Note for Homological Algebra

同调代数笔记

EDITED BY

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-01-29 02:26

LOGO NAME
Slogan Here

Contents

这是笔者于 2023 年本科四年级上学期学习 Weibel 同调代数导论的学习笔记。

Chapter 3

Tor 函子和 Ext 函子

本章的目的是介绍 Tor 函子和 Ext 函子的诸多性质。他们是同调代数初等应用中的常客。

§3.1 Abel 群的 Tor 函子

我们首先观察一个经典的 PID 上的模——Abel 群的 Tor 函子。其实，Tor 函子的名字就来源于其对 Abel 群的研究。

Example 3.1.1

对于 Abel 群 B 而言，$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) = B/pB$,$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) = {}_pB = \{b \in B : pB = 0\}$. 对于 $n \geq 2$,$\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$.

上述结果可以这么看。取 $\mathbb{Z}/p$ 的投射解消

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p \to 0 \tag{3.1}$$

从而我们计算的是:

$$0 \to B \xrightarrow{p} B \to 0 \tag{3.2}$$

的同调群。

特殊情况下，Tor 函子表现出 1 阶挠子群, 高阶为 0 的特点。实际上，我们有下面的命题:

Proposition 3.1.1

对于两个 Abel 群 A,B, 我们有:

(a)$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 是一个挠群。

(b)$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 在 $n \geq 2$ 的情况下为 0.

Proof. 证明依赖 Tor 函子与滤过余极限交换性。A 是其有限生成子群的滤过余极限, 所以 $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ 是 $\mathrm{Tor}_n(A_\alpha, B)$ 的滤过余极限。

Abel 群的余极限总是他们直和的商子群。所以我们只需要证明对于有限生成子群上述命题成立即可。

设 $A = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/p_1 \oplus \mathbb{Z}/p_2 \ldots \mathbb{Z}/p_r$。因为 $\mathbb{Z}^m$ 是投射的，所以只用考虑:

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) = \mathrm{Tor}_n(\mathbb{Z}/p_1, B) \oplus \mathrm{Tor}_n(\mathbb{Z}/p_2, B) \oplus \ldots \mathrm{Tor}_n(\mathbb{Z}_r, B) \tag{3.3}$$

于是根据之前的例子我们知道结论成立。 ■

Proposition 3.1.2

$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B)$ 是 B 的挠子群。

Proof. 可以想见，$\mathbb{Z}/p$ 提取出 B 中挠性为 p 的元素。$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是其有限子群的滤过极限，并且每个优先子群都同构于某个 $\mathbb{Z}/p$(p 不一定是素数。)

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, B) \cong \varinjlim ({}_pB) = \cup_p\{b \in B : pb = 0\} \tag{3.4}$$

■

Proposition 3.1.3

果 A 是一个无挠交换群，则 $\mathrm{Tor}_n(A, B)$ 对于 $n \neq 0$ 和 Abel 群 B 总是 0。

Proof. A 是有限生成子群的滤过余极限。然而 A 无挠意味着这些有限生成子群都是自由群。用 Tor 保滤过余极限即可。 ■

如果 R 是交换环，则张量积有典范的同构，因此 $\mathrm{Tor}_*(A, B) \cong \mathrm{Tor}_*(B, A)$.

Corollary 3.1.1

$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, -) = 0$ 等价于 A 无挠等价于 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(-, A) = 0$.

但是 Tor 函子并非对于所有环都有这么好的性质。比如下面的例子就说明在 $R = \mathbb{Z}/m$ 的情况下可能失败:

Example 3.1.2

设 $R = \mathbb{Z}/m$,$A = \mathbb{Z}/d$。其中 $d|m$。从而 A 是 R 模。

我们考虑 A 周期性的自由解消:

$$\cdots \to \mathbb{Z}/m \to Z/m \to \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/d \tag{3.5}$$

其中从 $\mathbb{Z}/m$ 到 $\mathbb{Z}/d$ 的映射是商映射，而 $\mathbb{Z}/m$ 各自之间交替出现 d 和 m/d。所以对于任何一个 $\mathbb{Z}/m$ 模 B，我们都有:

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/d, B) = \begin{cases} B/dB, n = 0 \\ \{b \in B : db = 0\}/(m/d)B, n\text{是奇数} \\ \{b \in B : (m/d)b = 0\}/dB, n\text{是偶数且} > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

然而我们可以尝试对下面特殊的情况进行一些讨论。

Example 3.1.3

设 r 是 R 的一个左非零除子。即 ${}_rR = \{s \in R | rs = 0\}$ 是 0。对于每个 R 模 B，记 ${}_rB = \{b \in B :$

$rb=0\}$。用 R/rR 代替上述 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，用相同的计算办法可以算的:

$$\mathrm{Tor}_0(R/rR,B)=B/rB;\quad \mathrm{Tor}_1^R(R/rR,B)={}_rB;\quad \mathrm{Tor}_n^R(R/rR,B)=0,n\geq 0 \tag{3.7}$$

