Algebra:Chapter 0:Set and Categories

颜成子游

2022 年 5 月 18 日

目录

Algebra:Chapter 0 是一本非常详细的代数学教材，其详实程度远远大于通常的代数学教材。我们将从集合论和范畴论开始，一点一点地搭建起初等的代数体系，从而为之后的代数学习打下基础。

在这一份 pdf 中，我们将聚焦于本书的第一章：集合论与范畴论（初等的）。

1 朴素集合论

1.1 一些记号和概念

朴素集合论本质上是一种术语和记号，它将帮助我们表达许多概念，定理，证明。尽管存在罗素悖论，但在这本书中我们并不会遇到这样的情况，从而我们将不去讲“ZF”系统。

作为一名数学系本科生，以下的概念应当是不陌生的：

定义 1.1 *我们不加定义的给出下面若干概念：*

1. *集合、元素*
2. *集合拥有的性质：明确性，无序性，不重复性*
3. *表述集合的方法：*
$$P = \{p \in S | p \quad satisfies\ property \quad P\}$$
4. *多集合（允许元素重复的集合）*
5. *单点集*
6. *集合与集合之间的关系：包含与子集，真子集，空集，幂集 ($\mathcal{P}(S)$)*

定义 1.2 (集合之间的运算) *下面这些概念也是为人熟知的：*

1. *并*
2. *交*
3. *差*
4. *不交并*
5. *笛卡尔积*
6. *由等价关系产生的商*

1.2 集合之间的函数

对于一名知道一点高中数学的人来讲，函数的概念也应当是刻在 DNA 之中的。然而“函数”总给我们一种动态的感觉。事实上，这是没有必要的：

定义 1.3 一个从 A 到 B 的函数 f 是笛卡尔直积 $A\times B$ 的子集:

$$\Gamma_f=\{(a,b)\in A\times B|b=f(a)\}$$

从定义看出，若有

$$(a,b)(a,b^*)$$

同属于一个 Γ_f，那一定有 $b=b^*$。另外

$$\{a|(a,b)\in\Gamma_f\}=A$$

我们把 Γ_f 称为 f 的图像。

我们也有符号:

$$A\xrightarrow{\quad f\quad}B$$

这样的符号将在之后经常使用。

定义 1.4 接下来的几个概念和记号也是不陌生的:

1. 恒等映射，映入映射，限制映射
2. 将 A 到 B 的所有映射构成的集合记为:
$$B^A$$
3. 指标集（从数列抽象而来）

接下来我们将讨论一些新的东西。尽管集合间的函数是足够简单的，但是我们也得到一些非常好的东西。

值得注意的是，我们将使用所谓“交换图”来表示我们的结果。

定义 1.5 (函数的复合) 如果 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 是函数，那么函数复合 $g\circ f$ 是满足下列交换图成立的映射:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

定理 1.1 函数的复合是交换的。即若有 $f:A\to B$, $g:B\to C$,$h:C\to D$，下面的交换图是成立的:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

恒等映射与任何函数复合都不会改变原来的函数。

定义 1.6 (单射，满射，双射（一）)

单射：$f(a) = f(a^*) \Rightarrow a = a^*$

满射：$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

双射：既是单射又是满射.

单射记为：$\hookrightarrow$, 满射记为 $\twoheadrightarrow$

定义 1.7 (单射，满射，双射（二）)

称 g 是 f 的左逆，如果图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

成立

称 g 是 f 的右逆，如果图：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

成立

单射：有左逆。

满射：有右逆。

双射：既有左逆又有右逆。

我们将不去验证两种定义的等价性。但值得注意的是，定义二是更本质的东西，因为它不去设计 A,B 具体有什么元素。如果我们考虑的东西不是集合（范畴论），那么定义二将成为唯一的定义方式。

需要指出，如果只是单射、满射，那么其左逆（右逆）一般是不唯一的。但是如果是双射，那么其左逆和右逆不仅唯一，而且相等：

$$g \circ f = \mathrm{id}_A$$

$$f \circ h = \mathrm{id}_B$$

则:

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ f \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$$

定义 1.8 (单态射与满态射)

一个映射 $f : A \to B$ 是一个单态射，如果对于所有的集合 Z 和所有函数 $\alpha, \alpha^* : Z \to A$，都有：

$$f \circ \alpha = f \circ \alpha^* \Rightarrow \alpha = \alpha^*$$

一个映射 $f : A \to B$ 是一个满态射，如果对于所有的集合 M 和所有的函数 $\beta, \beta^* : B \to M$，都有：

$$\beta \circ f = \beta^* \circ f \Rightarrow \beta = \beta^*$$

我们不加证明的指出以下结论。请注意，只有在集合的意义下，下面的结论才是显然成立的（不能任何时候都认为他们一样）

命题 1.1 一个映射是单射当且仅当其是单态射；一个映射是满射当且仅当其是满态射。

接下里给出一个小例子。

例 1.1 如果 A, B 是集合，那么存在自然映射 π_A, π_B:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, two heads, "\pi_A"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

其中，$\pi_A((a,b)) = a, \pi_B((a,b)) = b$。显然都是满射。

现在给出一个极其有价值的定理：

定理 1.2 设 $f : A \to B$ 是一个映射，那么 f 可以按照如下交换图分解：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "f"] & (A/\sim) \arrow[r, "\tilde{f}", "\sim"'] & \mathrm{im} f \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

其中 $\sim$ 是等价关系：$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \sim b$
另外 $\tilde{f}([a]_\sim) := f(a)$
其余的两个映射，一个是自然映射 $A \to A/\sim$，一个是内射 $imf \to B$.

证明 显然。 □

2 范畴论

范畴论是一种语言，其关注于所谓的“结构”，而非“意义”。这一点在之后的学习中会逐渐凸显。集合是一种范畴，但范畴能描述更多更有意思的东西。同时，在范畴中我们也能意识到哪些性质是“基本”的，哪些性质是特殊的代数对象特有的。

定义 2.1 一个范畴 C 包含：

* 一个由对象所组成的类 $Obj(\mathsf{C})$

* 对于任何两个对象 A, B, 存在一个集合 $Hom_{\mathsf{C}}(A, B)$ ，称为 A, B 之间的态射，并且拥有以下性质：

- 对于每个对象 A，态射集合 $Hom(A, A)$ 非空，包含一个元素 1_A，称为 A 的恒等态射。
-