





# Note for Homological Algebra

# 同调代数笔记

EDITED BY

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间: 2024-01-22 02:59









# Contents

1	链复形	3
	1.1 R-Mod 上的链复形	3
	1.2 链复形的运算	4
	1.3 长正合列	7
	1.4 链同伦	10
	1.5 映射锥和映射柱	11
	1.6 Abel 范畴拓展	14
2	·····································	15
	2.1 δ函子	15
	2.2 投射解消	17
	2.3 内射解消	21
	2.4 左导出与右导出函子	24
	2.4.1 左导出函子	24
	2.4.2 右导出函子	30
	2.5 伴随函子和左右正合性	31
	2.6 平衡性	35
	2.6.1 反变函子的导出函子	35
	2.6.2 平衡性	35
	2.6.3 Tor 函子的外积	38
3	Tor 函子和 Ext 函子	39
	3.1 Abel 群的 Tor 函子	39
	3.2 Tor 函子与平坦性	42
	3.3 性质较好的环的 Ext 函子	43
	3.4 Ext 函子与扩展性质	43
	3.5 逆向极限的导出函子	43
	3.6 泛系数定理	43
4	同调维数	44
5	·····································	45
6	。 - 群同调和上同调	46

CONTENTS 2

7 李代数同调和上同调 47

这是笔者于 2023 年本科四年级上学期学习 Weibel 同调代数导论的学习笔记。

# 导出函子

## $\S 2.1$ $\delta$ 函子

#### Definition 2.1.1: $\delta$ 函子

一个协变的  $\delta$  函子是指一族这样的加性函子  $T_n: A \to \mathcal{B}, n \geq 0$ , 协同一系列态射:

$$\delta_n: T_n(C) \to T_n(A)$$

这些态射对于每一个短正合列  $0 \to A \to B \to C \to 0$  都有定义。 这些态射还必须满足条件: 导引长正合列.

$$\cdots \to T_{n+1}(C) \to T_n(A) \to T_n(B) \to T_n(C) \to T_{n-1}(A)$$

且导引的长正合列是自然的。(详见蛇形引理处导引长正合列的自然性)。 特别的, $T_0$  是右正合函子。

根据定义,我们可以给出一个显然的例子:

#### Example 2.1.2

同调函子  $H_*$  是从链复形范畴到一个 abel 范畴的  $\delta$  函子。

类似的,我们也可定义反变函子版本的  $\delta$  函子,一般这种情况下我们记作  $T^n$ ,并且直接的例子是上同调函子  $H^*$ 。

下面这个视角或许是颇有教义的。

#### Proposition 2.1.1

设 S 是短正合列的范畴。则  $\delta_i$  是一个自然变换。其从函子 (将短正合列映射到  $T_i(C)$ ) 到函子 (将短正合列映射到  $T_{i-1}(A)$ )。

**Proof.** 来源于  $\delta$  函子导引长正合列的自然性。

#### Example 2.1.3

设 p 是一个整数, 函子  $T_0(A) = A/pA$  和函子:

$$T_1(A) = {}_p A := \{ a \in A : pa = 0 \}$$

2.1. δ函子

一起构成了一族  $\delta$  函子。根据蛇形引理:

这个交换图给出了正合列:

$$0 \rightarrow {}_pA \rightarrow {}_pB \rightarrow {}_pC \rightarrow A/pA \rightarrow B/pB \rightarrow C/pC \rightarrow 0$$

#### Definition 2.1.4

我们也对  $\delta$  函子定义态射。 $S \to T$  是  $\delta$  函子。我们指定一族自然变换  $S_n \to T_n$  使得其与  $\delta$  交换。

称一个协变的  $\delta$  函子是泛的,如果给定其他  $\delta$  函子 S 和自然变换  $f_0: S_0 \to T_0$ ,存在唯一的延拓  $\{f_n: S_n \to T_n\}$  使得为 S 到 T 的态射。

称一个反变的  $\delta$  函子是泛的,如果给定其他  $\delta$  函子 S 和自然变换  $f^0:T^0\to S^0$ ,存在唯一的延 拓  $\{f^n:T^n\to S^n\}$  使得为 T 到 S 的态射。

#### Example 2.1.5

同调函子和上同调函子都是泛的  $\delta$  函子。

证明将在第四节给出。

#### Proposition 2.1.2

若  $F: A \to \mathcal{B}$  是一个正合函子,则  $T_0 = F$  和  $T_n = 0, n \neq 0$  定义了一个泛  $\delta$  函子。(对于协变或者反变都是)。

Proof. 我们只证明协变的情况。

考虑自然变换  $f_0: S_0 \to T_0$ 。注意到  $T_n$  都是 0,因此唯一可能的延拓就是  $f_n=0$ 。我们要说明这个延拓确实是可以的。

对于  $0 \to A \to B \to C \to 0$  的正合列, 导引的长正合列只在下面的地方不平凡:

$$0 = T_1(C) \to T_0(A) \to T_0(B) \to T_0(C) \to 0$$

我们验证下面的交换图:

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow_{f_0(A)} \qquad \downarrow_{f_0(B)} \qquad \downarrow_{f_0(C)}$$

$$S_1(C) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} S_0(A) \longrightarrow S_0(B) \longrightarrow S_0(C) \longrightarrow 0$$

当然这个交换图是平凡交换的。

介绍  $\delta$  函子的原因是,导出函子就是一类重要的  $\delta$  函子。

### §2.2 投射解消

投射解消的英文是 Projective resolutions, 这里的翻译疑似来源于李文威的翻译。 我们将跳过许多关于投射模的介绍。读者可以在 Rotman 的书里面找到你想要的内容。

#### Proposition 2.2.1

投射模当且仅当是自由模的直和项。

#### Example 2.2.1

投射模并非都是自由模。显然  $\mathbb{Z}/6 = \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/2$ ,但是分解出来的两个模不是  $\mathbb{Z}/6$  自由模。

#### Definition 2.2.2

类似的,在某个 abelian 范畴中,满足满射提升性质的对象被称为投射对象。

投射对象并不是总都存在。

#### Proposition 2.2.2

有限 Abel 群的范畴不存在任何的投射对象。

**Proof.** 有限 Abel 群的结构定理说明我们只需要考虑  $\mathbb{Z}/(p^n\mathbb{Z})$  并非投射模。因为其不是  $\mathbb{Z}/(p^{n+1}\mathbb{Z})$  的直和项,但是是商模,所以其不是投射模。

#### Proposition 2.2.3

M 是投射模等价于  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\cdot)$  是正合函子。

#### Definition 2.2.3

称一个链复形 P 是链投射复形,若每个  $P_n$  都是投射的。不幸的是,其并不一定是一个投射对象。

#### Proposition 2.2.4

在链复形范畴下,一个链复形 P 是投射对象,当且仅当其是一个分裂正合的链投射复形。

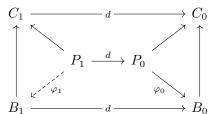
**Proof.** 假设 P 是投射对象,考虑 cone(id $_P$ )  $\rightarrow$  P[-1] 的满射 ( $P_{n-1} \oplus P_n \rightarrow P_{n-1}$ )。显然 P[-1] 也是一个投射对象。

所以 P[-1] 是映射锥的直和项,因而有  $P[-1] \oplus P$ 。注意到  $\operatorname{cone}(P)$  总是正合的,所以 P 也是正合的。 为了说明 P 还是分裂的,我们需要说明  $P_{n-1} \to P_n$  有同态  $\theta_n$ 。考虑  $P_{n-1}$  到  $\operatorname{cone}(P)$  有态射  $p \mapsto (p,\theta(p))$ 。于是  $d(p,\theta(p)) = (-dp,d\theta(p)-p)$ 。而  $-dp \mapsto (-dp,\theta(-dp))$ 。所以  $d(\theta(p))-p=-\theta(dp)$ .

同时作用 d,我们得到  $dp = d\theta(dp)$ 。所以我们给出了分裂的 P。

最后说明 P 的每个  $P_n$  都是投射模。注意到分裂正合,则  $P_n = B_n \oplus B'_n$ 。其中  $B_n = \ker d = d(P_n)$ 。我们只需要说明  $B_n$  和  $B'_n$  都是投射的。这一点本身只需要说明  $B_n$  是投射的。这一点可以用 P 是投射对象的泛性质保证。

反过来,假设 P 分裂正合且都是投射对象。我们给定  $B \to C \to 0$  和  $P \to C$ 。根据分裂正合,我们显然只需要考虑  $0 \to P_1 \to P_0 \to 0$  的情况。首先给出  $\tau_1: P_1 \to B_1$ 。则定义  $\tau_0 = d \circ \tau_1 \circ d^{-1}$ 。容易验证这是符合要求的。如图。



#### Proposition 2.2.5

如果 A 有足够多的投射对象,则 CH(A) 也有足够多的投射对象。

**Proof.** 对于每个复形 A, 我们对每个  $A_n$  找一个投射对象  $P_n$  和  $\epsilon_n: P_n \to A_n$  是满射。

定义  $T_n = P_{n+1} \oplus P_n, \tau_n : T_n \to A_n, \tau_n(p_{n+1}, p_n) = d\epsilon_{n+1}(p_{n+1}) + \epsilon_n(p_n)$ 。 容易验证这是满足要求的投射对象。

#### Definition 2.2.4

设  $M \in A$  的对象。一个 M 的左解消是一个复形  $P_i = 0, i < 0$ ,以及  $\epsilon: P_0 \to M$  使得复形:

$$\rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

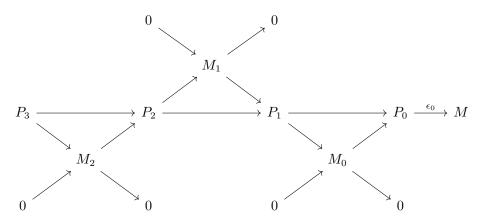
正合。若  $P_n$  都是投射,则称为投射解消。

自然的问题是,如果我们有足够多投射对象,那么投射解消是否一定存在?