Proposition 3.1.4

若 ${}_rR\neq 0$, 我们只能得到一个并非投射的解消:

$$0\to {}_rR\to R\xrightarrow{r} R\to R/rR\to 0 \tag{3.8}$$

然而第二章我们介绍了 dimension shelfting 办法2.4.4。所以我们对于 $n\geq 3$, 存在:

$$\mathrm{Tor}_n^R(R/rR,B)\cong \mathrm{Tor}_{n-2}^R({}_rR,B) \tag{3.9}$$

其次，还有正合列:

$$0\to \mathrm{Tor}_2^R(R/rR,B)\to {}_rR\otimes B\to {}_rB\to \mathrm{Tor}_1^R(R/rR,B)\to 0 \tag{3.10}$$

因为 $\mathrm{Tor}_2^R(R/rR,B)$ 是 $0\to {}_rR\otimes B\to R\otimes B=B$ 的核。而该映射的像就在 ${}_rB$ 中，所以上述正合列中第一个和第二个已经确实成立。

考虑 $\mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$。根据导引长正合列：

$$0\to \mathrm{Tor}_1(R/rR,B)\to rR\otimes B\to B\to B/rB \tag{3.11}$$

为了定义 ${}_rB\to \mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$. 我们定义 ${}_rB\to rR\otimes B$. 即 $b\mapsto r\otimes b$。则该映射实际上打进 $\mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$.

若 $\sum(rr_i)\otimes b_i\in \mathrm{Tor}_1(R/rR,B)$ 且在 B 中像为 $\sum r(1\otimes r_ib_i)=0$, 则 ${}_rB$ 中 $\sum r_ib_i$ 的像是 $\sum(rr_i)\otimes b_i$。于是我们定义了满射。

最后需要说明 ${}_rB$ 处的正合。若 $r\otimes b=0$, 则存在 r_i 和 b_i 使得 $rr_i=0$,$b=\sum r_ib_i$.

Proposition 3.1.5

设 R 是交换整环，分式域 F。则 $\mathrm{Tor}_1^R(F/R,B)$ 是 B 的挠子群:$\{b\in B:(\exists r\neq 0)rb=0\}$

Proposition 3.1.6

$\mathrm{Tor}_1^R(R/I,R/J)\cong \dfrac{I\cap J}{IJ}$ 对于任何右理想 I 和左理想 J 都成立。特别的, 对于双边理想 I:

$$\mathrm{Tor}_1(R/I,R/I)\cong I/I^2 \tag{3.12}$$

Proof.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker i \arrow[d] \arrow[dddll, dashed] & \\
0 \arrow[r] & IJ \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & I\otimes R/J \arrow[r] \arrow[d, "i\otimes \mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R\otimes R/J \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & J/(IJ) \arrow[r] & R/I \arrow[r] & R/I\otimes R/J &
\end{tikzcd}$$

上图是蛇形引理1.3.1. 验证 $I/(IJ)$ 和 $I\otimes R/J$ 有典范同构可以得出第一行正合。第二行则典范正合。

最右边的列是计算 $\mathrm{Tor}_1(R/I,R/J)$ 的定义式。感觉 Dimesion Shifting,$\ker i$ 是 $\mathrm{Tor}_1(R/I,R/J)$。根据 snake 引理，$\ker i$ 是 $J/(IJ)\to R/I$ 的核:$\dfrac{I\cap J}{IJ}$。 ■

§3.2 Tor 函子与平坦性

我们在这一节着重研究 Tor 函子的 ayclic 对象——平坦对象。

Definition 3.2.1: 平坦模

称一个左 R 模是平坦模，若函子 $\otimes_R B$ 是正合函子。同样, 对于右 R 模, 也可以定义类似的平坦性。

如果 A 是投射的, 则 $\mathrm{Tor}_n(A,B)=0$。不难说明 A 此时是平坦的。因为投射模一定是平坦模。然而平坦模不一定是投射模。例如 $\mathbb{Q}$ 作为交换群而言是平坦的, 但不是投射的。(为什么?)

Theorem 3.2.1

若 S 是 R 中的乘法封闭集, 则 $S^{-1}R$ 是一个平坦模。

这个定理当然很交换代数，不过影响不大，我们可以尝试证明:

Proof. 构造一个滤过范畴 I。对象是 S 中的元素, 态射 $\mathrm{Hom}_I(s_1,s_2)=\{s\in S: s_1s=s_2\}$。定义函子 $F:I\to R$。$F(s)=R$,$F(s_1\to s_2)$ 则定义为 R 上该态射自然给出的右乘法。

我们断言 F 的余极限 $\varinjlim F(s)\cong S^{-1}R$。从而因为 $S^{-1}R$ 是平坦模的滤过余极限，所以其是平坦的。

下面计算 $\varinjlim F$。首先定义 $F(s)\to S^{-1}R$ 的映射为 $r\mapsto r/s$. 这样交换图显然成立:

$$\begin{tikzcd}
F(s_1)=R:r \arrow[r, "s"] \arrow[d] & F(s_2)=R:rs \arrow[dl] \\
S^{-1}R:r/s_1=rs/(s_1s)=rs/s_2 &
\end{tikzcd}$$

如果存在一个新的 B 使得余极限中关系成立，我们直接定义 $S^{-1}R$ 中的元素 r/s 到 B 的态射为 $F(s)=R$ 中 r 在 B 中的像即可。这是唯一的定义方式! ■

