交换代数课程笔记 • 2023 春

整理者：颜成子游/南郭子綦

2023 年 5 月 29 日

目录

1 课程简介

授课老师：于世卓 (今年瘦了好多，代数果然减肥捏)

1.1 什么似交换代数？

代数几何　交换代数　不变理论　数论

交换代数起源于不变理论:Hibert14 问题：

群 G 作用在 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 上，k 是域，则 $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 的不变子环是不是一个有限生成的 k-代数？

例 1.1 G 是置换群 Σ_n。$R = k[x_1, \ldots, x_n]$，$\sigma \in G, f \in R, \sigma(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$。

则不变子环 $R^G = k[f_1, \ldots, f_n]$，其中 f_i 是对称多项式。对称多项式不再赘述。

例 1.2 (Hibert(1890)) $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$。char$k=0$。此时 Hibert14 问题正确。

例 1.3 (Noether) G 有限群，char$k\geq 0$ 时，Hibert14 问题也成立。

Neother 的老师 P.Gordan(King of Invariant theory)

Nagata(永田雅宜) 构造出了 Hibert14 的反例，同时与 Habosh 合作，证明了有限生成与 G 是约化群等价。

发展：几何上不变理论。

例 1.4 (Hilbert1900) k 是域，$R=k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$。若 K 是域且 $k\subset K\subset \mathrm{Frac}R$，则 $K\cap R$ 是否为有限生成的 k 代数？

Nagata，Rees 给出了反例。Zarski 给出了 $\deg(K/k)\leq 2$，结论正确。

代数几何：

揭示了代数与几何的关系。

有 1 交换环 R 和概型 Spec$R$ 是 R 的素理想 +Zarski 拓扑。

数论 Fermat 大定理是代数几何的第三阶段。原因是转化为代数几何问题：椭圆曲线与模形式。($a^n+b^n=c^n, n\geq 3$ 无正整数解。)

Frey 猜想 (1985)：Fermat 方程有正整数解可以推出椭圆曲线 $y^2=x(x-a^n)(x+b^n) \quad over \quad \mathbb{Q}$ 不是模曲线。

解决：Step1(Rebet): 证明了 Frey 猜想。

Step2(Wiles)：任意椭圆曲线都是模曲线。

1.2 课程内容与考核

内容：IT+DT，即不变理论和维数理论。

下面简单介绍一下维数理论：

1. 多项式环 $k[x_1,\ldots,x_n]$ 的“维数”。若考虑其为线性空间，则是无穷维的。如果考虑 Krull 维数，则 $\dim=n$。

2. 奇点。切空间维数 >Krull 维数。

主要定理：Hibert 四大定理。Hibert 基定理，Hibert 零点定理，Hibert • Syzygy 定理，Hibert 多项式定理。

考核：50+50

1.3 参考书

1.Invariant theory 8-12 章。（入门和例子）

2.GTM.150 Eisenbud “字典”0-4,15.

3.Atiyah-Macdonald 练习册

2 复习与回顾（从略）

2.1 群作用

定义 2.1 (对偶空间的群作用) 设 G 作用在 $V=\mathbb{F}^n$ 上，V 的基底为 $e_1,\dots,e_n$。对偶空间 V^* 的基地为 $\chi_1,\dots,\chi_n$。其中 $\chi_i(e_j)=\delta_{ij}$。

定义 $G\times V^*\to V^*: g\cdot\chi_i(e_j)=\chi_i(g^{-1}e_j)$

经过验证，这是一个左作用。

例 2.1 Σ_n 作用在 V 上，V 的维数是 n。则 $(\sigma,e_i)=e_{\sigma(i)}$。该作用诱导了群作用:

$$G\times V^*\to V^*:(\sigma,\chi_i)\mapsto\chi_{\sigma(i)}$$

这是因为:

$$\sigma\cdot\chi_i(e_j)=\chi_i(\sigma^{-1}e_j)=\chi_i(e_{\sigma^{-1}(j)})=\chi_{\sigma(i)}(e_j)$$

2.2 环与代数

定义 2.2 (交换环的定义) 常识

注解 (关于非幺环) 没有 1 的环可以" 嵌入" 到 (单同态) 到幺环中, 但是性质不一定保持不变。即 Dorrol 嵌入:

设 R 是一般的环，考虑幺环 $\mathbb{Z}\times R$:

$$(n,a)+(m,b)=(n+m,a+b)\qquad(n,a)(m,b)=(mn,nb+ma+ab)$$

可以验证此环的幺元为 $(1,0_R)$。

注解 (关于非交换环)

(1) 一些非交换环具有一定的交换性，亦可" 交换化"。例如下面的" 微分算子环"：

$$A=\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$$

这不是一个交换环。因为:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}x_i-x_i\frac{\partial}{\partial x_i}=1$$

因为:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_if)=x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+f$$

(2) 非交换环的交换子: $[a,b]=ab-ba$ 满足 Jacobbi 恒等式:

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0$$

Ado 定理：任何有限维的 Lie 代数都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的子代数。

(3) 微分算子环的对称化:

$$A:A_0\subset A_1\subset A_2\dots A_i\dots$$

其中 $A_0=\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$。其中 $A_i:=\{\xi\in A|[\xi,f]\in A_{i-1},\forall f\in\mathbb{R}[x_1,x_2,\dots,x_n]\}$。即 i 阶微分算子构成的集合。

此时滤子:$R:=A_0\oplus A_1/A_0\oplus A_2/A_1\dots$ 是交换环。

定义 2.3 (分次环) 环 R 称为分次环，如果 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \dots$（群直和）使得 $R_i R_j \subset R_{i+j}$。

例 2.2 显然最直接的例子是 $R[x_1, \dots, x_n]$。其是所有 k 次多项式组成的群的分次环。

定义 2.4 (环同态) 常识

定义 2.5 (环同态定理) 常识

定义 2.6 (代数) R, S 都是环，若存在环同态 $\varphi : R \to S$，则 S 称为 R-代数。

直观上看，R 为系数多项式。即给 R 多项式赋值 $s \in S$ 得到 S 中的值。

一个 R-代数 S 自然满足：存在 φ 诱导群作用：

$$R \times S \to S, \quad (r, s) \mapsto r \cdot s := \varphi(r)s$$

使得：$r(s+s') = rs + rs', (r+r')s = rs + r's, (rr')s = r(rs')$

定义 2.7 (代数的生成) 若 R-代数:$S = R[s_1, s_2, \dots,]$,$s_1, s_2, \dots \in S$。则称 $s_1, s_2, \dots$ 是 R-代数的生成元。

例 2.3 (1) 任意环 S 都是 $\mathbb{Z}$-代数。$\varphi(n) \mapsto n \cdot 1_S$.

(2) 任意环是其子环 R 的 R-代数。

(3) 多项式环 $R[x_1, \dots, x_n]$ 是 $R-$ 代数。

$$R \to R[x_1, \dots, x_n], \quad r \mapsto r$$

定义 2.8 (代数同态) 设 S, S' 都是 R-代数，环同态 $\varphi : S \to S'$ 满足 $\varphi(rs) = r\varphi(s)$，则称 φ 为 $R-$ 代数同态。

2.3 多项式环上的群作用和代数

设 $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ 是多项式环，$G \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ 是 $V = \mathbb{F}^n$ 上的群作用。则 $G \times (\mathbb{F}^n)^* \to (\mathbb{F}^n)^*$ 是 V^* 上的群作用：$(gx_i)(v) = x_i(g^{-1}v)$。

则可以定义:

$$G \times \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] : (g, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}) \mapsto (gx_1)^{i_1} \dots (gx_n)^{i_n}$$

只要定义了单项式，则很容易线性的定义多项式。这里不再赘述。

注意：上述群作用全部由最开始的 G 作用在线性空间 $\mathbb{F}^n$ 诱导。

命题 2.1 (G 作用下的不变子集) $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]^G := \{f \in \mathbb{F}[V] : gf = f, \forall g \in G\}$ 是 $\mathbb{F}[V]$ 的子环。其自然是 $\mathbb{F}$ 代数，称为不变子环（代数）。

证明 $g \cdot 1 = g(1 \cdot 1) = (g \cdot 1)^2$ 于是 $g \cdot 1 = \alpha$，α 只能为 1 或者 0.

若 $\alpha = 0$，则 $g \cdot f = 0$ 这是平凡的。

若 $\alpha = 1$。则 $gk = k, \forall k \in \mathbb{F}$. 于是 $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]^G$. 接下来需要验证的是子环。这是比较显然的。因为:

$$g(f_1 - f_2) = gf_1 - gf_2 = f_1 - f_2, \quad g(f_1 f_2) = (gf_1)(gf_2) = f_1 f_2$$

例 2.4 $G = \Sigma_n$ 作用在 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$。则对应的 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^G = A^G = \mathbb{F}[s_1, \ldots, s_n]$。

其中 $s_1 = x_1 + \cdots + x_n$，$s_2 = x_1x_2 + \cdots + x_nx_1$，$s_n = x_1 \ldots x_n$。

例 2.5 $G = A_n$ 是交错群。G 同样作用在 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 上。则:$A^G = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, \triangledown]$。$\triangledown$ 是范德蒙德行列式:$\triangledown = \Pi_{i<j}(x_i, x_j)$。

上述两个例子有一个本质差异。在第一个例子中，$s_1, \ldots, s_n$ 是代数无关的。但是第二个例子中，$s_1, dots, s_n, triangledown$ 是代数相关的。

比如，当 $n = 2, \triangledown_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$。故 $\triangledown_2^2 - s_1^2 + 4s_1s_2 = 0$。

例 2.6 $G = \mathbb{Z}/3Z$ 作用在 $A = \mathbb{C}[x, y]$ 上。作用为 $(w)f(x, y) = f(wx, wy)$,w 是 $e^{2/3\pi i}$。则 $x^a y^b \in A^G \Leftrightarrow 3|(a + b)$。

结论是，$A^G = \mathbb{C}[x^3, x^2y, xy^2, y^3]$。令这四个元为 z_0, z_1, z_2, z_3. 他们蕴含关系:

$$z_0z_3 - z_1z_2 = 0, \quad z_0z_2 - z_1^2 = 0, \quad z_1z_3 - z_2^2 = 0$$

这是一阶关系。同时，设这些关系左边的式子为 a_1, a_2, a_3，则蕴含关系:

$$z_1a_1 + z_2a_2 + z_3a_3 = 0, \quad z_0a_1 + z_1a_2 + z_2a_3 = 0$$

第一列关系称为 1 阶 syzygy，第二列关系称为 2 阶 syzygy。详情可见 syzygy 定理。

例 2.7 (二项式的不变理论) 设 G 是二阶特殊线性群。（行列式为 1）设 V_d 是空间 $\mathbb{C}[x, y]$ 即 d 阶齐次多项式。其作为向量空间同构于 $\mathbb{C}^{d+1}$。