#### Lemma 2.2.1

每个 M 作为 R 模都有投射解消。如果 Abelian 范畴有足够多投射对象,那么投射解消一定存在。

Proof.



如图。给定  $P_0$  和满射  $\epsilon_0$ 。设  $M_0=\ker\epsilon_0$ 。若已经给出  $M_{n-1}$ ,选择  $P_n$  满射到  $M_{n-1}$ , $M_n=\ker\epsilon_n$ , $d_n$ 则是  $P_n\to M_{n-1}\to P_{n-1}$  的复合。

#### Proposition 2.2.6

给出解消意味着给出  $\epsilon: P \to M$  (M 作为零度链复形)。

Proof. 平凡。

下面这个定理是导出函子的基石。所以是极其重要的。

#### Proposition 2.2.7: 比较定理

设  $P \to M$  是一个投射解消,  $f': M \to N$  是 A 中的态射。则对于任何一个解消  $Q \to N$ ,都存在一个链映射  $f: P \to Q$  提升 f'。

这个提升在链同伦等价的意义下是唯一的。

实际我们不需要是解消: 只需要链复形 P 的每个元都是投射对象即可。

**Proof.** 首先我们要构造  $f_n$ 。把 f' 看作  $f_{-1}$  是合理的。

假设  $f_i$  对于  $i \le n$  已经构造好了,即  $f_{i-1}d = df_i$ 。我们构造  $f_{n+1}$ 。考虑 P 和 Q 的 n 圈。如果 n = -1,则  $Z_{-1}(P) = M$ ,  $Z_{-1}(Q) = N$ .

构造好的  $f_n$  告诉我们从  $Z_n(P)$  到  $Z_n(Q)$  有一个映射  $f_n'$ 。因此我们可以画出交换图:

和

$$0 \longrightarrow Z_n(P) \stackrel{d}{\longrightarrow} P_n \longrightarrow P_{n-1}$$

$$f'_n \downarrow \qquad \qquad \downarrow f'_n \qquad \qquad \downarrow f_{n-1}$$

$$0 \longrightarrow Z(Q_n) \stackrel{d}{\longrightarrow} Q_m \longrightarrow Q_{n-1}$$

第一个图给出  $P_{n+1} \to Z_n(Q)$ 。并且  $Q_{n+1} \to Z_n(Q)$  是满射,所以投射给出  $f_{n+1}: P_{n+1} \to Q_{n+1}$ 。这就给出了我们想要的链映射。

接着我们说明给出的构造是唯一的(链同伦意义下)。这等于是说 0 映射的提升总是零伦的。设这个提升是 h。

构造  $s_n:P_n\to Q_{n+1}$ 。对于 n<0,自然定义  $s_n=0$ 。如果 n=0,则  $\eta h_0=0$ (根据最右边的交换)

$$P_{2} \longrightarrow P_{1} \longrightarrow P_{0} \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{h_{2}} \qquad \downarrow^{h_{1}} \searrow^{s_{0}} \stackrel{\downarrow^{l}}{\downarrow^{s_{0}}} \searrow^{s_{-1}} \downarrow^{0}$$

$$Q_{2} \longrightarrow Q_{1} \xrightarrow{d} Q_{0} \xrightarrow{\eta} N \longrightarrow 0$$

所以  $h_0$  把  $P_0$  送到  $\ker \eta$  即  $d(Q_1)$  中。注意到  $Q_1$  到  $d(Q_1)$  有自然的满射,则  $h_0$  提升为  $s_0: P_0 \to Q_1$  且满足  $ds_0 = h_0$ 。因为  $s_{-1} = 0$ ,所以也可以写为  $h_0 = ds_0 + s_{-1}d$ 。

归纳的做,我们现在假设  $s_i, i < n$  都已经被定义且使得  $s_i d + ds_{i-1} = h_i, i < n$ 。我们定义新的  $s_n$ 。用  $h_n - s_{n-1} d$ ,我们希望这个映射打到  $\ker d$  中。

实际上  $d(h_n-s_{n-1}d)=dh_n-ds_{n-1}d=dh_n-(h_{n-1}-s_{n-2}d)d=dh_n-h_{n-1}d=0$ 。所以我们的希望是成立的。因此  $h_n-s_{n-1}d$  可以被提升到  $s_n:P_n\to Q_{n+1}$  且满足  $h_n-s_{n-1}d=ds_n$ 。

下面的引理给出了一个很好的构造投射解消的办法。其名字来源于交换图的形状。

#### Lemma 2.2.2: 马蹄铁引理

假设我们有交换图:

$$P_{2}' \longrightarrow P_{1}' \longrightarrow P_{0}' \xrightarrow{\epsilon} A' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow i$$

$$A$$

$$\downarrow \pi$$

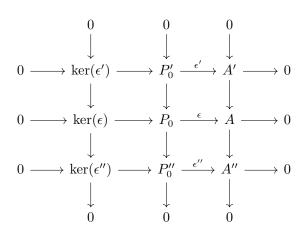
$$P_{2}'' \longrightarrow P_{1}'' \longrightarrow P_{0}'' \xrightarrow{\epsilon''} A'' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow 0$$

其中每一列(也就一列)都是正合的,每一行都是投射解消。设  $P_n=P_n'\oplus P_n''$ ,那么  $P_n$  可以给出 A 的投射解消,并且 i 和  $\pi$  提升为复形之间的映射,使得  $i_n$  和  $\pi_n$  是自然映入和自然投射。

**Proof.** 首先需要给出  $P_0$  到 A 的映射。根据泛性质,需要给出  $P_0'$  和  $P_0''$  到 A 的。其中  $P_0'$  的直接复合即可,而  $P_0''$  使用投射模性质即可。

接下来的图是交换的。



2.3. 内射解消 21

值得注意的是图中右边两列是交换的,因此蛇形引理给出左边列也是交换的,并且  $coker(\epsilon)$  是 0。由此  $P_0$ 满射到 A。这给出了第一步的满射加投射模。

接下来的步骤,我们需要给出  $P_n$  到  $P_{n-1}$  的微分。我们不妨考虑  $P_1$  到  $P_0$ :

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
\dots \longrightarrow P_1' \xrightarrow{d'} \ker \epsilon' \longrightarrow 0 \\
\downarrow \\
\ker \epsilon \\
\downarrow \\
\dots \longrightarrow P_1'' \xrightarrow{d''} \ker \epsilon'' \longrightarrow 0 \\
\downarrow \\
0$$

此图与最开始的图非常相似。我们无非是要给出  $P_1$  到  $\ker \epsilon$  的态射。给出这个态射的办法是一样的,但是我们要说明右边的  $0 \to \ker \epsilon' \to \ker \epsilon' \to \ker \epsilon'' \to 0$  是正合的。这可以直接看  $P_0$  的分解得到。

下面这个命题是书上的一个习题。我不太明白它的含义,仅作记录。

#### Proposition 2.2.8

存在  $\lambda_n: P''_n \to P'_{n-1}$  使得

$$d = \begin{bmatrix} d'' & \lambda \\ 0 & d'' \end{bmatrix} \quad , \quad d \begin{bmatrix} p' \\ p'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'(p') + \lambda(p'') \\ d''(p'') \end{bmatrix}$$

**Proof.** 这个命题是在说 d 的构造。实际上  $\lambda_n$  来源于  $P''_n$  到  $P_{n-1}$  的映射然后投射到  $P'_{n-1}$  上。这个映射能够组成 d 是很显然的。

## §2.3 内射解消

这节的概念几乎和上节的概念是对偶的。我们关键论述一些不一样的地方。同样,内射对象的定义我们也省略掉。

#### Proposition 2.3.1: Baer's Criterion

一个 R 模 E 是内射模,当且仅当对于任意的理想  $J \subset R$ , 映射  $J \to E$ (随意给出的) 都能延拓到 R 到 E 的映射。

**Proof.** 我们考虑  $0 \to A \to B$  和  $f: A \to E$ 。设  $\mathcal{S} = \{A' | A \subset A' \subset B, \alpha': A' \to E\}$ ,其中  $\alpha'$  延拓 f。 显然  $\mathcal{S}$  非空且有升链有上界,则  $\mathcal{S}$  有极大元:A''。设  $b \in B \setminus A''$ ,定义理想  $J = \{r \in R | rb \in A''\}$ 。定义 J 到 E 的映射是  $j \mapsto \alpha''(jb)$ ,于是我们把这个映射延拓到 R 上为  $\varphi$ 。

于是 
$$a'' + rb \mapsto \alpha''(a'') + \varphi(r)$$
. 这与  $A''$  极大矛盾! 所以  $A'' = B$  (b 找不到)。

#### Proposition 2.3.2

2.3. 内射解消 22

对于主理想整环 R, 其上的内射模与可除模等价。

我们接下来说明阿贝尔群范畴拥有足够多的内射对象。设 A 是一个 Abel 群,则定义  $I(A) = Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  是一个内射模(因为是若干  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  的积,而  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  是内射的。)(内射模的积也是内射模)

显然存在一个典范的映射  $e_A:A\to I(A)$ 。我们只要说明这是单射,即可给出任何 abel 群可以嵌入到一个内射模中。

#### Proposition 2.3.3

 $e_A$  是单射。

**Proof.** 如果  $a \in A$ ,则可以定义  $f: a\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, f(a) \neq 0$ 。把 f 延拓到 A 上,则给出了  $f': A \to \mathbb{Z}$ 。因此如果  $a \neq 0$ , $e_A(a)$  一定不是 0。

注意到内射对象的定义和投射对象定义对偶——这意味着在范畴  $\mathcal{A}^{op}$  中原本的内射对象就成为投射对象。

#### Lemma 2.3.1

I 是内射对象等价于函子  $Hom(\cdot, I)$  (反变函子) 是一个正合函子。

#### Definition 2.3.1: 内射解消

设 M 是 Abelian 范畴的一个对象。一个 M 的右解消是指一个上复形  $I^n$  满足  $I_i=0,i<0$  和一个映射  $M\to I^0$  满足:

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \dots$$

是一个正合列。如果  $I^n$  都是内射模,则称为内射解消。

#### Lemma 2.3.2

若一个 Abel 范畴有足够多的内射对象,则里面的每个元素都有一个内射解消。

#### Lemma 2.3.3

设  $N \to I$  是内射解消, $f': M \to N$  是一个态射。则对于 M 的任何一个内射解消,都存在  $F: E \to I$  提升 f'。这样的提升在同伦等价意义下唯一。

#### Proposition 2.3.4

I 是链复形范畴中的内射对象等价于该链复形的每个对象都是内射对象,且分裂正合。

**Proof.** 这里唯一要用到的是  $Ch(\mathcal{A}^{op}) \cong (Ch(A))^{op}$ 。

接下来的部分参考书重点给出了每个模都能嵌入为一个投射模的证明。我们只需要接受这个事实即可。重点在于:

2.3. 内射解消 23

#### Proposition 2.3.5

若一个加性函子  $R: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  右伴随于正合函子  $L: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  且 I 是一个 B 的内射对象,则 R(I) 是 A 的内射对象。

若一个加性函子  $L: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  左伴随于正合函子  $R: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  且 P 是一个 A 的投射对象,则 L(P) 是 B 的投射对象。

**Proof.** 比如考虑  $\operatorname{Hom}(\cdot,R(I))\cong\operatorname{Hom}(L(\cdot),I)$ 。右边的函子是两个正合函子的复合,所以还是正合的。因此 R(I) 是内射对象。

#### Lemma 2.3.4

遗忘函子  $\operatorname{Mod} R \to \operatorname{Ab}$  左伴随于函子  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ab}}(R,\cdot)$ 。

#### Corollary 2.3.1

如果 I 是一个内射交换群,则  $Hom_{Ab}(R,I)$  是一个内射 R 模。(遗忘函子是正合函子)

#### Proposition 2.3.6

设 M 是模,I(M) 是  $I_0 = \operatorname{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  的若干积,用  $\operatorname{Hom}_R(M, I_0)$  标号。从而有一个典范  $e_M: M \to I(M)$ 。

 $e_M$  是一个单射。由于  $I_0$  是内射模,所以这说明了 R 模范畴中有足够多的内射模。因而每个 R 模都有内射解消。

**Proof.**  $e_M$  把 m 映到  $(f(m))_{f \in \text{Hom}(M,I_0)}$ 。如果  $m \neq 0$  且  $f(m) = 0, \forall f \in \text{Hom}(M,I_0)$ ,我们断言 m = 0。否则,给定 Rm 是 M 的子模,显然可以良定义一个  $f': Rm \to I_0$ 。根据  $I_0$  的内射性质,可以得到  $f: M \to I_0$ 。所以  $e_M$  是一个单射。

### Example 2.3.2

层范畴有足够多的内射对象。

Proof.

最后这个命题我尚且不知道作用。仅记录于此。

#### Proposition 2.3.7

如果 A 完备且有足够多内射对象,则  $A^{\mathcal{I}}$  有足够多内射对象。如果 A 余完备且有足够都投射对象,则  $A^{\mathcal{I}}$  有足够多投射对象。上述的  $\mathcal{I}$  都是一个小范畴。

**Proof.** 考虑函子  $k: A^{\mathcal{I}} \to A$ ,  $F \mapsto F(k)$ 。这是一个正合函子。对于 A 中的对象 S, 定义  $k_*S$  是一个从  $\mathcal{I}$  到 A 的函子。

$$k_*S(i) = \prod_{\text{Hom}(i,k)} S$$

对于  $f: i \to j$ ,不难想到对应的态射。这里不再赘述。从而对于每个 S,我们定义了  $k_*S$ 。按照这个定义给出一个  $k_*: A \to A^S$ 。(这个函子的态射也是自然的)。

我们断言  $k_*$  和 k 是一对伴随函子。 $k_*$  右伴随于 k。

$$\operatorname{Hom}_A(k(F), B) \cong \operatorname{Hom}_{A^{\mathcal{I}}}(F, k_*B)$$

为此我们考虑 F 到  $k_*B$  的自然变换。即 F(i) 到  $k_*(B)(i) = \prod_{\mathrm{Hom}(i,k)} B$  的态射。假设我们已经给出 F(k) 到 B 的态射 g,那么 F(i) 到以  $f \in \mathrm{Hom}(i,k)$  为指标的 B 的态射定义为  $g \circ F(f)$ 。不难验证这给出了一个自然变换。

接着给定自然变换,我们自然可以得到 F(k) 到  $k_*(B)(k)$  的态射。复合上到  $id_k$  为指标的那个投射,于是给出了从 F(k) 到 B 的态射。

不难验证这两个对应给出了同构。并且同构是自然的。

所以作为右伴随  $k_*$ , 其保证了内射性。为了说明有足够多内射对象,为 F(k) 指定一个内射对象  $E_k$ . 则根据伴随,我们得到 F 到  $k_*E_k$  的自然变换。

我们断言:  $1.k_*E_k$  的积存在。2.F 到积的自然变换是一个单射。由此我们得到该范畴有足够多的内射对象。

第一个断言并不困难。我们只需要定义积作用在 k 上是若干 A 中对象的积即可。对于第二个,我们需要说明每个 F 到  $k_*E_k$  是单的。这与 F(k) 到  $E_k$  是单的保持一致。

### §2.4 左导出与右导出函子

#### §2.4.1 左导出函子

设  $F: A \to \mathcal{B}$  是两个 Abelian 范畴之间的一个右正合函子。如果 A 有足够多的投射对象,我们就可以构造 F 的左导出函子: $L_iF$ 。

#### Definition 2.4.1: 左导出函子

设  $A \in A$  的一个对象,给出 A 的一个投射解消: $P \to A$ ,定义 F 的左导出函子  $L_i(F)$  为:

$$L_i F(A) = H_i(F(P)) \tag{2.1}$$

态射稍后做定义。

注意到  $F(P_1) \to F(P_0) \to F(A) \to 0$  是正合的,所以  $L_0F(A) = F(A)$ 。

本小节我们的主要目的是说明  $L_iF$  生成了一组  $\delta$  函子。

#### Lemma 2.4.1: 导出函子良定

如果 Q 是 A 的另一个投射解消,则存在一个典范的同构:

$$L_i F(A) = H_i(F(P)) \cong H_i(F(Q)) \tag{2.2}$$

从而不同的投射解消的选择不影响导出函子的定义。因此导出函子是 well-defined。

**Proof.** 证明的关键是比较定理2.2.7。根据该结果,存在链映射  $f: P \to Q$  提升  $\mathrm{id}_A$ 。从而诱导了一个  $f_*: H_*(F(P)) \to H_*(F(Q))$  的映射。同理,倒过来也有  $g_*: H_*(F(P)) \to H_*(F(Q))$ 。

复合  $g_*f_*$ , 可以发现是  $\mathrm{id}_{P\to A}$  的提升。因此该复合就是  $\mathrm{id}$ 。反过来也对,所以有  $f_*$  是典范的同构。 ■

#### Corollary 2.4.1

若 A 是投射模,则  $L_iF(A)=0, i\geq 1$ ,

**Proof.** A 的投射解消可以全部写作 0。

#### Definition 2.4.2: F-ayclic

对象 Q 称为 F-ayclic 的,如果  $L_iF(Q)=0$  对所有  $i\neq 0$  都成立。显然投射模对于所有右正合函子都是 F-ayclic 的。

定义这个概念的好处是,我们可以用 F-ayclic 的对象的解消来计算左导出函子。

#### Lemma 2.4.2: 左导出函子的态射定义

设  $f: A \to A'$  是 A 中的态射,则存在一个自然的态射: $L_iF(f): L_iF(A) \to L_i(F)(A')$ 。

**Proof.** 使用比较定理2.2.7

#### Corollary 2.4.2

如果等同  $L_0(F)(A)$  和 F(A), 则  $L_0(F)(f) = F(f)$ 

Proof. 观察交换图

$$\begin{array}{c}
0 \\
\uparrow \\
P_1 \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0 \\
\downarrow^{F(f_0)} & \downarrow^{F(f)} \\
P'_1 \longrightarrow F(P'_0) \longrightarrow F(A') \longrightarrow 0 \\
\downarrow \\
0$$

此时  $L_0(F)(f)$  由  $F(f_0)$  诱导。简单的代数计算可以发现结论成立。

#### Theorem 2.4.1: 加性函子

每一个  $L_i(F)$  都是加性函子。

**Proof.** 显然  $L_i(F)(\mathrm{id}_A)$  也是恒同映射。

给定  $A' \to A \to A''$ ,和链复形映射  $\tilde{f}, \tilde{g}$  分别提升 f, g,显然  $\tilde{g}\tilde{f}$  也提升了 gf。这说明  $L_iF$  是真的函子。

#### Theorem 2.4.2: 正合函子保导出

 $U: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$  是正合函子。则

$$U(L_iF) = L_i(UF) \tag{2.3}$$

**Proof.** 对于  $P \to A, U(L_iF(A)) = U(H_i(F(P)))$ 。 $L_i(UF(A)) = H_i(U(F(P)))$ 。根据正合性,我们知道上述两个对象是同构的。(因为正合函子保核和余核)。

遗忘函子通常是正合的。而且遗忘掉 F 的结构有时候很容易简化导出函子的计算,所以我们常常使用这个公式计算一些导出函子。

接下来我们证明导出函子都是  $\delta$  函子。 $\delta$  函子中的正合列是我们研究 Ext, Tor 的重要工具。

#### Theorem 2.4.3

导出函子  $L_*F$  共同给出了一组同调  $\delta$  函子。

**Proof.** 回顾  $\delta$  函子的定义2.1.1。我们取一个 A 中的短正合列:

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \tag{2.4}$$

我们需要给出  $L_iF(A'') \to L_{i-1}F(A')$  的映射。

给出这个映射的办法是选择 A' 和 A'' 的投射解消 P' 和 P''。根据马蹄引理2.2.2我们得到 P 作为 A 的投射解消,并且  $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$  是链复形范畴中的短正合列。

