数。

证明 问题实际上是集合 $c_{00}=\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}|\exists N,\forall n>N,\alpha_n=0\}$

若其是 Banach 空间。考虑 $E_n=\mathrm{Span}\{e_k\}_{k=1}^{n}$。则 $c_{00}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$。

根据完备性，存在 $\overline{E_{n_0}}=E_{n_0}$ 有内点。若 $B(x_0,r_0)\subset E_{n_0}$。平移，$B(\theta,r_0)\subset E_{n_0}$ 即 $c_{00}=E_{n_0}$。□

命题 3.8 (Mazur-Ulam) X,Y 是 Banach 空间.$T:X\to Y$ 满等距，$\|T(x)-T(y)\|=\|x-y\|$。则 T 是仿射的。若 $T(0)=0$，则 T 是线性的。

证明 不妨设 $T(0)=0$。如果能证明 T 保中点，就能根据二分性和连续性说明其是仿射。 □

注解 不能去掉满的条件。设 $T:\mathbb{R}\to l_{\infty}^{(2)},x\mapsto(x,\sin x)$。则:

$$\|(x,\sin x)-(y,\sin y)\|_{\infty}=\max(|x-y|,|\sin x,\sin y|)=\|x-y\|$$

T 是不满的映射，但是保距。

设 $S:l_{\infty}^{(2)}\to R,(x,y)\mapsto x$。$S$ 是线性，有界的。$S\circ T=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. 因此 T 虽然不线性，但是有线性的左逆。

下面的定理自然可以推出 Mazur-Ulam 定理。

定理 3.3 (Figiel 定理) X,Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 是等距映射。$T(0)=0$。则存在 $S:\overline{\mathrm{Span}T(X)}\to X$ 线性且 $\|S\|=1$ 满足:

$$ST=\mathrm{id}_X$$

对 Mazur-Ulam 定理的思考还可以对等距进行操作。等距的映射实际上是比较强的.

注解 X,Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 是满射且 Lipschitz 等价。即 $\exists A,B>0$：

$$A\|x-y\|\leq\|Tx-Ty\|\leq B\|x-y\|,\forall x,y\in X$$

问是否有 X 与 Y 同构？

这个问题目前仍然是 open 的。在不可分的 Banach 空间中，已经找到了反例。而对于可分的 Banach 空间，甚至进展停留在固定 X 或者 Y 都无法得到很好的解决。例如，当 $X=c_0$ 时问题被证明是成立的。以及 $X=l_1$,$Y=X^*$ 时，也被证明成立了。但是其他情况完全是 open 的。

4 有界线性算子

4.1 有界线性算子

设 X,Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 满足线性，连续，则称 T 是 X 到 Y 的有界线性算子。

为什么这个概念的名字里有"bounded" 却没有"continuous"？

命题 4.1 设 $T:X\to Y$ 只是线性的。若 T 在零点连续，则 T 在所有点都是连续的。

命题 4.2 (Lipschitz) 若 T 是连续线性的算子，则存在 $C>0$, 使得:

$$\|T(x)\|_Y\leq C\|x\|_X,\forall x\in X$$

证明 若不存在这样的 C, 则存在 $\{x_n\}$ 满足:$\|T(x_n)\| > n\|x_n\|$。于是:

$$\|T(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{x_n}{\|x_n\|})\| > \sqrt{n}$$

左边的表达式趋近于 0，但是右边却表明极限不可能为 0。从而这与连续性矛盾。 □

我们当然关注上述命题中 C 的最优选择。即我们关心:

$$\inf\{C \geq 0 | \|T(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in X\} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

上述量被定义为算子 T 的**（算子）范数**。用 $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ 表示所有有界线性算子的空间。

例 4.1 考虑 $B(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N) = M_{N\times N}(\mathbb{C})$。$T$ 是正规矩阵, 则 $\|T\|$ 是 T 的特征值的绝对值中的最大值。

命题 4.3 结合算子范数,$B(X,Y)$ 成为赋范空间。

设 X 是赋范空间。则 Y 是 Banach 空间等价于 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间。

证明 命题第一句话是比较显然的。我们直接考虑第二句话。

设 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间。$(y_n) \subset Y$ 是柯西列。(?)（注记：老师在这里卡住了，并且表示后面会讲）

设 Y 是完备的。设 (T_n) 是 $B(X,Y)$ 中的柯西列。即:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$$

从而 $\{T_n(x)\}$ 也是柯西列。由于 Y 完备可知:$\lim T_n(x) := T_0(x)$.