为了让 G 作用在 $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ 上，我们首先让 G 作用在 $\mathbb{C}^2$ 上，然后定义 G 作用 V_d 上:$(g)f(x, y) = f(g^{-1}v)$。由于 V_d 与 $\mathbb{C}^{d+1}$ 同构，所以该作用也可以看作在 $\mathbb{C}^{d+1}$ 的作用。从而我们定义了 $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_d]$ 上的作用。

当 $d = 2$ 时，$V_2 = \{f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, a_i \in \mathbb{C}\}$。其同构于 $\mathbb{C}^3$. 让 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ 作用在 $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2]$ 上。

验证:$g = a_1^2 - a_0a_2$ 是不变的，即 $g \in \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$。

相关的定理:

(1)$d = 2, \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} = \mathbb{C}[a_1^2 - a_0a_2]$

(2)$d = 3$, 生成元为 1 个。$d = 4$, 生成元是 2 个。$d = 7$ 生成元是 30 个，$d = 9$ 时生成元是 92 个。

2.4 群表示与不变子环

性质 1: 由 $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 作为一个群表示诱导群作用 $G \times \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. 令 $H = G/\ker\rho$, 则 H 也有到 V 上的群作用。此时，$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^G = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^H$。

也就是说我们可以只考虑忠实表示的群作用。

定义 2.9 表示 ρ_1 和 ρ_2 被称为是等价的，若存在 $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$，使得 $\rho_2 = T^{-1}\rho_1T$。

命题 2.2 若 ρ_1 和 ρ_2 是等价的表示，则 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^{\rho_1} = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^{\rho_2}$

3 模与代数

3.1 模与代数的定义

略

例 3.1 (群环) 给定群 G，考虑 G 是交换群。F 是域。定义群环 $\mathbb{F}G$ 为形式和:

$$\mathbb{F}G = \{\sum_{g\in G} d_g g, d_g \in \mathbb{F}\}$$

其中 g 为形式和。$\mathbb{F}G$ 是环，这一点是显然的。

若给定群表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$，表示空间则立马成为 $\mathbb{F}G$-模。定义是明显的。因而要求有限和。

给定 $\mathbb{F}G$ 模，$\mathbb{F}G \times V \to V$.

3.2 子模与理想

我们补充一个模的例子。

例 3.2 令 $\mathbb{F}[V]$ 是 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$，$V$ 的维数是 n，G 是有限群。定义:

$$\mathrm{Tr}_G : \mathbb{F}[V] \to \mathbb{F}[V], \quad f \mapsto \sum_{g\in G} g \cdot f$$

是 $\mathbb{F}[V]^G$-模同态。称为一个变换。

注意:

1.$\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}^G) = \mathbb{F}[V]^G$

2.Tr^{G} 不是 $\mathbb{F}$-代数同态。即 $\mathrm{Tr}^G(f_1 f_2) \neq \mathrm{Tr}^G(f_1)\mathrm{Tr}^G(f_2)$.

定义 3.1 设 $\mathbb{F}$ 是一个特征值为 0 的域。π^G:$\mathbb{F}[V] \to \mathbb{F}[V]^G$。$\pi^G(f) = \dfrac{1}{|G|}\mathrm{Tr}^G(f)$ 称为平均算子。

平均算子显然有性质:

(1)π^G 是满的模同态，则 $\pi^G(f) = f, \forall f \in \mathbb{F}^G(V)$

(2) 设 f 的轨道为 $o(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$。则 $\pi^G(f) = \dfrac{|G_f|}{|G|}(f_1 + \cdots + f_k)$。

3.3 轨道陈类方法 (Orbit chern class)

设 G 是有限群，$\mathbb{F}$ 是域且 $\mathrm{char}F = 0$。设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ 是忠实表示。则 G 自然的有在 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 的作用。

令 $o(x_i) = \{f_{i1}, \ldots, f_{ik}\}$。称之为 Chern roots. 按照初等对称多项式的方式，我们把陈根进行组合:

第一陈类:$f_{i1} + \cdots + f_{ik} := c_1(x_i)$

第二陈类:$\sum\limits_{\alpha<\beta} f_{i\alpha} f_{i\beta} := c_2(x_i)$。

...

最高陈类:$f_{i1} \cdots f_{ik} := c_k(x_i)$.

我们看一些陈类的应用:

例 3.3 $\rho : \mathbb{Z}_k \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$:

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \omega^k = 1$$

其中 ω 是本原根。

从而 $\mathbb{Z}_k$ 自然有到 $\mathbb{C}[x, y]$ 的作用。可以验证:$1 \cdot (x, y) = (\omega x, \omega y)$。

从而生成元 x 的陈根是:$\{x, \omega x, \omega^2 x, \ldots, \omega^{k-1} x\}$。$y$ 的陈根类似。

经过计算得到 $c_1(x) = c_2(x) = \cdots = c_{k-1}(x) = 0$。而 $c_k(x) = x^k$，若 k 是奇数。$c_k(x) = -x^k$，若 k 是偶数。

我们有以下结果:

1. $\mathbb{C}[x^k, y^k]$ 并非 $\mathbb{C}[x, y]^G$。
2. $\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[c_k(x), c_k(y), c_k(x + \omega^i y)]$。$i = 1, \ldots, k-1$。

定理 3.1 G 是有限群，F 是特征为 0 的域。$\rho : G \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{F})$ 是忠实表示。则 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 是由轨道陈类 $\{c_i(l) : l \in V^*\}$ 生成 $\mathbb{F}$ 代数。

引理 3.2 $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \sum_{l \in V^*} \alpha_l$

证明 由于 $\pi^G : \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^G$ 是满的模同态，我们只需证明 $\pi^G(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \subset A$. □

3.4 Hibert 基定理方法

定义 3.2 (Noether 环与 Noether 模) 若 R 的每个理想都是有限生成的，则称 R 是 Noether 环。若 R-模 M 的每个子模都是有限生成的，则称之为 Noether 模。

例 3.4 $\mathbb{F}$ 是域.

定理 3.3 (Hilbert 基定理)

下述命题都是成立的。

若 R 是 Noether 环，则多项式环 $R[x_1, \ldots, x_n]$ 也是 Noether 环。

若 S 是 Noether 环，R 是有限生成的 S 代数，则 R 是 Noether 环.

若 R 是 Noether 环，则有限生成的 R-模 M 是 Noether 模。

例 3.5 $\mathbb{F}$ 是域，$\mathbb{F}[x, y]$ 是环。任取 $\mathbb{F}[x, y]$ 的理想 I，都对应一个所谓的“凸集”。

$$\begin{array}{ccccc} y^4 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^2 & xy^2 & x^2y^2 & \ldots & \ldots \\ y & xy & x^2y & x^3y & \ldots \\ 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots \end{array}$$

此时 I 的生成元可以对应为整除关系下的极小元即图中的凸点，即生成理想包含关系下的极大元。

注明: 有限生成的理想 I 与 $\mathbb{F}$ 的集并不一定是有限生成的 $\mathbb{F}-$ 代数。例如，$(x)\cup\mathbb{F}$ 不是有限生成的代数。其写为:

$$\mathbb{C}[x, xy, xy^2, \dots, xy^n, \dots]$$

定理 3.4 G 是有限群 (不可推广到 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$),$\mathbb{F}$ 是特征为 0 的域。G 作用在 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 上。$\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]^G$ 是有限生成的 $\mathbb{F}$-代数。

证明 Key Point 1: 将环分次。

记 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$=$R_0\oplus R_1\dots$。对应的,$\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]^G$ 可以分解为 $I_0\oplus I_1\oplus I_2\dots$.

设 J 是 $\mathbb{F}[x]$ 中由 $I_1, I_2,\dots$ 生成的理想。即:

$$J = RI_1 + RI_2 + \cdots \subset R$$

Key Point 2:Hilbert 基定理：J 是有限生成的，生成元是 $a_1,\dots,a_k$。下证 $R^G=\mathbb{F}[a_1,\dots,a_k]$，即对于 $f\in R^G, f\in\mathbb{F}[a_1,\dots,a_k]$.

我们对 $\deg(f)$ 进行归纳证明。若 $\deg f=0$，则 $f\in\mathbb{F}\subset\mathbb{F}[a_1,\dots,a_k]$ 自然成立。

现在假设 $\deg f\le m$ 的情况都已经成立。对于 $\deg f=m+1>0$ 而言，有:

$$f = f_{\deg=0} + f_{\deg>0} = c_0 + a_1c_1 + \cdots + a_kc_k, \quad c_k\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$$

Key Point 3: 应用平均算子得:

$$f = \pi^G(f) = \pi^G(a_1c_1) + \cdots + \pi^G(a_kc_k) + c_0 = a_1\pi^G(c_1) + \cdots + a_k\pi^G(c_k) + c_0$$

由于 $\pi^G(c_i)\in R^G$ 且 $\deg\le m$，根据归纳假设 $\pi^G(c_i)\in\mathbb{F}[a_1,\dots,a_k]$，从而得到:$f\in\mathbb{F}[a_1,\dots,a_k]$。 □

4 Noether

4.1 Noether 环

命题 4.1 (Noether 环的等价定义) (1)R 的任意理想都是有限生成的。

(2) 任何严格理想升链长度有限:

$$I_1\subset I_2\dots$$

(3) 设 S 是 R 中的所有理想。用包含定义偏序关系，S 的任意非空子集有极大元。

注记：(2) 中的升链不可以变为降链。即升链有限长无法推出降链有限长。但是反之是可以的。

定义 4.1 降链有限长的环称之为 Artin 环。Artin 环一定是 Noether 环。

例 4.1 $\mathbb{Z}$ 是 Noether 环。但是 $(2)\supset(4)\supset(8)\dots$ 无限长。

命题 4.2 (Noether 模的等价定义) (1)R 的任意子模都是有限生成的。

(2) 任何严格子模升链长度有限:

$$I_1\subset I_2\dots$$

(3) 设 S 是 M 中的所有子模。用包含定义偏序关系，S 的任意非空子集有极大元。

命题 4.3 (Hibert 基定理)
下述命题都是成立的。
若 R 是 Noether 环，则多项式环 $R[x_1,\dots,x_n]$ 也是 Noether 环。
若 S 是 Noether 环，R 是有限生成的 S 代数，则 R 是 Noether 环.
若 R 是 Noether 环，则有限生成的 R-模 M 是 Noether 模。

证明 考虑 I 是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 的理想，分次可得 $I=I_0+I_1+\cdots+I_k$。 □

推论 4.1 (Hilbert 基定理的推论) 若 R 是诺特环，则 R/I 是诺特环。因为 R/I 中的理想与 R 中包含 I 的理想有一一对应。故 R/I 中的理想是有限生成的。

