



Note for Homological Algebra

MORSE 理论笔记

EDITED BY

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-03-20 22:31



LOGO NAME

Slogan Here



Contents

1	流形上的非退化光滑函数	3
1.1	Morse 函数	3
1.2	临界值处的伦形	6
1.3	Morse 不等式	6
2	Morse 理论的应用——测地线变分	7
2.1	道路的能量积分	7
2.2	指标定理	7
2.3	道路空间的伦型	7
3	Morse 不等式的解析证明	8
3.1	Witten 形变与 Hodge 定理	8
3.1.1	Witten 形变	8
3.1.2	Hodge 定理	9
3.2	算子在临界点的分析	9
3.3	Morse 不等式的证明	10
3.3.1	一个命题	10

这是笔者于 2023 年本科四年级下学期学习 Morse 理论的学习笔记。

我们假定大家拥有基础的微分几何知识和黎曼几何知识。

设 f 是流形 M 上的光滑函数。我们定义: 称一个点 $p \in M$ 是 f 的临界点 (critical point), 若诱导映射 $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} R$ 是 0 映射。

在流形上我们最好用各种各样的局部坐标讨论。设 $(U; x_i, 1 \leq i \leq n)$ 是 p 附近的一个局部坐标系, 则临界点的定义可以写为:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0 \quad (1)$$

此时 $f(p)$ 称为 f 的临界值。

在临界点处 f 的性质有着与非临界值完全不同的性质。Morse 理论则是研究临界点处, M 本身拓扑性质的改变的理论。

流形上的非退化光滑函数

§1.1 Morse 函数

我们先用一个引理说明在非临界点 M 的平凡性质。

Lemma 1.1.1: 非临界点

设 $M^a = \{p \in M | f(p) \leq a\}$ 。若 a 不是临界值, 则 M^a 是带边的光滑流形。

引理的证明留作练习。主要使用到隐函数定理以及带边流形的定义。

Definition 1.1.1: 非退化点

考虑 M 上的函数 f 。若在 f 的临界点 p 处存在一个局部坐标 $(U; x^i)$ 使得矩阵:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (p) \right) \quad (1.1)$$

非奇异, 则称 p 是一个非退化点。

这里需要注意的是, p 的非退化性显然与局部坐标 x^i 无关。因此 p 的非退化性是 f 内蕴的性质。

如果 p 是 f 的临界点, 我们就可以定义在 $T_p M$ 上的双线性函数 f_{**} 。若 $v, w \in T_p M$, 用 \tilde{v} 和 \tilde{w} 表示在 p 处值为 v, w 的向量场。定义:

$$f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}f) \quad (1.2)$$

我们断言:

Lemma 1.1.2

f_{**} 是对称的良定双线性函数。

Proof. 考虑:

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}f) - \tilde{w}_p(\tilde{v}f) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0 \quad (1.3)$$

最后一个等号成立, 是因为 p 是 f 的临界点。

从而 f_{**} 是对称的。因此, $\tilde{v}_p(\tilde{w}f)$ 与 \tilde{v} 的选取无关, $\tilde{w}_p(\tilde{v}f)$ 与 \tilde{w} 的选取无关。

于是 f_{**} 与 \tilde{v}, \tilde{w} 的选取都无关, 因而是良定的双线性函数。 ■

Definition 1.1.2: Hessian, 指数, 零化度

称 f_{**} 为函数 f 在 p 处的 Hessian 双线性函数。

而 f_{**} 的指数定义为满足 f_{**} 限制在上为负定双线性函数的子空间 V 的最大维数。 f_{**} 的零化度

定义为 f_{**} 的零空间 W 的维数, 即子空间 $W = \{v \in V | f_{**}(v, w) = 0, \forall w \in V\}$ 的维数。

可以验算 f_{**} 在坐标 $(U; x^i)$ 下给出的就是矩阵 1.1. 显然, f 在 p 处非退化等价于 f_{**} 的零化度是 0。 f_{**} 的指数也称为 f 在 p 处的指数。

Lemma 1.1.3: Morse 引理

设 p 是 f 的非退化点, 则存在一个 p 处的局部坐标 $(U; y^i)$ 满足 $y^i(p) = 0, \forall i$ 且:

$$f(q) = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \cdots + (y^n)^2 \quad (1.4)$$

在整个 U 上都成立. 其中 λ 是 f 在 p 处的指数。

Proof. 我们首先说明如果 f 拥有这样的表达式, 则指数为 λ .