由定义，$T_0(x)$ 线性。

任意 $\epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$，有:

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

翻译为:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon\|x\|$$

令 $m \to \infty$，则:

$$\|T_n(x) - T_0(x)\| \leq \epsilon\|x\|$$

于是 $T_n - T_0 \in B(X,Y)$ 且 $\|T_n - T_0\| < \epsilon$。 □

设 $K = \mathbb{R}$ 或者是 $\mathbb{C}$, 则称 $B(X,K)$ 是共轭空间，是所有有界线性泛函的全体。记为 X^*。

remark: 还讲了逐点收敛（强收敛）。笔者此处未作记录。

4.2 Banach-Steinhaus 定理

remark: 关于定理的引入没有做记录。

定理 4.1 设 $\{T_\alpha\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 的有界线性算子族。如果有 $\sup_\alpha \|T_\alpha(x)\| < \infty, \forall x \in X$，则 $\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\| < \infty$.

证明 证明主要是利用了 Baire 纲定理。

设 $p(x) = \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|$。记 $M_k = \{x \in X : p(x) \leq k\}$ 是一个闭集。则:

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

由于 X 完备，则至少有 M_{k_0} 存在内点。

未记录完所有的证明。 □

我们介绍 Banach-Steinhaus 定理的应用——Fourier 级数的发散性。

设 $C_{2\pi}$ 是以 2π 为周期的连续函数。这显然可以只考虑 $C[-\pi, \pi]$ 且 $f(-\pi) = f(\pi)$。定义范数为 $\|x\| = \max_{t \in R} |x(t)|$。则 $x(t)$ 可以被展开为 Fourier 级数:

$$x(t) \sim a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

前 $n+1$ 项部分可以写为:

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s) K_n(s,t) ds \tag{2}$$

其中 $K_n(s,t) = \dfrac{\sin(n+1/2)(s-t)}{2\pi \sin 1/2(s-t)}$ 是核函数。

若 Banach 空间 X 有 Schauder 基，则 X 的任意稠子空间也有 Schauder 基。

4.3 开映射定理与闭图像定理

定义 4.1 (逆算子) $T \in B(X,Y)$，若存在 $S \in B(Y,X)$ 满足:$S \circ T = \mathrm{id}_X$,$T \circ S = \mathrm{id}_Y$，则称 T 可逆，$T^{-1} = S$。

定理 4.2 X 是 Banach 空间，$T \in B(X)$。若 $\|T\| < 1$，则 $I - T$ 是可逆的且:

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \tag{3}$$

证明 本质是等比数列求和。略。 □

推论 4.3 X 是 Banach 空间，(x_n) 是 Schaduer 基。对于 X 的任意稠子空间 X_0，存在 $(z_n) \subset X_0$ 使得 (z_n) 是 X 的 Schauder 基。

证明

定理 4.4 (扰动) X 是 Banach 空间，(x_n) 是 Schaduer 基。相应的系数泛函记为 $f_n \in X^*$. 对于一列 (z_n), 只要满足:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \|z_n - x_n\| < 1 \tag{4}$$

则 (z_n) 是 Schaduer 基。

证明 构造 $T = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(x_n - z_n)$。显然 $I - T$ 可逆。于是:

$$y = (I-T)((I-T)^{-1}y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n((I-T)^{-1})(y) z_n \forall y \in X \tag{5}$$

唯一性是显然的，可以用 $I - T$ 保证。 □

不是所有的可分 Banach 空间都有 Schaduer 基。但下面这个问题是耐人寻味的:

命题 4.4 X 是可分的 Banach 空间，则存在稠密的子空间 X_0 且拥有 Schaduer 基。

这个问题的答案是肯定的。证明暂时不给出。

4.4 闭图像定理

X, Y 是赋范空间。$T : X \to Y$ 是线性算子。在乘积空间 $X \times Y$ 中，记 $G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$。乘积空间的拓扑是显然诱导的。

