图　　论

(Graph Theory)

南开大学数学科学学院

目 录

第三章 图的着色与匹配 **1**

3.1 顶点着色与四色定理 1

3.2 色多项式 7

3.3 边着色 9

3.4 全着色 14

3.5 匹配(matching)（或对集） 17

3.6 独立集(independent set) 21

3.7 支配集(dominating set) 24

3.8 完美图 27

第三章　图的着色与匹配

§3.1　顶点着色与四色定理

一、顶点着色

某工厂生产n种化学制品$C_1, C_2, \cdots, C_n$，其中某些制品是互不相容的. 若它们相互接触，则会引起爆炸. 作为一种预防措施，该工厂必须把仓库分成若干隔间，以便把不相容的化学制品主藏在不同的隔间里. 试问这个仓库至少应该分成几个隔间？

若果构作简单无向图$G = (V, E)$，使得$V(G) = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，边$C_iC_j \in E(G)$当且仅当$C_i$与$C_j$互不相容，那么这个问题可以用图$G$的顶点着色来解决.

定义 3.1 (1) 对图$G = (V, E)$，称映射ϕ：$V \to \{1, 2, \cdots, k\}$为$G$的一个$k-$**顶点染色**；

(2) 图G的**顶点着色**(vertex coloring)是指没有两个相邻的顶点染为相同颜色的顶点染色；

(3) 图G的一个$k-$**顶点着色**是指用k种不同颜色$1, 2, \cdots, k$进行的顶点着色.

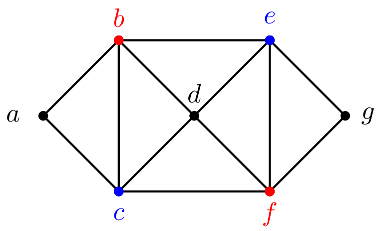
定义 3.2 图G的**色数**(chromatic number)是指着色这个图G的所有顶点所需要的最少颜色数，用$\chi(G)$表示.

若$\chi(G) = k$，则称G是k色的. 图G的色数也称为图G的顶点色数.

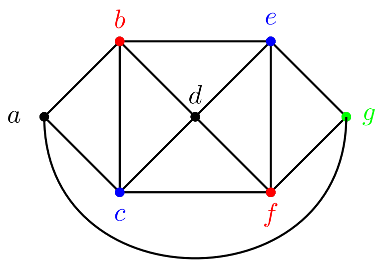
上述问题中，仓库的最小隔间数就是图G的色数$\chi(G)$.

例 3.1 求下列图的色数.

解：



$\chi(G) = 3$



$\chi(G) = 4$

从定义不难发现，

(1) 一个图是k可着色的当且仅当它的基础简单图是k可着色的，因此只限于讨论简单图的着色问题；

(2) 对于G的任何子图H，均有$\chi(H) \le \chi(G)$；

(3) 对n阶完全图K_n，有$\chi(K_n) = n$；对圈图C_n，有$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n\text{为偶数} \\ 3, & n\text{为奇数} \end{cases}$；

(4) 对简单图G，$\chi(G) = 1$当且仅当G是空图；

(5) 对简单图G，$\chi(G) = 2$当且仅当G是至少有一边的偶图（二部图）.

对于$k \ge 3$，k色图的特征至今尚未清楚，然而我们可以给出色数的一个上界.

定理 3.1 对任意图G，均有 $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

证明：对图G的顶点数n用归纳法.

当$n=1$时，由$\chi(G)=1, \Delta(G)=0$可知，满足$\chi(G)\le\Delta(G)+1$.

假设对顶点数小于n任意图均成立.

对$n\ge 2$的图G，取$u\in V(G)$，且令$d_G(u)=k(\le\Delta(G))$，$N_G(u)=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$.

设$G'=G-\{u\}$，则由归纳假设可知，$\chi(G')\le\Delta(G')+1$. 因此，$\chi(G')\le\Delta(G)+1$.

于是，存在G'的$(\Delta(G)+1)$着色ϕ. 其中，$\phi(v_i)=m_j(j\in\{1,2,\cdots,\Delta(G)+1\})$表示点$v_i$染第$m_j$种颜色.

从而，由$|\{\phi(v_1),\phi(v_2),\cdots,\phi(v_k)\}|\le k\le\Delta(G)<\Delta(G)+1$可知，

存在$t\in\{1,2,\cdots,\Delta(G)+1\}$，满足$m_t\notin\{\phi(v_1),\phi(v_2),\cdots,\phi(v_k)\}$.

令$\phi(u)=m_t$，则ϕ可被扩充为G的一个$\Delta(G)+1$着色，所以$\chi(G)\le\Delta(G)+1$.

布鲁克斯(R. L. Brooks)在1941年证明了“使$\chi(G)=\Delta(G)+1$的图有两类：或是完全图或是奇圈.”

定理 3.2 (Brooks) 如果简单连通图G既不是完全图又不是奇圈，则$\chi(G)\le\Delta(G)$.

证明：不失一般性，假定G是2连通图和$\Delta(G)$正则图，则由2正则3色图是奇圈可假定$\Delta(G)\ge 3$.

若G是3连通的，令v_n是G的一个顶点.

由G为正则图且不是完全图可知，在与v_n相邻的顶点中必存在两个点v_1与v_2，满足v_1与v_2不相邻.

而G为3连通图，因此$G-\{v_1,v_2\}$仍连通.

若G不是3连通的，即G的连通度为2，此时G存在点v_n，使$G-v_n$有割点且连通.

从而，$G-v_n$至少含有两个块.

由于G本身2连通无割点，所以$G-v_n$的每个仅含有一个割点的块中均有在G中与v_n相邻的点.

即，对$G-v_n$中仅含有一个割点的块H_1和H_2，存在$v_1\in H_1$和$v_2\in H_2$，使得v_1和v_2均与v_n相邻.

而由v_1和v_2分属不同的块可知，v_1和v_2在$G-v_n$中（也在G中）不相邻.

所以，由$d_G(v_n)=\Delta(G)\ge 3$可知，$G-v_n$连通.

以上表明在两种情况下都存在这样三个点v_1,v_2和v_n，使得

$G-\{v_1,v_2\}$连通，v_1与v_2不相邻，v_1和v_2均与v_n相邻.

令v_{n-1}为$V(G)-\{v_1,v_2,v_n\}$的点，且与v_n相邻的点，

v_{n-2}为$V(G)-\{v_1,v_2,v_{n-1},v_n\}$的点，且与$v_n$或者$v_{n-1}$相邻的点.

继续这个过程，可得G的顶点的一个排列$v_1,v_2,\cdots,v_n$满足每个v_i均与某个v_{i+l}相邻.

因v_i与v_{i+l}相邻，故对v_i染色时，与v_i相邻的已染色的点最多有$\Delta(G)-1$个，所以$\phi(v_i)\le\Delta(G)$.

又由与v_n相邻的点v_1和v_2可染同色可知，$\phi(v_i)\le\Delta(G)$. 因此，$\chi(G)\le\Delta(G)$.

下面给出求图的色数的一个算法.

定理 3.3 设u和v是图G中两个不相邻的顶点，则 $\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\ \chi(G\bullet uv)\}$.

其中，$G\bullet uv$表示把图G的两个不相邻的顶点u与v重合成一个新的顶点而得到的图.

证明：设$\chi(G)=k$，并考虑G的k着色.

假设顶点u与v染不同的颜色，则G的k着色也是$G+uv$的k着色. 因此，$\chi(G+uv)\le k=\chi(G)$.

现假设顶点u与v染相同的颜色，则G的一个k着色可得到$G\bullet uv$的一个k着色.

于是，有$\chi(G\bullet uv)\le k=\chi(G)$.

由于在G的k着色中，顶点u与v或者染为不同的颜色或者染为相同的颜色，所以

$$\chi(G) \geq \min\{\chi(G+uv),\ \chi(G \bullet uv)\}$$

而G是$G+uv$的子图，显然有$\chi(G) \leq \chi(G+uv)$.

设$\chi(G \bullet uv) = k_1$，并且顶点u和v重合所得的新顶点记为w，

则在$G \bullet uv$的k_1着色中，把分配给w的颜色分配给G中的u和v，即得到G的一个k_1着色.

于是，$\chi(G) \leq k_1 = \chi(G \bullet uv)$. 因此，

$$\chi(G) \leq \min\{\chi(G+uv),\ \chi(G \bullet uv)\}$$

综上所述，有$\chi(G) = \min\{\chi(G+uv),\ \chi(G \bullet uv)\}$.

定理3.3提供了求图的色数算法的基础.

求n阶简单图G的色数$\chi(G)$的算法：

(1) 如果G是K_n，则$\chi(G) = n$；如果G不是K_n，令$H = G$，并按(2)进行；

(2) 选取H的不相邻的一对不同顶点u, v，作图$H+uv$和$H \bullet uv$，并按(3)进行；

(3) 令H是由(2)得到的两个图，若H为k阶完全图，则$\chi(H) = k$；若H不是完全图，转入(2)进行.

当所得到的图都是完全图，算法结束.

由于图的加边不改变顶点个数，图的收缩减少顶点个数，所以经过有限步骤后，算法必定结束.

讨论图的着色问题时，研究一类特殊的图－临界图的性质是有帮助的. 实际上，定理3.1还可以用临界图给出证明.

定义 3.3 如果对G的每个真子图H均有$\chi(H) < \chi(G)$，则称图G为**临界图**(critical graph).

即，对$E(G)$的每一真子集S $(S \neq \varnothing)$，均有$\chi(G-S) < \chi(G)$.

如果G是色数为k的临界图，则称G为$k-$**临界图**.

显然，每个$k-$色图都包含一个$k-$临界子图. 且

1) 每个临界图均为简单连通图；

2) $1-$和$2-$临界图各只有一个，即K_1和K_2；

3) G为$3-$临界图当且仅当G为奇圈；

4) 每个完全图K_n为$n-$临界图；

5) 每个奇轮W_n (n 偶数)为$4-$临界图，但偶轮不是临界图.

定理 3.4 若G为$k-$临界图，则$\delta(G) \geq k-1$.

证明：反证法. 假设$\delta(G) < k-1$.

取$v \in V$使$d(v) = \delta(G)$，由G为$k-$临界图可知，$G-v$必是$(k-1)-$可着色的.

令$(V_1, V_2, \cdots, V_{k-1})$为$G-v$的$(k-1)-$着色，则由$d(v) = \delta(G) < k-1$可知，

v一定与某一V_j中所有顶点都不相邻.

从而，$(V_1, \cdots, V_j \cup \{v\}, \cdots, V_{k-1})$为$G$的$(k-1)-$着色，矛盾.

推论 3.1 若$\chi(G) = k$，则G中至少有k个度大于或等于$k-1$的顶点.

证明：令H为G的$k-$临界子图，则由定理3.4可知，对$\forall v \in V(H)$有$d_H(v) \geq \delta(H) \geq k-1$.

所以，$d_G(v) \geq d_H(v) \geq k-1$. 又因为$\chi(H)=k$，所以必有$|V(H)| \geq k$，得证.

利用推论3.1可证明定理3.1.

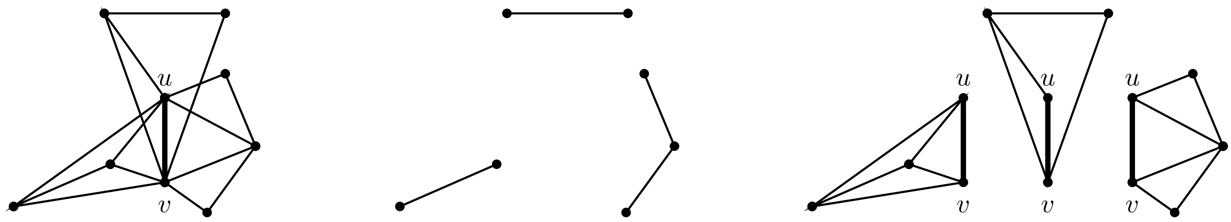
推论 3.2 对任意图G，均有 $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

证明：由推论3.1可知，G中存在度大于或等于$\chi(G)-1$的顶点v.

所以，$\Delta(G) \geq d_G(v) \geq \chi(G)-1$. 于是，$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

为了讨论临界图的性质，下面引入如下定义.

定义 3.4 设S是连通图G的一个顶点割，并设$G-S$的各个分支有顶点集$V_1, V_2, \cdots, V_n$，则称子图$G_i = G[V_i \cup S]$为G的S分支(见图3.1(c)). 当分别对$G_1, G_2, \cdots, G_n$着色时，若$\forall v \in S$，v在每个G_i的着色中都分别染同样的颜色，则称$G_1, G_2, \cdots, G_n$的这组着色在S上是一致的.



(a) G　　(b) $G-\{u,v\}$为非连通图. 即，$S=\{u,v\}$为顶点割.　　(c) G 的3个S分支

图 3.1

定义 3.5 设$G=(V,E)$是简单无向图，$T \subseteq V$，$T \neq \emptyset$.

若T中任意两个顶点都相邻(即$G[T]$为完全图)，则称T是图G的团.

定理 3.5 临界图的顶点割不是团.

证明：用反正法. 设G是k临界图. 假设G有一个顶点割S是团.

设G的S分支为$G_1, G_2, \cdots, G_n$，则由G为k临界图可知，每个G_i为$(k-1)$着色.

而由S为团可知，S中的各个顶点在G_i的任何$(k-1)$着色中必接受相异的颜色.