Proposition 3.2.1: Tor 和平坦

面三个命题等价:

(1)B 是平坦模。

(2)$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0, \forall n\neq 0$
(3)$\mathrm{Tor}_1^R(A,B)=0$

Corollary 3.2.1

$0\to A\to B\to C\to 0$ 是正合列且 B,C 是平坦模，则 A 平坦。

Proposition 3.2.2

R 是主理想整环，则 B 平坦等价于 B 无挠。

对于上述命题，我们给出一个反例。首先平坦显然无挠。但是无挠不一定平坦。设 k 是域且 $R=k[x,y]$。R 是经典的非主理想整环。设 $I=(x,y)R$。考虑 $k=R/I$ 有投射解消:

$$0\to R\to R^2\to R\to k \tag{3.13}$$

其中第一个 R 到 R^2 为 $[-y,x]$. 而 R^2 到 R 为 (x,y). 从而 $\mathrm{Tor}_1^R(I,k)\cong\mathrm{Tor}_2^R(k,k)\cong k$。于是 I 不是平坦模。

我们深入的研究一下平坦模。

Definition 3.2.2: Pontrjagin 对偶

左模 B 的 Pontrjagin 对偶模 B^* 是一个右模:

$$B^*:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z});(fr)(b)=f(rb) \tag{3.14}$$

Proposition 3.2.3

下面的命题等价。
(1)B 平坦。
(2)B^* 内射。
(3)$I\otimes_R B\cong IB=\{x_1b_1+\cdots+x_nb_n\in B: x_i\in I, b_i\in B\}$ 对于任何右理想 I 都成立。
(4)$\mathrm{Tor}_I^R(R/I,B)=0$ 对于任何右理想 I 都成立。

Proof. (3) 和 (4) 的等价性来源于正合列:

$$0\to \mathrm{Tor}_1(R/I,B)\to I\otimes B\to B\to B/IB\to 0 \tag{3.15}$$

现在考虑 A' 是 A 的子模。考虑:

$$\mathrm{Hom}(A,B^*)\to\mathrm{Hom}(A',B^*) \tag{3.16}$$

B^* 等价于说上述映射是满射。根据伴随关系, 我们有:

$$\mathrm{Hom}(A\otimes B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to\mathrm{Hom}(A'\otimes B,\mathbb{Q}/Z) \tag{3.17}$$

是满射。即 $(A\otimes B)^*\to(A'\otimes B)^*$ 是满射。

用下面的**引理**，可以知道此时 $A'\otimes B\to A\otimes B$ 是单射, 所以 B 是平坦模。同理也可以反推回去。所以 (1)(2) 等价。另外带入 $A'=I, A=R$，可以推出 $I\otimes B\to R\otimes B$ 是单射。于是 $I\otimes B\cong IB$ 且根据 Baer 判别法，这是可逆的。所以 (1)(3) 等价。 ■

我们描述一个引理。

Lemma 3.2.1

$f : A' \to A$ 是单射等价于 $f^* : A^* \to A'^*$ 是满射。

Proof. 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的 $\mathbb{Z}$ 模, 所以保正合。 ■

Proposition 3.2.4: Pontrjagin 对偶与正合

$A \to B \to C$ 是正合的当且仅当对偶 $C^* \to B^* \to A^*$ 是正合的。

Proof. 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射模，所以 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是正合函子，因此 $C^* \to B^* \to A^*$ 是正合的。

如果 $C^* \to B^* \to A^*$ 正合, 则 $A \to B \to C$ 首先复形。若 $b \in B$ 且在 C 中的像为 0, 我们证明 b 在 A 的像中。若不然, 则 $b + \mathrm{im}A$ 是 $B/\mathrm{im}A$ 中的非 0 元。我们定义 $g : B/\mathrm{im}A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 使得 $g(b + \mathrm{im}A) \neq 0$。则 g 也给出了 B^* 中的非 0 元且在 A^* 中的像为 0。

所以可以给出一个 $f \in C^*$。剩下的就是显然了。 ■

这个证明写的比较模糊。

我们邀请读者回忆有限展示的概念。然后不加证明的给出有限展示与生成元的选取无关.

Proposition 3.2.5

若 $\varphi : F \to M$ 是满射且 F 是有限生成的,M 是有限展示的, 则 $\ker\varphi$ 是有限生成的。

HINT: 用蛇形引理。

仍然用 A^* 表示 A 的 Pontrjagin 对偶, 则存在一个自然的映射 $\sigma : A^* \otimes_R M \to \mathrm{Hom}_R(M, A)^*$

$$\sigma(f \otimes m) = h \mapsto f(h(m)) \tag{3.18}$$

其中 $f \in A^*, m \in M, h \in \mathrm{Hom}(M, A)$. 我们的问题是，什么时候 σ 是一个同构?