定义 4.2 若 $G(T)$ 是闭集，则称 T 是闭算子。

定理 4.5 (闭图像定理) 设 $T : X \to Y$ 是线性的闭算子。则 $T \in B(X, Y)$。

证明 X, Y 是 Banach 空间，则 $X \times Y$ 也是 Banach 空间。由于 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 的闭集。也是 Banach 空间

定义投射 $p : G(T) \to X$。则 p 是单，满，线性的。$p \in B(G(T), X)$ 且 $\|p\| \leq 1$。

根据 Banach 逆算子定理，有 $p^{-1} \in B(X, G(T))$。即存在 $c > 0$ 使得:

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \tag{6}$$

于是 $T \in B(X, Y)$。 □

5 Hahn-Banach 定理

$1 < p < \infty$, 考虑空间 l_p。取 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$。设 $\|x\|$ 的范数为 1。根据 Hahn-Banach 定理得知，$f \in l_p^*$ 满足 $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = 1$ 是存在的。但是如何构造具体形式呢？

即我们需要构造:

$$f(y) = f(y_1, y_2, y_3, \dots) \tag{7}$$

注意到我们只需要考虑其 Schauder 基 e_n。于是我们定义:

$$f(e_n) = \|x_n\|^{p-1}\mathrm{sgn}(x_n) \tag{8}$$

则 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = 1$。对于一般的 y:

$$f(y) = f(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \|x_n\|^{p-1}\mathrm{sgn}(x_n) \tag{9}$$

这是表示定理能说明的事实。因此这里就不具体做了。

事实上，注意到 f^q 有一些独特的性质。我们可以猜测 l_p^* 和 l_q 的神秘关系:$l_p^* \cong l_q$。

定理 5.1 (共轭空间表示定理:$c_0^* \cong l_1$) $c_0^* \cong l_1$。

证明 $c_0^* \cong l_1$。考虑 $f \in c_0^*$，则存在唯一的 $y \in l_1$ 使得 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ 且 $\|f\|_{c_0^*} = \|y\|_{l_1}$.

这是因为，$f((x_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n f(e_n)$。于是定义 $y_n = f(e_n)$。我们接下来要说明范数之间的关系。

令 $z_n = (\mathrm{sgn}(f(e_1)), \ldots, \mathrm{sgn}(f(e_n)), 0, 0, \ldots)$。于是 $z_n \in c_0$ 且 $\|z_n\| \le 1$。$f(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} |f(e_k)| \le \|f\|_{c_0^*}$. 于是 y 的范数:

$$\|y\| = \sum_{k=0}^{\infty} |y_k| \le \|f\|_{c_0^*} \tag{10}$$

另外，显然有:

$$|f((x_n))| = |\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n| \le \sup_n |x_n| \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| = \|x\| \|y\| \tag{11}$$

从而 $\|f\|_{c_0^*} \le \|y\|$。

另一方面，对于任意 $y \in l_1$，定义 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \forall x \in c_0$。则 $f \in c_0^*$ 且 $\|f\|_{c_0^*} = \|y\|$。 □

5.1 表示定理

有界变差函数

设区间 $[a, b]$ 上的有界变差空间为 $\mathrm{BV}[a, b]$。定义上面的范数为:

$$\|\omega\| = \mathrm{Var}(\omega) + |\omega(a)|$$

定理 5.2 有界变差空间在上述范数下构成 Banach 空间。

证明

设 $x \in C[a, b]$，P 是分划 $a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$，定义:

$$S(x, \omega, P) = \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1})[\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})]$$

我们拓宽黎曼积分的定义:Riemann-Stieltjes 积分:

$$\int_a^b x(t) d\omega(t) = \lim_{\delta(P) \to 0} S(x, \omega, P)$$

关于 P-Cauthy 网收敛。

我们考量该积分与 x 和 ω 范数的关系:

命题 5.1 $|\int_a^b x d\omega| \le \|x\| \cdot \|\omega\|_{\mathrm{bv}}$

定理 5.3 (Riese) 设 $f \in C[a, b]^*$。存在唯一的 $\omega \in \mathrm{BV}(a, b)$ 满足:$\omega(a) = 0$,ω 在 (a, b) 右连续，即 $\omega(t^{\perp}) = \omega(t), \forall t \in (a, b)$, 使得:

$$f(x) = \int_a^b x(t) d\omega(t), x \in C[a, b]$$

此时 $\|f\| = \|\omega\|_{\mathrm{bv}}$。

记 BV$[a,b]$ 中所有 $\omega(a)=0$，ω 右连续的函数全体为 BV$_0[a,b]$. 则我们有表示定理:

推论 5.4 $C[a,b]^* \cong \mathrm{BV}_0[a,b]$。

证明 考虑 $C[a,b] \subset L^\infty[a,b].C[a,b]$ 是闭子空间。

对于 $f \in C[a,b]^*$, 根据 $H-B$ 保范延拓:

存在 $F \in L^\infty[a,b]^*$，$F|_{C[a,b]} = f$。

考虑 $x \in C[a,b]$，P 为分划。令:

$$z(x,P) = x(a)x_{t_1} + \sum_{i=2}^{n} x(t_{i-1})[x_{t_i} - x_{t_{i-1}}]$$

则 $F(z(x,p))$ 是部分和 $S(x,\alpha,P)$。显然 $\|z(x,P)-x\|_\infty \to 0, \delta(P) \to 0$。则 α 的存在保证。

唯一性: 对 α 进行修正，使得 $\omega(t) = 0, t=a; \alpha(t^+), a<t<b; \alpha(b), t=b$。我们断言 ω 与 α 积分值相同。即:

$$\int_a^b x d\alpha = \int_a^b x d\omega$$

由于 α 的不连续点至多可列，可以推的上述结论。

我们现在说明修正得到 ω 是唯一的。即:

$$\int_a^b x d\beta = \int_a^b x d\omega \Rightarrow \beta = \omega$$

若 t_0 是两者的连续点，则也是 $t \mapsto \mathrm{Var}_{[a,t]}(\alpha)$ 和 $t \mapsto \mathrm{Var}_{[a,t]}(\beta)$ 的连续点。 □

6 第 10 周

6.1 Tuesday

定理 6.1 设 A,B,C 是 Banach 空间，且:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

是 Banach 空间范畴下的正合列。则诱导的列:

$$0 \to C^* \to B^* \to A^* \to 0$$

也是正合的列。

问题 6.1 一个 n 点的离散距离空间可以等距嵌入到 l_∞^{n-1} 中吗？

问题 6.2 一个可分距离空间总可以嵌入到一个可分的 Banach 空间吗？

6.2 Thursday

对于空间 X，定义弱拓扑:(X, w):

定义 6.1 取遍 $\forall x_0 \in X$,$\forall \epsilon > 0$，$\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall f_k \in X^*, 1 \leq k \leq n$。集合:

$$\{x \in X || f_k(x) - f_k(x_0)| \leq \epsilon, 1 \leq k \leq n\}$$

取 $x_0 = 0$，称为弱拓扑在原点的邻域基。

注：取 $\{x \in X| \|x\| \leq 1\}$ 是弱（拓扑）开集当且仅当 X 是有限维。

命题 6.1 (B_X, w) 是紧空间等价于 X 是自反的。$B_X = \{\|x\| \leq 1\}$。

定义 6.2 (弱星拓扑) 在 X^* 上，定义拓扑基如下:

取遍 $f_0 \in X^*$,$\epsilon > 0$，$n \in \mathbb{N}$，取遍 $x_k \in X, 1 \leq k \leq n$。取遍所有的集合:

$$\{f \in X^* || f(x_k) - f_0(x_k)| \leq \epsilon, 1 \ \leq k \leq n\}$$

定理 6.2 (B_{X^*}, w^*) 是紧空间。

问题 6.3 对于 Banach 空间 Y，是否存在 X 满足 $X^* = Y$？

问题 6.4 (Ball covering Property: 球覆盖性质) 设 X 是赋范空间,$S_X = \{x \in X| \|x\| = 1\}$。$B(x_0, r) = \{x| \|x - x_0\| < r\}$。称 X 有球覆盖性质，若 X 的单位球面 S_X 可以被写为 X 中的至多可列个球的并集覆盖。即：

$$S_X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$$

且 $0 \notin B(x_n, r_n), \forall n$。

引理 6.3 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间，$C(\Omega)$ 是连续函数空间, 则 $C(\Omega)$ 有 BCP 例，当且仅当 Ω 有至多可数的 π 基（弱拓扑基）。