推论 4.2 Noether 环同态像是 Noether 环。

证明 设 $\varphi: R\to S$，根据同构定理，$\varphi(R)=R/\ker(\varphi)$ 是 R 的商环。所以 $\varphi(R)$ 也是诺特环。 □

定理 4.3 R 是 Noether 环可以推出若 S 是有限生成的 R 代数，则 S 是 Noether 环。

证明 设 $S=R[s_1,\dots,s_n]$. 则 $S\cong R[x_1,\dots,x_n]/\ker(\varphi)$，其中 $\varphi: x_k\mapsto s_k$ 是环同态。 □

4.2 Grobner 基的存在性和域上的 Hilbert 基定理

设 I 是域 $\mathbb{F}$ 上多项式的理想。考虑 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 中的单项式。我们定义字典序：

定义 4.2 (字典序) $Ax_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}>Bx_1^{b_1}\dots x_n^{b_n}$ 等价于 $a_1>b_1$ 或者 $a_1=b_1$ 且 $a_2>b_2$
而次数字典序则定义为 $m_1=Ax_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}>m_2=Bx_1^{b_1}\dots x_n^{b_n}$ 等价于 $\deg(m_1)>\deg(m_2)$ 或者 $\mathrm{def}(m_1)=\deg(m_2)$ 且 $m_1>m_2$ 在字典序中成立

定义 4.3 (整除偏序) $m_1<m_2\Leftrightarrow m_1|m_2$。

定义 4.4 (单项式序) 单项式集合上的全序满足:

1. $m\geq 1,\forall m=Ax_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$
2. 若 $m_1\geq m_2$，则 $mm_1\geq mm_2$ 对于所有 m 成立。

例 4.2 字典序，次数字典序都是单项式序。整除偏序不是单项式序。

定义 4.5 (Grobner 基) 设 $<$ 是 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 上的单项式序。$\mathbb{F}$ 是域。

$$f\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]\to\mathrm{LT}(f)$$

定义为 f 在 $<$ 下最大的单项式。
而对于 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 的理想 I，定义 $\mathrm{LT}(I):=(\mathrm{LT}(f),f\in I)$。
有限集合 $\{g_1,\dots,g_n\}$ 称为 I 的 Grobner 基，若 $g_1,\dots,g_n$ 生成了 I 且 $\mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_n)$ 生成了 $\mathrm{LT}(I)$.

例 4.3 设 $I=(g_1,,g_2)$ 是 $\mathbb{F}[x,y]$ 的理想。$g_1=xy+1$,$g_2=x+y$。令 $f=x^2y+y$。考虑 f 是否为 I 里面的元素。

我们对 g_1,g_2 做带余除法，则 $f=xg_1-g_2+2y$，同时也等于 $f=xyg_2-yg_1-2y$。注意到余数随做带余除法的顺序而改变。

但是如果 $g_1,\dots,g_n$ 本身是 Grobner 基，就可以说明余数与带余除法的顺序无关。

定理 4.4 固定单项式序 $<$ 和理想 $I\subset\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 的 Grobner 基 $\{g_1,\dots,g_n\}$。则:

1. $\forall f\in R$ 可以唯一分解为 $f=f_I+r$，其中 $f_I\in I.r$ 中的单项式不整除任意的 g_i.
2. $f\in I$ 等价于 $r=0$。

证明 对于 $g_1,\dots,g_m$ 做带余除法（任意次序）得到 $f=f_I+r,f=f_I'+r'$. 则 $\mathrm{LT}(r-r')\in\mathrm{LT}(I)$。则单项式 $\mathrm{LT}(r-r')=m\mathrm{LT}(g_i)$。则:

$$\deg(r-r')\geq \deg g_i\Rightarrow r-r'=0$$

第二个命题显然。 □

接下来我们说明域上加强版的 Hilbert 基定理。

定理 4.5 对于理想 $I\subset\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$,$I$ 存在 Grobner 基。

引理 4.6 若 $g_1,\dots,g_m$ 满足 $(\mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_m))=\mathrm{LT}(I)$，则 $g_1,\dots,g_m$ 生成了 I。

证明 对于 $f\in I$，考虑带余除法 $f=c_1g_1+\cdots+c_mg_m+r$。则 $r\in I$ 且 $\mathrm{LT}(r)\in\mathrm{LT}(I)=(\mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_m))$。从而 $\mathrm{def}(r)\geq\deg(g_i)$ 对于某个 g_i 来说恒成立。于是 $r=0$. □

引理 4.7 (Dickson 引理) 设 S 是 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 上任意单项式的集合。则 S 在整除偏序关系下只存在有限个极小元。

证明 证明比较难以呈现出来。这里就略去了。 □

接下来我们证明定理4.5。

证明 (定理4.5的证明) 由 Dickson 引理可知,$\mathrm{LT}(I)$ 由有限个极小元 $L_1,\dots,L_n$ 生成。因为 $\mathrm{LT}(I)$ 由若干个单项式 S 生成，S 由其整除偏序下极小元集合生成。而由引理4.6，则 $I=(g_1,\dots,g_m)$，其中 $g_1.\dots,g_m\in I$ 满足 $\mathrm{LT}(g_i)=L_i$。 □

5 模的正合列

5.1 正合列的概念

定义 5.1 (模的正合列) 略

例 5.1 设 A,B 是 R 模。则:

$$0\to A\to A\oplus B\to B\to 0$$

是一个正合列。

例 5.2 设 B 是 A 的子模。则:

$$0 \to B \to A \to A/B$$

是显然的正合列。

例 5.3 (自由解消) 设 M 是 (m) 生成的模，满足 $r_1 m = \cdots = r_n m = 0$ 即 n 个关系。

考虑 $R^n \to R \to M \to 0$ 是正合列。其中 $e_i \mapsto r_n$。$r \mapsto rm$. 称为 M 的一个表现。

上述例子显然可以拓展:

例 5.4 考虑 M 的两要素: 生成元 B 和关系集合 A。即设 ker 的生成元是 A.

则:

$$R^A \to R^B \to M \to 0$$

也是正合列，称为 M 的一个表现。

例 5.5 设 $G = \mathbb{Z}_3$ 作用在 $\mathbb{C}[x,y]$ 是二元多项式集合。$\sigma(x,y) = (\omega x, \omega y)$。

从而 $\mathbb{C}[x,y]^G = \mathbb{C}[x^3, x^2y, xy^2, y^3]$（意料之中的）。定义 $z_0 = x^3, \ldots, z_3 = y^3$。设 $R = \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$。则 $\mathbb{C}[x,y]^G$ 是 R 模。定义 $z_i \cdot z_j(x,y) := z_i(x,y)z_j(x,y)$。

3 个 1 阶 Syzygy 关系:

1. $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$
2. $z_1^2 - z_0 z_2 = 0$
3. $z_2^2 - z_1 z_3 = 0$

令上述关系为 a_1, a_2, a_3. 有 2 阶 Syzygy 关系:

1. $z_0 a_1 + z_1 a_2 + z_2 a_3 = 0$
2. $z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 = 0$

定义 b_1 和 b_2 为上述关系，则 b_1, b_2 已经实现线性无关。

于是我们得到 R 模正合列:

$$0 \to R^2 \to R^3 \to R \to \mathbb{C}[x,y]^G \to 0 \quad b_1 \mapsto z_0 a_1 + z_1 a_2 + z_2 a_3; a_1 \mapsto z_2^2 - z_1 z_3; z_0 \mapsto x^3$$

5.2 不变理论的 3 个核心问题

G 是有限群，$\mathbb{F}$ 是代数闭域。G 作用在 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 得到正合列。

$$\ldots \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n] = R \to A^G \to 0 \tag{1}$$

这样的正合列的得到如同例5.5。这样的序列有三个核心的问题。接下来我们给出的三个定理中记号如上的构造。

定理 5.1 R 是有限生成的 $\mathbb{F}$-代数。

定理 5.2 k 阶 Syzygy 关系模定义为 $\mathrm{im}\varphi_k$，是有限生成的 R 模。

定理 5.3 (Hilbert Syzygy 定理) 对于所有的 A^G 正合列，其不为 0 的长度有限，且小于 Syzygy 生成元的个数。

定义 5.2 (短正合列) 略

短正合列有一个很重要的概念: 分裂。这里不叙述。实际上是模论笔记的内容。

定理 5.4 分裂的短正合列中，第三个模是第二个模和第四个模的直和。

定理 5.5 (Noether 模与正合列) 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是短正合列。则 B 是 Noether 模等价于 A, C 都是 Noether 模。

问题实际等价于 Noether 模 M 等价于其有一个子模 N 和 M/N 都是 Noether 模。

证明 设 M 是 Noether 模。设 N 是 M 的子模。则 N 的子模升链显然是 M 的子模升链，于是其长度有限，故 N 是 Noether 模。

而 M/N 的子模与 M 包含 N 的子模有着一一对应关系。则 M/N 的子模长度也是有限的。

现在设 N 和 M/N 是 Noether 模。考虑 M 的子模升链 $\{B_i\}$。

于是 $\{B_i \cap N\}$ 作为 N 的子模升链长度有限。因此存在 m 使得 $\{B_m \cap N\}$ 不再变化。

把 $\{B_i\}$ 给投射到 M/N 中，构成其一个子模升链。从而有 n 满足:$\{B_n/(B_n \cap N)\}$ 之后不再变化。

我们取 m, n 之中的最大值。不妨设为 m。于是当 $i \geq m$，$B_i \cap N$ 和 $B_i/(B_i \cap N)$ 都不变化。

我们断言 B_i 也不变化了。设 $x \in B_{m+1}$ 且 $x \notin B_m$。则 $x \notin N$。于是 x 在商模 B_{m+1}/Q 中非平凡。从而有 $y \in B_m$ 使得 $x - y \in Q = (B_m) \cap N$。于是 $x \in B_m$。这导出了矛盾。 □

下面的大定理是上面这个小定理的推论。（数学是讲化劲，四两拨千斤）

定理 5.6 (模的 Hilbert 基定理) M 是有限生成 R 模。R 是 Noether 环，则 M 是 Noether 模。

证明 设 $M = R^n/\ker\varphi$。我们只需要验证 R^n 是 Noether 模。由于 R^n 本质是一堆 R 的直和，因此显然是 Noether 的。 □

由此我们可以已经可以证明定理5.2

证明 (Proof for theorem5.2) 由希尔伯特基定理，$R = \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_n]$ 是 Noether 环。因此:$\mathrm{Im}(\varphi_1) \subset R$ 有限生成，从而 R^n。