作为加性函子,可以得到:

$$0 \to F(P_n) \to F(P_n) \to F(P_n'') \to 0 \tag{2.5}$$

是分裂正合的。首先从 F(0) = 0 可知上述列是一个链复形。其次可以把  $P_n$  写为  $P'_n \oplus P''_n$ 。注意到一个分裂正合意味着 identity map 是零伦的,所以上述短正合列也是分裂正合的。

所以

$$0 \to F(P') \to F(P) \to F(P'') \to 0 \tag{2.6}$$

是链复形的短正合列。导引的长正合列:

$$\dots \xrightarrow{\partial} L_i F(A') \longrightarrow L_i F(A) \longrightarrow L_i F(A'') \xrightarrow{\partial} L_{i-1} F(A') \dots$$
 (2.7)

从而我们给出了 $\partial$ 的定义。接下来我们说明 $\partial$ 是自然的。为此,我们给出:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{f'} \qquad \downarrow^{f} \qquad \downarrow^{f''}$$

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

并且给出 A', A'', B, B'' 的投射解消  $\epsilon', \epsilon'', \eta', \eta''$ . 使用马蹄引理可以得到  $\epsilon: P \to A$  和  $\eta: Q \to B$ 。

根据比较定理,我们得到提升  $F' \to Q'$  和  $F'' \to Q''$ 。如果我们可以证明存在一个  $F: P \to Q$  提升 f,并且给出交换图:

从而  $\partial$  的自然性就来源于导引长正合列的自然性。所以我们开始构造 F。

首先构造一个映射  $\gamma_m: P_n'' \to Q_n$ 。构造这个映射的目的是使得  $F_n$  为:

$$F_n = \begin{bmatrix} F'_n & \gamma \\ 0 & F''_n \end{bmatrix} : P'_n \oplus P''_n \to Q'_n \oplus Q''_n$$
 (2.8)

这个想法是自然的。原因是  $F_n$  本来就是从  $P'_n \to P''_n$  出发到  $Q'_n \oplus Q''_n$  的映射。因为要嵌入交换图,所以起码有上述的表达式。也就是说给出了上述交换图。

为了使得 F 是 f 的一个提升,我们需要研究  $\gamma_n$ 。观察  $\eta F_0 - f\epsilon$ 。其从  $P_0' \oplus P_0''$  到 B。因为  $F_0$  是 f 的提升,所以上述映射必须 vanish。

$$P'_0 \oplus P''_0 \xrightarrow{\epsilon} A$$

$$\downarrow_{F_0} \qquad \qquad f \downarrow$$

$$Q'_o \oplus Q''_0 \xrightarrow{\eta} B$$

这意味着  $P_0'$  和  $P_0''$  出发的映射都满足某种 vanish。从  $P_0'$  出发的是平凡的(因为  $P_0'$  总是满足是  $P_0$  的子模,从而交换性归结为 f' 被提升为  $F_0'$ 。

考量  $P_0''$ 。实际上我们要求存在:

$$i_B \eta' \gamma_0 = f \lambda_P - \lambda_Q F_0'' \tag{2.9}$$

其中  $\lambda_P$  和  $\lambda_Q$  是  $P_0$  和  $Q_0$  限制在  $P_0''$  和  $Q_0''$  得到的映射。

$$P_0'' \xrightarrow{\lambda_P} A$$

$$\downarrow^{\gamma \oplus F_n'} \qquad f \downarrow$$

$$Q_0' \oplus Q_0'' \xrightarrow{i_B \eta' \oplus \lambda_Q} B$$

另一方面,存在一个映射  $\beta:P_0''\to B'$  使得  $i_B\beta=f\lambda-\lambda F_0''$ 。这是因为我们可以计算:

$$\pi_B(f\lambda - \lambda F_0'') = f''\pi_A\lambda_P - \pi_B\lambda F_0'' = f''\epsilon'' - \eta''F_0'' = 0$$
(2.10)

从而  $\gamma_0$  的定义可以是任意一个  $\beta$  的提升:

$$Q'_0 \xrightarrow{\gamma_0} B' \longrightarrow 0$$

为了保证 F 是一个链复形映射。我们必须有 dF - Fd = 0。计算可知  $d'\gamma_n : P''_n \to Q'_{n-1}$  必须有:

$$d'\gamma_n := g_n = \gamma_{n-1}d'' - \lambda_n F_n' + F_n'' \lambda_n \tag{2.11}$$

于是假定我们已经对 i < n 定义了  $\gamma_i$ 。因此  $g_n$  存在且满足  $d'g_n = 0$ 。因为 Q' 正合,所以  $g_n$  分解为  $\beta: P''_n \to d(Q'_n)$ ,从而我们可以定义  $\gamma_n$  是  $Q'_n$  上  $\beta$  的提升。因此我们给出了  $\gamma_n$  的归纳定义,从而给出了 F 的定义,也就给出了该定理的证明。

下面这个技术被称为 Dimension Shifting。当我们无法给出投射解消的时候,这个定理告诉我们,给出一两个投射模也已经很厉害了!

#### Theorem 2.4.4: Dimension Shifting

若  $0 \to M_m \to P_m \cdots \to P_0 \to A \to 0$  是正合的,且  $P_i$  都是投射模(或者 F-ayclic),那么  $L_iF(A) = L_{i-m-1}F(M_m)$  对于  $i \ge m+2$  均成立。且  $L_{m+1}F(A)$  是  $F(M_m) \to F(P_m)$  的核。

**Proof.** 取  $M_m$  的一个投射解消 Q。注意到  $Q_0$  满射到 M 上,则  $Q_0$  可以定义一个到  $P_{m-1}$  的映射。我们断言这样连接出来的一个链复形是一个 A 的投射解消。

事实上只用验证  $P_{m-1}$  和  $Q_0$  处。在  $P_{m-1}$  处, $d(Q_0) = M_m$ ,所以  $P_{m-1}$  处仍然正合。在  $Q_0$  处,核仍然是  $Q_0$  到  $M_m$  的核,所以也是正合的。

所以可以用连出来的新解消计算 A 的导出。此时  $L_iF(A)$  在  $i \geq m+2$  时,为  $Q_{i-m-1}$  处的同调,这就时  $L_{i-m-1}F(M_m)$ 。当 i=m+1, $L_{m+1}F(A)$  是  $Q_0 \to P_{m-1}$  处的同调。此处  $Q_0$  的 ker 是  $F(Q_0) \to F(M_m) \to F(P_{m-1})$  的 ker,Image 为  $F(Q_1) \to F(Q_0)$  的像,根据解消可知为  $F(Q_0) \to F(M_m)$  的 ker。

做商,则可以得到  $L_{m+1}F(A)$  是  $F(M_m) \to F(P_m)$  的核。

如果上述的  $P_i$  都是 F-ayclic,我们只能依靠  $\delta$  函子的性质. 我们考虑 m=1 的情况。此时我们把条件的正合写为:

$$0 \to M_1 \to P_1 \to P_1/M_2 \to 0 \to \text{Im}(P_1) \to P_0 \to A \to 0$$
 (2.12)

这也是一个正合列。并且是由两个短正合列拼接而成的。因为  $P_0$  是 F-ayclic,所以有:

$$\delta_i: L_i F(A) \to L_{i-1} F(\operatorname{Im}(P_1)) \tag{2.13}$$

在  $i \ge 2$  的时候是一个同构。

同理:

$$\delta_i: L_i F(\operatorname{Im}(P_1)) \to L_{i-1} F(M_1) \tag{2.14}$$

在  $i \geq 2$  的时候是一个同构。

于是  $i \geq 3$  的时候, $L_iF(A) \cong L_i - 2F(M_1)$ 。而 i = 2 的时候, $L_iF(A) \cong L_{i-1}F(\operatorname{Im}(P_1))$ 。根据

$$0 \to L_1 F(P_1) \to L_0 F(M_2) \to L_0 F(P_1)$$
 (2.15)

是正合列,则  $L_2F(A)$  是  $F(M_1) \rightarrow F(P_1)$  的核。

#### Corollary 2.4.3

若  $P \to A$  是 F-ayclic 的解消,则  $L_iF(A) = H_i(F(P))$ 。

**Proof.** 用上述定理2.4.4的第二个结论。在  $P_{m+1}$  处截断在这个解消,用  $\ker(P_{m+1} \to P_m)$  代替  $P_{m+1}$ 。则  $L_{m+1}F(A)$  是  $F(\ker(P_{m+1} \to P_m)) \to F(P_m)$  的核。这就是  $H_{m+1}(F(P))$ .