例 6.1 可分空间必定 BCP;l_∞ 有 BCP;$L^\infty[0, 1]$ 不满足 BCP。

7 第十一周

7.1 Tuesday

定理 7.1 (Schur 性质) 对于空间 l^1，序列按范数收敛等价于按照弱拓扑收敛。即 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ 当且仅当 $f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in l^1 (\cong l^\infty)$

证明 只需要说明右边可推得左边。设 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 且 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|}$ 不成立。我们不妨设 $x_0 = 0$。

根据 Banach-Steinhaus 定理，$\|x_n\| \leq M$。由于按照范数不收敛，不妨设存在 $\delta > 0$：

$$0 < \delta \leq \|x_n\| \leq M$$

做归一化 $y_n = x_n / \|x_n\|$。则 $y_n \xrightarrow{w} 0$(因为范数有下界。)。

考虑赋值泛函 $e_m : y \mapsto y(m)$。$e_m \in l_1^* \cong l^\infty$。

e_m 是连续线性泛函，所以 $y_n \xrightarrow{w} 0$ 表明 $e_m(y_n) = y_n(m) \to 0$，并且 $\|y_n\|_{l^1} = 1$。接下来我们构造 $f \in l_1^*$ 使得:

$$|f(y_{n_k})| > 1/4, \forall n \in \mathbb{N}$$

这样的构造可以根据前若干项的绝对值和逐渐趋近 0，从而小于 1/4，中间项足够多时大于 3/4，从而保证这 3/4 的若干项可以全部取绝对值。 □

紧算子

定义 7.1 设 $T \in B(X, Y)$ 称为紧算子，若任意有界集合 $M \subset X$, 有 $\overline{T(M)}$ 是 Y 中的紧集。等价的，即 $\overline{T(B_x)}$ 是紧集。

例 7.1 无限维空间 X 的恒等映射不是紧算子。因为单位球面不是紧集。

定理 7.2 紧算子把弱收敛列映射为按范收敛列。

证明 不妨设 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 但是 $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_0$ 不成立。

于是存在 $\|Tx_{n_k} - Tx_0\| \geq \epsilon$。但是 T 是紧算子，从而 $\{Tx_{n_k}\}$ 是紧集，有聚点，从而有 $\|y_0 - Tx_0\| \geq \epsilon$。

但是 $\forall f \in Y^*, f(Tx_0) = (f \circ T)(x_0) = f(y_0)$。根据 Hahn-Banach 定理，$Tx_0 = y_0$ 矛盾！ □

定理 7.3 $T_n, T_0 \in B(X, Y)$。若 T_n 按照算子范数收敛到 T，则 T_n 紧得到 T 紧算子。

证明 对角线法。 □

考虑一类特殊的算子，其秩 1:

$$T(y) = f(y)x, \forall y \in X; \Rightarrow T = x \otimes f, f \in X^*$$

若秩为 N：

$$T(y) = \sum_{k=1}^{N} f_k(y)x_k, \forall y \in X; \Rightarrow T = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes f_k, f_k \in X^*$$

把所有紧算子的集合记为 $K(X, Y)$，$F(X, Y)$ 记为有限秩的算子全体，则:

$$\overline{F(X, Y)} \subset K(X, Y)$$

7.2 Thursday

定义 7.2 称 X 具有逼近性质（AP）, 若任给紧子集 $K \subset X, \forall \epsilon > 0$，都存在有限秩的算子 F 使得:

$$\|T(x) - x\| < \epsilon, \forall x \in K$$

定理 7.4 (Grothendieck) X 具有 AP 性质当且仅当 $K(X) = \overline{F(X)}$

命题 7.1 AP 性质等价于: 任取 $x_n \in X, f_n \in X^*$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \cdot \|f_n\| < \infty$。若 $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes f_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) = 0$。