由于 $R^{n_{k-1}}$ 是 Noether 模, 从而其子模 $\mathrm{Im}(\varphi_k)$ 也是有限生成的。 □

定理5.3之后做证明。

5.3 分次环应用

定理 5.7 设 $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是分次环。若 R 是 Noether 环，当且仅当 R_0 是 Noether 环且 R 是有限生成的 R_0 代数。

证明 回推只是希尔伯特基定理的应用。

现在考虑 R 是 Noether 环。则 $R_{n\geq 1}$ 是 R 的理想。并且 $R_0 \cong R/R_{n\geq 1}$，则 R_0 是 Noether 环。

设 $R_{n\geq 1}$ 的生成元是齐次元 $x_1,\ldots,x_s$。非齐次的情况可以分拆出齐次元。我们断言 $R = R_0[x_1,\ldots,x_s]$。定义右式为 R'。

任意 k，$R_k \subset R'$。对于 $k=0$ 自然成立。设 $k=l-1$ 已成立，则 $k=l$ 时，任意 $y\in R_l$ 属于 $R_{\geq 1}$。于是 $y=\sum_{i=1}^{s} r_i x_i, r_i \in R$。不难说明 r_i 的次数小于 y 的次数，因此 r_i 的次数小于等于 $n-1$。根据归纳假设 $r_i \in R'$，从而 $y \in R'$。于是 $R \subset R'$ 因此 $R = R'$. □

5.4 希尔伯特第 14 问题的解决

定理 5.8 (Nagata-Habosh) G 是代数群，$\mathbb{F}$ 是代数闭域。下面命题等价:

1. S^G 是有限生成的。
2. G 是约化群，即 G 不存在正规子群 N 满足 $N \cong \mathbb{F}^n$。
3. 若 v 是 $\rho : G\times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ 的非零不动点，则存在 $f\in S^G$，使得 $f(0)=f(v)$

证明 证明就略去了。反正最后也是要补的。 □

6 Hilbert Syzygy 定理及其应用

定义 6.1 (自由消解) 设 M 是一串 R 模,$\mathbb{F}_i$ 是自由 R 模。模正合列:

$$\mathcal{F} : \cdots \to F_n \to \ldots F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

称为 M 的自由消解。我们用 φ_i 表示从 $\mathbb{F}_i$ 出发的同态。

模 $\mathrm{Im}(\varphi_i)$ 称为 M 的 i 阶 Syzygy 模。

若 $F_{n+1}=0$ 且 $F_i \neq 0$,$i\leq n$，则称自由解消的长度是 n。

例 6.1 设 M 是有限生成的 R 模，生成元是 $m_1,\ldots,m_s$. 则 F_0 自然是 s 阶的自由模, 其生成元为 $a_1,\ldots,a_s$.

$$\mathrm{Im}(\varphi_1)=\ker\varphi_0=\{(a_1,\ldots,a_s)\in R^s | a_1m_1+\cdots+a_sm_s=0\}\subset R^s$$

考虑 $M=R=\mathbb{R}[x,y]$,$I=(xy,x^2)\in R^2$。则 $\mathrm{Syz}(xy,x^2)=(x,-y)\in R^2$。

$$\begin{aligned} 0 \to R \to & R^2 \to I \to 0 \\ & a_1 \mapsto x^2 \\ & a_2 \mapsto xy \\ & b_1 \in R \mapsto -ya_1 + xa_2 \end{aligned}$$

注解 对于有限消解, 注意到 $\ker\varphi_{n-1}=\mathrm{im}(\varphi_n)$，而 φ_n 是单射，于是 $\ker\varphi_{n-1}$ 是自由模。

6.1 Hilbert Syzygy 定理和更多的 Grobner 基

定理 6.1 (Hilbert Syzygy) 设 $R=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$, 则有限生成的 R 模 M 必然存在长度小于等于 n 的自由消解。

推论：不变子环 S^G 存在自由消解 (根据 Hilbert Base Theorem 可知其是有限生成)，长度小于 Syzygy 生成元个数。

为了证明上述定理，我们花费一节来说前置内容。

我们首先要介绍 Buchberger 算法（多项式环）。

对于 f,g 是 $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ 中的元素，定义:

$$S(f,g)=\frac{M}{\mathrm{LT}(f)}f-\frac{M}{\mathrm{LT}(g)}g$$

其中 M 是 $\mathrm{LT}(f),\mathrm{LT}(g)$ 首一的最小公倍单项式。

定理 6.2 (1) 对于任何给定单项式序 $<$ 和理想 I,$G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ 是 I 的生成元。则 G 是 Grobner 基等价于任意 i,j,$S(g_i,g_j)$ 对 g_i,g_j 做带余除法，余式为 0。

(2)G 可以依照下列算法扩充为 Grobner 基。（有限个元素）

证明 起始：取 $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$。$C:=\{(g_i,g_j):1\leq i\leq n\}$.

任取 $(g_i,g_j)\in C$，检测 $S(f,g)$ 对 G 做带余除法的余数 $r=\overline{S(f,g)}$。

若 $r=0$，则 G 更新为 G，C 中去除 (g_i,g_j)。

若 $r\neq 0$，则 $G=G\cup\{r\}$。$C:=C\cup\{(g_i,r)\}\setminus\{(g_i,g_j)\}$。

终止: 直到 $C=\emptyset$。此时 G 是 I 的生成元扩充的 Grobner 基。 □

注解 I 的 Grobner 基不唯一。特别的，若存在 $p\in G$ 使得 $\mathrm{LT(p)}\in\{\mathrm{LT}(G\setminus\{p\})$，则 $G\setminus\{p\}$ 是 Grobner 基。

用类似的定义，我们可以定义极小 Grobner 基。

具体的计算例子不再做记录。

定义 6.2 (约化 Grobner 基) 称 I 中的 Grobner 基满足:

1. $\forall p\in G$ 是首一多项式。

2. $\forall p\in G$,p 中任意单项式不是 $\mathrm{LT}(G\setminus\{p\})$ 中元素的倍数。

则称 G 是约化的 Grobner 基。

定理 6.3 I 的约化 Grobner 基是唯一的。

自由模上的 Grobner 基

考虑 $R=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ 上的自由模 R^S，S 是正整数。设 $e_1,\ldots,e_s$ 是 R^s 的基底。

R^s 中的单项式定义为 $m=cx^\alpha e_i,c\in\mathbb{F}$,$\alpha\in\mathbb{Z}^s$,$x^\alpha$ 是 R 中首一单项式。设 $m_1=c_1x^\alpha e_i$,$m_2=c_2x^\rho e_j$。则两个单项式的最小公倍式定义为，若两个单项式所在 e_i 相同，则取 R 中的最小公倍式。若不同，则直接取 0。

定理 6.4 M 由 R^q 的单项式 $\{m_1,\dots,m_s\}$ 生成的子模。令 $m_{i,j}=\mathrm{LCM}(m_i,m_j)$，则 M 的 1 阶 Syzygy 模 $\mathrm{Syz}(m_1e_1+\dots+m_se_s):=\{a_1e_1+\dots+a_se_s : a_1m_1+\dots+a_sm_s=0\}$ 由

$$\{\sigma_{i,j}=\frac{m_{i,j}}{m_i}e_i-\frac{m_{i,j}}{m_j}e_j, 1\le i\le j\le s\}$$

生成。我们约定 $\dfrac{e_k}{e_k}=1{,}0/m=0$。

考虑 R^t 上的单项式序：

1. 一般定义同 R 上的单项式序的定义。
2. 如果单项式在不同的 e_i 上，则定义有两种：要么先看系数 x^α 要么先看下标 i,j。不在多赘述。我们规定 i 靠前，若 j 更大。

定义 6.3 设有限集合 $\{g_1,\dots,g_s\}$ 是 M 的子集。称其为 $(M,>)$ 的 Grobner 基，若 $(\mathrm{LT}(M))=(\mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_s))$。同样我们可以定义约化的 Gronbner 基。

定理 6.5 M 的约化 Grobner 基是唯一的。

证明依照上述关于 I 的情况来做。我们同样定义 $S(f,g)$，以及扩充 Grobner 基的办法。

6.2 Syzygy 定理的证明

待定。由于其是期末作业，将在之后补充。

6.3 Syzygy 定理的应用

定义 6.4 设 $R=\bigoplus_{n=0}^{\infty}R_n$ 是分次环。$M=\bigoplus_{-\infty}^{\infty}M_m,N=\bigoplus_{-\infty}^{\infty}N_m$ 为分次模。若 $M\to N$ 有同态 f 满足 $f(M_n)\subset N_n$，则称 f 是分次 R 模同态。

定义 6.5 (分次模的平移) 固定平移后的分次模 e 号位为 $M(d)_e:=M_{d+e}\to M(d)\cong M$。

定义 6.6 设 R 是分次环。$\mathcal{F}:\dots\to F_n\to F_{n-1}\to\dots F_1\to F_0\to M\to 0$ 是分次模 M 的自由消解。若 F_i 均分次且 φ_i 都是 R 模自由同态，则称 $\mathcal{F}$ 为分次自由消解。

于是根据 Syzygy 定理的证明，我们自然有:

定理 6.6 (分次模 Hilbert Syzygy 定理) 设 $R=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$, 有限生成的分次 R 模都存在有限的 $(\le n)$ 分次自由消解，且 F_n 都是有限生成的。

定义 6.7 设 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]=R$, 有限生成的 R 模 $M=\bigoplus_{-\infty}^{\infty}M_s$。定义 $H_M(s):=\dim_{\mathbb{F}}M_s$(将 M_s 看作向量空间)。称为分次模 M 的 Hilbert 函数。

注意，$H_M(s)$ 必然是有定义的。若无限，则子模 $\bigoplus_s^{\infty}M_s$ 不是有限生成的 R 模。

考虑 $\bigoplus_s^{\infty}M_s$ 是有限生成的。则根据分次模的定义，只有 0 次的多项式乘 M_s 能得到 M_s 的元素。这就意味着 M_s 有 $\mathbb{F}$ 的基。

M_s 不有限生成与 M 为 Noether 模矛盾！

定理 6.7 (Hilbert 多项式定理) M 是有限生成的 R 模，$R=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$。则存在 $r\in\mathbb{Z}$ 使得 Hilbert 函数 $H_M(s),s\geq r$ 恰为次数小于 n 的多项式。该多项式称为 Hilbert 多项式。

例 6.2 设 $M=R=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$。$R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}R_i$。$R_i$ 为 n 阶齐次多项式构成的线性空间。则 $H_M(s)=C_{n+s-1}^{n-1}$。