#### Theorem 2.4.5: 导出函子的泛性

设 A 是有足够多投射对象的范畴。则对于任何一个右正合函子  $F:A\to B$ ,导出函子  $L_nF$  构成了一组泛- $\delta$  函子

**Proof.** 设  $T_*$  是一族同调  $\delta$  函子, $\varphi_0$  是  $T_0$  到 F 的自然变换。我们需要说明  $\varphi_0$  能够给出一个唯一的扩张  $\varphi: T_* \to L_*F$ 。

这类给出扩张的办法通常是归纳。假定我们已经给出了  $\varphi_i$ ,  $0 \le i < n$ , 接下来我们给出  $\varphi_n$ 。

给定 A 是 A 中的一个对象,给出正合列: $0 \to K \to P \to A \to 0$ ,P 是投射模。因为 P 投射,所以  $L_iF(P)=0$ ,从而有:

$$T_n(A) \longrightarrow T_{n-1}(K) \longrightarrow T_{n-1}(P)$$

$$\downarrow^{\varphi_{n-1}} \qquad \qquad \downarrow^{\varphi_{n-1}}$$

$$0 \longrightarrow L_nF(A) \longrightarrow L_{n-1}F(K) \longrightarrow L_{n-1}F(P)$$

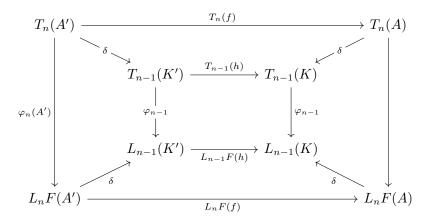
其中所有的行都是正合的。通过追图,可以得到一个从  $T_n(A)$  到  $L_nF(A)$  的  $\varphi_n$ , 使得与上述图表交换。我们建议读者在此处自行追图,以获得  $\varphi_n$  的信息。

我们需要说明以上述方式给出的  $\varphi_n$  是自然的。假设我们有:  $f:A'\to A$ ,和  $0\to K'\to P'\to A'\to 0$  的正合列。于是根据投射模的提升:

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow A' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

在下面的交换图中,每一个小的四边形都是交换的。我们要说明的是大长方体是交换的。



不难通过交换图得到:

$$\delta \circ L_n(f) \circ \varphi_n(A') = \delta \circ \varphi_n(A) \circ T_n(f) \tag{2.16}$$

因为  $\delta: L_n F(A) \to L_{n-1} K$  是一个单射(P 是投射模),所以可以约掉  $\delta$ 。因此  $\varphi$  确实是一个自然变换。最后我们需要说明  $\varphi_n$  和  $\delta_n$  交换。给定短正合列: $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$  和  $0 \to K'' \to P'' \to A'' \to 0$ ,P'' 是投射模。我们可以构造 f,g 使得下面的交换图:

$$0 \longrightarrow K'' \longrightarrow P'' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

$$\downarrow f \qquad \stackrel{|}{\cong} \downarrow$$

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

因此这诱导了一个交换图:

$$T_{n}(A'') \xrightarrow{\delta} T_{n-1}(K'') \xrightarrow{T(g)} T_{n-1}(A')$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$L_{n}F(A'') \xrightarrow{\delta} L_{n-1}F(K'') \xrightarrow{LF(g)} L_{n-1}F(A')$$

容易注意到上方的映射复合是  $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$  映射的  $\delta_n$ ,从而我们得到了想要的交换性。

Remark: 这里我们省略了为什么上述交换给出了我们想要的交换性。实际上读者可以自行思考什么叫  $\varphi_n$  和  $delta_n$  交换。因为我们最开始给出的  $\varphi_n$  只与特定的 K'' 交换,所以要做一般正合列的验证。

#### Proposition 2.4.1

同调函子  $H_*$  和上同调函子  $H^*$  都是泛  $\delta$  函子。

**Proof.** 复制上面的证明。为了给出单射,我们需要一个对于同调而言平凡的链复形:cone(A)。其余的情况都是一样的。

由这个命题出发,不难意识到下面关于泛性的命题。

#### Proposition 2.4.2: Tohoku

一个加性函子被称为 effaceable,若对于每个对象 A(A + 1),都存在态射  $u: A \to I$  使得 F(u) = 0。称 coeffacebale,若对于每个对象 A(A + 1),都存在态射  $u: P \to A$  使得 F(u) = 0。

若  $T_n$  都是 coeffacebale, 则导出函子  $T_*$  是泛的。若  $T^*$  都是 effaceable, 则导出函子  $T^*$  是泛的。

### §2.4.2 右导出函子

#### Definition 2.4.3: 右导出函子

设  $F: A \to \mathcal{B}$  是左正合的函子。如果 A 有足够多的内射对象,则可以构造 F 的右导出函子  $R^iF$ 。 选取 A 作为 A 的一个对象,写出内射解消  $A \to I$ 。定义:

$$R^{i}F(A) = H^{i}(F(I)) \tag{2.17}$$

因为  $0 \to F(A) \to F(I^0) \to F(I^1)$  是正合的,所以  $R^0F(A) = F(A)$ 。

注意到我们有左正合函子 F 给出了自然的右正合函子  $F^{op}: \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$ ,并且  $A^{op}$  投射对象足够多,则可以构造  $L_iF^{op}$ 。显然:

$$R^{i}F(A) = (L_{i}F^{op})^{op}(A) \tag{2.18}$$

从而我们所有关于左导出函子的证明可以挪用为右导出函子。

例如,右导出函子的结果不依赖于内射解消的选取, $R^*F$  总是泛  $\delta$  函子。若 I 是内射模,则  $R^iF(I)=0$ . 称对象 Q 是 F-ayclic 的,若  $R^iF(Q)$  总是 0. 当然右导出函子也可以用 F-ayclic 的解消计算。

关于右导出函子,我们要介绍一个重要的例子。

#### Definition 2.4.4: Ext 函子

对于每个 R 模 A, 函子  $F(B) = \operatorname{Hom}_{R}(A, B)$  是左正合的函子。其右导出函子被称为 Ext 群:

$$\operatorname{Ext}_{R}^{i}(A,B) = R^{i}\operatorname{Hom}_{R}(A,\cdot)(B) \tag{2.19}$$

特别的, $\operatorname{Ext}^0(A,B) = \operatorname{Hom}(A,B)$ 。

#### Proposition 2.4.3: 内射和 Ext

下面命题等价。

- 1.B 是内射模。
- $2.\text{Hom}(\cdot, B)$  是正合函子。
- $3.\operatorname{Ext}^{i}(A,B) = 0, \forall i \geq 0, \forall A.$
- $4.\mathrm{Ext}^1(A,B) = 0, \forall A.$

**Proof.** 1,2,3 的等价性是平凡的。3 显然推 4, 而 4 推 1 用到导出函子的性质. 对于正合列: $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ . 有:

$$0 \to \operatorname{Hom}(A'', B) \to \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A', B) \to \operatorname{Ext}^{1}(A'', B) = 0 \tag{2.20}$$

所以  $Hom(\cdot, B)$  保正合。

#### Proposition 2.4.4: 投射和 Ext

下面命题等价。

- 1.*A* 是投射模。
  - $2.\text{Hom}(A,\cdot)$  是正合函子。
  - $3.\operatorname{Ext}^{i}(A,B) = 0, \forall i \geq 0, \forall B.$
  - $4.\operatorname{Ext}^1(A, B) = 0, \forall B.$

Proof. 照搬前一个命题的证明。

#### Definition 2.4.5

X 是拓扑空间。全局截面函子  $\Gamma$  是从层范畴 Sheaves(X) 到 Ab 的函子:  $\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 。  $\Gamma$  右伴随于常层函子,所以  $\Gamma$  左正合。因此可以定义  $\Gamma$  的右导出函子 (称为层的上同调):

$$H^{i}(X,\mathcal{F}) = R^{i}\Gamma(\mathcal{F}) \tag{2.21}$$

#### Proposition 2.4.5

设 X 是一个拓扑空间。 $A_x$  是一族交换群,由  $x\in X$  所参数化。则  $x_*(A_x)$  和  $\mathcal{F}=\prod x_*(A_x)$  都是  $\Gamma$ -ayclic 的对象。即  $H^i(X,\mathcal{F})=0$ 。

Proof. 省略。我们将在后面详细描述层同态。

## §2.5 伴随函子和左右正合性

我们从一个构造左/右正合函子的 trick 开始。

#### Theorem 2.5.1: 左/右伴随函子是右/左正合函子

设 L 和 R 是互为伴随的可加函子,则 L 是右正合的,R 是左正合的。

**Proof.** 用 yoneda 嵌入。比如 R。考量 R 左正合可以考量 A, R(B) 是否左正合。此时可以用伴随的性质。

我们用一个非常经典的例子来说明这个定理的应用。

#### Proposition 2.5.1

设 B 是一个 R-S 双模,C 是右 S 模。则  $\mathrm{Hom}_S(B,C)$  自然是一个右 R 模。(fr)(b)=f(rb)。 于是  $\mathrm{Hom}_S(B,\cdot)$  构成了一个从 S 右模到 R 右模的函子。该函子是函子  $\cdot \otimes_R B$  的右伴随,即存在自然的  $\tau$ :

$$\tau: \operatorname{Hom}_{S}(A \otimes_{R} B, C) \cong \operatorname{Hom}_{R}(A, \operatorname{Hom}_{S}(B, C))$$
(2.22)

**Proof.** 这个命题非常经典(张量和 Hom 函子互为伴随)。我们给出 $\tau$ 的表达式,并邀请读者自行给出 $\tau$ 是自然的同构的证明。

给定  $f \in \text{Hom}(A \otimes B, C)$ ,我们定义  $\tau(f)$  作用在  $a \in A$  上得到映射: $\tau(f)(a) : b \mapsto f(a \times b)$ 。 根据上述结构,张量函子是右正合函子,所以有左导出:

#### Definition 2.5.1: Tor 函子

设 B 是一个左 R 模。所以  $T(A) = A \otimes_R B$  是从右 R 模范畴到 Ab 范畴的一个右正合函子。我们定义:

$$\operatorname{Tor}_{n}^{R}(A,B) = (L_{n}T)(A) \tag{2.23}$$

一些特殊情况,比如  $\mathrm{Tor}_0^R(A,B)=A\otimes B$ 。另外,若 A 是一个投射的右 R 模,则  $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0, \forall n>0, B$ .