定义 7.3 (bounded approximation property) X 满足有界逼近性质,若 $\exists M > 0$,使得 $\forall \text{compact} K \subset X$，$\forall \epsilon > 0$，存在 $T \in F(X)$ 且 $\|T\| < M$ 使得:

$$\|T(x) - x\| < \epsilon, \forall x \in K$$

定理 7.5 对于 $T \in B(X, X_1)$，T 紧与 T^* 紧等价。

证明 若 T 紧。 □

8 第 12 周

8.1 Thursday

问题 8.1 (公开问题：不变子空间) l_2 空间。对于任何 $T \in B(L_2)$，是否存在 l_2 的一个无穷维子空间 H_0 使得 $T(H_0) \subset H_0$。

将问题特殊化：设 T 是紧算子，上述命题是否正确？答案是否定的。

问题 8.2 $B(l_2)$ 有球覆盖性质。

命题 8.1 当 M 是闭子空间，$H = M \oplus M^{\perp}$。

9 第 13 周

9.1 Tuesday

定理 9.1 对于内积空间 H，存在 $M \subset H$ 是完备的凸集，则对于 $\forall x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$ 使得:

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = (\inf_{y \in M} \|x - y\|)$$

证明 设 $x \notin M$。$\alpha = d(x, M)$。由 inf 的定义，存在 $\{x_n\} \subset M$ 满足:$\|x_n - x\| \to \alpha$。下证:$\{x_n\}$ 是 Cauthy 列。

由于 M 是凸集，则 $(x_m + x_n)/2 \in M$。则 $\|x - (x_m + x_n)/2\| \geq \alpha$。

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\|x_m - x\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 - 4\|x - (x_m + x_n)/2\|^2 \leq 2\|x_m - x\|^2 + x\|x_n - x\|^2 - 4\alpha \to 0$$

从而是 Cauthy 列。于是根据完备性知 $\{x_n\}$ 有极限。 □

定理 9.2 (正交分解) 设 H 是 Hilbert 空间，M 是闭子空间。$\forall x \in H$，$\exists! x_0 \in M$，$y \in M^{\perp}$ 使得 $x = x_0 + y$ 即:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

证明 M 是闭子空间，$\forall x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$ 使得 $\|x - x_0\| = d(x, M) = \alpha$。

$\forall z \in M$，$z \neq 0$。$\forall \lambda \in \mathbb{C}$,$x_0 + \lambda z \in M$。并且

$$(x - x_0 - \lambda z)^2$$

定义 9.1 对于 Banach 空间 X，$E \subset X$ 是闭的子空间。若有在闭子空间 F 使 $\forall x \in X$，存在! 的 $x_0 \in E$,$y \in F$ 使得 $x = x_0 + y$, 即 $X = E \oplus F$。此时称 E 是可补的，F 是 E 的一个补空间。

例 9.1 $c_0 \subset l_\infty$ 是不可补的。

定理 9.3 X 是 Banach 空间，E 是可补的闭子空间。定义线性映射 $P : X \to X$,$P(x) = x_0 \in E$。则 $P \in B(X)$。

引理 9.4 $\mathbb{N}$ 中存在不可数个子列记为 $\{S_\alpha\}_{\alpha\Gamma}$ 且两两几乎不交。

引理 9.5 有界线性算子 $P \in B(l_\infty)$:$P|_{c_0} = 0$，即 $P(x) = 0, \forall x \in c_0$。则存在 $\mathbb{N}$ 的子列 A 使得 $P|_{l_\infty(A)} = 0$。即 $P(y) = 0, \forall y \in l_\infty$ 且 $y(k) = 0, \forall k \notin A$。

证明 反证，假设不成立。由于 $\mathbb{N}$ 上存在不可数个子列 $\{A_\alpha\}$ 且两两几乎不交。$\forall i \in I$,$\exists x_i \in l_\infty(A_i)$ 且 $P(x_i) = 0$。显然 $x_i \notin c_0$。