Theorem 3.2.2

对于任何有限展示的 M,σ 都是一个同构。

Proof. 若 $M = R$，则自然有 σ 是同构。根据可加性，$M = \mathbb{R}^n$ 的时候也是如此。所以有:

$$\begin{tikzcd}
A^* \otimes R^m \arrow[r] \arrow[d] & A^* \otimes R^n \arrow[r] \arrow[d] & A^* \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}(R^m, A)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}(R^n, A)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, A)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 $\otimes$ 是右正合的，Hom 是左正合的, 所以图中两个行正合. 根据 5 引理1.3.2可知 σ 是同构。 ■

Theorem 3.2.3

每个有限展示的平坦模是投射模。

Proof. 我们证明 $\mathrm{Hom}(M,-)$ 是正合的。设 $B \to C$ 是满射, 则 $C^* \to B^*$ 是单射。若 M 是平坦的, 则:

$$\begin{tikzcd} C^* \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & B^* \otimes M \arrow[d, "\sigma"'] \\ \mathrm{Hom}(M,C)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,B)^* \end{tikzcd}$$

给出了 $\mathrm{Hom}(M,B) \to Hom(M,C)$ 的满射。所以 M 是投射模。 ■

下面的引理来源于 dimension shifting.

Lemma 3.2.2: 平坦解消引理

群 $\mathrm{Tor}_*(A,B)$ 可以用平坦模进行计算。

Proposition 3.2.6: Tor 的平坦基变换

$R \to T$ 是环同态, 使得 T 成为了 R 模。从而对于所有的 R 模 A, 所有的 T 模 C 和所有的 n:

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,C) \cong \mathrm{Tor}_n^T(A \otimes_R T, C) \tag{3.19}$$

Proof. 选择 R 模的投射解消 $P \to A$，则 $\mathrm{Tor}_*^R(A,C)$ 是 $P \otimes_R C$ 的同调。

因为 T 是平坦的 R 模，所以 $P_n \otimes T$ 是投射的 T 模且 $P \otimes T \to A \otimes T$ 是 T 模的投射解消。所以 $\mathrm{Tor}_n^T(A \otimes T, C)$ 是复形 $(P \otimes_R T) \otimes_T C \cong P \otimes_R C$ 的同调。 ■

Corollary 3.2.2

若 R 是交换环,T 是平坦的 R 代数, 则对于所有的 R 模 A, B 和所有的 n:

$$T \otimes_R \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \cong \mathrm{Tor}_n^T(A \otimes_R T, T \otimes_R B) \tag{3.20}$$

Proof. 设 $C = T \otimes_R B$. 根据上面的命题, 我们只需要证明 $\mathrm{Tor}_*^R(A, T \otimes B) = T \otimes \mathrm{Tor}_*^R(A,B)$. 因为 $T \otimes_R$ 是正合函子, 所以 $T \otimes \mathrm{Tor}_*^R(A,B)$ 是 $T \otimes_R (P \otimes_R B)$ 的同调，从而为 $\mathrm{Tor}_*^R(A, T \otimes B)$. ■

为了使得 Tor 给出模结构，我们必须假设 R 是交换环。原因是下面的引理:

Lemma 3.2.3

设 $\mu : A \to A$ 是左乘一个中心元 r。则诱导的 $\mu_* : \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \to \mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 也是左乘 r.

Proof. 选择 A 的投射解消 $P \to A$。左乘 r 是一个 R 模的链复形映射 $\tilde{\mu} : P \to P$.（因为 r 是一个中心元）。从而 $\tilde{mu} \otimes B$ 是 $P \otimes B$ 的 r 左乘。作为商群 Tor 也是如此。 ■

Corollary 3.2.3

若 A 是一个 R/r 模, 则对于每个 R 模 B,R 模 $\mathrm{Tor}_*^R(A,B)$ 也是 R/r 模。换句话说，rR 乘在该模得 0.

Corollary 3.2.4: Tor 的局部化

若 R 是一个交换环且 A, B 都是 R 模。下面的命题对于所有 n 都成立:

1. $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0$
2. 对于 R 的任意素理想 p,$\mathrm{Tor}_n^{R_p}(A_p,B_p)=0$
3. 对于 R 的任意极大理想 m,$\mathrm{Tor}_n^{R_m}(A_m,B_m)=0$.

Proof. 对于 R 模而言，$M=0$ 等价于任意素理想 p,$M_p=0$ 等价于任意极大理想 m,$M_m=0=0$. 设 $M=\mathrm{Tor}(A,B)$:

$$M_p=R_p\otimes_R M=\mathrm{Tor}_n^{R_p}(A_p,B_p) \tag{3.21}$$

■

§3.3 性质较好的环的 Ext 函子

讨论了 Ext 后, 我们讨论 Ext 函子的性质。首先我们计算一些性质很好的环的 Ext 函子。

Lemma 3.3.1

$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B)=0,\forall n\geq 2$ 和所有的交换群 A,B.

Proof. 把 B 嵌入到一个内射的交换群 I^0. 其商群 I^1 是可除的, 因而是内射的, 所以我们给出了 B 的内射解消 $0\to B\to I^0\to I^1\to 0$.

所以 $\mathrm{Ext}^*(A,B)$ 可以计算为:

$$0\to \mathrm{Hom}(A,I^0)\to \mathrm{Hom}(A,I^1)\to 0 \tag{3.22}$$

的上同调。 ■

因此我们只需要考虑 $n=1$ 的情况。

Example 3.3.1

$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p,B)={}_pB.\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p,B)=B/pB$.