我们也可以把上述定义拓宽到更多的情况。比如  $B \in R - S$  双模,我们可以把  $T(A) = A \otimes_R B$  看作从 R 右模到 S 右模的函子。这是右正合的函子,所以有左导出,所以  $Tor_n^R(A,B)$  是一个 S 右模。

显然遗忘函子是正合函子,所以在 S 右模的 Tor 和 Ab 中的并无二致,只是添加了一个 S 模结构。 我们也可以用  $A\otimes_R$  定义。这个函子也是右正合的,所以有左导出  $L_*$ 。我们会在之后的章节证明所谓的平衡性——无需考虑从 A 出发还是从 B 出发来得到 Tor(A,B)。

#### Example 2.5.2

包含函子 incl 是从层范畴到预层范畴的左正合函子。因为他是层化函子的右伴随。然而层化函子本身是一个正合函子。

#### Proposition 2.5.2

incl 函子的右导出: $R^i$ (incl) 将一个层  $\mathcal{F}$  映射为预层  $U \mapsto H^i(U, \mathcal{F}|_U)$ 。

所有关于层的证明我们将在第二章结束一起论述。

回忆余极限的定义,容易看出余极限是一个从 $A^I$ 到A的函子,如果A是一个完备范畴。

#### Proposition 2.5.3

余极限左伴随于  $\Delta$  函子。从而若 A 是 abelian 范畴的时候,余极限函子是右正合函子。

**Proof.** 这里面的  $\Delta$  函子指把对象  $A \in \mathcal{A}$  映射为函子  $\Delta(A) \in \mathcal{A}^I, \Delta(A)(i) = A$ . 从而考虑:

$$\tau: \operatorname{Hom}(\lim \mathcal{F}, B) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Delta(B))$$
 (2.24)

对于态射  $f: \varinjlim F \to B$ ,根据  $\varinjlim$  的定义,可以写出  $F(i) \to \varinjlim F \to B$ 。于是可以构造自然变换:  $f': \mathcal{F} \to \Delta(B)$ .

$$f'(i) =: F(i) \to \lim F \to B \tag{2.25}$$

容易验证这就是一个自然变换。

另外,从余极限的性质可以知道,根据  $\mathcal{F} \to \Delta(B)$  可以诱导态射  $\varinjlim \mathcal{F} \to \varinjlim \Delta(B) = B$ 。容易验证刚才描述的两个映射互逆,所以这是一个同构。自然性也是显然的。

#### Example 2.5.3

余极限函子并不一定是正合的。例如推出函子 (余极限函子的一种) 就并非正合函子。 原因是推出的计算中要商去 S 作为 (i(a), -j(a)) 生成的子模。做商这个操作无法保证单射。

#### Proposition 2.5.4

对于 Abelian 范畴 A 而言,下面命题等价。

- (1) 对于 A 中的任何对象族  $\{A_i\}$ , 直和  $\bigoplus_i A_i$  都存在。
- (2)A 余完备。

**Proof.** 只需要说明 (1) 可以推出 (2)。给定  $A: I \to A$ , 映射:

$$\bigoplus_{\varphi: i \to j} A_i \to \bigoplus_{i \in I} A_i : a_i[\varphi] \mapsto \varphi(a_i) - a_i$$
(2.26)

的余核 C 满足泛性质, 所以  $C = \lim_{i \in I} A_i$ .

因为 Ab 范畴,模范畴,层范畴,预层范畴都有直和,所以他们都是余完备的。

下面是两个关于同调函子与任意链复形的直和交换的推论。

#### Proposition 2.5.5

设一个余完备的 Abelian 范畴有足够多的投射对象,且  $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  是左伴随的。则对于任何  $\mathcal{A}$  中的对象族  $\{A_i\}$ :

$$L_*F(\bigoplus_{i\in I} A_i) \cong \bigoplus_{i\in I} L_*F(A_i)$$
(2.27)

**Proof.** 若  $P_i \to A_i$  投射解消,则  $\oplus P_i$  是  $\oplus A_i$  的投射解消。因此  $L_*F(\oplus A_i) = H_*(F(\oplus P_i)) = H_*(\oplus F(P_i)) = \oplus F(H_*(P_i)) = \oplus L_*F(A_i)$ 

#### Corollary 2.5.1

 $\operatorname{Tor}_*(A, \oplus B_i) = \oplus \operatorname{Tor}_*(A, B_i)$ 

#### Theorem 2.5.2: 滤过极限的正合性

R 模的滤过余极限是正合的。这里的正合是指把其看作从  $(mod - R)^I$  到 (mod - R) 的函子。

**Proof.** 我们用 A 表示模范畴且设 I 是一个滤过范畴。我们只需要说明滤过余极限是左正合的。

我们需要说明,若  $t: A \to B$  是单的 (每个  $t_i$  都是单射),则有  $\lim A \to \lim B$  是单射。

设  $a \in \underline{\lim} A$ ,其在  $\underline{\lim} B$  中 vanish。则 a 是某个  $a_i \in A_i$  在包含映射下的典范像。从而  $t_i(b_i) \in B_i$  在  $B_i$  的典范映射下于  $\underline{\lim} B$  中 vanish。所以存在一个  $\varphi: i \to j$  使得:

$$0 = \varphi(t_i(a_i)) = t_i(\varphi(a_i)) \in B_i \tag{2.28}$$

因为  $t_i$  单射,所以  $\varphi(a_i) = 0$ 。因此 a = 0。

上述性质并非对所有余完备的 abelian 范畴成立。事实上:

#### Definition 2.5.4: AB5

一个 Abelian 范畴称为是 AB5 的,如果是余完备并且滤过余极限正合。

下面的反例说明 AB5 对于 Abop 并不成立。

#### Example 2.5.5

 $Ab^{op}$  是余完备的,且  $Ab^{op}$  的余极限是 Ab 的极限——用积构造。我们需要给出一个单射  $t:A\to B$  并且说明  $\lim A\to \lim B$  不是  $Ab^{op}$  中的单射。(即 Ab 中的满射。)

即需要给出反例: 若  $t:A\to B$  是满射,则  $\varprojlim A\to \varprojlim B$  是满射。取  $I=\mathbb{Z}$ . 令  $A(i)=\mathbb{Z}$  且  $A(i)\to A(i+1)$  为  $\times 2$  的同态。令  $B(i)=\mathbb{Z}_3$  且  $B(i)\to B(i+1)$  也是乘 2.

于是从  $A \to B$  有自然同态且是满射。但是  $\lim A = 0$ ,  $\lim B \neq 0$ 。

#### Corollary 2.5.2

若 A 是左 R 模范畴(或者是满足 AB5 且有足够多投射对象的 Abelian 范畴), $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  是左伴随。则对于任何  $A: I \to \mathcal{A}$ ,I 是滤过范畴,有:

$$L_*F(\lim(A_i)) \cong \lim L_*F(A_i) \tag{2.29}$$

**Proof.** 取 A 的一个投射解消 P。( $A^I$  也拥有足够多的投射对象。见命题2.3.7)。则  $\varinjlim P$  是  $\varinjlim A$  的投射解消 (余极限是正合函子)。

所以:

$$L_*F(\lim A_i) = H_*(F(\lim P_i)) = H_*(\lim F(P_i)) = \lim H_*(F(P_i)) = \lim L_*F(A_i)$$
(2.30)

Corollary 2.5.3

对于任何滤过  $B: I \to R \mod$ , 和 A 右模:

$$\operatorname{Tor}_*(A, \lim_i B_i) \cong \lim_i \operatorname{Tor}_*(A, B_i)$$
 (2.31)

### §2.6 平衡性

#### §2.6.1 反变函子的导出函子

首先需要说明反变函子的导出。对于反变函子  $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 。F 左正合意味着对于  $A' \to A \to A'' \to 0$ , $0 \to F(A'') \to F(A) \to F(A')$  正合。所以  $F^{op}$  是协变的左正合函子。若  $\mathcal{A}$  有足够多投射对象,则  $\mathcal{A}^{op}$  有足够多内射对象。所以可以定义  $R^*F^{op}$ .

定义的方式是取 A 的内射解消(即正常范畴中的投射解消)P,计算  $H^i(F(P))$ ,从而获得我们想要的导出。

#### §2.6.2 平衡性

我们说明什么是平衡性。在之前的章节中,我们定义了 Ext 函子和 Tor 函子。然而细心的读者一定可以发现一个有趣的问题。

比如对于 Ext 函子。考虑  $Ext^*(A,B)$ 。注意到  $Hom(\cdot,B)$  和  $Hom(A,\cdot)$  都是左正合函子(只不过一个是反变的),我们同时可以用两个函子的右导出给出:

$$L_* \operatorname{Hom}(\cdot, B)(A), \quad L_* \operatorname{Hom}(A, \cdot)(B)$$
 (2.32)

自然的问题是,这两个模是否有自然的同构呢?

回答是肯定的。当然我们也有 Tor 函子类似的问题。即用 $\cdot \otimes B$  和  $A \otimes \cdot$  定义的 Tor 是否一致。回答同样是肯定的。这样的性质我们称为平衡性。

#### Theorem 2.6.1: Tor 函子的平衡性

$$L_n(A \otimes_R \cdot)(B) \cong L_n(\cdot \otimes_R B)(A) = \operatorname{Tor}_n^R(A, B)$$

**Proof.** 张量函子是右正合函子。选取 A 的投射解消  $\epsilon: P \to A, B$  的投射解消  $\eta: Q \to B$ . 把 A, B 看作只有度 0 不为 0 的链复形。我们构造三个张量链复形  $P \otimes Q, A \otimes Q, P \otimes B$ . 我们也用  $\epsilon$  和  $\eta$  表示从  $P \otimes Q$  到  $A \otimes Q$  和  $P \otimes B$  的映射。

下面的图展示了证明的思路。

$$P_0 \otimes B \xleftarrow{d} P_1 \otimes B \xleftarrow{d} P_2 \otimes B \longleftarrow \dots$$

使用接下来的 Ayclic Assembly 引理, 我们将说明:

$$A \otimes Q = \operatorname{Tot}(A \otimes Q) \stackrel{\epsilon \otimes Q}{\leftarrow} \operatorname{Tot}(P \otimes Q) \stackrel{P \otimes \eta}{\rightarrow} \operatorname{Tot}(P \otimes B) = P \otimes B \tag{2.33}$$

是拟同构,因此有同调的同构:

$$L_*(A \otimes_R \cdot)(B) \cong H_*(\operatorname{Tot}(P \otimes Q)) \cong L_*(\cdot \otimes_R B)(A)$$
 (2.34)