因此，存在$G_1, G_2, \cdots, G_n$的一组$(k-1)$着色，它们在S上一致.

这些着色合在一起形成G的一个$(k-1)$着色，导致矛盾.

注意：若S不是团，则虽然G_i为$(k-1)$着色图，但这些着色合在一起不一定形成G的一个$(k-1)$着色.

这是因为所有的$(k-1)$着色图G_i $(i=1,2,\cdots,n)$在S上不一定为一致，从而G可能成为k着色图.

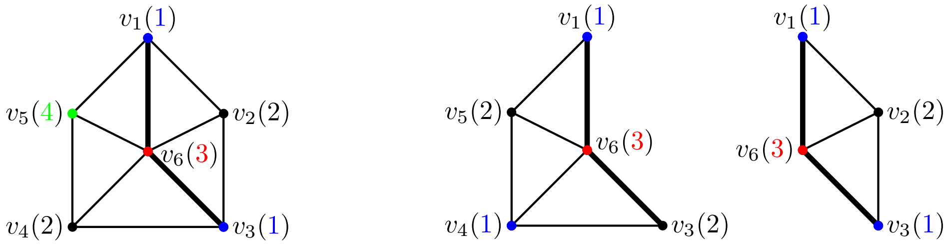
例如，我们知道每个奇轮W_n (n 偶数)为4−临界图.

对W_6的顶点割$S=\{v_1, v_3, v_6\}$ (见图3.2 (a))，有两个S的分支G_1, G_2 (见图3.2的(b)和(c)).

显然，$\chi(W_n)=4$，S不是团，且G_1, G_2均为3−着色.

但这些着色合在一起不能形成W_n的一个3−着色，只能形成一个4−着色.

其原因为3−着色图G_1, G_2在S上不能一致.



(a) $\chi(W_6) = 4$ (b) $\chi(G_1) = 3$ (c) $\chi(G_2) = 3$

图 3.2

推论 3.3 每个临界图都是块.

证明：若v是割点，则$\{v\}$是一个顶点割，它也是一个平凡的团.

因此，由定理3.5可知，临界图没有割点. 从而，每个临界图都是块.

定理3.5的另一推论是：若k临界图G有2顶点割$\{u, v\}$，则u和v不能相邻.

二、四色定理

定义 3.6 设G是无孤立顶点的连通平面图，且G有k个面$F_1, F_2, \cdots, F_k$(包含外部面).

按下列过程作G的对偶图G^*：

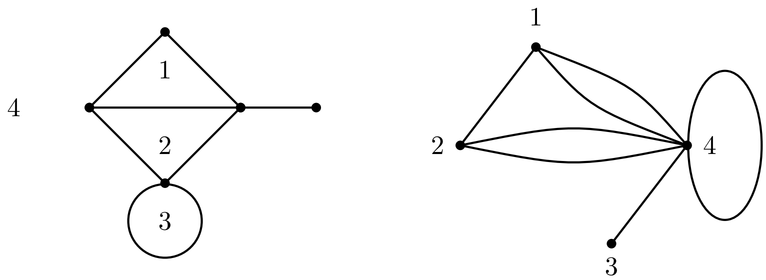
(1) G^*的每一个顶点v_i $(1 \le i \le k)$对应于G的面F_i；

(2) 点v_i与v_j相邻当且仅当存在F_i与F_j的公共边e，且边v_iv_j $(1 \le i, j \le k)$与e相交；

(3) 若G中边e只在一个面F_i上，则以v_i为顶点作环，且环v_iv_i与边e相交.

这样得到的图G^*称为图G的**对偶图**(dual graph). 若G^*与G同构，则称G是**自对偶的**(self dual).

例如，



G G^*

平面地图实际上是一种平面图. 它的面代表国家，边表示国家之间的边界，而点则是边界的交汇处. 对平面地图(假定地图里所有区域都是连通的)G的着色，就是使地图边界相邻的国家有不同的颜色. 显然，对地图G的面着色问题等价于对G的对偶图G^*的顶点进行着色的问题.

求平面图的色数等于求平面地图着色所需要的最少颜色数，使得没有两个相邻的区域指定为相同的颜色.

四色问题：连通简单平面图的色数不超过4.

1. 四色问题是英国学生盖思里(F. Guthrie) 在1852年提出的.

   当他给在英国地图着色时发现4种颜色是必要的. 于是他向他的哥哥提出了如下猜想：

   任何地图上的国家只需用4**种颜色来染，使得任何具有共同边界的两个国家颜色都不相同.**

2. 盖思里的哥哥把这一猜想转告了他的老师伦敦大学教授德•摩根(A. De Morgen). 德•摩根无法证明之后，又写信给爱尔兰数学家W. R. Hamilton. Hamilton同样无法证明.

3. 1878年，A. Cayley 向伦敦数学会成员正式宣布这一问题之后，形成了当今著名的四色猜想.
   四色猜想被列为与数论中的Fermat猜想、函数论中的Riemann假设相提并论的三大难题之一.

4. 1879年，肯普(Kempe)作出了这个猜想的第一个"证明".

5. 1890年，希伍德(P. J. Heawood)发现了肯普证明中的漏洞之后，提出了五色定理.
   (五色定理)：连通简单平面图G的色数为5.

6. 1976年，美国数学家肯尼思•阿佩尔(Kenneth Appel)和沃尔夫冈•黑肯(Wolfgang Haken)
   宣布了一个借助计算机的证明.
   但是，这个证明引起了广泛争论，原因是在他们的证明中利用电子计算机花了1260个机时.

定理 3.6 **(五色定理)**：连通简单平面图G的色数为5.

证明：对图的顶点数归纳.

当顶点数$n \le 5$时，显然成立.

假设$n-1$个顶点时成立，现证明n个顶点时成立.

由于G是平面图，则$\delta(G) \le 5$. 因此，G中至少存在一顶点v_0，其度数$d(v_0) \le 5$.

在图G中删去顶点v_0得到图G'，由归纳法可知G'的色数为5，然后将v_0再加回去，有两种情况：

(1) $d(v_0) < 5$或者$d(v_0) = 5$但和v_0邻接5个结点着的颜色数小于5，则v_0极易着色，只要选择与四周顶点不同的颜色着色即可.

(2) $d(v_0) = 5$且和v_0邻接的5个结点着的是5种颜色，为方便，我们称G'中所有红黄的顶点为红黄集，称G'中所有黑白色的顶点为黑白集.于是又有两种可能.

   (I) v_1和v_3属于红黄集导出的子图的两个不同的块中，将v_1所在的块的红黄色对调，并不影响G'的正常着色，然后将v_0着红色，即G正常着色.

   (II) v_1和v_3属于红黄集导出的子图的相同的块中，则v_1和v_3之间必有一条顶点属于红黄集的路P,P加上结点v_0可构成圈$C:\ v_0v_1pv_3v_0$，由于C的存在，将黑白集分为两个子集，一个在C内，另外一个位于C外，于是黑白集导出子图至少有两个不同的块，一个在C内，另外一个位于C外，于是问题转化为(I)的类型，对黑白集按1的方法处理，即得到图G的正常着色.

§3.2 色多项式

我们知道，图G的色数是对G的顶点进行着色所需要的最少的颜色的数目. 如果颜色的数目比色数大，自然可以对顶点着色，而且着色的方法不止一种. 这一节主要讨论着色的数目，为此需引入图的色多项式的概念. 图的色多项式实际上是计算图的着色数目的一个公式. 此概念是1912年Birkhoff 为攻克四色问题而提出的. 虽然用此方法没能解决四色问题，但图的色多项式对图的理论发展及其应用都具有很大的影响.

一、色多项式的概念与求法

定义 3.7 对图G的着色，用$f(G,k)$表示图G的k着色数目，即$f(G,k)$表示最多用k种颜色对G的顶点着色的方式数.

在计算着色数目时，我们总假定所给图是标号图，即图中若某特定点着不同颜色，则视为不同的着色法. 例如，对仅由一条边uv构成的图G，u着1色，v着2色与u着2色，v着1色被视为不同的两种2着色.

例 3.2 求三阶完全图K_3的着色数目$f(K_3,k)$.

解: 对K_3的任何一个指定的顶点，可以用k种颜色中的任何一种进行着色;

对K_3的第二个顶点，可以用$k-1$种颜色中的任何一种进行着色;

对K_3的第三个顶点，可以用$k-2$种颜色中的任何一种进行着色.

于是，有$f(K_3,k)=k(k-1)(k-2)$.

一般地，对n阶完全图K_n，有

$$f(K_n,k)=k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

由图G的色数定义$\chi(G)$和色多项式$f(G,k)$的定义可知，

(1) 若$\chi(G)>k$，则$f(G,k)=0$，即图G不存在k着色;

(2) $f(G,k)>0$的最小的k是G的色数，即$\chi(G)=\min\{k \mid f(G,k)\geq 1\}$;

(3) 若G为n阶空图，则$f(G,k)=k^n$;

(4) 若图G含有n个孤立点，则$f(G,k)=k^n f(G',k)$，其中G'是G去掉n个孤立点后所得的图;

(5) 若图G环或有重边，则去掉环并将重边用单边代替之后所得图的k着色数目与原图一样.

定义 3.8 把图G的一条边e删去并使它的两个端点重合，则称边e被收缩(contralted)，记作$G\cdot e$.

定理 3.7 若G是简单图，则对G的任何边e，都有

$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\cdot e,k) \tag{3.1}$$

证明: 设$e=uv$. 图$G-e$的所有k着色可分为两类:

一类为两个端点u和v染不同颜色的k着色，此类着色相当于G的着色，其数目有$f(G,k)$个;

另一类为两个端点u和v染同颜色的k着色，此类着色相当于$G\cdot e$的着色，其数目有$f(G\cdot e,k)$个. 所以,

$$\begin{aligned} f(G-e,k) &= f(G,k)+f(G\cdot e,k) \qquad (3.2)\\ \Longrightarrow \qquad f(G,k) &= f(G-e,k)-f(G\cdot e,k). \end{aligned}$$

推论 3.4 设$e=uv$是图G的一条边，并且$d(u)=1$，则$f(G,k)=(k-1)f(G-u,k)$.

证明：不失一般性，可假设G是简单图.

因为u是边e的端点，且$d(u)=1$，所以$G\cdot e=G-u$. 而u是$G-e$的孤立点.

因此，$f(G-e,k)=kf(G-u,k)$. 从而，由定理3.7可知，

$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\cdot e,k)=kf(G-u,k)-f(G-u,k)=(k-1)f(G-u,k)$$

由推论3.4可知，$f(G,k)$是一个关于k的多项式. 从而可称为图G的**色多项式**(chromatic polynomeals).

定理3.7提供了一个计算图的色多项式$f(G,k)$的递推方法.

(1) 若G的边数较少，可反复利用(3.1)式，即反复利用递推公式$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\cdot e,k)$，将$f(G,k)$表示为空图的色多项式的线性组合；

(2) 若边数较多可反复利用(3.2)式，即反复利用递推公式$f(G-e,k)=f(G,k)+f(G\cdot e,k)$，将$f(G,k)$表示为完全图的色多项式的线性组合.

二、色多项式的性质

定理 3.8 对任意n阶图G，$f(G,k)$都是关于k的整系数n次多项式，其首相为k^n，常数项为零.

并且$f(G,k)$的各项系数的符号正负交替.

证明：对边数$|E(G)|=\varepsilon$用数学归纳法. 不失一般性，可以假定G是简单图.

因为n个顶点的空图的色多项式为k^n，所以当$\varepsilon=0$时，定理成立.

假设定理对少于ε条边的图成立，并且设G是具有ε $(\varepsilon\geq 1)$条边的图.

设e为图G的任一边，则$|E(G-e)|=|E(G\cdot e)|=\varepsilon-1$，且$|V(G-e)|=n,\ |V(G\cdot e)|=n-1$.

所以，由归纳法假设可知，存在非负整数$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$和$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$，使得

$$f(G-e,k)=k^n-a_{n-1}k^{n-1}+a_{n-2}k^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_1k$$

以及

$$f(G\cdot e,k)=k^{n-1}-b_{n-2}k^{n-2}+b_{n-3}k^{n-3}-\cdots+(-1)^{n-2}b_1k$$

从而，由定理3.7可知，

$$\begin{aligned} f(G,k) &= f(G-e,k)-f(G\cdot e,k)\\ &= k^n-(a_{n-1}+1)k^{n-1}+(a_{n-2}+b_{n-2})k^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}(a_1+b_1)k \end{aligned}$$

于是，对于具有ε条边的图G也成立. 因此，由归纳法原理，结论成立.

定理3.8给出了色多项式的结构.

注意：1) 满足定理3.8条件的多项式未必是一个图的色多项式；

2) 同构的图有相同的色多项式，但反过来未必.

3) Read 的一个猜想(1968)：任何色多项式的导数的绝对值服从正态分布.

§3.3 边着色

定义 3.9 (1) 对图$G=(V,E)$，称映射$\psi:\ E\to\{1,2,\cdots,k\}$为$G$的一个$k-$**边染色**；

即，一个k—边染色可看作E的一个分划$(E_1,E_2,\cdots,E_k)$，其中E_i(可能为空)表示染有颜色i的E的子集.

(2) 无环图G的**边着色**是指没有两条相邻的边指定为同一种颜色；

(3) 图G的k**—边着色**是指用k种不同颜色$1,2,\cdots,k$进行的边着色.