不妨设 $\|x_i\| = 1$,$\forall i \in I$。定义 $\forall n \in N$:

$$I_n = \{i \in I : (p(x_i))(n) \neq 0\}$$

则有 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$。则有 I_n 是不可数的，

再进行分解:

$$I_{n,k} = \{i \in I : |P(x_i)(n)| \geq 1/k\}$$

则

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$$

则有 $I_{n,k}$ 不可列。其任意有限子集 J:

$$\text{令} y = \sum_{j \in J} \operatorname{sgn}[P(x_j)(n)] x_j$$

于是

$$P(y)(n) = \sum_{j \in J} |P(x_j)(n)| \geq 1/k|J|$$

注意到 J 有限，则存在 f:$y = f + z$ 且 $\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq 0\}$ 是有限集且 $\|z\|_\infty \leq 1$。

于是 $P(y) = P(z) \leq \|P\|$。但是 $\|P(y)\| \geq |P(y)(n)| \geq |J|/k$。注意到 J 的个数任意大，则产生了矛盾！ □

推论 9.6 c_0 在 l_∞ 中不可补。

证明 若可补，则存在 $l_\infty = c_0 + d$。有界线性算子 $P_d|_{c_0} = 0$. 于是存在 $\mathbb{N}$ 的子列 A 使得 $P_d|_{l_\infty(A)} = 0$。注意到 $P_d + P_{c_0} = \mathrm{id}_{l_\infty}$。则 $P_{c_0}|_{l_\infty(A)} = \mathrm{id}$。然而 $l_\infty(A)$ 并未包含在 c_0 中，矛盾！ □

9.2 Thursday

对于 Hilbert 空间，使用 Zorn 引理可以得到其一定有极大的正交系 A_α。并且 A_α 张成的子空间的闭包是整个 Hilbert 空间。

考虑 $\{e_i\}$ 是一列极大标准正交基。对于 $\forall x \in H$，有:

$$\|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\| = d(x, \mathrm{Span}(e_n)_{n=1}^{N})$$

注意到:

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\| = 0$$

例 9.2 在空间 l^2 中，e_n 直接可取为 Schaduer 基。

例 9.3 $L^2[0, 2\pi]$ 中，取：

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, n\text{的取值是}0, \pm 1, \ldots, \pm n, \ldots$$

显然:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)t}|_0^{2\pi} = 0, \text{若}n \neq m$$

并且 $\|e_n\| = 1$。从而这是一个正交系。

10 拓扑线性空间

10.1 基本性质

定义

定义 10.1 拓扑线性空间的局部基是指 0 点附近的邻域族 β，使得 0 点的任意邻域 U，都存在 $V \in \beta$ 使得 $V \subset U$。

分离性

定理 10.1 设 $0 \in W$ 是邻域，则存在邻域 U 使得 $U + U \subset W$ 且 $U = -U$。

证明 考虑 $0 + 0 = 0$. 于是有:

$$V_1 + V_2 \subset W$$

记 $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$。 □

命题 10.1 K, C 是 X 的子集且 K 紧，C 是闭集。若 $K \cap C$ 是空集，则存在 0 的邻域 V：

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$$

证明 考虑单点 $x \in K$。显然有 V_x:

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset \Rightarrow (x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset$$

K 是紧集，自然有有限覆盖:

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i})$$

并记 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$。则 $K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$

于是 $K + V$ 与 $C + V$ 不交。 □

推论 10.2 拓扑线性空间是 Hausdorff 空间。

命题 10.2 设 β 是局部基，则 $\forall U \in \beta$，存在 $V \in \beta$ 满足:

$$\bar{V} \subset U$$

证明 U^c 是闭集。则存在 $V : (U^c + V) \cap V = \emptyset$。

$$(U^c + V) \cap \bar{V} = \emptyset \Rightarrow (U^c) \cap \bar{V} = \emptyset, \bar{V} \subset U$$

平衡集和有界集

定义 10.2 B 是平衡集，若 $\alpha B \subset B$ 对于 $|\alpha| \leq 1$ 成立。

定理 10.3 每个 0 点的邻域包含一个包含 0 的平衡邻域。