推论:$H_{M(d)}(s)=H_M(s+d)=C_{s+d+n-1}^{n-1}$

例 6.3 设 $S^G=(x^3,x^2y,xy^2,y^3)\subset\mathbb{C}[x,y]=R$. 则我们熟悉的自由消解:

$$0\to R^2\to R^3\to R\to S^G\to 0 \tag{2}$$

上述消解其实并不是齐次的。通过平移我们可以得到:

$$0\to R^2(-3)\to R^3(-2)\to R\to S^G\to 0 \tag{3}$$

S^G 的 Hilbert 多项式为 $H_{S^G}(s)=H_R(s)-3H_{R(-2)}(s)+2H_{R(-3)}(s)=3s+1$

证明 (Hilbert 多项式定理的证明) 根据 Syzygy 定理，M 存在有限的分次消解:

$$\mathcal{F}:0\to F_n\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0 \tag{4}$$

根据上面例子的得到 $H_{F_i}(s)=\dim(F_i)(s)$ 为组合多项式次数 $\leq n$。

$$H_M(s)=\dim(F_0)_s-\dim(\ker\varphi_0)_s \tag{5}$$

递归的，由于有限步骤后 $\dim(\ker\varphi_n)=0$。所以归纳得到这是一个组合多项式。 □

注意，Hilbert 多项式是整值多项式。但是整值多项式不一定都是整系数多项式。关于整值多项式，我们有的性质是:

命题 6.1 任意整值的 1 元多项式是组合多项式 $C_n^0,\dots,C_n^n$ 的 $\mathbb{Z}$ 线性组合。

命题 6.2 对于 $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 模的分次同态的正合列:

$$0\to A\to B\to C\to 0 \tag{6}$$

有 $H_A(s)+H_C(s)=H_B(s)$。

定义 6.8 (Poincare 级数) $P(M,t):=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\dim_{\mathbb{F}}M_st^s$ 称为 Poincare 级数。

例 6.4 设 $M=R=\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$。则:

$$P(M,t)=\sum_{s=0}^{\infty}C_{n+s-1}^{s}t^s=(\sum_{s=0}^{\infty}t^s)^n=\frac{1}{(1-t)^n} \tag{7}$$

例 6.5 $M=(x^3,x^2y,xy^2,y^3)$。则

$$P(M,t)=\sum_{s=0}^{\infty}(3s+1)t^s \tag{8}$$

定理 6.8 (Hilbert-Serie) M 是有限生成的 $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ 模。则 Poincare 级数 $P(t)$ 是 t 的有理函数。即:

$$P(t)=\frac{f(t)}{(1-t^{k_1})(1-t^{k_2})\ldots(1-t^{k_n})} \tag{9}$$

其中 $k_1,\ldots,k_n$ 是 $x_1,\ldots,x_n$ 在分次环中的次数。

证明 对 n 做归纳。若 $n=0$，则 M 是 $\mathbb{F}$ 向量空间，则 n 足够大的时候，$M_n=0$。于是 $P(t)$ 是多项式。

设不定元个数 $n-1$ 及其以下的时候都成立。 □

6.4 Poincare 级数

问题: 不变理论 $\rho:G\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是忠实表示，G 是有限群。则:

1. 不变子环 R^G 的 Poincare 级数是什么？

2.$t=1$ 处的奇点阶数是多少？

答案:1. 与生成元选取无关。由 $\rho(g)$ 的特征多项式决定。2 阶数为 n。

定理 6.9 (Molien) $R=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$，$R^G$ 的 Poincare 级数为 $P(R^G,t)$:

$$P(R^G,t)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I-\rho(g)t)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I-\rho(g)^{-1}t)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{\det(-\rho(g))}{\det(tI-\rho(g))}$$

我们不给出 Molien 定理的证明。

当我们用轨道陈类的方法去找 R^G 的时间，Molien 定理给出了一个终止条件:

$$S:=\mathbb{F}[f_1,f_2,\ldots,f_n]:=\mathbb{R}^G, f_i\in\mathbb{R}^G\Leftrightarrow P(S,t)=P(R^G,t)$$

例 6.6 考虑 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.0\mapsto I, 1\mapsto\begin{pmatrix}\omega&0\\0&\omega\end{pmatrix}, 2\mapsto\begin{pmatrix}\omega^2&0\\0&\omega^2\end{pmatrix}, \omega=e^{2/3\pi i}$。

则 R^G 的 Poincare 级数为:

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1-\omega t)^2}+\frac{1}{1-\omega^2t^2})=\frac{2t^3+1}{(1-t^3)^2}$$

7 环扩张和 Noether 正规化定理

7.1 整元和整扩张

设 R 是环，S 是 R 的子环，S 到 R 有自然嵌入。

定义 7.1 称 $r\in R$ 是 S 中的整元素，若存在首一多项式:

$$P(x)=x^k+s_{k-1}x^{k-1}+\cdots+s_1x+s_0\in S[x]$$

使得 $P(r)=0$。

定义 7.2 称环的扩张为整扩张，若 R 中的元素都是 S 的整元。

$$R = \overline{S} := \{r \in R : r\text{是}s\text{整元}\}$$

定义 7.3 称 S 是整闭的，若 $S = \overline{S}$.

例 7.1 设 R 是域 $\mathbb{F}$ 上 n 元多项式环。有限群 G 作用在 R 上，则 $R^G \to R$ 是整扩张。

证明 对任意 x_i 考虑多项式 (关于新不定元 X)。:

$$\Phi_{x_i}(X) := \prod_{g \in G}(X - gx_i) \in R[X]$$

G 作用在 Φ_{x_i} 上保持不变。故 $\forall f \in R$, 定义 $\Phi_f(X) = \prod_{g\in G}(X - gf) \in R[X]$ 的系数在 G 作用下保持不变。则 f 是 Φ_f 的根。于是 $R^G \hookrightarrow R$ 是整扩张。 □

定义 7.4 若 R 是 $S \subset R$ 的有限生成 S 模。则称 R 是 S 的有限扩张。

定理 7.1 (环的有限扩张定理) R 是 S 的有限扩张，等价于 $R = S[a_1, \ldots, a_k]$ 且 a_i 都是 S 的整元。

推论 7.2 有限扩张一定是整扩张。而整扩张不一定是有限扩张。

要证明定理7.1，我们需要两个刻画整元的引理。

引理 7.3 设 $S \hookrightarrow R$ 是环扩张，r 是 S 的整元素等价于 $S[r]$ 是有限生成 S 模。

证明 若 r 是整元，则 $S[r]$ 中的元素由 $1, r, \ldots, r^{k-1}$ 生成。(r^k 被写为多项式形式)

若 $S[r]$ 是有限生成的，不妨设其为 $1, r, \ldots, r^n$。（使用首一齐次替换）则 r^{n+1} 被生成。于是 r 是整元。 □

引理 7.4 设 $S \hookrightarrow R$ 是环扩张，r 是 S 的整元等价于存在忠实的 $S[r]$ 模 $M \subset R$ 使得 M 是有限生成的 S 模。

证明 若 r 是整元，同样 $S[r]$ 是有限生成的 S 模。$1 \in S[r]$，从而 $S[r]$ 是忠实的 $S[r]$ 模。

设 M 是有限生成的 S 模，生成元是 $e_1, \ldots, e_n$。使得 $rM \subset M$ 且 M 是忠实的。

对于任意 i，$re_i = \sum s_{ij}e_j$。进而我们得到 e_i 的线性方程组:

$$\sum_{i \neq j} s_{ij}e_j + (s_{ii} - r)e_i = 0$$

设 C 是系数矩阵，由于 e_i 非零，则根据 Cramer 法则，有 $\det(C)e_j = 0$。由于 M 是忠实的，$\det(C) = 0$. 而 C 可以看作 r 的首一多项式，从而 r 是整元。 □

注意，根据该定理，我们可以知道，对于 $S[r_1, \ldots, r_n]$ 在 r_i 是整元的情况下是整扩张。事实上，任取 $q = f(r_1, \ldots, r_n)$，$S[q]$ 模 $S[r_1, \ldots, r_n]$ 必然是忠实的。而 $S[r_1, \ldots, r_n]$ 是有限生成的 S 模，从而根据引理知道 q 也是整元。

证明 (For theorem 7.1) 设 $R = S[a_1, \ldots, a_n]$，a_k 都是整元，则 $R_1 = S[a_1]$ 是有限生成 S 模，以此类推, 加入 $a_2, \ldots, a_n$ 也一样。

设 R 的有限生成元为 $a_1, \ldots, a_k$。则 $R = S + \sum Sa_k \subset S[a_1, \ldots, a_k] = R$。下面证明生成元是整元。对于 $a_i \in R$，由于 $1 \in R$,R 是忠实的 $S[a_i]$ 模，又 $S[a_i]$ 是有限扩张，则 a_i 是整元。 □

7.2 Noether 两大定理

定理 7.5 任意特征域 $\mathbb{F}$ 和有限群 G，R^G 都是有限生成的:$R=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$。

证明 令 S 是 $\prod_{g\in G}(X-gx_i)\in R[X]$ 中所有系数生成的 $\mathbb{F}$ 代数。则:

$$S\subset R^G\subset R$$

第一步，S 是有限生成的 $\mathbb{F}$ 代数。（系数有限项 $\leq n|G|$）。则 S 是 Noether 环。

第二步，由于 x_i 是 Φ_i 的根，所以 x_i 是 S 整元。于是 R 是有限生成的 S 模。R 是 Noether$S$ 模

第三步，由于 R^G 是有限生成 S 模，则根据 S 是有限生成的 $\mathbb{F}$ 代数，可知 R^G 是有限生成的 $\mathbb{F}$ 代数。 □

定理 7.6 (Noether 正规化定理) 域 $\mathbb{F}$ 上的有限生成代数 A, 则存在代数无关的元素 $y_1,\ldots,y_r$ 使得 A 是 $\mathbb{F}[y_1,\ldots,y_n]$ 的有限扩张。

证明 下面就 A 的生成元个数（最小值）进行归纳。

若 $n=0$,$A=\mathbb{F}$ 自然成立。

若 $k=n-1$ 时成立，$A=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ 时 $\mathbb{F}[y_1,\ldots,y_r]$ 的整扩张。当 $k=n$，$A=\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$。

若 $x_1,\ldots,x_n$ 代数无关，则自然成立。

若相关，则存在非常数多项式 $f(T_1,\ldots,T_n)$ 使得 $f(x_1,\ldots,x_n)=0$。不妨设 T_1 在 f 中出现，则:

$$f=c_0T_1^N+c_1T_1^{N-1}+\cdots+c_N,c_0\neq 0$$

其中 $c_i\in\mathbb{F}[T_2,\ldots,T_n]$.