定义 3.10 图G的**边色数**(edge chromatic number)是着色这个图G的所有边所需要的最少颜色数，记作$\chi'(G)$.

由定义可知，显然有$\chi'(G)\geq\Delta(G)$.

定理 3.9 对完全图K_n，有 $\chi'(K_n)=\begin{cases} n, & n\text{为奇数} \\ n-1, & n\text{为偶数}\end{cases}$

证明：当n为奇数的时候

首先，把K_n的n个点放在正n边形的顶点上，且n边形的每个边染n种不同的颜色，

其次，对正n边形内的每条边染与它平行的多边形的边相同的颜色(见图3.3(a))，则可得$\chi'(K_n)\leq n$.

而当n为奇数时，圈图C_n的色数为$\chi'(C_n)=3$，且在C_n中染同一种颜色的边的最大个数为$\dfrac{n-1}{2}$.

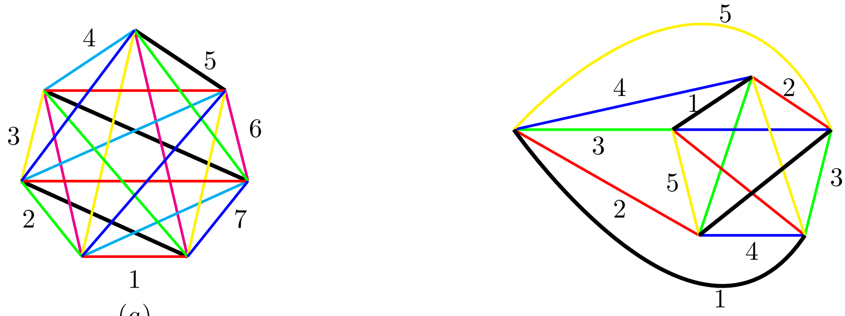
因此，由着色定义可知，在K_n中染同一种颜色的边的最大个数为$\dfrac{n-1}{2}$.

于是，由$|E(K_n)|=\dfrac{n(n-1)}{2}$可知，至少需要$\dfrac{|E(K_n)|}{(n-1)/2}=n$种颜色. 即，$\chi'(K_n)\geq n$. 所以，$\chi'(K_n)=n$.

当n为偶数时，令$E(K_n)=E(K_{n-1})\bigcup E(K_{1,n-1})$,则由$n-1$为奇数可知，$\chi'(K_{n-1})=n-1$.

而K_{n-1}中，与任意点相关联的边的个数为$n-2$，从而必有一种颜色没有染这$n-2$条边的任意边.

因此，用这些没有染的颜色来染$K_{1,n-1}$的每条边(见图3.3(b))，既可得$\chi'(K_n)=n-1$.



(a) (b)

图 3.3

下面讨论二部图的边色数.

定义 3.11 在图G中，若与顶点v关联的某一边染有颜色i，则称颜色i在顶点v上**表现**.

引理 3.1 设G为非奇圈的连通图，则G有一个2边染色，其两种颜色在度至少为2的每个顶点上都表现.

证明：显然可以假定G是非平凡的.

首先，假设G是Euler 图. 若G是偶圈，则G的2边着色具有所要求的性质.

否则，G有一个度至少为4的顶点v_0. 设$v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$是$G$的Euler 环游，并且置

$$E_1=\{e_i\mid i\ \text{是奇数}\}\quad\text{以及}\quad E_2=\{e_i\mid i\ \text{是偶数}\}.$$

则由G的每个顶点均为$v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$的内部顶点可知，$G$的2边染色$(E_1,E_2)$具有所要求的性质.

其次，若G不是Euler 图，则添加一个新的顶点v_0，并把它和G的每个奇点连接起来，构成一个新图G^*.

显然，G^*是Euler 图. 设$v_0e_1v_1\cdots e_{\varepsilon^*}v_0$是$G^*$的Euler 环游，并且置

$$E_1=\{e_i \mid i \text{ 是奇数}\} \quad \text{以及} \quad E_2=\{e_i \mid i \text{ 是偶数}\}.$$

易证G的2边染色$(E_1\cap E,E_2\cap E)$具有所要求的性质. 证毕.

给定G的k边染色$\mathscr{C}$后，我们用$c(v)$表示在v上表现的不同颜色的数目，显然恒有$c(v)\le d(v)$.

并且$\mathscr{C}$是k边着色当且仅当对G的所有顶点v，均有$c(v)=d(v)$.

假设另外存在一个k边染色$\mathscr{C}'$，它在v上表现的不同颜色的数目记为$c'(v)$.

若有$\sum\limits_{v\in V(G)}c'(v)>\sum\limits_{v\in V(G)}c(v)$，则称$k$边染色$\mathscr{C}'$是$\mathscr{C}$的一个**改进**.

一个**最优k边染色**是指不能改进的k边染色.

引理 3.2 设$\mathscr{C}=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$是$G$的一个最优$k$边染色. 若存在$G$中的一个顶点$u$和颜色$i$及$j$，使得$i$不在$u$上表现，而$j$在$u$上至少表现两次，则$G[E_i\cup E_j]$中包含$u$的那个分支是奇圈.

证明：令H为$G[E_i\cup E_j]$中包含u的分支. 假设H不是奇圈，那么由引理3.1可知，

H有一个2边染色，其两种颜色在H中度至少为2的各个顶点上同时表现.

以这种方式用颜色i和j重新给H的边染色，得到G的一个新的k边染色$\mathscr{C}'=(E_1',E_2',\cdots,E_k')$.

用$c'(v)$表示染色$\mathscr{C}'$在v上表现的不同颜色的数目，则有$c'(u)=c(u)+1$.

由于两种颜色i和j都在u上表现，并且还有$v\neq u$，使得$c'(v)\ge c(v)$.

所以，$\sum\limits_{v\in V(G)}c'(v)>\sum\limits_{v\in V(G)}c(v)$，这与$\mathscr{C}$的选择矛盾. 因此，$H$是奇圈.

定理 3.10 若G是二部图（偶图），则$\chi'(G)=\Delta(G)$. 特别地，$\chi'(K_{m,n})=\max\{m,n\}$.

证明：反正法. 设G是具有$\chi'(G)>\Delta(G)$的图，且设$\mathscr{C}=(E_1,E_2,\cdots,E_\Delta)$是一个最优$\Delta$边染色.

若设u是适合$c(u)<d(u)$的一个顶点，则显然u满足引理3.2的假设.

所以，G包含一个奇圈. 从而，G不是二部图，矛盾.

因此，$\chi'(G)\le\Delta(G)$. 于是，由$\chi'(G)\ge\Delta(G)$可知，$\chi'(G)=\Delta(G)$.

证法二： 由$\chi'(G)\ge\Delta(G)$可知，只需证明二部图G存在$\Delta(G)-$边着色. 对$|E(G)|=q$用数学归纳法.

当$q=1$时，显然图G存在$\Delta(G)(=1)-$边着色. 假设对所有小于q $(q\ge 2)$ 的图G存在$\Delta(G)-$边着色.

令G为具有q条边的二部图，且$e=uv$是G的边，则由归纳假设，图$G-e$存在$\Delta(G-e)-$边着色.

由于$d_{G-e}(u)<\Delta(G)$，且$d_{G-e}(v)<\Delta(G)$，故在顶点u和v上至少各有一种颜色未表现.

如果颜色a在顶点u和v上均未表现，则对边$e=uv$染颜色a可得G的$\Delta(G)-$边着色.

如果颜色a在顶点u上表现但在顶点v上未表现，而颜色b在顶点v上表现但在顶点u上未表现.

考虑$G-e$中由所有a色边和所有b色边导出的子图G'.

显然，G'的连通分支必为路或偶圈，而顶点u和v分别成为某一路的端点.

如果u和v为某一路的两个端点，那么由u和v分别属于二部图的不同部分集可知，

G'中的任意uv路为奇长路.

而任意奇长路的两个悬挂边的颜色必相同，因此由G'中u和v表现的颜色不同可知，uv路不存在.

从而，顶点u和v一定不属于同一条路. 即，顶点u和v属于G' 的不同的分支.

因此，只要把顶点u所在分支上的所有边的颜色a和b对调，就能实现颜色a在顶点u上也不表现.

此时，只要把边$e=uv$染颜色a，即可得图G的$\Delta(G)-$边着色. 证毕.

引理 3.3 设G是简单图，u与v是G中两个不相邻的顶点，ψ是G的一个k边着色.

若对该着色ψ，u,v以及与u相邻的点均至少缺少一种颜色，则$G+uv$也是k边着色.

证明：略（参考：图论及其应用，张先迪等箸，高等教育出版社，149页）

定理 3.11 若G是简单图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$或$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

证明：由$\chi'(G)\geq\Delta(G)$可知，只需证$\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$即可.

设G是具有m条边的简单图，对m用数学归纳法.

当$m=1$时，$\Delta(G)=1,\chi'(G)=1$，有$\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$.

设$m\geq 2$，取G中一条边$e=uv$，令$G'=G-e$，则由归纳假设$\chi'(G')\leq\Delta(G')+1$.

且由$\Delta(G')\leq\Delta(G)$可知，$\chi'(G')\leq\Delta(G)+1$.

所以存在G'的$\Delta(G)+1$边着色ψ，且对着色ψ，G'中的每个点至少缺少一种颜色.

于是由引理3.3可知，ψ是$G'+e=G$的$\Delta(G)+1$边着色.

从而，$\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$.

证法二： 由$\chi'(G)\geq\Delta(G)$可知，只需证明$\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$. 假设$\chi'(G)>\Delta(G)+1$.

设$\mathscr{C}=(E_1,E_2,\cdots,E_{\Delta(G)+1})$是$G$的一个最优$(\Delta(G)+1)-$边染色，并设$u$是适合$c(u)<d(u)$的顶点.

则存在i_0和i_1，使得i_0不在u上表现，而i_1至少在u上表现两次.

设uv_1具有颜色i_1，如图3.4 (a)所示.

则由$d(v_1)<\Delta(G)+1$可知，若某一颜色i_2不在v_1上表现，则必然在u上表现.

否则，用i_2给uv_1重新染色，可得$\mathscr{C}$的一个改进. 因此，存在一条边uv_2有颜色i_2.

又由$d(v_2)<\Delta(G)+1$可知，若某一颜色i_3不在v_2上表现，则必然在u上表现.

否则，用i_2给uv_1、用i_3给uv_2重新染色，又可得一个改进的$(\Delta(G)+1)-$边染色.

所以，存在一条边uv_3有颜色i_3.

继续这个过程，就构成一个顶点序列$v_1,v_2,\cdots$和颜色序列$i_1,i_2,\cdots$，使得

(1) 边uv_j有颜色i_j，且i_{j+1}不在v_j上表现；

(2) 由于u的度数是有限数，故存在一个最小整数l，使得某个$k<l$，有$i_{l+1}=i_k$.

这种状况在图3.4 (a)中描绘.

现在以如下方式给G重新染色.

对于$1\leq j\leq k-1$，用颜色i_{j+1}给uv_j重新染色，

产生一个新的$(\Delta(G)+1)-$边染色$\mathscr{C}'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_{\Delta(G)+1})$(见图3.4 (b)).

显然，$\forall v\in V(G)$，有$c'(v)\geq c(v)$. 于是，$\mathscr{C}'$也是G的最优$(\Delta(G)+1)-$边染色.

所以，有引理3.2可知，$G[E'_{i_0}\cup E'_{i_k}]$中包含u的分支H'是奇圈.

现在对于$k\leq j\leq l-1$，用颜色i_{j+1}给uv_j重新染色，用颜色i_k给uv_l重新染色，

得到一个$(\Delta(G)+1)-$边染色$\mathscr{C}''=(E''_1,E''_2,\cdots,E''_{\Delta(G)+1})$(见图3.4 (c)).

所以，$\forall v\in V(G)$，有$c''(v)\geq c(v)$，并且$G[E''_{i_0}\cup E''_{i_k}]$中包含$u$的分支$H''$是奇圈.

但是，由于v_k在H'中度为2，显然v_k在H''中度为1，这与H'是奇圈矛盾.

因此，$\chi'(G) \le \Delta(G)+1$. 从而，由$\chi'(G) \ge \Delta(G)+1$可知，$\chi'(G)=\Delta(G)$或$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

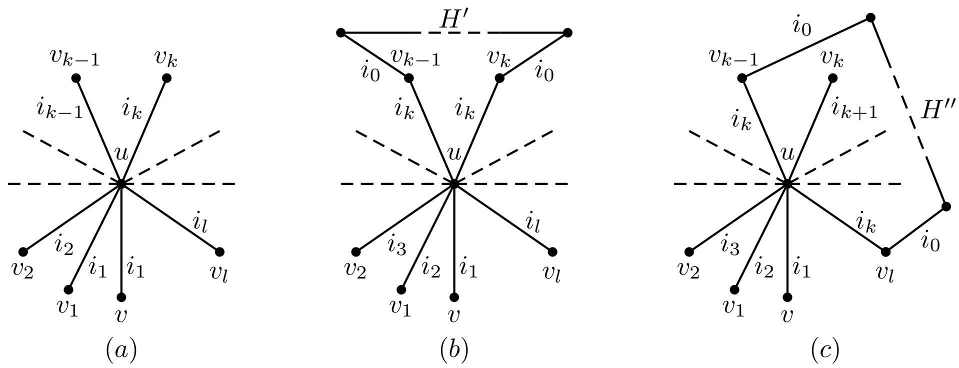


图 3.4

根据定理3.11，全部非空图集实际上能分成两类. 即，

如果$\chi'(G)=\Delta(G)$，则称G为**第一类图**；否则，称为**第二类图**.