对于坐标 (z^i) , 若:

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \cdots - (z^\lambda(q))^2 + \cdots + (z^n(q))^2$$

则容易求出 f_{**} 在该坐标下的矩阵为 $\text{diag}(-2, \dots, -2, 2, \dots, 2)$. 其中 -2 一共有 λ 个。

因此存在一个 λ 维的子空间使得 f_{**} 是负定的, 存在一个 $n - \lambda$ 维的子空间 V 使得 f_{**} 是正定的。如果 p 处的指数大于 λ , 则对应的子空间与 V 相交不为空。但这是不可能的, 因此 λ 是 f 在 p 处的指数。

接下来我们说明 (y^i) 坐标存在。不妨设 p 是 \mathbb{R}^n 的原点且 $f(p) = f(0) = 0$. 从而有:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt \quad (1.5)$$

令 $g_j = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) dt$, 则 $f = \sum_j x_j g_j$ 在 0 处的一个邻域上成立。

因为 0 是 f 的临界点, 从而 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$. 这意味着 $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. 因而对 g_j 作上述 f 同样的分解:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

不妨假设 h_{ij} 关于 i, j 对称。通过计算, 不难验证矩阵 $(h_{ij}(0))$ 等于:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0) \right)$$

因此 $h_{ij}(0)$ 是非奇异的矩阵。仿照模仿有理标准型的构造, 可以证明存在一组坐标 (y^i) 使得 f 呈现为引理中的形式。具体的构造办法详见 Milnor 原书。(附录) ■

Morse 引理的好处在于我们可以用指数唯一确定 f 在 p 处的一个标准形式。根据这个引理, 可以得知 f 在非退化点 p 的一个邻域内只有 p 一个临界点。

Corollary 1.1.1

非退化临界点是离散的。特别的, 紧致流形 M 上的非退化临界点只有有限个。

Definition 1.1.3: Morse 函数

若 $f \in \mathcal{O}(M)$ 且只有非退化的临界点, 则称该函数为 Morse 函数。

Morse 函数的好处是显而易见的。然而存在性则是一个问题。本节我们剩下的内容为下面的定理。

Theorem 1.1.1

任何流形 M 上都存在一个可微的函数 f , 满足不存在退化临界点, 且 M^a 对于任何 $a \in \mathbb{R}$ 都是紧致的。

根据 Whitney 嵌入定理, 任何流形都可以嵌入到维数足够高的欧氏空间。因而我们考虑 M 是 \mathbb{R}^n 的 k 维嵌入子流形 (之后统称为 “子流形”)。

定义 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 为:

$$N = \{(q, v) : q \in M, v \in T_q \mathbb{R}^n, v \perp M\}$$

即 N 是 M 在 \mathbb{R}^n 中的法丛。不难验证 N 是 n 维的流形, 且光滑的嵌入进 \mathbb{R}^{2n} 中。定义 $E : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为映射 $(q, v) \mapsto q + v$ 。

Definition 1.1.4: 焦点

称 $e \in \mathbb{R}^n$ 是 (M, q) 重数为 μ 的焦点, 若 $e = E(q, v), (q, v) \in N$ 且 E 在 (q, v) 处的 Jacobian 矩阵有零化度 μ 。

根据 Sard 定理, 两个微分流形之间的可微映射的临界点是很有限制的——临界值只有 0 测度。显然焦点是 E 的临界值, 因而:

Corollary 1.1.2

对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n, x$ 都不是 M 的焦点。

现在固定 $p \in \mathbb{R}^n$. 定义函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$L_p = f : q \mapsto \|q - p\|^2 \quad (1.6)$$

在坐标 $(U; u^1, \dots, u^k)$ 下, f 的表达式为:

$$f(u^1, \dots, u^k) = \|\vec{x}(u^1, \dots, u^k) - \vec{p}\|^2 = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{p} + \vec{p}\vec{p}$$

因此可以计算:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

因此 q 是 f 的临界点, 当且仅当 $q - p$ 垂直与 M 垂直。

考虑 f 的二阶导数。我们有:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} u^j \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

从而有

Lemma 1.1.4

q 是 $f = L_p$ 的退化临界点等价于 p 是 (M, q) 的焦点。根据推论 1.1.2, 总存在这样的 L_p 使得该函数不存在退化的临界点。另外, 若 q 是 L_p 的退化临界点, 则该点的零化度是 p 的重数。

§1.2 临界值处的伦形

§1.3 Morse 不等式

Morse 理论的应用——测地线变分

§2.1 道路的能量积分

§2.2 指标定理

§2.3 道路空间的伦型

Morse 不等式的解析证明

本节我们讨论 Witten 在上个世纪 80 年代关于 Morse 不等式给出的解析证明。

§3.1 Witten 形变与 Hodge 定理

设 M 是紧流形. 对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 令 β_i 表示 M 的第 i 个 Betti 数 $\dim(H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R}))$ 。下面的 De Rham 定理说明我们可以用 β_i 表示 Morse 不等式。