若 $c_0\in\mathbb{F}$，则根据 $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ 得知，x_1 是 $\mathbb{F}[x_2,\ldots,x_n]$ 的整元。根据归纳假设，可以知道存在代数无关的 $y_1,\ldots,y_r\in A$ 满足使得 $\mathbb{F}[x_2,\ldots,x_n]$ 是 $\mathbb{F}[y_1,\ldots,y_r]$ 的整扩张。于是 $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ 是 $\mathbb{F}[y_1,\ldots,y_r]$ 的整扩张。

若 c_0 不是 $\mathbb{F}$ 的元素，令 $y_1=x_1,y_2=x_2-x_1^{m^2},\ldots,y_r=x_r-x_1^{m^r}$. □

7.3 整扩张和奇点阶数

命题 7.1 设 $S\subset R\subset\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ 是有限生成的 $\mathbb{F}$ 代数，扩张 $S\subset R$ 是整数扩张，则 R,S 的 Poincare 级数在 $t=1$ 处的奇点阶数相同。

证明 根据有限扩张定理,R 是有限生成 R 模。则对于多项式次数定义的 Poincare 级数有:

$$P(S,t)\leq P(R,t)\leq P(S^k,t)$$

推论 7.7 忠实表示 $\rho:G\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ 诱导不变子环 R^G 在 $t=1$ 处的奇点阶数为 n。

证明 $R^G\hookrightarrow R$ 一定是整扩张，R^G，R 都是有限生成的代数。 □

8 Hilbert 零点定理 (Null Stellen Satz)

8.1 零点定理的叙述

考虑 $R = k[x_1, \dots, x_n]$ 中极大理想的分类。设 k 是域。自然地，$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ 是一类极大理想，$a_i \in k$。

例 8.1 设 $k = \mathbb{R}$。$R = \mathbb{R}[x]$。(x^2+1) 是极大理想，但不是 $x - a$ 的形式。这是因为 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$.

上述例子告诉我们，不是所有的域的极大理想都是上述描述的类。但是如果 k 是代数闭域，就满足了。

定理 8.1 (弱零点定理) k 是代数闭域，多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的所有极大理想为 $(x_1 - a, \dots, x_n - a_n)$。于是 k^n 上的点与 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的极大理想有一一对应。

定义 8.1 (代数集) 设 I 是 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的理想，I 中所有多项式的共同零点（有限个生成元共同的零点）称为 I 的代数集，记为 $V(I) \subset k^n$。

假设 $V(I) \neq 0$，$k[x_1, \dots, x_n]$ 中在 $V(I)$ 上取值都为 0 的多项式所生成的理想 $J(V(I))$ 与 I 的关系是?

例 8.2 考虑 $k[x]$。I 是 x^2 生成的理想。$V(I) = 0 \in k$。$J(V) = (x) \neq I$。且 $x^2 \in I, x \notin I$

定义 8.2 (根理想)

1. 根理想:I 是理想，则 $\sqrt{I} = \{f \in R | f^m \in I, \exists m\}$ 是理想。
2. 称 I 是根理想，若 $I = \sqrt{I}$
3. 对于任意 I,$\sqrt{I}$ 是根理想。即 $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$。

定理 8.2 (强零点定理) 若 k 是代数闭域，则 $\sqrt{I} = J(V(I))$。

注解 若 k 不是代数闭域，$I \subset k[x_1, \dots, x_n]$。此时 $J(V_{\overline{k}}(I)) = \sqrt{I} \subset k[x_1, \dots, x_n]$。

其中 $\overline{k}$ 是 k 的代数闭包。此时 $J(V_{\overline{k}}(I)) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n], x \in \overline{k}^n, f(x) = 0\}$。

例 8.3 设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix}$。考虑 $\mathbb{C}[a,b,c,d]$ 的理想 I:

$$I = (a^2+bc, (a+d)b, (a+d)c, d^2+bc)$$

$V(I) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是复幂零矩阵$\} \subset \mathbb{C}^4$。但是 $V(I)$ 不是 $\mathbb{C}^4$ 的子空间。

我们断言 $\sqrt{I} = (a+d, ad-bc)$ 分别是 X 的迹和行列式。

断言的证明: 先说明 $(a+d, ad-bc) \subset \sqrt{I}$。我们要验证 $a+d \in \sqrt{I}$。由于 I 包含 $\{(a+d)b, (a+d)c\}$，并且 $(a+d)(a-d) \in I, (a+d)d^2 = [(a+d)(a^2+bc) - (a+d)bc] \in I$，则 $(a+d)^2 = 2a^2 + 2d^2 - (a-d)^2$，可推的 $(a+d)^3 \in I$。

接着验证 $ad - bc \in \sqrt{I}$，$ad - bc = (a+d)d - (bc + d^2)$。根据 $\sqrt{I}$ 是理想，则 $ad - bc \in \sqrt{I}$。

我们也可以考虑零点定理。对于 X 是幂零矩阵，X 的迹和行列式都是 0。因此根据零点定理，$(a+d, ad-bc)$ 是 $J(V(I)) = \sqrt{I}$ 的子集。

再证明 $\sqrt{I} = (a+d, ad-bc) = I'$。考虑 $\mathbb{C}[a,b,c,d]/(a+d, ad-bc) \cong \mathbb{C}[a,b,c]/(a^2+bc)$ 的幂零元。下证其没有零因子。

假设有 X 不属于 $(a+d, ad-bc)$ 使得 $X^n \in I$。则 $[X^n] \in I/I'$. 但是经过计算 I/I' 平凡，所以 $[X^n]=0$，于是 X 是零因子。矛盾！

于是任给 $X \in \sqrt{I}, X \in I'$

命题 8.1 (根理想的基本性质)

1. $I \subset \sqrt{I}$
2. $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$
3. 理想的根是根理想。
4. 理想和的根是理想根的和。
5. $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap I} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
6. $I = R \Rightarrow \sqrt{I} = R$

8.2 根理想和 Noether 环

定义 8.3 (幂零根基和幂零理想)

1. $\sqrt{0} = \{R\text{中所有的幂零元}\}$ 称为幂零根基。
2. 幂零理想 $I \subset R$: 存在 $n \in N$ 使得 $I^n = 0$。

然而幂零根基不一定是幂零理想。

例 8.4 $R = k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]/(x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ 是可数个生成元的多项式的商环。则 $\sqrt{0} = (x_1, \ldots)$。然而 $(\sqrt{0})^n \neq 0$。其中的交叉项无法清零。

命题 8.2 若 R 是 Noether 环，$I \subset R$ 是理想。则 $\exists n$ 使得 $(\sqrt{I})^n \subset I$。

证明 由于 R 是 Noether 的，则 $\sqrt{I}$ 有限生成。设生成元为 $a_1, \ldots, a_n$。则存在 k_i 使得 $a_i^{k_i} \in I$。设 $k = \max\{k_i\}$。则 $a_i^k \in I$。于是 $\forall x \in \sqrt{I}$，则 $x = \sum_{i=1}^n r_i a_i, r_i \in R$。于是 $x^{mk} \in (a_1^{i_1}, \ldots, a_m^{i_m}, i_j \geq 0, i_1 + \cdots + i_m = mk) \subset (a_1^k, \ldots, a_m^k) \in I$。 □

推论 8.3 若 R 是 Noether 环，$\sqrt{0}$ 是幂零理想。

证明 取 $I = 0$。则 $(\sqrt{0})^n \subset I = 0$。 □

8.3 零点定理的证明

证明 (弱零点定理) 令 m 是 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的极大理想。则 $\mathbb{F} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/m$ 是有限生成的 $\mathbb{C}$ 代数并且是域。则 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的代数扩张。

设 α 是 $\mathbb{C}$ 的超越元，则 $\{1/(\alpha - t), t \in \mathbb{C}\}$ 不可数且线性无关。因此 $\mathbb{F} \cong \mathbb{C}$ 推得 $x_i + m = a_i + m$，于是 $x_i - a_i \in m$ 即 $m = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$。

现在考虑一般的代数闭域。我们有 Zariski 引理:

Zariski: 若域 K 是域 k 的有限生成的 k 代数，则 K 是有限生成的 k 模。

此时 $k[x_1,\dots,x_m]/m$ 是域且是有限生成的 k 代数。于是 $k[x_1,\dots,x_n]$ 是有限生成的 k 模。即 $k[x_1,\dots,x_n]/m$ 是 k 的代数扩张，即 $k[x_1,\dots,x_n]/m \cong k$。于是 $m=(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$。

Proof for Zariski:

由 Noether 正规化定理，令 $K=k[x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n]$ 使得 n 最小。下面使用反证法说明 $m=0$。假设 $m\geq 1$，域 $F=k(x_1,\dots,x_m)$ 是 k 的扩张。于是 K 是有限生成的 F 模。

Artin-Tale 引理:

设 $k\subset F\subset K$,F 是 k 代数，k 是 Noether 环，K 是有限生成的 k 代数，K 是有限生成的 F 模，则 F 是有限生成的 k 代数。

根据 Artin-Tale 引理，F 是有限生成的 k 代数即 $F=k[z_1,\dots,z_s]$,$z_i=\dfrac{f_i}{g_i}$，$f_i,g_i\in k[x_1,\dots,x_n]$。取不可约多项式 $h=g_1\dots g_s+1$, 则 $1/h\notin k[z_1,\dots,z_s]=F$ 与 F 是域矛盾！

Proof for Artin-Tale:

由 K 是有限生成 k 代数和 K 是有限生成 F 模，设 $K=k[x_1,\dots,x_n]=Fy_1+\cdots+Fy_k$。则 $x_i=\sum_j f_{ij}y_j, f_{ij}\in F$。

且由 K 是有限生成 k 代数可知 $y_iy_j\in K$。于是 $y_iy_j=\sum_s f_{ijs}y_s, f_{ijs}\in F$.

设 F_1 是所有 f_{ij} 和 F_{ijs} 生成的子代数（有限生成），则 K 是有限生成的 F_1 模。这是因为 $\sum f_iy_i, f_i\in k[x_1,\dots,x_n]$ 系数通过 x_ix_j 变为 F_1 中的系数。

由 Hilbert 基定理,F_1 是 Noether 环，K 是 Noether F_1 模。则 F 是有限生成的 F_1 模，F_1 是有限生成的 k 代数，则 F 是有限生成的 k 代数。 □

证明 (强零点定理) 对于 $f\neq 0\in J(V(I))$，I 是 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的理想。

考虑理想 $(I,1-x_0f)\in k[x_0,x_1,\dots,x_n]$。$I$ 与 $1-x_0f$ 没有公共根。由弱零点定理，该理想不包含在任何极大理想中。于是 $(I,1-x_0f)=k[x_0,x_1,\dots,x_n]$.