例如，由定理3.10可知，二部图（偶图）G为第一类图.

定理3.11是Vizing(1963) 和Gupta(1966) 各自独立得出的一个重要定理. 实际上，Vizing 还证明了一个比定理3.11更一般的定理.

定理 3.12 （Vizing 定理）设无环图G中边的最大重数为μ，则$\chi'(G) \le \Delta(G)+\mu$.

证明：略.

推论 3.5 设G是$\Delta(G)>0$的简单图. 若G中恰有一个度为$\Delta(G)$的点，或G中恰有两个度为$\Delta(G)$的点并且这两个点相邻，则$\chi'(G)=\Delta(G)$.

证明：设图G恰有的两个度数为$\Delta(G)$的点为u和v，且u与v相邻.

令$G'=G-uv$，显然$\Delta(G')=\Delta(G)-1$，所以由定理3.11可知，

$$\chi'(G') \le \Delta(G')+1=(\Delta(G)-1)+1=\Delta(G).$$

从而，存在G'的$\Delta(G)$−边着色ψ.

而由$\forall w \in V(G')$, $d_{G'}(w) \le \Delta(G')=\Delta(G)-1$可知，在$\psi$下图$G'$的每个点均至少未表现一种颜色.

所以由引理3.3可知，ψ是$G'+uv=G$的$\Delta(G)$−边着色. 从而，$\chi'(G) \le \Delta(G)$.

于是由定理3.11可知，$\chi'(G)=\Delta(G)$.

当G中恰有一个度为$\Delta(G)$的点u时，可任取一个与u相邻的点v.

令$G'=G-uv$，则同理可推得$\chi'(G)=\Delta(G)$.

推论 3.6 设图$G=(V,E)$是简单图. 若$|V|=2n+1$，且$|E|>n\Delta(G)$，则$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

证明：由G为简单图和边着色的定义可知，对G的任一边着色，染同色（不相邻）的边数最多

$$\frac{|V|-1}{2}=\frac{(2n+1)-1}{2}=n.$$

所以，若$\chi'(G)=\Delta(G)$，则G的边数最多$n\Delta(G)$.

即，$|E| \le n\Delta(G)$，这与已知$|E|>n\Delta(G)$矛盾，故$\chi'(G)>\Delta(G)$.

于是，由Vizing定理可知，$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

注意：当$|V|=2n$时，没有使得$|E|>n\Delta(G)$的图. 如完全图K_{2n}，有$|E|=\binom{2n}{2}=n(2n-1)=n\Delta(K_{2n})$.

推论 3.7 设$G=(V,E)$是奇数阶$\Delta(G)-$正则简单图. 若$\Delta(G)>0$，则$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

证明：因为G是奇数阶简单图，所以可设$|V|=2n+1$.

又因为G是$\Delta(G)-$正则图，所以$\forall v\in V(G)$，均有$d(v)=\Delta(G)$. 从而，由度数之和等于边数的2倍可得

$$2|E|=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V}\Delta(G)=|V|\Delta(G)\quad\Longrightarrow\quad 2|E|=(2n+1)\Delta(G).$$

于是，由$\Delta(G)>0$可得

$$2|E|=2n\Delta(G)+\Delta(G)>2n\Delta(G)\quad\Longrightarrow\quad |E|>n\Delta(G).$$

故，由推论3.6可得，$\chi'(G)=\Delta(G)+1$.

§3.4 全着色

除各类顶点着色和边着色外，还有一类对点和边均着色的着色问题.

定义 3.12 映射

$$\pi:\ V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$$

称为图$G=(V,E)$的k全染色. 若还满足

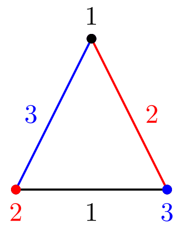
$$\begin{aligned}&(1)\quad \forall uv\in E(G),\ \pi(u)\neq\pi(v)\ (u\neq v),\ \pi(uv)\neq\pi(u),\ \pi(uv)\neq\pi(v)\\&(2)\quad \forall uv',uv''\in E(G),\ \pi(uv')\neq\pi(uv'')\ (uv'\neq uv'')\end{aligned}$$

则称染色π为k全着色.

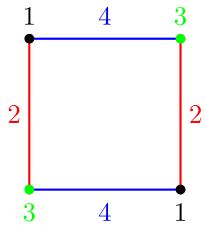
定义 3.13 图G的k全着色的最小k值称为G的全色数，记为$\chi_T(G)$.

例 3.3 求下列图的全色数.

解：



$\chi_T(G_1)=3$



$\chi_T(G_2)=4$

对简单图G的全着色，因为G中的任意点与其关联的边染不同的颜色，所以显然有

$$\chi_T(G)\geq\Delta(G)+1$$

从而，若可断定图G存在$\Delta(G)+1$全着色，则$\chi_T(G)=\Delta(G)+1$.

定理 3.13 对完全图K_n，有 $\chi_T(K_n)=\begin{cases}n, & n\text{为奇数}\\ n+1, & n\text{为偶数}\end{cases}$

分析：由$\Delta(K_n)=n-1$可知，

当n为奇数时，若能找出K_n的一个$\Delta(K_n)+1=n$全着色，便可断定$\chi_T(K_n)=n$；

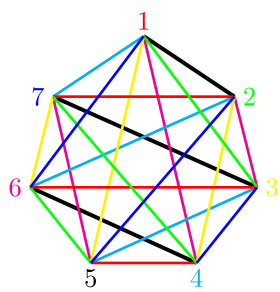
当n为偶数时，若能证明K_n不存在n全着色，并同时能构造出K_n的一个$(n+1)$全着色，则可断定$\chi_T(K_n)=n+1$.

证明：设n为奇数，不妨设$V(K_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_{2k}\}$，其中$2k+1=n$.

令$\pi:\ V(K_n)\cup E(K_n)\to\{0,1,2,\cdots,2k\}$，使得

$$\begin{aligned}\pi(v_0)&=\pi(v_1v_{2k})=\pi(v_2v_{2k-1})=\cdots=\pi(v_kv_{k+1})=0,\\\pi(v_1)&=\pi(v_2v_0)=\pi(v_3v_{2k})=\cdots=\pi(v_{k+1}v_{k+2})=1,\\&\cdots\cdots\cdots\\\pi(v_{2k})&=\pi(v_0v_{2k-1})=\pi(v_1v_{2k-2})=\cdots=\pi(v_{k-1}v_k)=2k,\end{aligned}$$

则π是K_n的n全着色(如右图)，所以$\chi_T(K_n)=n$.



n为奇数

设n为偶数，不妨设$V(K_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

若K_n存在n全着色，则由$|V(K_n)|=n$可知，对所有的$i=1,2,\cdots,n$，K_n中必有一个点v_i染i色.

从而，染i色的边最多$\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor=\dfrac{n-2}{2}$条.

因此，K_n最多有$\dfrac{n(n-2)}{2}$条边，而K_n的边数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$，矛盾.

于是，K_n不存在n全着色. 令

$$\pi:\ V(K_n)\cup E(K_n)\to\{0,1,2,\cdots,n\}$$

使$\pi(v_i)=i\ (i=1,2,\cdots,n)$; $\pi(v_iv_j)=i+j\ (\mod\ n+1)$，则易知$\pi$是$K_n$的$(n+1)$全着色.

因此，$\chi_T(K_n)=n+1$.

确定一个任意图的全着色是一个十分困难的问题. 1965年Behzad 提出如下猜想.

猜想：若G是一个简单图，则$\chi_T(G)\le\Delta(G)+2$.

以上猜想称为全着色猜想. 已知对一些特殊图类，如完全图、二部图、树、圈、最大度不为6, 7, 8的平面图等猜想成立，并且一些上界也被得到，但整个猜想至今还没有解决.

定理 3.14 设G是n阶简单图，若$\Delta(G)\ge n-2$，则$\chi_T(G)\le\Delta(G)+2$.

证明：若$\Delta(G)=n-1$，则G是满足$\Delta(G)=\Delta(K_n)$的K_n的子图.

所以，由定理3.13可知，$\chi_T(K_n)\le n+1=(n-1)+2=\Delta(G)+2$.

对$\Delta(G)=n-1$，设$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，显然$G$不是完全图. 扩充$G$为$G^*$，使得

$$V(G^*)=V(G)\cup\{v\},\quad E(G^*)=E(G)\cup\{vv_1,vv_2,\cdots,vv_n\}.$$

由G'的定义，$\Delta(G^*)=n=\Delta(G)+2$，并且度达到$n$的点仅有一个点，即$v$.

所以，由推论3.5可知，存在G^*边着色ψ.

对$\forall e\in E(G)$，令$\pi(e)=\psi(e)$. 对$i=1,2,\cdots,n$，令$\pi(v_i)=\psi(vv_i)$.

则可得到一个G的$\Delta(G^*)$全着色π.

因若边e_1与e_2相邻时，有$\psi(e_1)\ne\psi(e_2)$，所以$\pi(e_1)\ne\pi(e_2)$.

即，π将G中每个顶点赋不同颜色，故$i\ne j$时，$\pi(v_i)\ne\pi(v_j)$.

对$\forall v_iv_j\in E(G)$，因$\psi(v_iv)\ne\psi(v_iv_j)$，且$\psi(v_iv)=\pi(v_i)$，$\pi(v_iv_j)=\psi(v_iv_j)$，所以$\pi(v_i)\ne\pi(v_iv_j)$.

同理，$\pi(v_j)\ne\pi(v_iv_j)$.

因此，π为全着色. 从而，$\chi_T(K_n)\le\Delta(G^*)=\Delta(G)+2$.

定理 3.15 设G是简单图，则$\chi_T(G)\le\left\lfloor\dfrac{3}{2}\Delta(G)\right\rfloor+2$.

证明：若G是完全图或奇圈或$\Delta(G)\le 2$，则$\chi_T(G)\le\Delta(G)+2$.

下面设G既不是完全图又不是奇圈，并且$\Delta(G)\ge 3$.

此时，G存在$\Delta(G)$顶点着色$\phi:\ V(G)\to\{1,2,\cdots,\Delta(G)\}$和

$(\Delta(G)+1)$边着色$\psi:\ E(G)\to\{\Delta(G)+1,\Delta(G)+2,\cdots,2\Delta(G)\}$. 令

$$F=\left\{e\mid e\in E(G),\ \psi(e)\in\left\{\left\lfloor\frac{3\Delta(G)}{2}\right\rfloor+3,\left\lfloor\frac{3\Delta(G)}{2}\right\rfloor+4,\cdots,2\Delta(G)+1\right\}\right\}.$$

因为$(2\Delta(G)+1)-\left(\left\lfloor\dfrac{3\Delta(G)}{2}\right\rfloor+2\right)=\left\lceil\dfrac{\Delta(G)}{2}\right\rceil-1$，所以$G$的导出子图$G[F]$中每个点的度最多为$\left\lceil\dfrac{\Delta(G)}{2}\right\rceil-1$.

现用色集$\{1,2,\cdots,\Delta(G)\}$中的颜色对$G[F]$中的边重新着色，并使每边的着色和其两个端点的着色也不同.

因对$G[F]$中的边e着色时，$G[F]$中已着色的边最多为$\left\lceil\dfrac{\Delta(G)}{2}\right\rceil-2$条，再加上$e$的两个端点的着色，

所以，已使用的颜色最多为$\left\lceil\dfrac{\Delta(G)}{2}\right\rceil$种.

因此，存在G的$\left\lceil\dfrac{3\Delta(G)}{2}\right\rceil+2$着色，从而$\chi_T(G)\leq\left\lfloor\dfrac{3}{2}\Delta(G)\right\rfloor+2$.

很明显，对满足全着色猜想的简单图，其全色数仅有两个值，这与边着色类似.
若将全色数为$\Delta(G)+1$的简单图称为第一类图，全色数为$\Delta(G)+2$的简单图称为第二类图，则哪些图是第一类图，哪些图是第二类图也是正在研究而未完全解决的问题之一.

定理3.13表明，**当n为奇数时K_n是第一类图，当n为偶数时K_n是第二类图.**

§3.5 匹配(matching)（或对集）

匹配问题是运筹学的重要问题之一，也是图论的重要内容. 它在所谓“人员分配问题”和“最优分配问题”中有重要作用.

定义 3.14 设G是无环图，$M\subseteq E(G)$，$M\neq\emptyset$.

1) 如果M中任意两条边在G中均不相邻，则称M是图G的一个**匹配**.

2) 若对图G的任何匹配M'，均有$|M'|\leq|M|$，则称M为图G的**最大匹配**(greatest matching).

3) G中最大匹配中的边数称为**匹配数**(matching number)，记作$\alpha'(G)$.

定义 3.15 设M是图G的匹配，G中与M中的边关联的顶点称为$M-$**饱和点**(M-Saturates)，否则称为**非M饱和点.** 若图G的顶点都是M饱和点，则称M为G的**完美匹配**(perfect matching).

显然，当图G的顶点都是M饱和点时，G的顶点数一定是偶数，且边导出子图$G[M]$是G的$1-$正则生成子图，称为G的$1-$**因子**($1-$factor).

注意：(1) 完美匹配是最大匹配，反之未必；

例如，图3.5(a)中虚线所示为最大匹配，图3.5(b)中虚线所示为完美匹配.