可以使用 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p$ 作为 $\mathbb{Z}/p$ 的投射解消计算。

因为 $\mathbb{Z}$ 是投射模, 所以 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z},B)=0$ 对于任何 B 总是成立。我们可以依据这个结果和上述结果, 在 A 是有限生成的 Abel 群时计算 $\mathrm{Ext}(A,B)$:

$$A\cong\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}/p\Rightarrow \mathrm{Ext}(A,B)=\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p,B) \tag{3.23}$$

然而无限生成的情况因为余极限不交换，要复杂得多。

Example 3.3.2: $B=\mathbb{Z}$

设 A 是一个挠群, 用 A^* 表示 Pontrjagin 对偶。$\mathbb{Z}$ 有经典的内射解消:$0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$。用这

个解消计算 $\mathrm{Ext}^*(A,\mathbb{Z})$:

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0 \tag{3.24}$$

从而 $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) = 0$,$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) = A^*$。

为了对这个例子有更深的印象, 注意到 $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 是 $\mathbb{Z}/p^n$ 的余极限 (并). 于是可以计算:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_{p^\infty})^* \tag{3.25}$$

这个群是 p-adic 整数的无挠群,$\hat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim(\mathbb{Z}/p^n)$。

再考虑一个例子:$A = \mathbb{Z}[1/p], B = \mathbb{Z}$. 此时:

$$0 \to \mathbb{Q} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0 \tag{3.26}$$

Ext^0 比较容易, 我们考虑 Ext^1. 此时给定 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 筛出掉 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Q})$ 的元素，本质上留存的是一个 p-adic 数。并且若两个 p-adic 数只差一个整数, 与他们给出的 f 是一致的。因此 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$。

这说明 Ext 对于平坦模而言也不是 vanish 的。

Example 3.3.3: $R = \mathbb{Z}/m$,$B = \mathbb{Z}/p$

$\mathbb{Z}/p$ 在这种情况下有无穷的周期内射解消:

$$0 \to \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}/m \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/m \xrightarrow{m/p} \mathbb{Z}/m \xrightarrow{p} \dots \tag{3.27}$$

于是 $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/m}(A,\mathbb{Z}/p)$ 可以计算为:

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}/m) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}/m) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}/m)\dots \tag{3.28}$$

的上同调。

比如, 若 $p^2|m$, 则 $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/p,\mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p$

Proposition 3.3.1

对于所有的 n 和 R:

1. $\mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus_\alpha A, B) \cong \prod_\alpha \mathrm{Ext}^n_R(A_\alpha, B)$
2. $\mathrm{Ext}^n_R(A, \prod_\beta B) \cong \prod_\beta \mathrm{Ext}^n_R(A, B_\beta)$

Proof. 设 P_α 是 A_α 的投射解消。于是 $\oplus P_\alpha$ 是 $\oplus A_\alpha$ 的投射解消。同理,Q_β 是 B_β 的内射解消, 则 $\prod Q_\beta$ 是 $\prod B_\beta$ 的内射解消。

根据 Hom 的性质, 再加上:

$$H^*(\prod C_\gamma) \cong \prod H^*(C_\gamma) \tag{3.29}$$

可得结果。 ■

Lemma 3.3.2

设 R 是交换环, 则 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ 和 $\mathrm{Ext}^*(A,B)$ 都是 R 模。若 μ,τ 分别是 r 的左乘 (A,B), 则诱导的 μ^* 和 τ^* 也是左乘。

可以看到, 这是 Tor 函子的相似版本, 可用于给出 Ext 与局部化交换的性质。

Proof. 给 $P\to A$ 投射解消. 左乘 r 给出了 $\tilde{mu}:P\to P$ 作为链复形映射。映射 $\mathrm{Hom}(\tilde{mu},B)$ 是 $\mathrm{Hom}(P,B)$ 上链复形, 是左乘 r.

因此商群 $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ 被 μ^* 作用也是 r 左乘。 ■

Corollary 3.3.1

设 R 是交换环,A 是 R/r 模。则对于 R 模 B,$\mathrm{Ext}^*_R(A,B)$ 是 R/r 模。

接下来的引理, 定理我们不写证明, 读者可自查 Weibel 原书。

考虑 $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(A,B)$. 其到 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}A,S^{-1}B)$ 有一个自然的态射 Φ。但这个态射一般不是同构。

Lemma 3.3.3

如果 A 是有限展示的 R 模, 则对于每个中心可乘集合 S,Φ 是同构。

不难想象证明用到的是 5 引理1.3.2。

Proposition 3.3.2

设 A 是交换 Noether 环上的有限生成模. 则 Φ 也诱导了 Ext 的同构:

$$\Phi: S^{-1}\mathrm{Ext}^n_R(A,B)\cong \mathrm{Ext}^n_{S^{-1}R}(S^{-1}A,S^{-1}B) \tag{3.30}$$

不难想到证明的思路是给 A 的投射解消。因为 S^{-1} 是正合函子, 所以保 H^*。因此用 Hom 的同构性即可给出上述同构。

Corollary 3.3.2: Ext 的局部化

设 R 是交换 Noether 环且 A 是有限生成 R 模. 则下面的命题之间对于任意 B 和 n 都等价:

1. $\mathrm{Ext}^n_R(A,B)=0$
2. 对于 R 的任何素理想 p,$\mathrm{Ext}^n_{R_p}(A_p,B_p)=0$
3. 对于 R 的任何极大理想 m,$\mathrm{Ext}^n_{R_m}(A_m,B_m)=0$.