设 $1=\sum_{i=1}^k a_ib_i+a_0(1-x_0f)$,$b_i\in I$。取 $x_0=1/f$，则 $1=\sum_{i=1}^k a_ib_i, a_i\in k[x_1,\dots,x_n,1/f]$。

不妨设 $a_i=c_i/f^m$。这里可以设 m 对于所有 i 都是相同的。

于是 $f^m=\sum_{i=1}^k c_ib_i\in I$。从而 $f\in\sqrt{I}$。 □

强零点定理也可以推导弱零点定理。

弱零点定理等价于 $V(I)\neq 0$ 当且仅当 $I=(1)=k[x_1,\dots,x_n]$

9 环的局部化

9.1 一般理论

目标: 构造环的扩张 $R[S^{-1}]$ 使得 S 中的元素都可逆。

方法 1:Rabinovitch Technique:

$$R[S^{-1}]=R[t_1,\dots]/(s_1t_1-1,\dots)$$

方法 2: 分式域方法:

不妨设 S 乘法封闭且不含 0。

若 S 没有零因子，可以照搬分式域的办法做构造。此间，无零因子的条件被用于等价关系中传递性的构造。

若 S 有零因子。我们依然想要使用分式域的办法。此时我们的办法是:

$$r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \Leftrightarrow s(r_1s_2 - s_1r_2) = 0, \exists s \in S$$

本质上，考虑 $I = \{r \in R : rs = 0, \exists s \in S\}$。$I$ 是理想。考虑 $p\ R \to R/I$。则 $p(S)$ 没有零因子。因此可以构造 $R[S^{-1}] := (R/I)(S^{-1})$。

注解 若 R 为整环，$S = R \setminus \{0\}$，$R[S^{-1}]$ 是 R 的分式域。

例 9.1 考虑 S 是所有奇素数构成的集合。则:

$$R[S^{-1}] = \{\frac{a}{b}, b\text{是素数}, a \in \mathbb{Z}\}$$

例 9.2 $R = \mathbb{C}[x]$。

1. 考虑 $S = R \setminus \{0\}$，则 $R[S^{-1}] = \{\text{有理函数}\frac{P(x)}{Q(x)}\}$。

2.$S = \{x\}$。则 $R[S^{-1}] = \{\frac{P(x)}{x^m}\}$。

3.$S = \{x - \alpha, \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\}$，$\alpha$ 不为 0。$R[S^{-1}] = \{\frac{P(x)}{Q(x)}, Q(0) \neq 0\}$

例 9.3 $R = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$，$S = \{x + (xy)\}$。

则 $R[S^{-1}] = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy, xz - 1) \cong \{\frac{f(x, y)}{x^n}\} = \mathbb{C}[x, 1/x]$

$R[S^{-1}]$ 显然拥有泛性质。这里不再赘述。

9.2 Noether 环的局部化

我们关注核心问题:Noether 环的局部化是 Noether 环吗？

工具: 理想的扩张和局限。

考虑 $f : R \to R[S^{-1}]$，$r \mapsto r/1$。我们考虑 R 的理想和 $R[S^{-1}]$ 之间的对应关系。

由于理想的同态像不一定是理想，我们考虑运算符号:I^e 和 J^c。

$$I^e : I \mapsto (f(I)), \quad J^c : J \mapsto f^{-1}(J)$$

命题 9.1 J 是局部化 $R[S^{-1}]$ 的理想，则 $(J^c)^e = J$。

命题 9.2 $\{R[S^{-1}]\text{中的理想}\}$ 到 $\{R\text{中的理想}\}$ 是单射。即 $J \mapsto J^c$ 是单射。

命题 9.3 若 R 是 Noether 环，则 $R[S^{-1}]$ 也是 Noether 环。

证明 考虑 $R[S^{-1}]$ 的升链:

$$I_1 \subset I_2 \dots I_n \subset I_{n+1}$$

对应 R 中升链:

$$f^{-1}(I_1) \subset f^{-1}(I_2) \dots f^{-1}(I_n) \subset f^{-1}(I_{n+1})$$

单射和 R 中的升链，得到 $R[S^{-1}]$ 是 Noether 环。 □

定义 9.1 (局部环) 环 R 是局部环，若下列等价条件有一个成立:

1. R 有唯一极大理想。
2. $\forall r \in R$,1 或者 $1-r$ 中有一个可逆元。
3. $m\{r \in R | r\text{不是可逆元}\}$ 是 R 的（极大）理想。

证明 1 到 2：若 R 的任意非零真理想 I 满足 $I \subset m$。若不然，则存在可逆元素 $u \in I$，则 $I = R$ 矛盾。

1 到 2：此时 R 中唯一的极大理想是 3 中的 m。则 $1-r$ 和 r 若都不可逆，则 $1 \in m$，于是 $m = R$ 矛盾！

2 到 3：对于 $x \in m$，设 rx 是可逆元，则 $rx \notin m$, 则 $\exists y \in R$ 使得 $y_i x = 1$。则 x 是可逆元矛盾，所以 $rx \in m$。

对于 $x_1, x_2 \in m$，假设 $x_1 + x_2 \notin m$，则存在 $y(x_1 + x_2) = 1$。由于 yx_1 和 yx_2 均属于 m，从而两者都是不可逆元，矛盾于 $yx_1 + yx_2 = 1$！。 □

例 9.4 设 P 是 R 的素理想，$S = R \setminus P.S$ 乘法封闭。

定义 $R_p := R[S^{-1}]$。R_p 是局部环，称为 R 在 P 处的局部环。其极大理想为 $m = pe = \{a/s : a \in P, s \notin P\}$

定义 $\mathrm{Spec}(R) = \{R\text{中的素理想}\}$。我们介绍素理想的零点定理。

例 9.5 设 $R = \mathbb{C}[x] = \{(x-a), a \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$。令 $Z(I) := \{p \in \mathrm{Spec}(R) : p \supset I\}$。

素谱上的函数: 取值的域随 $p \in \mathrm{Spec}(R)$ 的变化而变化。

1. 取值的域为 $\mathrm{Frac}R/p$(或 R/p):

$$
\begin{aligned}
R \to R/p &\hookrightarrow \mathrm{Frac}R/p \\
f \mapsto f + p &\hookrightarrow f + p
\end{aligned}
$$

例 9.6 $R = \mathbb{C}[x]$，$\mathrm{Spec}(R) = \{(x-a), a \in \mathbb{C}\} \cup \{0\}$。

函数 R 中的元素，比如 $x^2 \in R$. 在 $p \in \mathrm{Spec}R$ 处的取值为 $f \mapsto [f] + p$:$f((x^2)) = x^2 + (x) = 0$,$f((x-1)) = x^2 + (x-1) = [1]$.$f((x-\alpha)) = [x^2] + (x-\alpha) = [\alpha^2]$。上述 f 取值的空间都是 $\mathbb{C}$。

但是 $f((0)) = [x^2] + (0) \in R$。取值为 $\mathbb{C}[x]/(0) = \mathbb{C}[x]$ 分式域为 $\mathbb{C}(x)$。

例 9.7 $R = \mathbb{Z}$,$f = 8$。则 $f(2) = 8 + 2 = 0$,$f(3) = [8] + 3 = [2]$。

定义 9.2 若 $\forall p \in \mathrm{Spec}(R)$,$f(p) = [0] \in R/p$。则称 f 是 $\mathrm{Spec}(R)$ 上的零函数。

定理 9.1 (素谱上的零点定理) $\mathrm{Spec}(R)$ 的零函数是 R 上的幂零根基。即 $\sqrt{(0)} = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}R} p$。

引理 9.2 设 S 是 R 的可乘子集。I 是 R 的理想且 $I \cap S = \emptyset$. 则存在素理想 $p \supset I$ 使得 $p \cap S = \emptyset$。

证明 设 p 是包含关系下包含 I 且 S 不交的的极大元。(根据 Zorn 引理显然存在)。下面证明 p 是素理想。

假定 $ab \in P$，假定 $a \notin p$ 且 $b \notin p$。则 $P + (a)$ 与 $P + (b)$ 均不为 p。我们断言若 $P + (a) \cap S \neq \emptyset$，则 $P + (b) \cap S = \emptyset$。若不然，则 $a \in S, b \in S$, 于是 $ab \in P \cap S$ 矛盾。于是 $P + (b) \cap S = \emptyset$。矛盾于 p 极大。

所以 p 是素理想。 □

证明 (Proof for thm9.1) 显然 $\sqrt{(0)} \subset \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}R} p$。

根据引理，设 $a \in \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}R} p$ 且 $a^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $S = \{1, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$ 是可乘集合。于是 $(0) \cap S$ 是空集。于是存在 $p \supset I$ 使得 $p \cap S = \emptyset$。从而 $a \notin p$ 矛盾！ □

局部化的素谱

事实上，我们有 $\mathrm{Spec}R[S^{-1}] \cong \{p \in \mathrm{Spec}R, p \cap S =\}$.

下面的关系也比较显然:

$$\mathrm{Spec}R/p = \{p' \in \mathrm{Spec}R, p \supset p\}, \mathrm{Spec}R_{(p)} = \{p' \in \mathrm{Spec}R, p' \subset p\}$$

10 Artin 环和 Artin 模

例 10.1 $\mathbb{Z}$ 是 PID $\Rightarrow \mathbb{Z}$ 模。

定义 10.1 (单模) $M \neq 0$ 称为单模，如果 M 的子模只有 0 和 M。例如，Z/pZ 作为 $\mathbb{Z}$ 模是单 $\mathbb{R}$ 模。

命题 10.1 (单模的性质) R 模 N 是单模，等价于 $N = Rn, \forall n \neq 0 \in N$。

证明 显然 $Rn \subset N$ 是子模。所以若 N 是单模，则 $N = Rn$。

反之，设 N 不是单模，则 $M \subset N$ 是 N 的非空真子模。取 $m \in M$，则 $Rm \subset M \subset N$ 是 N 的非空真子模。这矛盾于 $Rn = N, \forall n \neq 0 \in N$。 □

命题 10.2 R/m 是 R 单模，等价于 m 是极大理想。

证明 若 R/m 是单模。注意到若 $m \subset I$，则 R/m 到 R/I 有自然的模同态。其中 ker 是 I/m。注意到是单模，所以要么 I/m 是 0 要么是 R/m。于是 $I = R$ 或者 m。

若 m 是极大理想，设 $[I] + m \subset R/m$ 是真子模。则 $I + m$ 是 R 的真理想。注意到 m 是极大理想，则 $I + m = m$，于是 $[I] + m = 0$ □

定理 10.1 有限长度模长度为 n，等价于存在合成列:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \cdots \subset M_n = M$$

其中 M_{i+1}/M_i 都是单模。

注意，这里的 n 与列的选取无关。

我们给出引理:

引理 10.2 设短正合列:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

则 A, C 是 Noether 模等价于 B 是 Neother 模。A, C 是 Artin 模等价于 B 是 Artin 模。

证明 Noether 模的情况已经在前面证明过了。 □

证明 (有限长度模) 注意到单模是 Noether 模加 Artin 模。则有限长度根据归纳显然。

11 Zariski 拓扑

11.1 仿射空间 k^n 上的 Zariski 拓扑

k^n 上的拓扑结构。

又 $\emptyset = Z((1))$，$k^n = Z((0))$ 是代数集，于是 τ 满足闭集公理。称为 Zariski 拓扑。

我们研究一下 Zariski 拓扑的拓扑基:

$$U_f = \{x \in |f(x) \neq 0\}$$

例 11.1 $\mathbb{R}^2$ 中的集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ 是 Zarski 拓扑下的闭集。注意到该集合不可约，从而是连通的。(Zarski 拓扑)。因为若不连通，则可以写为闭集与闭集的不交并。其至少也可以写为 $\{fg = 0\}$。

例 11.2 设 A^{mn} 是 k^m 到 k^n 的线性变换集合，其同胚于 k^{mn}。则非满秩的矩阵是闭集。满秩的矩阵是开集。

11.2 素谱上的 Zariski 拓扑

R 是环，Spec$R$ 是所有素理想的集合。定义闭集:$Z(I) = \{p \in \mathrm{Spec}R : p \subset I\}$ 是闭集。

借助函数找一点的开邻域。

$p \in \mathrm{Spec}R$ 的邻域: 找函数 $f \in R$ 使得 $f \notin p$。$D(f)$ 是 p 的一个邻域。

例 11.3 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) = \{0\} \cup \{(x - a, y - b), a, b \in \mathbb{C}\} \cup \{$不可约多项式$\}$.