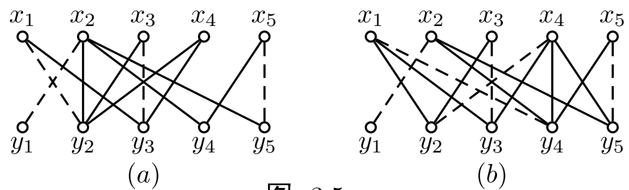


图 3.5

(2) 匹配的概念与边的方向无关，故只需讨论无向图；

(3) 顶点数为偶数的图不一定有完美匹配.

定义 3.16 对图G的匹配M，

若在G的一条路P中M和$E(G)-M$的边交替出现，则称P是G的M**交错路(M-alternating path)**.

若M交错路P的两个端点为非M饱和点，则称P为M**可增广路(M-augmenting path).**

例如，图3.6中虚线所示为匹配M，则G中与M中的边关联的顶点集合为$S=\{2,3,4,5,6,7,9,10\}$.

所以，1) $P_1=(2,4,5,7,9,10)$和$P_2=(1,2,4,5,7,8)$均为M交错路；

2) 由$\{2,4,5,7,9,10\}\subset S$可知，$P_1=(2,4,5,7,9,10)$是一条非可增广路，而由$P_2=(1,2,4,5,7,8)$的两个端点$1,8\notin S$可知，$P_2$为一条$M$可增广路.

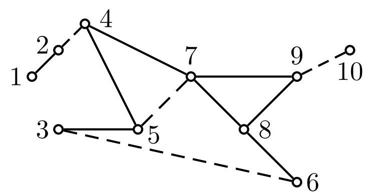


图 3.6

由定义可知，M可增广路P一定包含奇数条边，且P中不属于M的边比属于M中的边多一条.

为什么把起点与终点是非饱和点的M交错路称为M可增广路呢？

这是因为一旦在G中找到一条这样的M可增广路P，就可以对现有的匹配M进行调整，而得到另一个比M多一条边的匹配M'. 调整的方法如下：

把可增广路P上原来在匹配M上的边从匹配M中划去，而把P上原来不在M中的边加到M中去，得到G的一个边子集

$$M' = (M - E(P)) \cup (E(P) - M) = (M \cup E(P)) - (M \cap E(P)) = M \oplus E(P)$$

由于M可增广路P的起点与终点是M非饱和点，用上面方法调整后所得的M'仍是G的一个匹配，且

$$|M'| = |M \oplus E(P)| = |M| + 1.$$

定理 3.16 设M_1和M_2是图G的两个不同匹配，由$M_1 \oplus M_2$导出的G的边导出子图$G[M_1 \oplus M_2]$记作H，

则H的任意连通分支Q是下列情况之一：

(1) 边在M_1和M_2中交错出现的偶圈；

(2) 边在M_1和M_2中交错出现的路.

证明：由M_1和M_2为图G的两个不同匹配可知，H的任意顶点u至多与一条M_1的边关联，同时也至多与一条M_2的边关联，且至少与某一条边关联. 即，$1 \le \deg(u) \le 2$，由此可知$1 \le \Delta(H) \le 2$. 所以，对H的任意连通分支Q，有

(1) 当$\delta(Q) = \Delta(Q) = 1$时，$Q$中必含有1度点$u$，且必含另一个1度点$v$(奇度点有偶数个)，

所以Q是以u和v为端点的路(即为边$e = uv$).

(2) 当$\delta(Q) = 1,\ \Delta(Q) = 2$时，由(1)可知，$Q$是以两个1度点$u$和$v$为端点的路，而$Q$中内部点均为2度点；

(3) 当$\delta(Q) = \Delta(Q) = 2$时，$Q$中的每个顶点的度数均为2，因此$Q$为一个圈.

而由匹配的定义可知，H的任意两条邻接边一定分别属于不同的匹配M_1和M_2.

从而，每条路或者圈的边交错地属于M_1和M_2，且每个圈都是偶圈.

定理 3.17 M是图G的最大匹配，当且仅当G中不存在M可增广路.

证明：必要性：若存在M可增广路P，则$M' = M \oplus E(P)$是G的一个新匹配，且$|M'| = |M| + 1 > |M|$，

这与M为最大匹配的已知条件矛盾.

充分性：假设M不是图G的最大匹配，即存在一个匹配M'，使得$|M'| > |M|$.

作$H = G[M' \oplus M]$，则由定理3.16可知，H的任意连通分支Q必为交错偶圈或交错路.

而由$|M'| > |M|$可知，$|E(H) \cap M'| > |E(H) \cap M|$.

因此，H中必有一条起始于M'终止于M'的连通分支P.

于是，P为M可增广路，矛盾.

定义 3.17 对图G的任一顶点子集S，称G中与S的顶点邻接的所有点的集合为S的**邻集**(neighbour set)，

记作$N_G(S)$.

定理 3.18 **(Hall 定理, 1935)** 设G是具有二分划(V_1, V_2)的二部图，则G含有饱和V_1的每个顶点的匹配M的充要条件是，对$\forall S \subseteq V_1$，$|N(S)| \ge |S|$.

证明：必要性：对任意$S \subseteq V_1$，匹配M将S中的每个顶点与$N(S)$中的顶点配对，故$|N(S)| \ge |S|$.

充分性：任意$S \subseteq V_1$，有$|N(S)| \ge |S|$，可以按照下面方法做出饱和V_1的匹配M.

先做出一初始匹配M_1，若已饱和V_1，则定理得证.

否则V_1中至少有一个非饱和点u_1，检查以u_1为起点，终点在V_2中的交错路. 考虑以下两种情况：

(1) 不存在任何一条交错路可达到V_2的非饱和点. 这时从u_1开始的一切交错路的终点还是在V_1.

此时，必存在$A \subseteq V_1$，使$|N(A)| = |A| - 1 < |A|$，这与已知矛盾；

(2) 存在一条以u_1为起点，终点为V_2的非饱和点的交错路P，可见P是可增广路.

于是作新匹配$M_2 = M_1 \oplus E(P)$，显然M_2饱和u_1，且$|M_2| > |M_1|$.

因此，重复以上过程，可以找到饱和V_1的全部顶点的匹配M.

推论 3.8 具有二分划(V_1, V_2)的二部图G有完美匹配的充分必要条件是$|V_1| = |V_2|$，且对$\forall S \subseteq V_1$(或V_2)均有$|N(S)| \geq |S|$.

证明：由完美匹配定义以及上述定理易得结论.

推论 3.9 设G是$k(k > 0)$正则二部图，则G有完美匹配.

证明：由G为具有二分划(V_1, V_2)的$k(k > 0)$正则二部图可知，$k|V_1| = |E(G)| = k|V_2|$.

由于$k \neq 0$，所以$|V_1| = |V_2|$.

任取$S \subseteq V_1$，并用E_1, E_2分别表示G中与S和$N(S)$中的点关联的边集，则$E_1 \subseteq E_2$.

从而，$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$. 即，$|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq V_1$.

所以由Hall 定理可得，G有饱和V_1的匹配M. 而$|V_1| = |V_2|$，因此M是完美匹配.

推论 3.10 设G是具有二分划(V_1, V_2)的简单二部图，且$|V_1| = |V_2| = n$，若$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，则$G$有完美匹配.

证明：$\forall S \subseteq V_1$，若$|N(S)| < |S|$，则由G为简单二部图，且$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$可知，

$|S| > |N(S)| \geq \delta(G) \geq \frac{n}{2}$，且$V_2 - N(S) \neq \varnothing$.

令$u \in V_2 - N(S)$，则$N(u) \subseteq V_1 - S$. 即$\delta(G) \leq \deg(u) = |N(u)| \leq |V_1| - |S| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

这与$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$矛盾. 故$|N(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq V_1$. 从而，$G$有完美匹配.

定理 3.19 G有完美匹配$\Longleftrightarrow$ $O(G - S) \leq |S|, \forall S \subset V(G)$，其中，$O(G - S)$是$G - S$的奇阶连通分支数目.

证明：显然只需要对简单图证明这个定理即可.

必要性：设M是G的完美匹配，并设$S \subset V(G),\ G_1, G_2, \cdots, G_n$是$G - S$的奇阶连通分支.

所以存在$u_i \in V(G_i),\ v_i \in S$，使得$M' = \{u_i v_i | i = 1, 2, \cdots, n\} \subseteq M$.

于是，$O(G - S) = n = |\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}| \leq |S|$.

充分性：当$S = \varnothing$时，$O(G - \varnothing) = O(\varnothing) \leq 0$.

从而G只有偶分支且阶P为偶数，由此可得对$V(G)$的任意子集S，$O(G - S)$与$|S|$有相同的奇偶性.

对正偶数P进行归纳.

当$P = 2$时，如果G是P阶图使得对$V(G)$的任意子集S，$O(G - S) \leq |S|$，则$G \simeq K_2$，结论成立.

假设结论对任何小于P(P是不小于4的偶数)阶图成立，并设G是$P(\geq 4,\ 偶)$阶图.

设T是$V(G)$中满足定理条件的最大非空子集.

令$|T| = n$，并令$G_1, G_2, \cdots, G_n$是$G - T$的奇数阶分支，则有下列三个结论：

(1) $G - T$无偶阶分支. 事实上，设H是$G - T$的偶阶分支，$u \in V(H)$，则

$n + 1 \leq O(G - (T \cup \{u\})) \leq |T \cup \{u\}| = n + 1$，即$O(G - (T \cup \{u\})) = |T \cup \{u\}|$.

这与T为满足$O(G - S) \leq |S|$的最大非空子集矛盾.

(2) 任取$v_i \in G_i$，则$G_i - v_i$有完美匹配.

否则由归纳假设存在$S \subset V(G_i - v_i)$，使得$O((G_i - v_i) - S) > |S|$.

由于$O((G_i - v_i) - S)$与$|S|$有相同的奇偶性，所以$O((G_i - v_i) - S) \geq |S| + 2$. 于是

$$\begin{aligned} |T| + 1 + |S| &= |T \cup S \cup \{v_i\}| \geq O(G - (T \cup S \cup \{v_i\})) = O(G - T) - 1 + O((G_i - v_i) - S) \\ &\geq |T| + 1 + |S| \end{aligned}$$

即$O(G - (T \cup S \cup \{v_i\})) = |T \cup S \cup \{v_i\}| > |T|$，这样与$T$的选取矛盾.

(3) G含有匹配$M = \{u_iv_i | u_i \in T,\ v_i \in V(G_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$.

事实上，考虑二分划为(V_1, V_2)的二部图H，其中$V_1 = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_n)$, $V_2 = T$，

$V(G_i)$与T中点v在H中相邻当且仅当G含有从v到G_i中点的边.

于是(3)成立当且仅当H中有饱和V_1的匹配.

任取$A \subseteq V_1$，并令$B = N_H(A) \subseteq V_2$，则由于A中元素都是$G - B$的奇阶分支，有

$$|A| \leq O(G - B) \leq |B| = |N_H(A)|.$$

因此由Hall定理可知，(3)成立.

综合(1)(2)(3)，定理得证.

例 3.4 有n张纸牌，每张纸牌的正反两面都写上$1, 2, \cdots, n$的某一个数. 证明：如果每个数字都恰好出现两次，那么这些纸牌一定可以这样摊开，使朝上的面中$1, 2, \cdots, n$都出现.

解： 作一个二部图$G = (V_1, V_2, E)$，其中$V_1 = \{1, 2, \cdots, n\}$，$V_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$表示这$n$张纸牌，

i与v_i之间连接的边数等于数i在纸牌v_i中出现的次数.

这样得到的图G是一个2正则二部图，因此G中有完美匹配，设为$M = \{1v_{i_1}, 2v_{i_2}, \cdots, nv_{i_n}\}$，

则只要把纸牌v_{i_1}中的1朝上，v_{i_2}中的2朝上，$\cdots$，v_{i_n}中的n朝上，

这样摊开的纸牌就能使朝上面中$1, 2, \cdots, n$都出现.

§3.6 独立集(independent set)

上一节我们讨论了在图G中由互不相邻的边所构成的集合－匹配的定义和一些性质. 这一节主要讨论在图G中由互不相邻的顶点所构成的集合－独立集的定义和一些性质以及匹配与顶点集关系的一些性质.

定义 3.18 设$G=(V,E)$是简单无向图，$S\subseteq V$，$S\neq\emptyset$.

1) 若S中任何两个顶点都不相邻，则称S为图G的**独立集**；
若S是图G的独立集，但是任意增加一个顶点就破坏它的独立性，则称这个独立集S为**极大独立集**；
若不存在独立集S'，使$|S'|>|S|$，则称S为**最大独立集**；
称G的最大独立集的顶点数为G的**独立数**(independent number)，记作$\alpha(G)$.

2) $S(\subseteq V(G))$称G的**覆盖(点覆盖)**当且仅当G中的任一边至少有一端点在S中；
对覆盖S，若对任何$v\in S$，$S-\{v\}$都不是覆盖，则称S为**极小覆盖**(**极小点覆盖**)；
若G中不存在覆盖S'，使得$|S'|<|S|$，则称S为**最小覆盖(最小点覆盖)**；
称G的最小覆盖的顶点数为G的**覆盖数**，记作$\beta(G)$.

定义 3.19 设$G=(V,E)$是无向简单图，$M\subseteq E$，$M\neq\emptyset$.