实际上,考虑由  $P \otimes Q$  和  $A \otimes Q[-1]$ (在列 p = -1 处)给出的双复形 C。我们有 Tot(C)[1] 是映射:

$$\epsilon \otimes Q : \text{Tot}(P \otimes Q) \to A \otimes Q$$
 (2.35)

的映射锥。从而为了说明  $\epsilon \otimes Q$  是拟同构,我们只需要说明 Tot(C) 是零调的。

因为每个  $\otimes_R Q_q$  都是正合函子 ( $Q_q$  是投射模,所以平坦),从而 C 的每行都是正合的。因此根据 Acylic Assembly 引理,可以知道 Tot(C) 是正合的。

同样, $P\otimes \eta$  的映射锥是 Tot(D)[1],其中 D 是由  $P\otimes Q$  和  $P\otimes B[-1]$  给出的双复形。因为  $P_p\otimes$  正合,所以 D 的每一列都是正合的,因此 Tot(D) 也是正合的。因此  $cone(P\otimes \eta)$  零调,从而  $P\otimes \eta$  是拟同构。

因此我们的关键是 Acyclic Assembly 引理。

#### Lemma 2.6.1: Acyclic Assembly 引理

设 C 是一个 R 右模的双复形。则:

- 1.  $Tot^{\Pi}(C)$  是零调的,若下面两个条件任意有一个成立:
  - (1)C 是上半平面的复形,且列都正合。
  - (2)C 是右半平面的复形,且行正合。
- 2. Tot<sup>⊕</sup>(C) 是零调的,若下面两个条件任意有一个成立:
  - (1)C 是上半平面复形,且行正合。
  - (2)C 是右半平面复形,且列正合。

换言之,乘积性的 Tot 需要使得有限的那个方向正合,直和性的 Tot 则是无限的那个方向正合。

Proof. 我们省略掉这个引理的证明。原因是对于读者而言,繁琐的追图阅读起来还没有自己做的快。 ■ 为了证明 Ext 对应的平衡性,我们需要引入 Hom 上链复形。

#### Definition 2.6.1: Hom Cochain Complex

给定链复形 P 和上链复形 I, 我们可以构造 Hom 上链复形  $Hom(P,I) = \{Hom(P_p,I^q)\}$ . 在定义 d 的时候,我们需要做一些正负号的 trick。

若  $f: P_p \to I^q$ , 则  $d^h f: P_{p+1} \to I^q$  定义为  $(d^h f)(p) = f(dp).d^v: P_p \to I^{q+1}$ :

$$(d^{v}f)(p) = (-1)^{p+q+1}d(fp)$$
(2.36)

我们需要对这里的符号变化做一些解释。事实上,给定两个链复形 C,D。如果我们逆转 D 的指标使之称为上链复形,则一个圈  $f \in \text{Hom}(C,D)$  由一列  $f_p:C_p \to D^{n-p}=D_{p-n}$  构成,并且  $f_pd=(-1)^n df_{p+1}$ . 这个等式的含义是从 C 到 D[-n] 的一个一般通过链映射。

而一个 n 边界 f 则是一列  $f_p:C_p\to D^{n-p}=D_{p-n}$  使得  $f:C\to D[-n]$  是零伦的。因此  $H^n\mathrm{Hom}(C,D)$  实际上是由 C 到 D[-n] 的链同伦等价生成的群。

同理,如果 X,Y 是上链复形,我们可以通过重指标 X 来给出  $\operatorname{Hom}(X,Y)$ . 同理一个 n 圈 f 等价于 X 到 Y[-n] 的链同伦, $H^n\operatorname{Hom}(X,Y)$  是 X 到 Y[-n] 的同伦等价类。

#### Theorem 2.6.2: Ext 的平衡性

对于每个 A, B 作为 R 模, 和所有的 n:

$$\operatorname{Ext}_{R}^{n}(A,B) \cong R^{n}\operatorname{Hom}(A,\cdot)(B) \cong R^{n}\operatorname{Hom}(\cdot,B)(A)$$
(2.37)

**Proof.** 回忆。由于 Hom(-,B) 是反变函子,所以计算时要选择的 A 的投射解消。于是选择 P 是 A 的 投射解消,I 是 B 的内射解消。用 Hom(P,I) 给出一个第一象限的双上复形。于是我们有从 Hom(A,I) 到 Hom(P,I) 和 Hom(P,B) 到 Hom(P,I) 的映射。

同样, $\operatorname{Hom}(A,I)$  到  $\operatorname{TotHom}(P,I)$  的映射锥是  $\operatorname{Hom}(P,I)$  以及加入  $\operatorname{Hom}(A,I)[-1]$ 。这是零调的 (Assembly 引理). 类似的有  $\operatorname{Hom}(P,B)$  到  $\operatorname{TotHom}(P,I)$  的映射锥也零调。

所以:

$$\operatorname{Hom}(A, I) \to \operatorname{Tot}(\operatorname{Hom}(P, I)) \to \operatorname{Hom}(P, B)$$
 (2.38)

都是拟同构。取上同调即可得到想要的结果。

最后我们引入一个概念。

#### Definition 2.6.2: 平衡函子

设 T 是一个 p 变量 (模) 的左正合函子。T 被称为右平衡的,若任何一个协变量被内射模替代得正合函子,且任何一个反变量被投射模替代得正合函子。

典范的例子是  $\operatorname{Hom}(A \otimes B, C)$ .

下面的命题是自然的.

#### Proposition 2.6.1

右平衡函子对于每个变量的导出函子同构。

同样,我们也有右正合函子的左平衡性,以及对应的左导出函子的同构性。

#### §2.6.3 Tor 函子的外积

设 R 是交换环,A,A',B,B' 是对应的模。选择  $P\to A$  和  $P'\to A'$  是投射解消。 $P''\to A\otimes A'$  是投射解消。则比较定理2.2.7给出了链映射: ${\rm Tot}(P\otimes P')\to P''$ .

这给出了一个自然的映射:

$$H_n(P \otimes B \otimes P' \otimes B') \cong H_n(P \otimes P' \otimes B \otimes B') \to H_n(p'' \otimes B \otimes B') = \operatorname{Tor}(A \otimes A', B \otimes B') \tag{2.39}$$

另一方面,对于每一对链复形 C,C',都存在自然的映射  $H_i(C)\otimes H_j(C')\to H_{i+j}\mathrm{Tot}(C\otimes C')$ 。这个映射将  $c\otimes c'$  映射为  $c\otimes c'\in C_i\otimes C'_i$ .

我们定义外积: $C = P \otimes B, C' = P' \otimes B'$ :

$$\operatorname{Tor}_{i}(A,B) \otimes \operatorname{Tor}_{j}(A',B') = H_{i}(P \otimes B) \otimes H_{j}(P' \otimes B') \to H_{i+j}(P \otimes B \otimes P' \otimes B') \tag{2.40}$$

这给出了外积:

$$\operatorname{Tor}_{i}(A,B) \otimes \operatorname{Tor}_{j}(A',B') \to \operatorname{Tor}_{i+j}(A \otimes A', B \otimes B')$$
 (2.41)

下面几条性质仅记录如下。

#### Proposition 2.6.2

- (1) 上述定义与 P,P' 的选取无关。并且对于所有 A,A',B,B' 有自然性。
  - (2) 该乘积是结合的。
  - (3) 外积与 Tor 给出的长正合列中的  $\delta$  交换。 $(0 \to B_0 \to B \to B_1 \to 0)$
  - (4)(内积) 设 A,B 是 R 代数。则  $Tor_*^R(A,B)$  是分次的 R 代数。

# Tor 函子和 Ext 函子

本章的目的是介绍 Tor 函子和 Ext 函子的诸多性质。他们是同调代数初等应用中的常客。

### §3.1 Abel 群的 Tor 函子

我们首先观察一个经典的 PID 上的模——Abel 群的 Tor 函子。其实,Tor 函子的名字就来源于其对 Abel 群的研究。

#### Example 3.1.1

对于 Abel 群 B 而言, $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p,B)=B/pB, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p,B)={}_pB=\{b\in B:pB=0\}.$  对于  $n\geq 2, \mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p,B)=0.$ 

上述结果可以这么看。取  $\mathbb{Z}/p$  的投射解消

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p \to 0 \tag{3.1}$$

从而我们计算的是:

$$0 \to B \stackrel{p}{\to} B \to 0 \tag{3.2}$$

的同调群。

特殊情况下, Tor 函子表现出 1 阶挠子群, 高阶为 0 的特点。实际上, 我们有下面的命题:

#### Proposition 3.1.1

对于两个 Abel 群 A,B, 我们有:

- (a) $\operatorname{Tor}_{1}^{\mathbb{Z}}(A,B)$  是一个挠群。
- (b) $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B)$  在  $n \geq 2$  的情况下为 0.

**Proof.** 证明依赖 Tor 函子与滤过余极限交换性。A 是其有限生成子群的滤过余极限, 所以  $\mathrm{Tor}_n(A,B)$  是  $\mathrm{Tor}_n(A_\alpha,B)$  的滤过余极限。

Abel 群的余极限总是他们直和的商子群。所以我们只需要证明对于有限生成子群上述命题成立即可。设  $A = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/p_1 \oplus \mathbb{Z}/p_2 \dots \mathbb{Z}/p_r$ 。因为  $\mathbb{Z}^m$  是投射的,所以只用考虑:

$$\operatorname{Tor}_n(A,B) = \operatorname{Tor}_n(\mathbb{Z}/p_1,B) \oplus \operatorname{Tor}_n(\mathbb{Z}/p_2,B) \oplus \dots \operatorname{Tor}_n(\mathbb{Z}_r,B)$$
(3.3)

于是根据之前的例子我们知道结论成立。

#### Proposition 3.1.2

 $\operatorname{Tor}_{1}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},B) \not\equiv B$  的挠子群。

**Proof.** 可以想见,  $\mathbb{Z}/p$  提取出 B 中挠性为 p 的元素。 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  是其有限子群的滤过极限, 并且每个优先子群都同构于某个  $\mathbb{Z}/p(p$  不一定是素数。)

$$\operatorname{Tor}_{*}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B) \cong \lim_{n \to \infty} \operatorname{Tor}_{1}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) \cong \lim_{n \to \infty} \{b \in B : pb = 0\}$$
(3.4)

#### Proposition 3.1.3

果 A 是一个无挠交换群,则  $\operatorname{Tor}_n(A,B)$  对于  $n\neq 0$  和 Abel 群 B 总是 0。

**Proof.** A 是有限生成子群的滤过余极限。然而 A 无挠意味着这些有限生成子群都是自由群。用 Tor 保滤过余极限即可。

如果 R 是交换环,则张量积有典范的同构,因此  $Tor_*(A,B) \cong Tor_*(B,A)$ .