§3.4 Ext 函子与扩张

我们在这一节探讨 Ext 到底计算了什么。为此需要介绍扩张的概念。

Definition 3.4.1

一个 A 过 B 的扩张 ξ 是指一个正合列 $0 \to B \to X \to A \to 0$. 称两个扩张 ξ, ξ' 是等价的, 若存在交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

一个扩张是分裂的, 若其等价于 $0 \to B \to A \oplus B \to 0$（典范的）。

Example 3.4.2

若 p 是素数, 则仅存在 p 个等价的 $\mathbb{Z}/p$ 过 $\mathbb{Z}/p$ 的扩张。分别是分裂扩张和:

$$0 \to \mathbb{Z}/p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/p^2 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/p \to 0, i = 1, 2, \ldots, p-1 \tag{3.31}$$

实际上 X 必须是 p^2 阶交换群。若 X 无 p^2 阶元, 则根据 $X = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p$。若 X 有 p^2 阶元, 设该元为 b。则 $pb \in \mathbb{Z}/p = B$。于是有上述 $p-1$ 种投射。

Lemma 3.4.1

若 $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$, 则 A 过 B 的扩张总是分裂的。

Proof. 给定一个扩张 ξ, 根据 $\mathrm{Ext}^*(A, -)$ 诱导的长正合列:

$$\mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, A) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A, B) = 0 \tag{3.32}$$

所以 id_A 有原像 $\sigma : A \to X$。这就是一个 $X \to A$ 的截面。所以 $X = A \oplus B$ 分裂。 ■

如果 $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ 非 0, 为了给出截面, 实际上可以计算 $\partial(\mathrm{id}_A) = 0$。我们把这个构造记作 $\Theta(\xi)$. 另外. 如果两个扩张等价, 那么他们的 $\Theta(\xi)$ 相同. 因此这个构造只依赖于 ξ 的等价类。

Theorem 3.4.1

给定两个模 A, B, 映射 $\Theta : \xi \mapsto \partial(\mathrm{id}_A)$ 给出了一个一一映射:

$$\{\text{A 过 B 的扩张的等价类}\} \to \mathrm{Ext}^1(A, B) \tag{3.33}$$

因此这个定理给出了 $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ 的一个初步作用: 确定 A 过 B 的扩张个数, 并赋予一个群结构。

Proof. 对于 B, 固定一个正合列 $0 \to B \to I \xrightarrow{\pi} N \to 0$. 其中 I 内射。作用 $\mathrm{Hom}(A, -)$, 导出一个正合列:

$$\mathrm{Hom}(A, I) \to \mathrm{Hom}(A, N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A, B) \to 0 \tag{3.34}$$

现在给定一个 $x \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$, 选定 $\beta \in \mathrm{Hom}(A, N)$ 使得 $\partial(\beta) = x$. 根据 $\beta : A \to N$ 和 $I \to N$，可以写出拉回 X:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "="] & X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & I \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

这不仅是拉回，而且可以验证 $0 \to B \to X \to A \to 0$ 是一个正合列。根据连接同态 ∂ 的自然性, 可以得到:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A,A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(A,B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(A,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(A,B) \end{array}$$

令上面的扩张是 ξ, 则 $\Theta(\xi) = x$。于是我们通过给定 $x \in \mathrm{Ext}^1(A,B)$ 给出一个扩张 ξ 使得 $\Theta(\xi) = x$。

为了给出 $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ 到等价类的映射，我们还需要说明上述过程 β 的选取不改变 ξ 的等价类。实际上选取 $\beta' \in \mathrm{Hom}(A,N)$ 使得 $\partial\beta' = x$。于是 $\beta' - \beta = \pi_*(\alpha), \alpha \in \mathrm{Hom}(A,I)$. 于是可以绘制出下面的交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, "\sigma"] \arrow[ddr, "p+\alpha\circ\sigma"'] & & \\ & X' \arrow[r, "\sigma'"'] \arrow[d, "p'"] & A \arrow[d, "\beta'"] \\ & I \arrow[r, "\pi"'] & N \end{tikzcd}$$

(交换性已经在草稿纸上验证了) 根据拉回的泛性质,X 到 X' 有一个态射.