1) 如果M中任意两条边在G中均不相邻，则称M是图G的一个**边独立集（匹配）**；
若对图G的任意边独立集M'，均有$|M'|\leq|M|$，则称M为图G的**最大边独立集（最大匹配）**；
称G的最大边独立集的边数为G的**边独立数**（或匹配数），记作$\alpha'(G)$.

2) 若G的每个顶点都与M中某条边关联，则称M为G的**边覆盖**(edge covering)；
如果G的任何异于M的边覆盖M'，均为$|M'|\geq|M|$，则称M为G的**最小边覆盖**；
称G的最小边覆盖的边数为G的**边覆盖数**，记作$\beta'(G)$.

注意： 1) G的极大独立集不是唯一的.
例如，图3.7中，$\{2,8\}$与$\{2,4,5,7\}$都是极大独立集. 同时$\{2,4,5,7\}$也是G的最大独立集，因而$\alpha(G)=4$.

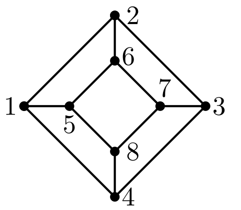


图 3.7

2) 边覆盖并不总是存在，G有边覆盖当且仅当$\delta(G)>0$.
3) 匹配的补集不一定是边覆盖，边覆盖的补集也不一定是匹配.

定理 3.20 设$G=(V,E)$是简单无向图，$S\subseteq V$，$S\neq\emptyset$，则S是G的独立集$\Longleftrightarrow$ $V-S$是G的覆盖.

证明： S是G的独立集$\Longleftrightarrow$ G中每条边的两端点都不同时属于S
$\Longleftrightarrow$ G中每条边至少有一端点在$V-S$中$\Longleftrightarrow$ $V-S$是G的覆盖.

推论 3.11 S是G的极大（最大）独立集$\Longleftrightarrow$ $V(G)-S$是G的极小（最小）覆盖.
由此可知，G的极小覆盖不是唯一的.

推论 3.12 若图G为无向简单图，则$\alpha(G)+\beta(G)=|V(G)|$.

证明：设S是G的最大独立集，K是G的最小覆盖，则$|S|=\alpha(G)$，$|K|=\beta(G)$，

且由定理3.20可知，$V(G)-S$是覆盖，$V(G)-K$是独立集.

所以，$|V(G)|-\alpha(G)=|V(G)-S|\geq\beta(G)\Rightarrow\alpha(G)+\beta(G)\leq|V(G)|$;

$|V(G)|-\beta(G)=|V(G)-K|\leq\alpha(G)\Rightarrow\alpha(G)+\beta(G)\geq|V(G)|$.

从而，$\alpha(G)+\beta(G)=|V(G)|$.

对图G中的任一覆盖K及任一匹配M，由覆盖定义可知，M中的每一条边至少有一个端点属于K，且匹配M中任二边无公共顶点，因此

$$|M|\leq|K|$$

特别地，对G的最大匹配M^*及最小覆盖K^*，有$|M^*|\leq|K^*|$.

定理 3.21 设M与K分别为G中的匹配与覆盖，如果$|M|=|K|$，则M为最大匹配，K为最小覆盖.

证明：设G的最大匹配和最小覆盖分别为M^*和K^*，则由$|M|\leq|M^*|\leq|K^*|\leq|K|$及$|M|=|K|$可知，

$|M|=|M^*|$, $|K|=|K^*|$. 因此，M为最大匹配，K为最小覆盖.

由此可知，对图G的匹配M和覆盖K，$|M|=|K|$ 当且仅当M为最大匹配，K为最小覆盖.

定理 3.22 对图G，若$\delta(G)>0$，则$\alpha'(G)+\beta'(G)=|V(G)|$.

证明：设M是G的最大匹配，U是M非饱和顶点集，则$|M|=\alpha'(G)$，且$|U|=|V(G)|-2|M|=|V(G)|-2\alpha'$.

又由$\delta(G)>0$可知，存在$|U|$条边的一个边集E'，它的每条边都和U的每个顶点相关联.

此时由M为最大匹配可知，$M\cup E'$为G的边覆盖，因而由$M\cap E'=\varnothing$可知，

$$\beta'\leq|M\cup E'|=|M|+|E'|=|M|+|U|=\alpha'+(|V(G)|-2\alpha')=|V(G)|-\alpha'.$$

即，$\alpha'+\beta'\leq|V(G)|$.

反之，设L是G的一个最小边覆盖，则$|L|=\beta'$. 令$H=G[L]$，并且设M^*是H的一个最大匹配.

用U记H中的M^*非饱和顶点集，则有$|U|=|V(G)|-2|M^*|$，且由M^*为最大匹配可知，$E(H[U])=\varnothing$.

因而由$\delta(G)>0$可知，H中与U内的顶点相关联的点均在$L-M^*$中.

因此，$|L|-|M^*|=|L-M^*|\geq|U|=|V(G)|-2|M^*|$，即$|M^*|+|L|\geq|V(G)|$.

又因为H是G的子图，所以M^*也是G的匹配，从而$\alpha'\geq|M^*|$.

于是，由$|L|=\beta'$可知，$\alpha'+\beta'\geq|M^*|+|L|\geq|V(G)|$.

故，$\alpha'+\beta'=|V(G)|$.

定理 3.23 （König 定理）对二部图G，有$\alpha'(G)=\beta(G)$.

证明：设二部图G的$2-$分划为(X,Y)，并设G的最大匹配为M，则$|M|=\alpha'(G)$.

用U表示X中的M非饱和顶点的集合，用Z表示由M交错路连接到U中顶点的所有点的集合.

令$S=Z\cap X$, $T=Z\cap Y$，则有T中的每一个顶点都是$M-$饱和的，并且$T=N(S)$.

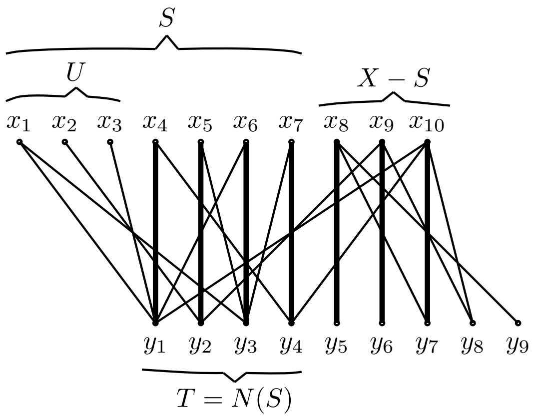
令$K=(X-S)\cup T$（见图3.8），则G中的每一条边至少有一端在K中.

否则G中存在一条边，其两端点分别在S与$Y-T$中，这与$T=N(S)$相矛盾.

于是，K为G的覆盖，并且$|K|=|X-S|+|T|=|X-S|+|S-U|=|X|-|U|=|M|$.

所以，由定理3.21可知，K为G的最小覆盖，即$|K| = \beta(G)$.

于是，$\alpha'(G) = \beta(G)$.



连接到U中点的所有M交错路

1) $x_1y_1x_4y_4x_7y_3x_6$；

2) $x_1y_3x_6y_1x_4y_4x_7$；

3) $x_2y_2x_5y_3x_6y_1x_4y_4x_7$；

4) $x_3y_1x_4y_4x_7y_3x_6$.

$Z = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4\}$

图 3.8

定理 3.24 对二部图G，如果$\delta(G) > 0$，那么$\alpha(G) = \beta'(G)$.

证明：由推论3.12和定理3.22可知，$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$.

而G是二部图，所以由定理3.23可知，$\alpha' = \beta$，于是$\alpha = \beta'$.

下面讨论独立集和极大独立集的简单性质.

定义 3.20 设$G = (V, E)$是简单无向图，$T \subseteq V$，$T \neq \emptyset$.

若T是图G的团，但是任意增加一个新顶点后，它就不成为团，则称T是图G的极大团.

定理 3.25 设$\overline{G}$为简单无向图G的补图，则

(1) S是G的独立集的充分必要条件是S是$\overline{G}$的团;

(2) S是G的极大独立集的充分必要条件是S是$\overline{G}$的极大团.

证明：(1) 必要性：由S是G的独立集可知，$\forall u, v \in S$有$uv \notin E(G)$，从而$uv \in E(\overline{G})$. 因此，S是$\overline{G}$的团.

充分性：S是$\overline{G}$的团，则任意的$u, v \in S$有$uv \in E(\overline{G})$，从而有$uv \notin E(G)$. 因此，S是G的独立集.

(2) 由(1)及极大独立集的定义易得.

由定理3.25可知，求G的极大独立集问题，可转化为求$\overline{G}$的极大团的问题.

当然，一般情况下，求图的团也是非常困难的.

简单无向图G的独立集，实际上是对图G的顶点进行着色的结果，即把图G的顶点集V划分成若干个不相交的子集，每个子集中的各结点着同一色，上述不相交的子集的最少个数即为图G的色数.

例如，图3.7中集合$\{2, 4, 5, 7\}$和$\{1, 3, 6, 8\}$把图G的顶点集V划分成两个不相交的子集. 由此可知，G的色数为$\chi(G) = 2$.

§3.7 支配集(dominating set)

要在$v_1, v_2, \cdots, v_n$这n座城市中建立起一个通讯系统. 为此，要从这n个城市中选定r座城市，在那里建立起通讯站，要求它们与其他城市相邻. 同时，为减少造价，要使通讯站数目最少. 这就是这一节将要讨论的支配集问题.

定义 3.21 设图$G = (V, E)$是简单无向图，$S \subseteq V$，$S \neq \emptyset$.

1) $\forall u \in V - S$，若u与S里至少一个顶点相邻，则称S是图G的**支配集**；

2) S是图G的支配集，若S的任何真子集都不是支配集，则称S为图G的**极小支配集**；

3) S是图G的支配集，若不存在任何其他支配集S'，使得$|S'| < |S|$，则称S是图G的**最小支配集**；

4) S是图G的最小支配集，则称$|S|$为图G的**支配数**(dominating number)，记作$\gamma(G)$.

例如，图3.9所示中，$S_1 = \{3, 6, 9, 10\}$和$S_2 = \{2, 7, 11\}$是图G的两个极小支配集，且S_2为最小支配集. 从而，$\gamma(G) = 3$.

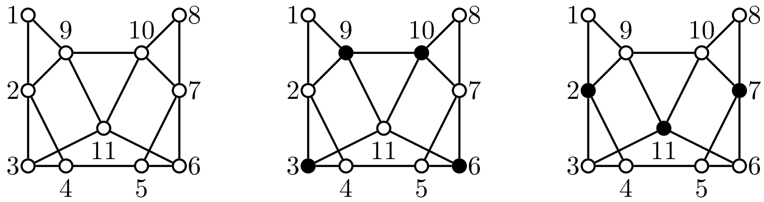


图 3.9

定理 3.26 图G的支配集S是G的极小支配集当且仅当S中的每个顶点u满足下列条件之一：

(1) $S \cap N(u) = \emptyset$，即$S - \{u\}$中的所有顶点都不与u相邻；

(2) 存在$v \in V(G) - S$，使得$N(v) \cap S = \{u\}$，即v与S中的相邻的点只有一个，其中$N(v)$为v的邻集.

证明：充分性：如果S中的每个顶点满足条件(1)，那么集合$S - \{u\}$里没有与u相邻的顶点；

如果S中的每个顶点满足条件(2)，那么集合$S - \{u\}$里没有与v相邻的顶点.

因此，$S - \{u\}$不是G的支配集. 从而，S是G的一个极小支配集.

必要性：如果S是G的一个极小支配集，那么$\forall u \in S$，$S - \{u\}$不是G的支配集.

所以，存在$v \in V(G) - (S - \{u\})$，使得v与$S - \{u\}$中的每一顶点都不相邻. 即$N(v) \cap (S - \{u\}) = \emptyset$. 此时，

如果$v = u$，则$S - \{u\}$中的每一顶点均不与u相邻. 从而，$N(u) \cap S = N(v) \cap S = \emptyset$，即满足条件(1).

如果$v \neq u$，则由S为G的支配集且$v \notin S$可知，v至少与S中的一个顶点邻接，即$N(v) \cap S \neq \emptyset$.

而v不与$S - \{u\}$中的顶点邻接，即$N(v) \cap (S - \{u\}) = \emptyset$. 因此，$v$只能与顶点$u$相邻.

从而，$N(v) \cap S = \{u\}$，即满足条件(2).

定理 3.27 若图G不含孤立点，且S是G的极小支配集，那么$V(G) - S$也是G的支配集.

证明：$\forall u \in S$，由定理3.26可知，u至少具备定理3.26中的两个条件之一.

首先，若$S \cap N(u) = \emptyset$，那么u是G的S导出子图$G[S]$中的孤立点.

而G中没有孤立点，所以u必与$V(G) - S$中的某个点相邻. 从而，$V(G) - S$也是G的支配集.

其次，若存在$v \in V(G) - S$，使得$N(v) \cap S = \{u\}$，则u至少与$V(G) - S$中的某个顶点v相邻.

因此，$V(G) - S$也是G的支配集.

推论 3.13 若G为不含孤立点的n阶图，则$\gamma(G) \leq \dfrac{n}{2}$.

证明：设S是G的极小支配集，则由定理3.27可知，$V(G)-S$也是G的支配集.

从而，$\gamma(G) \leq \min\{|S|, |V(G)-S|\} \leq \frac{n}{2}$.

定理 3.28 若图G不含孤立点，则存在G的最小支配集S，使得$\forall u \in S$，存在$v \in V(G)-S$，满足$N(v) \cap S = \{u\}$.