Theorem 3.1.1: De Rham 定理

光滑流形 M 的 De Rham 上同调和 \mathbb{R} 奇异上同调存在自然的同构。

该定理的思路是通过微分形式 ω 在复形 Δ^k 上的积分, 给出 \mathbb{R} 系数奇异上同调类, 在说明这是一个同构。具体的证明, 参见 82。

这个定理表明我们可以解析地研究流形的拓扑。其关键是研究 $\Omega^k(M)$ 在不同复形下的性质。

§3.1.1 Witten 形变

给定 M 上的 Morse 函数 f , 对外微分算子 d 做出如下的形变:

$$d_{Tf} = e^{-Tf} d e^{Tf} \quad (3.1)$$

考虑 $d^2 = 0$, 于是:

$$(d_{Tf})^2 = e^{-Tf} d^2 e^{Tf} = 0$$

因此一般的 de Rham 复形可以变形为 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$. 从而我们可以定义起上同调群:

$$H_{Tf, dR}^*(M, \mathbb{R}) = \frac{\ker(d_{Tf})}{\text{Im}(d_{Tf})}$$

其 \mathbb{Z} 分次结构为:

$$H_{Tf, dR}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^n H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=0}^n \frac{\ker(d_{Tf}|_{\Omega^i(M)})}{\text{Im}(d_{Tf})|_{\Omega^{i-1}(M)}}$$

之所以考虑这样的形变, 是因为我们发现形变后得到的上同调群与原来的上同调群维数一致:

Proposition 3.1.1

对于 $0 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 有:

$$\dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R}))$$

Proof. 对于形式 α , 定义映射 $i : \alpha \mapsto e^{-Tf}\alpha$. 若 α 是闭形式, 则 $i(\alpha)$ 满足 $d_{Tf}(i(\alpha)) = 0$. 另外, 若 $\alpha = d\beta$, 则 $d_{Tf}(e^{-Tf}\beta) = e^{-Tf}\alpha$. 从而 $d_{Tf}(i(\beta)) = i(\alpha)$.

因此 i 诱导了上同调的映射 $i^* : \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R}))$. 显然这是一个同构。 ■

§3.1.2 Hodge 定理

设 g^{TM} 是 M 的一个黎曼度量。我们给出 DeRham 复形上的 Hodge 定理。

Theorem 3.1.2: Hodge

对于任意的 $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$, 形式的有:

$$\langle d_{Tf}\alpha, \beta \rangle = \langle e^{-Tf}de^{Tf}\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, e^{Tf}d^*e^{-Tf}\beta \rangle$$

于是 d_{Tf} 的形式伴随可写为:

$$d_{Tf}^* = e^{Tf}d^*e^{-Tf} \quad (3.2)$$

仿照 Hodge 分解, 定义:

$$D_{Tf} = d_{Tf} + d_{Tf}^* \quad (3.3)$$

$$\square_{Tf} = D_{Tf}^2 = d_{Tf}d_{Tf}^* + d_{Tf}^*d_{Tf} \quad (3.4)$$

从而可知 \square_{Tf} 保持 $\Omega^i(M)$ 的次数。因为这样的操作并没有改变 Hodge 定理的关键部分, 所以我们可以给出形变后的 Hodge 定理:

$$\dim(\ker(\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)})) = \dim(H_{Tf, dR}^i(M, \mathbb{R})) = \dim(H_{dR}^i(M, \mathbb{R})) \quad (3.5)$$

上式说明, 为了考量 β_i 的信息, 可以研究 \square_{Tf} 的行为。因为 T 值本身不改变上述结果, 从而可以考虑 T 值趋近于无穷的情况。

§3.2 算子在临界点的分析

不失一般性, 假设 f 在临界点 $x \in M$ 的开邻域 U_x 上有坐标 (y^i) 满足 Morse 引理, 并且:

$$g^{TM} = (dy^1)^2 + \cdots + (dy^n)^2 \quad (3.6)$$

Proposition 3.2.1

在上述假设下, 可以计算 d_{Tf} 和 d_{Tf}^* .

$$d_{Tf} = d + Tdf \wedge, \quad d_{Tf}^* = d^* + Ti_{(df)^*} \quad (3.7)$$

其中 $(df)^*$ 是 df 作为微分形式在度量 g^{TM} 的对偶。

Proof. 设 $\omega \in \Omega^*(M)$. 则:

$$d_{Tf}(\omega) = e^{-Tf}(e^{Tf}d\omega + Te^{Tf}df \wedge \omega) = d\omega + Tdf \wedge \omega \quad (3.8)$$

