Lie 群笔记

整理者：颜成子游/南郭子綦

2023 年 5 月 26 日

目录

1 2023.02.16 **2**
1.1 一些定义 2
1.2 李群与矩阵李群 3
1.3 球面上的李群结构 4

2 2023.02.23 **4**
2.1 李群的局部性质 4
2.1.1 单位元邻域生成连通子群 4
2.1.2 单位元的切空间具有 Lie 代数结构 5
2.1.3 Hall-Wilt 恒等式 5
2.2 李群与李代数的关系——指数映射 6
2.3 矩阵李群的性质与李代数 6

3 2023.03.02 **6**
3.1 李群的指数映射 6
3.2 指数映射的性质 7

4 2023.03.09 **10**
4.1 闭子群定理应用 10
4.2 李群同态和李代数同态 11
4.3 李子群与李子代数 11
4.4 李的基本定理 12

5 2023.03.16 **12**
5.1 覆盖群及其应用 12

6 2023.03.23 **14**
6.1 李群的基本群求法 14
6.2 李代数的复化和实形式 14
6.3 复流形 15

6.4 泛包络代数 15

7 2023.3.30 **16**

7.1 $U(g)$ 16

7.2 代数群和李群 17

7.3 李群李代数的表示 17

8 2023.04.06 **18**

8.1 李代数的表示和李代数模 18

9 2023.04.13 **19**

9.1 不变内积的存在性 19

9.2 一个例子:SU(2) 20

10 2023.04.20 **21**

11 李群的表示 **21**

11.1 Schur 正交化定理 22

11.2 紧李群的分类 24

1 2023.02.16

1.1 一些定义

定义 1.1 **拓扑群** $(G,\cdot)$：G 是群且是一个拓扑空间，满足 $\cdot : G\times G\to G$ 和 $()^{-1} : G\to G$ 都是连续的。

李群:$(G,\cdot)$:G 是拓扑群，且本身是一个微分流形，满足 $\cdot : G\times G\to G$ 和 $()^{-1} : G\to G$ 是光滑的。

为什么没有拓扑群专门的课程呢？

命题 1.1 (Hilbert 第五问题) 拓扑群 + 局部欧氏能否成为李群呢？

叙述如下：

任意局部欧的拓扑群是李群且微分结构是唯一实解析的。

该问题在 1950 年代已经被证明了。从而拓扑群方向基本没有人研究了。

命题 1.2 任意连通的微分流形是道路连通的。

证明

定义 1.2 (李子群) 设 H 是李群 G 的子群。若 H 是 G 的浸入子流形，则 H 是 G 的李子群。

回忆：什么是浸入子流形？

命题 1.3 (Yamabe) 李群的道路连通的子群是李子群。

但是李群的连通子群就不一定是李子群了。

例 1.1 (李子群但不是嵌入李子群) 考虑 T^2 作为李群（显然是李群）。考虑子流形：

$$H^n = \{(e^{it}, e^{int}) | n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}\}$$

$$H^a = \{(e^{it}, e^{iat}) | a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}, a > 0, t \in \mathbb{R}\}$$

H^n 是嵌入的李子群，其同胚于 S^1。但 H^a 是非嵌入的李子群，只是浸入李子群。($\overline{H^a} = T^2$.)

1.2 李群与矩阵李群

一般线性群：

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} || A| \neq 0\}$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} || A| \neq 0\}$$

其中 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是复李群（乘法是全纯的），实李群。另外一个是实李群。

定义 1.3 (矩阵李群) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的闭子群 G 称为矩阵李群。换句话说，若 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 满足若序列 $\{A_m\} \subset G$, 则 $\lim_{n\to\infty} A_m = A \in M_n(\mathbb{C})$，有 $A \in G$ 或者不可逆。

注意：

1. 李群不一定是矩阵李群。但紧李群一定是矩阵李群。(Peter-Weyl)
2. 矩阵李群是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的闭子群，而不是 $M_n(\mathbb{C})$ 的“闭子群”。
3. 任何闭子群都是嵌入李子群（Cartan）。

例 1.2 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是矩阵李群，但不是 $M_n(\mathbb{C})$ 的闭子集。