证明：用反证法.

设S为在G的所有最小支配集中，使其导出子图$G[S]$的边数$|E(G[S])|$达到最大的一个最小支配集.

并假设在S中至少存在一点u，使得$\forall v \in V(G)-S$，有$N(v) \cap S \neq \{u\}$.

则由定理3.26可知，必有$S \cap N(u) = \emptyset$，即u是$G[S]$的孤立点.

又由S为G的最小支配集可知，$\forall v \in V(G)-S,\ N(v) \cap S \neq \emptyset$.

所以，由假设$N(v) \cap S \neq \{u\}$可知，在$V(G)-S$中与u相邻的每个顶点必与S中的另一顶点w相邻.

而G不含孤立点，所以u必与$V(G)-S$中的某个顶点v_0相邻.

故，$S^* = (S-\{u\}) \cup \{v_0\}$是$G$的最小支配集，且其导出子图中至少包含一条与$v_0$关联的边$v_0w$.

于是，$|E(G[S^*])| > |E(G[S])|$，这与S的选取方式矛盾.

定理 3.29 如果G是n阶图，那么$\dfrac{n}{1+\Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

证明：设S是G的最小支配集，则$V(G)-S \subseteq \bigcup\limits_{u \in S} N(u)$. 即，$|V(G)|-|S| = |V(G)-S| \leq |S| \cdot \Delta(G)$.

因此，由$|S| = \gamma(G)$可知，$n-\gamma(G) \leq \gamma(G) \cdot \Delta(G)$. 从而，有$\gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}$.

又设$\deg(v) = \Delta(G)$，则由$V(G)-N(v)$为一个支配集可知，$\gamma(G) \leq |V(G)-N(v)| = n-\Delta(G)$.

定理 3.30 图G的一个顶点集S是一个独立支配集当且仅当S是一个极大独立集.

证明：由极大独立集的定义可知，每一个极大独立集是一个支配集.

反之，假设S是一个独立支配集，则S是独立集且不属于S的每一个顶点都与S中的某一个顶点邻接.

因此，S是极大独立集.

推论 3.14 图G的每个极大独立集是一个极小支配集.

证明：设S是图G的一个极大独立集，则由定理3.30可知，S是一个支配集.

因为S是独立集，显然S的每个顶点均不与S中的其他顶点邻接.

这样，S中的每个顶点均满足定理3.26中的条件(1)，所以由定理3.26可知，S是极小支配集.

注意：不是每个支配集都是独立集，也不是每个最小支配集都是独立集.

如图3.10所示，$S_1 = \{1,3,6,8,10,12\}$是G的一个最大独立集(自然是支配集)；

而$S_2 = \{4,5,9\}$是G的一个最小支配集且显然不是独立集；

但$S_3 = \{2,7,9\}$（或$S_4 = \{2,7,11\}$）既是最小支配集又是独立集.

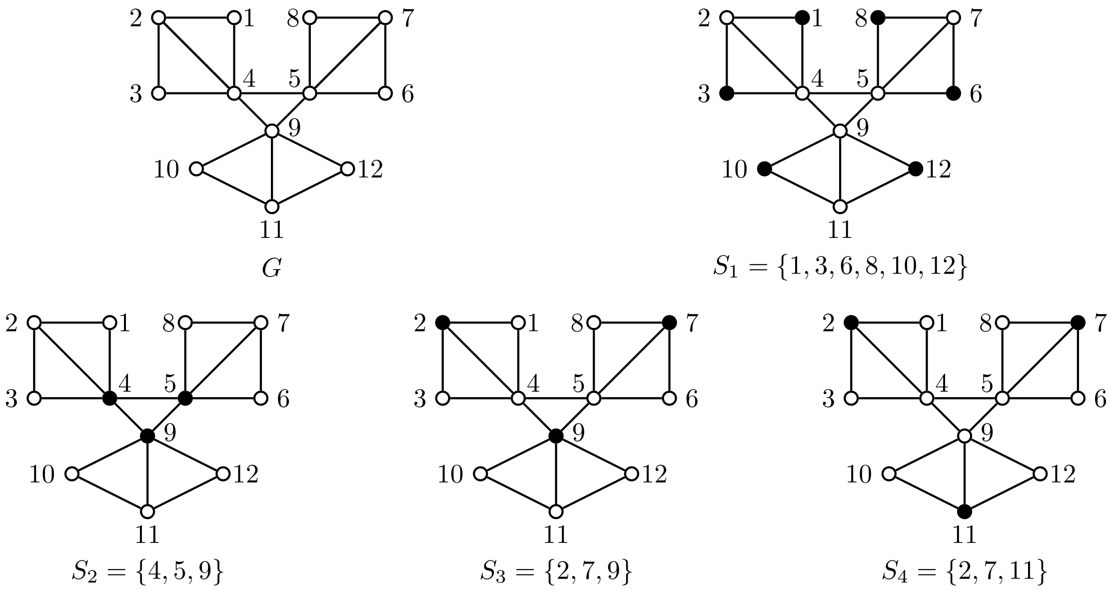


图 3.10

§3.8 完美图

定义 3.22 对图G，若用K^r表示图G中的r阶团，则

1. 使得$K^r \subseteq G$的最大整数r叫做图G的**团数**(clique number)，记作$\theta(G)$；
2. 使得$\overline{K^r} \subseteq G$的最大整数$r$叫做$G$的**独立数**(independence number)，记作$\alpha(G)$.

显然，$\alpha(G) = \theta(\overline{G})$, $\theta(G) = \alpha(\overline{G})$.

定义 3.23 如果图G的任意导出子图$H \subseteq G$，均满足$\chi(H) = \theta(H)$，则称G为**完美图**(perfect graph).

定理 3.31 图G是完美的当且仅当G或G的补图$\overline{G}$不含有无对角线的奇圈.

证明：略

定义 3.24 图G的团覆盖是指G的顶点集$V(G)$的一个划分，且划分的每一个部分都是一个完全图.
图G的最小团覆盖数是指G的最小团覆盖的势，记作$cp(G)$.

定理 3.32 图G是完美的当且仅当对图G的所有导出子图G'，有$\alpha(G') = cp(G')$，其中$\alpha(G)$表示图G的独立数.

证明：略

由定义，完美图的每个导出子图仍然是完美的，因此完美这个性质可以通过一系列禁用导出子图来刻画：存在一个非完美图的集合$\mathscr{H}$，使得任何一个图是完美的当且仅当它不包含一个导出子图与$\mathscr{H}$中的某个元素同构(例如，我们可以选择$\mathscr{H}$是所有顶点属N的非完美图的集合).

自然地，我们希望$\mathscr{H}$越小越好.作为图论中最深刻的结果之一，可以证明：
$\mathscr{H}$中只需要包含两类图，即长度≥ 5的奇圈和它的补图(它们都是非完美的；参考下面的定理3.34).
这一结果就是Berge于1963年提出的著名**强完美图猜想**（strong perfect graph conjecture)，这个猜想最近才被解决.

定理 3.33 (Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2006) 一个图G是完美的当且仅当
G和$\overline{G}$中都不包含长度至少为5的圈作为它的一个导出子图.

强完美图定理的证明比较长且技巧性较强，要完全搞清楚并不容易. 为了对完美性这个概念有更多的了解，下面给出该定理的最重要推论（**Lovász 定理，即为完美图定理**)，它原来被称作（**Berge 弱完美图猜想**）.

定义 3.25 对图G的一个顶点$x \in V(G)$，若G'是通过在G外添加一个顶点x'，并将它与x以及x的所有邻点连接而得到的图，则称G'为从G通过**扩展**（expanding）顶点x到一条边xx'而得到的图.

引理 3.4 从一个完美图通过扩展一个顶点而得到的图仍然是完美的.

证明：对所考虑的完美图的顶点个数进行归纳. 扩展K^1的顶点得到K^2，它是完美的.
在归纳的过程中，设G是一个非平凡完美图，并设G'是从G通过扩展顶点$x \in V(G)$成为边xx' 而得到的图.
为了证明G' 是完美图，我们只需要证明$\chi(G') \leq \theta(G')$:
G'的每个真导出子图H或者与G的一个导出子图同构，或者是从G的一个真导出子图通过扩展x而得到的；
对于任何一种情况，根据定理的条件和归纳假设知，H是完美图，从而可以用$\theta(H)$种颜色着色.

设$\theta(G) =: \theta$，那么$\theta(G') \in \{\theta, \theta+1\}$. 如果$\theta(G') = \theta+1$，就有

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \theta + 1 = \theta(G')$$

证明结束.

因此，假设$\theta(G') = \theta$，那么x不属于任何$K^\theta \subseteq G$中；否则，加上x'，就在G'中产生一个$K^{\theta+1}$.

我们用θ种颜色给G 着色，因为每个$K^\theta \subseteq G$都和x的着色类X相交，但不和x本身相交，

所以图$H := G - (X\backslash\{x\})$的团数$\theta(H) < \theta$.

由于G是完美图，因此我们可以给H着$\theta - 1$种颜色.

现在X是独立的，所以$(X\backslash\{x\})\bigcup\{x'\} = V(G' - H)$也是独立的.

因此我们可以把H上的$(\theta - 1)$- 着色扩充成G'上的一个θ-着色，从而证明了$\chi(G') \leq \theta = \theta(G')$.

定理 3.34 (Lovász,1972) 一个图是完美的当且仅当它的补图也是完美的.

证明：对$|G|$使用数学归纳法，我们证明任何一个完美图$G = (V, E)$的补图$\overline{G}$也是完美图.

当$|G| = 1$时，结论显然成立.

故在归纳的过程中，假设$|G| \geq 2$. 设$\mathscr{K}$是图G的所有完全子图的顶点集合.

记$\alpha(G) =: \alpha$，$\mathscr{A}$是G 中所有满足$|A| = \alpha$ 的独立集A的集合.

$\overline{G}$的每个真导出子图是G的一个真导出子图的补，由归纳假设可知，它是完美图.

因此要证$\overline{G}$是完美图，我们只需证明$\chi(\overline{G}) \leq \theta(\overline{G})(= \alpha)$.

对于这个结论，我们要找到一个集合$K \in \mathscr{K}$，使得对任何$A \in \mathscr{A}$有$K \cap A \neq \phi$；那么

$$\theta(\overline{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \theta(\overline{G}),$$

所以根据归纳假设，有 $\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G} - K) + 1 = \theta(\overline{G} - K) + 1 \leq \theta(\overline{G})$.

否则，假设不存在这样的K，那么对于每个$K \in \mathscr{K}$，存在一个满足$K\bigcap A_K = \emptyset$的集合$A_K \in \mathscr{A}$.

我们把图G 中的每个顶点x用一个完全图G_x 代替，这个完全图的顶点数为

$$k(x) := |\{K \in \mathscr{K} | x \in A_K\}|,$$

当x和y在G中相邻时，把G_x中所有的顶点和G_y中所有的顶点相连，则可得一个顶点集为$\bigcup\limits_{x\in V} V(G_x)$ 的图G'.

在图G'中，两个顶点$v \in G_x$ 和$\theta \in G_y$相邻当且仅当$x = y$或者$xy \in E$.

更进一步地，G'可以通过对图$G[\{x \in V | k(x) > 0\}]$反复地进行顶点扩张而得到的.

所以作为图G的一个导出子图，由假设可知，$G[\{x \in V | k(x) > 0\}]$是完美图.

所以由引理3.4 可知，G' 是完美图. 特别地，

$$\chi(G') \leq \theta(G'). \tag{3.3}$$

为了得到和（3.3）的矛盾，现在我们依次计算$\theta(G')$和$\chi(G')$ 的准确值.

由G' 的构造可知，G' 的每个极大完全子图都具有$G'\left[\bigcup\limits_{x\in X} G_x\right]$这样的形式，

这里X是$\mathscr{K}$中的某个集合，所以存在一个集合$X \in \mathscr{K}$ 使得

$$\theta(G') = \sum_{x\in X} k(x) = |\{(x, K) | x \in X, K \in \mathscr{K}, x \in A_K\}| = \sum_{K\in\mathscr{K}} |X \bigcap A_K| \leq |\mathscr{K}| - 1; \tag{3.4}$$

由于对所有的K，有$|X\bigcap A_K|\leq 1$（因为A_K是独立的，但$G[X]$是完全图），且$|X\bigcap A_X|=0$（由A_X的选择）.
因此，可以推出上面不等式的最后一步. 另一方面，

$$|G'|=\sum_{x\in V}k(x)=|\{(x,K)|x\in V,K\in\mathscr{K},x\in A_K\}|=\sum_{K\in\mathscr{K}}|A_K|=|\mathscr{K}|\cdot\alpha.$$

由G'的构造，有$\alpha(G')\leq\alpha$，这蕴含着

$$\chi(G')\geq\frac{|G'|}{\alpha(G')}\geq\frac{|G'|}{\alpha}=|\mathscr{K}|. \tag{3.5}$$

结合（3.4）式和（3.5）式，我们得到 $\chi(G')\geq|\mathscr{K}|>|\mathscr{K}|-1\geq\theta(G')$，与（3.3）式矛盾.

定理 3.35 (Lovász,1972) 一个图G是完美图当且仅当对所有的导出子图$H\subseteq G$，有

$$|H|\leq\alpha(H)\cdot\theta(H) \tag{3.6}$$

证明：记$V(G):=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$\alpha:=\alpha(G)$和$\theta:=\theta(G)$.