通过具体到集合的验证，可以说明这是一个同构。所以 X 和 X' 是等价的扩张。

另一方面，给定 ξ 作为 A 过 B 的扩张,I 的延拓性质表明存在一个 $\tau : X \to I$ 满足:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "="] & X \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & I \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中 β 是 τ 诱导的态射。我们断言 X 是 β 和 $\pi : I \to N$ 的拉回。从而 $\Psi(\Theta(\xi)) = \xi$. ■

如果我们可以给出扩张的运算，就能更好的理解上述的对应。

Definition 3.4.3: Baer 和

设 ξ 和 ξ' 分别是 A 过 B 的两个扩张。设 X'' 是 $X \to A$ 和 $X' \to A$ 的拉回。则 X'' 包含了三份 B:$B \times 0, 0 \times B, \{(-b, b) : b \in B\}$。

作 X'' 对于对角线 B 的商运算，则 $B \times 0$ 和 $0 \times B$ 被对应为一个子群。而 $X''/0 \times B \cong X$ 和 $X/B = A$, 则我们得到正合列:

$$\varphi : 0 \to B \to Y \to A \to 0 \tag{3.35}$$

φ 的等价类被称为 ξ 和 ξ' 的 Baer 和。

Proposition 3.4.1

扩张等价类的集合在 Baer 和的意义下生成了一个交换群, 分裂扩张是该和的幺元。从而 Θ 给出了一个群同构。

Proof. 我们说明 $\Theta(\varphi) = \Theta(\xi) + \Theta(\xi')$. 这说明了 Baer 和的良定性, 也给出了命题成立。

固定 $0 \to M \to P \to A \to 0$ 是一个正合列, 且 P 是投射模。因为 P 投射, 所以给出 $\tau : P \to X$ 和 $\tau' : P \to X'$。

接下来设 $\tau'' : P \to X''$ 是由 $\tau : P \to X$ 和 $\tau' : P \to X'$ 诱导而来的态射。而设 $\bar{\tau} : P \to Y$ 是诱导的态射。

我们断言 $\bar{\tau}$ 限制在 M 上由映射 $\gamma+\gamma' : M \to B$ 诱导。所以下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma+\gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

成立。

因此我们有 $\Theta(\varphi) = \partial(\gamma+\gamma')$. 然而 $\partial(\gamma+\gamma') = \partial(\gamma)+\partial(\gamma') = \Theta(\xi)+\Theta(\xi')$. 所以命题成立。 ■

借助上述的命题，我们实际上可以思考这样的问题: 如果一个 Abelian 范畴没有足够的投射模和内射模, 我们也可以借助扩张生成的交换群来定义 Ext^1. 当然这里的交换群仍需要证明。

相似的，我们也可以思考 Ext^n 的含义。我们在这里建议大家阅读原书的 79 页到 80 页内容。

§3.5 逆向极限的导出函子

设 I 是一个小范畴 (即对象集和态射集都是集合)。$\mathcal{A}$ 是一个 Abelian 范畴。在第二章，我们说明了 $\mathcal{A}^I$ 有足够多的内射对象。（至少是 A 完备且有足够多内射对象的时候）。另外，容易验证逆向极限是左正合函子（保核）。

因此我们可以定义从 $\mathcal{A}^I$ 到 $\mathcal{A}$ 的右导出函子 $R^n \varprojlim_{i\in I}$。

我们在这一节关注 $\mathcal{A}$ 是 Ab 且 I 是 $\cdots \to 2 \to 1 \to 0$。我们把 Ab^I 中的元素称作交换群的“塔”。他们的具体形式是:

$$\{A_i\} : \cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0 \tag{3.36}$$

这一节我们具体给出 $\lim^1$ 的具体构造, 并且证明 $R^n \varprojlim = 0, n \neq 0, 1$。

我们自然想问这样的构造是否可以拓展为其他的 Abelian 范畴。Grothendieck 告诉我们，在满足下面公理的情况下该范畴可以:

(AB4*):$\mathcal{A}$ 是完备的, 且任何集合的满射的乘积都是满射。

满足该公理的范畴大多是有 underlying 集合的范畴 (交换群, 模范畴, 链复形范畴), 但是在层范畴失效。

Definition 3.5.1

给定 Ab 中的一个塔 $\{A_i\}$。定义映射:

$$\Delta : \prod_{i=0}^{\infty} \to \prod_{i=0}^{\infty} A_i \tag{3.37}$$

为:

$$\Delta(\ldots, a_i, \ldots, a_0) = (\ldots, a_i - \bar{a}_{i+1}, \ldots, a_1 - \bar{a}_2, a_0 - \bar{a}_1) \tag{3.38}$$

其中 $\bar{a}_{i+1}$ 代表 $a_{i+1} \in A_{i+1}$ 在 A_i 中的项。

容易看出 Δ 的 ker 是 $\varprojlim A_i$. 我们定义 $\varprojlim^1 A_i$ 是 Δ 的余核, 从而 $\varprojlim^1$ 是从 Ab^I 到 Ab 的函子。我们定义 $\varprojlim^0 A_i = \varprojlim A_i$,$\varprojlim^n A_i = 0, n \geq 2$.