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ 是群但并非矩阵李群。其不是闭集。

例 1.3 (矩阵群的例子) A. 一般线性群。$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$。

B. 特殊线性群。$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) || A| = 1\}$,$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) || A| = 1\}$。

C. 正交群：$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A^T A = I_n\}$.$\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | A^T A = I_n\}$

D. 特殊正交群:$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) || A| = 1\}$。

E. 酉群:$A \in M_n(\mathbb{C})$，使得 $A * A = I_n$。其中 $A* = (\overline{A})^T$。这样的矩阵称为酉矩阵。酉群:$U(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A^* A = I_n\}$。酉矩阵变换保证酉内积的不变。**注意：**$U(n)$ 是实李群而非复李群。特殊辛群:$SU(n) = \{A \in U(n) | \mathrm{det} A = 1\}$

F. 辛群:$S_p(n)$。$\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) = \{A \in \mathbb{H}^{n\times n} : \mathrm{det} A \neq 0\}$ 是实李群。注意，由于四元数一些神秘的性质，虽然行列式，迹是良定义的，但是有 $\det(AB) \neq \det(BA)$,$\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(BA)$。

$S_p(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) | A * A = I\}$。称为辛群，不是复李群。

$S_p(1) \cong SU(2) \cong S^3$。

G. 实辛群。$\mathbb{R}^{2n}$ 的反对称双线性型。$w(x, y) = \sum_{j=1}^n (x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j)$。

$$S_p(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) | : w(Ax, Ay) = w(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}\} = \{A \in \mathrm{SL}(2n, \mathbb{R}) : \Omega A^T \Omega = A^{-1}\}, \Omega = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 球面上的李群结构

S^n 有李群结构等价于 $n=1$ 或者 $n=3$。并且 $S^1 \cong SO(2,\mathbb{R})$,$S^3 \cong \mathrm{SU}(2) \cong S_p(1)$.

命题 1.4 李群上的切丛是平凡的。即对于 n 维李群，有 $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$。

证明

$$G \times T_eG \to TG : (g,v) \mapsto (g,(L_g)_* v)$$

L_g 是左平移作用，是一个微分同胚。详细证明可以见梅加强。 □

对于 S^n，若 S^n 的切丛是平凡的，则 $n=1$，$n=3$,$n=7$。因而想要关注 S^n 是否为李群，只需要考虑这三个。

2 2023.02.23

2.1 李群的局部性质

2.1.1 单位元邻域生成连通子群

命题 2.1 连通李群 G 可以由 e 处任意邻域生成。

引理 2.1 设 H 是李群 G 的开子群，则 H 是 G 的闭子群。

证明 这一点在拓扑群的考量中就可实现。固定 $g \in G$，$L_g : G \to G$ 是一个微分同胚。故任意左陪集 gH 是开集。考虑 $G \times H \to G$ 群作用，则 $G = \bigcup_{g \in G} gH$ 且是不交并。从而 H 的余集是开集，H 是闭子群。 □

因此开子集是闭子群。是即开又闭的集合。

引理 2.2 设 U 是 e 处的开邻域，则 U 的生成子群 H 是开集。

证明 根据定义，群 H 包含所有的乘积 $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$。故 $H = \bigcup_{x \in U} xU$ 是开集。 □

两个引理立马就得到了命题。

命题 2.2 设 G 是李群，G_0 是 G 的单位连通分支，则 G_0 是 G 的子群。

证明 对给定的 $x \in G_0$，其中 x 可以是任意指定的。由于 $e \in G_0 \cap x^{-1}G_0$，从而 $G_0 = x^{-1}G_0$。于是 $\forall y \in G_0$，$x^{-1}y \in G_0.G_0$ 是子群。 □

推论 2.3 $\forall x_1, x_2 \in G$，则 $x_1G_0 \cap x_2G_0$ 要么是空集，要么是 $x_1G_0 = x_2G_0$