#### Corollary 3.1.1

 $\operatorname{Tor}_{1}^{\mathbb{Z}}(A,-)=0$  等价于 A 无挠等价于  $\operatorname{Tor}_{1}^{\mathbb{Z}}(-,A)=0$ .

但是 Tor 函子并非对于所有环都有这么好的性质。比如下面的例子就说明在  $R = \mathbb{Z}/m$  的情况下可能失败:

#### Example 3.1.2

设  $R = \mathbb{Z}/m, A = \mathbb{Z}/d$ 。其中 d|m。从而  $A \in R$  模。

我们考虑 A 周期性的自由解消:

$$\cdots \to \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/d \tag{3.5}$$

其中从  $\mathbb{Z}/m$  到  $\mathbb{Z}/d$  的映射是商映射,而  $\mathbb{Z}/m$  各自之间交替出现 d 和 m/d。所以对于任何一个  $\mathbb{Z}/m$  模 B,我们都有:

$$\operatorname{Tor}_{n}^{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/d,B) = \begin{cases} B/dB, n = 0\\ \{b \in B : db = 0\}/(m/d)B, n \notin \mathfrak{B} \iff \{b \in B : (m/d)b = 0\}/dB, n \notin \mathfrak{B} \iff 0 \end{cases}$$
(3.6)

然而我们可以尝试对下面特殊的情况进行一些讨论。

#### Example 3.1.3

设 r 是 R 的一个左非零除子。即  $_rR=\{s\in R|rs=0\}$  是 0。对于每个 R 模 B,记  $_rB=\{b\in B:$ 

rb = 0}。用 R/rR 代替上述  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,用相同的计算办法可以算的:

$$\operatorname{Tor}_{0}(R/rR, B) = B/rB; \quad \operatorname{Tor}_{1}^{R}(R/rR, B) = {}_{r}B; \quad \operatorname{Tor}_{n}^{R}(R/rR, B) = 0, n \ge 0$$
 (3.7)

#### Proposition 3.1.4

若  $_rR \neq 0$ , 我们只能得到一个并非投射的解消:

$$0 \to {}_r R \to R \xrightarrow{r} R \to R/rR \to 0 \tag{3.8}$$

然而第二章我们介绍了 dimension shelfting 办法2.4.4。 所以我们对于  $n \geq 3$ , 存在:

$$\operatorname{Tor}_{n}^{R}(R/rR,B) \cong \operatorname{Tor}_{n-2}^{R}(rR,B) \tag{3.9}$$

其次,还有正合列:

$$0 \to \operatorname{Tor}_{2}^{R}(R/rR, B) \to {}_{r}R \otimes B \to {}_{r}B \to \operatorname{Tor}_{1}^{R}(R/rR, B) \to 0 \tag{3.10}$$

因为  $\operatorname{Tor}_2^R(R/rR,B)$  是  $0\to {}_rR\otimes B\to R\otimes B=B$  的核。而该映射的像就在  ${}_rB$  中,所以上述正合列中第一个和第二个已经确实成立。

考虑  $Tor_1(R/rR, B)$ 。根据导引长正合列:

$$0 \to \operatorname{Tor}_1(R/rR, B) \to rR \otimes B \to B \to B/rB \tag{3.11}$$

为了定义  $_rB \to \mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$ . 我们定义  $_rB \to rR \otimes B$ . 即  $b \mapsto r \otimes b$ 。则该映射实际上打进  $\mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$ .

若  $\sum (rr_i) \otimes b_i \in \text{Tor}_1(R/rR, B)$  且在 B 中像为  $\sum r(1 \otimes r_i b_i) = 0$ , 则  $_rB$  中  $\sum r_i b_i$  的像是  $\sum (rr_i) \otimes b_i$ 。于是我们定义了满射。

最后需要说明  $_rB$  处的正合。若  $r \otimes b = 0$ , 则存在  $r_i$  和  $b_i$  使得  $rr_i = 0, b = \sum r_i b_i$ .

#### Proposition 3.1.5

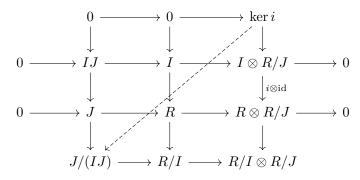
设 R 是交换整环, 分式域 F。则  $\operatorname{Tor}_1^R(F/R,B)$  是 B 的挠子群: $\{b \in B : (\exists r \neq 0)rb = 0\}$ 

#### Proposition 3.1.6

 $\operatorname{Tor}_1^R(R/I,R/J)\cong \frac{I\cap J}{IJ}$  对于任何右理想 I 和左理想 J 都成立。特别的, 对于双边理想 I:

$$Tor_1(R/I, R/I) \cong I/I^2 \tag{3.12}$$

Proof.



上图是蛇形引理1.3.1. 验证 I/(IJ) 和  $I\otimes R/J$  有典范同构可以得出第一行正合。第二行则典范正合。

最右边的列是计算  ${
m Tor}_1(R/I,R/J)$  的定义式。感觉 Dimesion Shifting, $\ker i$  是  ${
m Tor}_1(R/I,R/J)$ 。根据 snake 引理, $\ker i$  是  $J/(IJ)\to R/I$  的核: $\frac{I\cap J}{IJ}$ 。

### §3.2 Tor 函子与平坦性

我们在这一节着重研究 Tor 函子的 ayclic 对象——平坦对象。

#### Definition 3.2.1: 平坦模

称一个左 R 模是平坦模, 若函子  $\otimes_R B$  是正合函子。同样, 对于右 R 模, 也可以定义类似的平坦性。

如果 A 是投射的, 则  $Tor_n(A,B) = 0$ 。不难说明 A 此时是平坦的。因为投射模一定是平坦模。然而平坦模不一定是投射模。例如  $\mathbb Q$  作为交换群而言是平坦的, 但不是投射的。(为什么?)

#### Theorem 3.2.1

若  $S \in R$  中的乘法封闭集, 则  $S^{-1}R$  是一个平坦模。

这个定理当然很交换代数,不过影响不大,我们可以尝试证明:

**Proof.** 构造一个滤过范畴 I。对象是 S 中的元素, 态射  $\operatorname{Hom}_I(s_1, s_2) = \{s \in S : s_1 s = s_2\}$ 。定义函子  $F: I \to R$ 。 $F(s) = R, F(s_1 \to s_2)$  则定义为 R 上该态射自然给出的右乘法。

我们断言 F 的余极限  $\varinjlim F(s) \cong S^{-1}R$ 。从而因为  $S^{-1}R$  是平坦模的滤过余极限,所以其是平坦的。下面计算  $\varinjlim F$ 。首先定义  $F(s) \to S^{-1}R$  的映射为  $r \mapsto r/s$ . 这样交换图显然成立:

$$F(s_1) = R: r \xrightarrow{s} F(s_2) = R: rs$$
 
$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
 
$$S^{-1}R: r/s_1 = rs/(s_1s) = rs/s_2$$

如果存在一个新的 B 使得余极限中关系成立,我们直接定义  $S^{-1}R$  中的元素 r/s 到 B 的态射为 F(s) = R 中 r 在 B 中的像即可。这是唯一的定义方式!

#### Proposition 3.2.1: Tor 和平坦

面三个命题等价:

(1)B 是平坦模。

$$(2)\operatorname{Tor}_n^R(A,B) = 0, \forall n \neq 0$$

$$(3)\operatorname{Tor}_1^R(A,B) = 0$$

#### Corollary 3.2.1

 $0 \to A \to B \to C \to 0$  是正合列且 B, C 是平坦模, 则 A 平坦。

#### Proposition 3.2.2

R 是主理想整环,则 B 平坦等价于 B 无挠。

对于上述命题,我们给出一个反例。首先平坦显然无挠。但是无挠不一定平坦。设 k 是域且 R=k[x,y]。R 是经典的非主理想整环。设 I=(x,y)R。考虑 k=R/I 有投射解消:

$$0 \to R \to R^2 \to R \to k \tag{3.13}$$

其中第一个 R 到  $R^2$  为 [-y,x]. 而  $R^2$  到 R 为 (x,y). 从而  $\mathrm{Tor}_1^R(I,k)\cong\mathrm{Tor}_2^R(k,k)\cong k$ 。于是 I 不是平坦 模。

我们深入的研究一下平坦模。

#### Definition 3.2.2: Pontrjagin 对偶

左模 B 的 Pontrjagin 对偶模 B\* 是一个右模:

$$B^* := \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ab}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}); (fr)(b) = f(rb) \tag{3.14}$$

#### Proposition 3.2.3

面的命题等价。

- (1) B 平坦。
- (2) В\* 内射。
- $(3)I \otimes_R B \cong IB = \{x_1b_1 + \dots + x_nb_n \in B : x_i \in I, b_i \in B\}$  对于任何右理想 I 都成立。
- $(4)\operatorname{Tor}_{I}^{R}(R/I,B)=0$  对于任何右理想 I 都成立。
- §3.3 性质较好的环的 Ext 函子
- §3.4 Ext 函子与扩展性质
- §3.5 逆向极限的导出函子
- §3.6 泛系数定理

# Chapter 4

# 同调维数

# 谱序列

# Chapter 6

# 群同调和上同调

# Chapter 7

# 李代数同调和上同调