这里面有三类点: 泛点，闭点，一些不可约的多项式。

对任意的 $p_0 \in \mathrm{Spec}R$，找 $g \in R = \mathbb{C}[x, y]$ 中的不可约多项式使得 $g \notin p_0$。使得 $g \neq 0$,$g(a, b) \neq 0$，$g \neq f$。

开邻域 $U(g) := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \setminus \{(g)$上所有点对应的

11.3 Zariski 拓扑的普遍性

Stone-Weierstress 定理，弱零点定理与 Zariski 拓扑之间的关系。

定理 11.1 (Stone-Weierstress) 设 (K, τ_k) 是紧 Hausdorff 空间。$C(K, \mathbb{R})$ 是 K 上的实值连续函数构成的代数。其是 Banach 空间，范数为 $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$。

设 A 是 $C(K)$ 的子代数，若:

1.A 在 K 上是可分点的，即若 $x \neq y$，则存在 $f \in A$ 使得 $f(x) \neq f(y)$。

2.$\forall x \in K$，A 中一定有 $f \in A$ 使得 $f(x) \neq 0$。

则 A 是 $C(K)$ 中的稠密集。

定理 11.2 (泛函分析的弱零点定理) 设 I 是 $C(K)$ 的极大理想，存在唯一的 $x_0 \in K$, 使得 $I = I_{x_0}$。其中 $I_{x_0} = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$。

证明 假设不存在 $x_0 \in K$。使得 $\forall f \in I, f(x_0) = 0$。则 W-S 条件 2 成立。

根据 Uryshon 引理，S-W 的条件 1 成立。

从而根据 S-W 定理，$I \subset I \cup \{1\}$ 在 $C(K)$ 中稠密。则对于 $\epsilon > 0$，则存在 $f \in I$ 使得 $\|f - 1\|_\infty < \epsilon$。取 $\epsilon = 1/2$，则 f 没有零点。于是 $1/f \in C(K)$。从而 $f, 1/f \in I$，矛盾于 $I = C(K)$。

唯一性:$\forall x_1 \neq x_2$，有 $I_{x_1} \neq I_{x_2}$。 □

从而 K 和 $C(K)$ 存在双射。$\text{Spec}_m C(K)$ 的拓扑诱导 K 上的新拓扑 τ_m。

定理 11.3 $\tau_m = \tau_k$。

证明 设 W 是 τ_k 中的开集。证明 W 是 τ_m 中的开集。

根据 Uryshon 引理,$\forall x \in W$，存在 $f_x \in C(K)$ 使得 $f_x(K \setminus W) = 0, f_x(x) = 1$。只需证明 $W = \bigcup_{x \in W} U_{f_{x \in W}}$ 开覆盖。其中 $U(f) = \{x \in K : f(x) \neq 0\} = \{x \in K : f \notin I_x\}$。

对于 $x \in W$，$x \in U(f_x)$。

对于 $y \in U(f_x)$，假设 $y \neq W$，则 $f_x(y) = 0$ 矛盾！ □

12 维数理论

12.1 环上维数的定义:Krull 维数

设 R 是环

定义 12.1 R 的 Krull 维数定义为 $\dim R := \sup\{n : P_0 \subset P_1 \ldots P_n \subset R\}$。且 P_i 均为素理想，所有包含都是真包含。

对于 $p \in \text{Spec} R$，$\text{ht}(p)$ 定义为 $\sup\{n : P_0 \subset P_1 \cdots \subset P_n \subset P\}$，称为理想的高（余维数）。

对于 I 是一般的理想，也可以定义 $\text{ht}(I) = \inf\{\text{ht}(p) : I \subset P\}$ 称为 I 的高。

例 12.1 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 的维数是 n.

对 n 做归纳。则 $n = 0$ 时显然素理想不存在。所以维数是 0。

假定不定元个数小于 $n - 1$ 时，$\dim k[x_1, \ldots, x_i]$ 的维数是 i。对于 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$，有素理想升链:

$$(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots (x_1, \ldots, x_n) \subset R$$

由于 R 是 Noether 整环，$P_1=(f_1)$。f 是 R 中首 1 的不可约多项式。考虑 $\pi: R\to R/(f_1)$，令 $S=k[x_1,\dots,x_{n-1}]$。由于 $f\in S[x_n]$。x_n 是 $S\to R/(f_1)$ 的整元。于是 $R/(f)$ 可以看成 S 的整扩张。从而 $\dim R/(f)$ 的维数等于 S 的维数 $n-1$。

根据 $0\subset (f)/(f)\subset P_m/(f)\subset R/(f)$。则 $m-1\leq n-1$。于是 m 作为 R 的维数小于等于 n。

综上，R 的维数是 n。

定理 12.1 设 R 是整扩张 $S\subset R=S[a_1,\dots,a_r]$。则 S 的 Krull 维数与 R 相同。

证明 首先证明 R 的维数更大。

我们断言，(Lying-over 定理）对于 $S\subset R$ 整扩张，任取 S 的素理想 p，存在 R 的素理想 $p': p=p'\cap S$。

根据断言，对于 $p_i\in \mathrm{Spec}S$，存在 $p_i'\in \mathrm{Spec}R$ 使得 $p_i'\cap S=p_i$。

再断言 (Going up 定理):$S\subset R$ 是整扩张。若 p,q 是 S 的素理想，$p\subset q\subset S$，满足 $p'\in\mathrm{Spec}R$ 且 $p=p'\cap S$。则可以找到一个 $q'\in\mathrm{Spec}R$ 满足:$p'\subset q', q=q'\cap S$。

根据断言，对于 S 中的链 $P_0\subset P_1\subset\dots P_n\subset R$，则存在 $P_0'\subset P_1'\subset\dots P_n'$ 是真包含的序列。从而 R 的维数至少和 S 相同。

接着断言,(不相容定理)，对于 $S\subset R$ 整扩张，若 $P_1\subset P_2$ 是 R 中包含关系的素理想。若 $P_1\cap S=P_2\subset S$，则 $P_1=P_2$.

因此根据不相容定理，则 R 的链可以诱导 S 的链。所以维数相同。 □

引理 12.2 Noether 整环是 UFD 当且仅当高为 1 的理想是素理想。

定理 12.3 (Going down 定理) 若 R,S 还都是整环，且 S 是整闭得，则 Going down 条件成立。

12.2 参数系和有限生成代数维数

回忆 Noether 正规化定理:

定理 12.4 域 $\mathbb{F}$ 上的有限生成代数 A, 则存在代数无关的元素 $y_1,\dots,y_r$ 使得 A 是 $\mathbb{F}[y_1,\dots,y_n]$ 的有限扩张。

参数系:$\{y_1,\dots,y_n\}$ 称为参数系。Krull 维数 = 参数系元素个数。

$$A=k[y_1,\dots,y_r]x_1+k[y_1,\dots,y_r]x_2+\cdots+k[y_1,\dots,y_r]x_m$$

现在考虑向量空间的维数和 Krull 维数。

1.$k[x_1,\dots,x_n]$ 是无穷维向量空间，但 Krull 维数只是 n。

2.$V_1\subset V_2$ 是子空间。且两个向量空间的向量空间维数相同，我们可以得到 $V_1=V_2$. 但是考虑 S_n 作用在 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的不变子环，该环是所有对称多项式。其 Krull 维数是 n。

参数系自然有问题：是否有其他的参数系？这一点与 Hilbert 零点定理有关。

定理 12.5 设 C 是一组齐次多项式，令 $I=(C)$，C 是 R 的参数系等价于 $V(I)=(0)$。

证明 C 是 R 的参数系，则 $k[x_1,\dots,x_n]/(C)$ 是有限维 k 向量空间。于是对于 x_i，存在 d_i 满足 $x_i^{d_i}\in(C)$。于是 $V(I)\subset V(x_1^{d_1},\dots,x_n^{d_n})=(0)$.

反之，设 I 满足 $V(I)=0=(x_1,\dots,x_n)$。根据零点定理，$\sqrt{I}=(x_1,\dots,x_n)$。 □

12.3 不变理论中的参数系

G 是偶置换群，作用在 $k[x_1,\dots,x_n]$ 的不变子环由:

$$s_1, s_2, \dots, \Delta$$

生成。则 $k[s_1,\dots,s_n] \not\subseteq R^G \not\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$.

那对于一般的群和群作用呢？

存在性:G 是有限群，R^G 是有限生成 k 代数。根据 Noether 正规化定理，R^G 存在参数系。

参数系与轨道陈类 G 作用在 $(k^n)^*$ 上，$x_i \in (k^n)^*$，$G = \{g_1,\dots,g_k\}$ 是有限群。令 $o(x_i) = \{g_1 x_i,\dots,g_k x_i\} = \{f_{i1},\dots,f_{ik}\}$

最高陈类:$c_{top}(x_i) = f_{i1}\dots f_{ik}$

R^G 的参数系: 设 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 是 $(k^n)^*$ 的一组基，满足 $\alpha_{i+1} \notin U_{g_1,\dots,g_n\in G}\mathrm{span}_k\{g_1\alpha_1,\dots,g_i\alpha_i\}$。遍历 $(g_1,\dots,g_i) \in G^i$。这称为 Dade 基，且一定存在。

则 $c_{top}(\alpha_1), c_{top}(\alpha_2), \dots, c_{top}(\alpha_n)$ 构成 R^G 的参数系。