必要性：如果G是完美图，那么G 的每个导出子图H可以划分成至多$\theta(H)$个着色类，
使得每个着色类至多包含$\alpha(H)$个顶点，从而得到（3.6）式.

充分性：对$n=|G|$用归纳法. 假设G的每个导出子图H都满足（3.6）式，但是G不是完美图.
由归纳假设，G的每个真导出子图是完美图. 因此，每个非空独立集$U\subseteq V(G)$ 都满足

$$\chi(G-U)=\theta(G-U)=\theta \tag{3.7}$$

事实上，第一个等式由$G-U$的完美性可直接得到；第二个也简单：“$\leq$” 部分是显然的，
而$\chi(G-U)<\theta$将意味着$\chi(G)\leq\theta$，所以G就是完美图，与我们的假设矛盾.
将把（3.7）式应用到单顶点集$U=\{u\}$上，并考虑$G-u$的一个$\theta-$ 着色.
设K是G中任意一个K^θ的顶点. 显然

(1) 如果 $u\notin K$, 那么 K 与 $G-u$ 中每个着色类相交； (3.8)

(2) 如果 $u\in K$, 那么 K 与除一个外的所有 $G-u$ 的着色类相交. (3.9)

设$A_0=\{u_1,\cdots,u_a\}$是G中基数为α的独立集，而$A_1,\cdots,A_\theta$是$G-u_1$的一个$\theta-$着色的所有着色类，
而$A_{\theta+1},\cdots,A_{2\theta}$ 是$G-u_2$的一个$\theta-$着色的着色类，等等；
从而，总共给出了G的$\alpha\theta+1$个独立集$A_0,A_1,\cdots A_{\alpha\theta}$.
对每个$i=0,\cdots,\alpha\theta$，由（3.7）式可知，存在一个$K^\theta\subseteq G-A_i$，记其顶点集为K_i.
注意到，如果K是G的任意一个K^θ的顶点集，那么

$$\text{存在唯一的 } i\in\{0,\cdots,\alpha\theta\} \text{ 使得 } K\cap A_i=\varnothing. \tag{3.10}$$

事实上，如果$K\cap A_0=\varnothing$，那么由A_i的定义和（3.8）式可知，对所有的$i\neq 0$，有$K\cap A_i\neq\varnothing$.
类似地，如果$K\cap A_0\neq\varnothing$，那么$|K\cap A_0|=1$，所以恰好有一个$i\neq 0$使得$K\cap A_i=\varnothing$：
把（3.9）式运用到这个唯一的顶点$u\in K\cap A_0$上，并把（3.8）式运用到所有其他顶点$u\in A_0$ 上.
设J是一个主对角线全为零，其他元素均为1的$(\alpha\theta+1)\times(\alpha\theta+1)$实矩阵，
而$A=(a_{ij})$是一个$(\alpha\theta+1)\times n$的实矩阵，它的行是集合A_i与$V(G)$的关联向量，

即，如果$v_j \in A_i$，则$a_{ij}=1$；否则，$a_{ij}=0$.

类似地，设B是$n\times(\alpha\theta+1)$的实矩阵，它的列是集合K_i与$V(G)$的关联向量.

由K_i的选择，对所有的i，有$|A_i \cap K_i|=0$；同时，根据（3.10）式，当$i\neq j$时，有$A_i\cap K_j \neq \varnothing$，

从而$|A_i\cap K_j|=1$. 因此，$AB=J$. 而J是非奇异矩阵，这就意味着A的秩为$\alpha\theta+1$.

特别地，对于图$H:=G$，有 $n\geq \alpha\theta+1$，这与(3.6)式矛盾.

下面讨论几类完美图.

定理 3.36 二部图G及其线图$L(G)$是完美图.

证明: 首先，由二部图的导出子图是二部图可知，只需证明所有的二部图G，满足$\chi(G)=\theta(G)$.

对非空二部图G，由$\chi(G)=2$，$\theta(G)=2$可知，满足$\chi(G)=\theta(G)$. 故，二部图G为完美图.

其次，由于二部图G的一个顶点覆盖和匹配分别对应于线图$L(G)$的一个团覆盖和独立集，

因此，二部图G的最小顶点覆盖和最大匹配分别对应于线图$L(G)$的最小团覆盖和最大独立集.

而二部图G的线图$L(G)$的导出子图仍为一个二部图的线图，

因此，只需证明任意二部图G的线图$L(G)$，满足$\alpha(L(G))=cp(L(G))$.

由König 定理（定理3.23）可知，二部图G的点覆盖数$\beta(G)$等于其匹配数$\alpha'(G)$，

因此，$L(G)$的团覆盖数$cp(L(G))$等于其独立数$\alpha(L(G))$. 即，$\alpha(L(G))=cp(L(G))$.

故，二部图G的线图$L(G)$仍为完美图.

定义 3.26 **区间图**是指表示实轴上区间的相互关系的图. 设实轴上区间的集合为$S=\{S_i \mid i=1,2,\cdots\}$，

区间图的顶点v_i代表S中的元素（区间）S_i，两个顶点v_i,v_j相邻当且仅当$S_i\cap S_j\neq\varnothing$.

定义 3.27 若图G的每个长度至少为4的圈都包含弦，则称G为**弦图**(chordal graphs)或**三角化图**(triangulated graphs).

即，弦图不包含除了三角形以外的导出圈，其中弦即为连接圈中不相邻的两个点的边.

注意: 区间图一定是弦图.

定义 3.28 若图G的导出子图G_1、G_2和S满足$G=G_1\bigcup G_2$和$S=G_1\bigcap G_2$，则称G是由G_1 和G_2 沿着S**粘贴**(pasting)起来的.

定理 3.37 一个图是弦图当且仅当它可以从一个完全图开始，通过沿着完全子图递归地粘贴弦图而得到.

证明: 如果G是沿着一个完全子图把两个弦图G_1和G_2粘贴而得到的，那么G显然也是弦图：

G中任何导出圈要么在G_1中，要么在G_2中，因此由假设，这些圈是三角形，

由于完全图是弦图，故定理中构造出来的图都是弦图.

反过来，设G是弦图，对$|G|$使用归纳法证明.

弦图G可以像上面描述的那样构造出来. 如果G是完全的，结论显然成立.

故假设G不是完全的，特别地，设$|G|>1$，并且所有顶点数少于$|G|$的图都可以像上面叙述的那样构造出来.

假设$a,b\in G$是两个不相邻的顶点，且$X\subseteq V(G)\backslash\{a,b\}$是一个极小的$a-b$分离集.

记C是$G-X$中包含a的一个分支，$G_1:=G[V(C)\bigcup X]$ 和$G_2:=G-C$，

那么G是由G_1和G_2沿着$S:=G[X]$粘贴起来的.

因为G_1和G_2是弦图(它们是G的导出子图)，由归纳假设知，它们是可以构造出来的，

所以我们只需要证明S是完全的即可.

假设$s,t\in S$是不相邻的，由$X=V(S)$作为$a-b$分离集的极小性知，s 和t 在C中都有邻点.

因此在G_1中有条从s 到t 的$X-$路；设P_1是一条这样的最短路.

类似地，G_2 中有一条从s 到t 的最短$X-$路P_2.

但是$P_1\bigcup P_2$是条不含弦的长度≥ 4的圈，与假设G是弦图矛盾.

定理 3.38 每个弦图是完美的，从而区间图是完美图.

证明：因为完全图是完美的，所以由定理3.37可知，只需要证明任何由两个完美图G_1和G_2沿着一个完全子图S粘贴而得到的图G仍然是一个完美图. 设$H\subseteq G$ 是一个导出子图，去证明$\chi(H)\leq\theta(H)$.

设$H_i:=H\bigcap G_i(i=1,2)$，且$T:=H\bigcap S$，那么T是完全的，且H是由H_1和H_2沿着T粘贴得到的.

作为G_i的导出子图，每个H_i能够用$\theta(H_i)$ 种颜色着色.

因为T是完全的，从而可以一一地着色，所以H_1的一个着色和H_2的一个着色可以结合成H的一个着色，这个着色用了$\max\{\theta(H_1),\theta(H_2)\}\leq\theta(H)$种颜色；如果需要的话，可以在其中一个$H_i$中置换颜色.

定义 3.29 若图G的顶点集可被划分成一个团和一个独立集两部分，则称G为**分解图**（**Split graph**）.

注意：由于分解图G的任意顶点数大于等于4的圈均含有一条弦，因此G必是弦图.

定理 3.39 分解图G是完美图.

证明：由分解图G的任意导出子图G'均为分解图可知，只需证明G满足等式$\chi(G)=\theta(G)$.

由于G的顶点集可划分为一个团K和一个独立集I，

因此，可令K是这种划分中顶点数最多的团，则独立集I中任意顶点不可能与K中所有顶点相邻.

从而，G的最小着色为K的顶点着$|K|$种颜色，而独立集I中的任意顶点与K中与其不相邻的顶点着相同颜色.

于是，$\chi(G)=|K|$. 显然，$\theta(G)=|K|$. 故，$\chi(G)=\theta(G)$.

习 题 三

1. 设某高校开设了一些研究生课程，每门课课时为每周一单元. 问每周至少要多少单元才能排完所有课？

解：作一图G，其每一顶点对应一门课；

两顶点相邻当且仅当有一研究生选修对应的两门课；或有一教师要开对应的两门课.

为此，所需单元数大于或等于$\chi(G)$.

2. 对顶点数为n的图G，求证：$\chi(G)+\chi\left(\overline{G}\right)\le n+1$. 其中，$\overline{G}$为图$G$的补图.

证明：对n进行数学归纳法.

3. 设e为简单图G的任一边，则$\chi(G-e)=\min\{\chi(G),\chi(G\cdot e)\}$.

4. 若G是n阶简单图，则$f(G,k)$中的k^{n-1}的系数为$-|E(G)|$.

证明：对$|E(G)|$，用数学归纳法.

5. 若G是具有n个顶点的树，则$f(G,k)=k(k-1)^{n-1}$.

证明：对n，用数学归纳法. 并利用定理3.7的结论.

6. 若G是长为n的圈，则$f(G,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$.

证明：对n，用数学归纳法. 并利用定理3.7和习题5的结论.

7. 具体找一个边着色，证明：$\chi'(K_{m,n})=\Delta(K_{m,n})$.

证明：设$m\ge n$，则$\Delta(K_{m,n})=m$.

8. 对于圈图$C_n(n\ge 3)$，证明：$\chi'(C_n)=\begin{cases}2, & n\text{为偶数；}\\ 3, & n\text{为奇数.}\end{cases}$

9. 证明：每一简单、3−正则、Hamilton 图，都有$\chi'=3$.

10. 设G为3−正则图，则$\chi'=3$的充分必要条件是G中存在由一组偶圈组成的生成子图.

11. 设G为非空正则简单图，如果$|V(G)|$为奇数，则$\chi'=\Delta+1$.

证明：设$C=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$为G的正常$m(=\chi')$−边着色. 则

$$\frac{|V(G)|}{2}\Delta=|E(G)|=\sum_{i=1}^{m}|E_i|\le\frac{(|V(G)|-1)}{2}\chi'$$

再利用Vizing 定理.

12. 设简单图G中，$|V(G)|=2n+1$且$|E(G)|>n\Delta$，则$\chi'=\Delta+1$.

13. 证明k−方体有完美匹配$k\ge 2$.

证明：设k−方体的顶点坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，

取$(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},0)$和$(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},1)$两顶点间的边的全体所成之集合为$M$，

则M为k−方体的完美匹配.

14. 证明：树至多有一个完美匹配.

证明： 若树T存在两个相异的完美匹配M_1和M_2，则$M_1 \oplus M_2 \neq \varnothing$且$T[M_1 \oplus M_2]$中的每个顶点的度为2.

其中，$M_1 \oplus M_2$为M_1和M_2的对称差，再利用习题1.11即可.

15. 证明：一个6×6方格棋盘去掉其对角上的两个1×1方格之后，不可能用1×2长方格恰好添满.

证明： 作一图G以1×1方格为顶点，两顶点相邻当且仅当对应的两个1×1方格有公共边.
问题等价于是否存在一些边把每个顶点恰好盖住，即G中是否存在一完美匹配.

16. 有m对夫妻，今将男女各随意分成r $(r \leq m)$组. 今欲从每组选一代表，问该$2r$个代表恰为r对夫妻的充分必要条件是什么？

证明： 把每一组看作一个顶点，作一个二部图$G = (X, Y, E)$，

不妨设X是由男人组组成的；Y是由女人组组成的.

并使$x \in X$与$y \in Y$用一条边连接，当且仅当X组与Y组中至少有一对夫妻.

17. 求K_{2n}和$K_{n,n}$中不同完美匹配的个数.

18. 下列图的独立数是什么？

(1) K_n;　　(2) C_n;　　(3) $K_{m,n}$.

19. 证明下列命题.

(1) G是二部图的充分必要条件是对G中任意子图H，均有$\alpha(H) \geq \dfrac{\nu(H)}{2}$；

(2) G是二部图的充分必要条件是对G中任意子图H，如果$\delta(H) > 0$，则有$\alpha(H) = \beta'(H)$.

证明：

(1) 对顶点分划为(X, Y)的二部图G的生成子图H，有$\alpha(H) \geq \max\{|X(H)|, |Y(H)|\} \geq \dfrac{\nu(H)}{2}$.

(2) 利用定理3.21.