上述定义给出了具体的构造。当然我们需要说明这是符合要求的函子。

Lemma 3.5.1

函子 $\{\varprojlim^n\}$ 给出了一个上同调 δ 函子。

Proof. 设 $0 \to \{A_i\} \to \{B_i\} \to \{C_i\} \to 0$ 是塔的一个短正合列。用蛇形引理:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \prod A_i & \longrightarrow & \prod B_i & \longrightarrow & \prod C_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod A_i & \longrightarrow & \prod B_i & \longrightarrow & \prod C_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

就可以得到我们想要的自然长正合列。 ■

Lemma 3.5.2

若所有的 $A_{i+1} \to A_i$ 都是满射, 则 $\varprojlim^1 A_i = 0$. 更多的,$\varprojlim A_i \neq 0$(除非每个 A_i 都是 0), 因为每个自然投射 $\varprojlim A_i \to A_j$ 都是满射。

Proof. 给定 $b_i \in A_i (i = 0, \dots, n)$, 以及任何 $a_0 \in A_0$。归纳的选择 $a_{i+1} \in A_{i+1}$: 使得 a_{i+1} 是 $a_i - b_i \in A_i$ 在 A_{i+1} 中的提升。

从而 Δ 将 $(\dots, a_1, a_0)$ 映射到 $(\dots, b_1, b_0)$. 因此这种情况下 Δ 是满射，$\varprojlim^1 A_i = 0$。如果 $b_i = 0$,$(\dots, a_1, a_0) \in \varprojlim A_i$. ■

Corollary 3.5.1

$\varprojlim^1 A_i \cong (R^1 \varprojlim)(A_i)$ 且 $R^n \varprojlim = 0, \forall n \neq 0, 1$

Proof. 我们说明 $\varprojlim^n$ 形成了一个泛 δ 函子，从而根据泛性说明上述成立。我们只需要说明 $\varprojlim^1$ 在足够多的内射对象（应付内射解消）上 vanish。

我们在第二章给出了足够多的内射对象:

$$k_* E : \dots = E = E \to 0 \to 0 \dots \to 0 \tag{3.39}$$

其中 E 内射。因此这里面所有的态射都是满射，因此 $\varprojlim^1$ 在这些内射塔上都 vanish。 ■

上述的证明在 AB4* 的情况下总是对的。我们给出反例（不满足 AB4*）。

Example 3.5.2

设 $A_0 = \mathbb{Z}$ 且 $A_i = p^i\mathbb{Z}$ 是 p^i 生成的子群。对短正合列 (p 是素数):

$$0 \to \{p^i\mathbb{Z}\} \to \{\mathbb{Z}\} \to \{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\} \to 0 \tag{3.40}$$

使用 $\varprojlim$.

从而 $\varprojlim^1\{p^i\mathbb{Z}\} \cong \hat{\mathbb{Z}}_p/\mathbb{Z}$.

下面这个命题在原书上是习题。我们仅作记录，证明省略。(可以查找 mathstackexchange)。

Proposition 3.5.1

设 $\{A_i\}$ 是一个塔,$A_{i+1} \to A_i$ 是包含映射。把 $A = A_0$ 看作拓扑群, 其中 $a + A_i (a \in A, i \geq 0)$ 是开集。

则 $\varprojlim A_i = \cap A_i = 0$ 当且仅当 A 是 Hausdorff 的.$\varprojlim^1 A_i = 0$ 当且仅当 A 在下列意义是完备的: 每个柯西列都有不一定唯一的极限点.

提示: 证明 A 是完备的, 当且仅当 $A \cong \varprojlim(A/A_i)$

Definition 3.5.3

我们称一个塔 $\{A_i\}$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 若对于每个 k 都存在一个 $j \geq k$ 使得 $A_i \to A_k$ 的像等于 $A_j \to A_k$, 对于任意 $i \geq j$ 成立。(即 A_i 在 A_k 的像满足降链条件)。

例如，若 $\{A_i\}$ 都是满射, 该塔就满足 M-L 条件。

有一种平凡的情况: 若对于每个 k 都存在一个 $j \geq k$ 使得 $A_i \to A_k$ 的像是 0, 我们称该塔满足平凡 M-L 条件。

Proposition 3.5.2

若 A_i 满足 M-L 条件, 则:$\varprojlim^1 A_i = 0$

Corollary 3.5.2

设 $\{A_i\}$ 是有限 Abel 群的塔, 或者是有限维向量空间上的塔, 我们都有 $\varprojlim^1 A_i = 0$

下面的定理预示了下一节的泛系数定理。

Theorem 3.5.1

设 $\cdots \to C_1 \to C_0$ 是 Ab 的链复形的塔链。(每个 C_i 都是链复形)，且满足 ML 条件。设 $C = \varinjlim C_i$。则对于每个 q 都存在一个正合列:

$$0 \to \varprojlim^1 H_{q+1}(C_i) \to H_q(C) \to \varprojlim H_q(C_i) \to 0 \tag{3.41}$$

若 $\ldots C_1 \to C_0 \to 0$ 是上链复形的塔链且满足 ML 条件。则:

$$0 \to \varprojlim^1 H^{q-1}(C_i) \to H^q(C) \to \varprojlim H^q(C_i) \to 0 \tag{3.42}$$

正合。

在拓扑上，这个定理有一个类似的版本。考虑 X 是 CW 复形, 而 X_i 是 X 的上升子复形链, 使得 $X = \cup X_i$. 则存在一个正合列:

$$0 \to \varprojlim^1 H^{q-1}(X_i) \to H^q(X) \to \varprojlim H^q(X_i) \to 0 \tag{3.43}$$

可以一眼看出这个公式的便利之处: 可以根据子群的同调群计算最大的群的同调群。

Example 3.5.4

设 A 是 R 模。

§3.6 泛系数定理

Chapter 4

同调维数

Chapter 5

谱序列

Chapter 6

群同调和上同调

Chapter 7

李代数同调和上同调