由于 $df \wedge$ 的形式伴随是 $i_{(df)^*}$, 于是 d_{Tf}^* 的表达式如上。 ■

于是可以给出:

$$D_{Tf} = D + T\hat{c}(df), \hat{c}(df) = df \wedge + i_{(df)^*} \text{ 是 } df \text{ 的 Dirac 算子} \quad (3.9)$$

根据 Morse 引理, 在每个 U_x 上都有:

$$df(x) = -y^1 dy^1 - \cdots - y^{n_f(x)} dy^{n_f(x)} + y^{n_f(x)+1} dy^{n_f(x)+1} + \cdots + y^n dy^n \quad (3.10)$$

其中 $n_f(x)$ 是 f 在 p 处的指数。设 $e_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ 是 TU_x 的定向标准正交基础, 则在 U_x 上, 有:

$$\square_{Tf} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + T \sum_{i=1}^{n_f(x)} (1 - c(e_i) \hat{c}(e_i)) + T \sum_{i=n_f(x)+1}^n (1 + c(e_i) \hat{c}(e_i)) \quad (3.11)$$

$$= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^2 - nT + T^2 \|y\|^2 + 2T \left(\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i} \right) \quad (3.12)$$

不难发现算子:

$$\sum_{i=1}^{n_f(x)} i_{e_i} e_i^* \wedge + \sum_{i=1}^{n_f(x)+1} e_i^* \wedge i_{e_i}$$

非负, 且具有由下述形式生成的一维核空间:

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)}$$

因此总结如下:

Proposition 3.2.2

对于任意 $T > 0$, 算子 \square_{Tf} 作用在 $\Gamma(\wedge^*(E_n^*))$ 上非负, 其由下述形式生成:

$$\exp\left(\frac{-T\|y\|^2}{2}\right) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_f(x)} \quad (3.13)$$

进而对于某个固定的常数 $C > 0$, 该算子所有的非零特征值大于 CT .

§3.3 Morse 不等式的证明

§3.3.1 一个命题

我们先不加证明的指出下面命题, 并借此证明 Morse 不等式。

Proposition 3.3.1

对于任意 $c > 0$, 存在 $T_0 > 0$ 使得当 $T \geq T_0$ 时, $\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 的落在区间 $[0, c]$ 的特征值的个数 (计重数) 为 $m_i, 0 \leq i \leq n$.

对于 $9 \leq i \leq n$ 的任意整数 i , 设:

$$F_{Tf,i}^{[0,c]} \subset \Omega^i(M)$$

是 $\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}$ 在 $[0, c]$ 中的特征值对应的特征向量所生成的 m_i 维向量空间。

注意到下面的事实:

$$[d_{Tf}, \square_{Tf}] = [d_{Tf}^*, \square_{Tf}] = 0$$

因此 d_{Tf} 和 d_{Tf}^* 对于 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 而言都是封闭的。 $(d_{Tf}$ 把 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 映射到 $F_{Tf,i+1}^{[0,c]}$, d_{Tf}^* 把 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 映射到 $F_{Tf,i-1}^{[0,c]}$) 因此我们构造了 $(\Omega^*(M), d_{Tf})$ 有限维的子复形:

$$(F_{Tf}^{[0,c]}, d_{Tf}) : 0 \longrightarrow F_{Tf,0}^{[0,c]} \longrightarrow F_{Tf,1}^{[0,c]} \longrightarrow \dots F_{Tf,n}^{[0,c]} \longrightarrow 0 \quad (3.14)$$

将 $\Omega^*(M)$ 的 Hodge 分解限制在该有限维复形上, 可以给出:

$$\beta_{Tf,i}^{[0,c]} := \dim\left(\frac{\ker(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})}{\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i-1}^{[0,c]}})}\right) \quad (3.15)$$

就等于 $\dim(\ker(\square_{Tf}|_{\Omega^i(M)}))$, 从而等于 β_i . 由于 $\beta_{Tf,i}^{[0,c]}$ 总是小于 m_i 的, 因此弱 Morse 不等式证毕。

下面我们说明强 Morse 不等式。具体写出 $F_{Tf,i}^{[0,c]}$ 的分解:

$$\dim(F_{Tf,n}^{[0,c]}) = \dim(\ker(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) + \dim(\operatorname{Im}(d_{Tf}|_{F_{Tf,i}^{[0,c]}})) \quad (3.16)$$