证明 如果相交非空，则两者都同胚于 G_0。 □

推论 2.4 G_0 是 G 的正规子群。

证明 考虑群作用 $G \times G \to G : (g,h) \mapsto ghg^{-1}$。于是 G 成为了若干共轭类的并。

由于 $e \in gG_0g^{-1} \cap eG_0e^{-1}$，因此轨道 $gG_0g^{-1} = G_0$。于是 G_0 是正规子群。 □

正规子群意味着可以做商。那么:

$$1 \to G_0 \to G \to G/G_0 \to G$$

是正合列。

2.1.2 单位元的切空间具有 Lie 代数结构

定义 2.1 (李代数) V 是有限维 k 向量空间。$[,]$ 是 k 双线性:$[,] V\times V\to V$，满足反对称和 Jacobbi 恒等式:

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

例 2.1 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是李代数。$[A,B]=AB-BA$。此时这是 Lie 代数。

定理 2.5 (Ado 定理) 有限维李代数是 $(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),[,])$ 的李子代数。

我们自然关注李群的李代数问题。

定义 2.2 (左不变向量场) 李群 G 上的向量场 X 称为左不变的向量场，如果 $L_g(Xh)=X(gh)$ 对于任意的 g,h 都成立。其中 L_g 是左平移作用。

命题 2.3 设 g 是 G 上左不变向量场的集合,T_eG 是 G 在 e 处的切空间，则 $I:g\to T_eG$，$X\to X(e)$ 是向量空间的同构。

证明 根据左不变的定义，左不变向量场由 T_eG 中的元素确定。即 $X(g)=L_g(X(e))$, 从而 I 是双射。

根据向量场的运算 $(X+Y)(e)=X(e)+Y(e)$，$(kX)(e)=k(X(e))$ 知道 I 是同构。 □

由于 g 是有限维的李代数，其中 $[X,Y]=XY-YX$，则 I 诱导了 T_eG 上的李括号结构：

$$[X(e),Y(e)]:=[XY-YX](e)$$

定义 2.3 $(T_eG,[,])$ 称为李群 G 的李代数。

我们借此计算一下一些李群的李代数。

例 2.2 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的李代数为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$。李括号为 $XY-YX$.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在 I 处的切空间为 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$。左不变向量场由 $\tilde{X}(I)=X\in G$ 决定。

例 2.3 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的李代数。$A\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$，则 $|A|=1$。

$\det(I+\epsilon X)=1+\epsilon tr(X)+o(\epsilon^2)=1$, 则

例 2.4

2.1.3 Hall-Wilt 恒等式

令 $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ 是群上的交换子。考虑伴随作用 $x^y=y^{-1}xy$. 则下面有恒等式:

$$[[x,y^{-1}],z]^y[[y,z^{-1}],x]^z[[z.x^{-1}],y]^x=1$$

例 2.5

2.2 李群与李代数的关系——指数映射

1. 矩阵（复数元）的指数映射。

$$e^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}, \quad X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

命题 2.4 对于任何 $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$，上述级数收敛。

证明 分析方法：

考虑 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 上的范数是所有元素的平方和的平方根。若 $\lim X_n \to X$，则有 $\lim |X_n - X| = 0$。从而转化为:

$$\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|X\|^m}{m!} = e^{\|X\|}$$

收敛。(代数范数)

代数方法: 考虑可对角化矩阵

$$X = CDC^{-1}$$

若 D 对角，则显然收敛。若 X 幂零，则显然也收敛。一般的情况而言，由于任意的 X 可唯一分解为 $X = S + N$，且 $SN = NS$。从而 $e^X = e^{N+S} = e^N e^S$。故收敛。 □

$(R, +) \to (\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ 是李群同态。

引理 2.6 设 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实对称矩阵，$\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ 是正定矩阵。则 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ 是微分同胚。

命题 2.5 对于 $A\times$

2.3 矩阵李群的性质与李代数

3 2023.03.02

3.1 李群的指数映射

定义 3.1 (李群同态) 设 H, G 是李群。若 $\varphi : H \to G$ 是光滑的群同态，则称 φ 是李群同态。

定义 3.2 (李代数同态) 设 g, h 是李代数，线性映射 $\varphi : h \to g$ 称为李代数同态，若 $\varphi[x, y]_h = [\varphi(x), \varphi(y)]_g$.

定义 3.3 (单参数变换群) 李群同态 $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$ 称为单参数变换群。

命题 3.1 设 G 是李群且李代数是 g。对于任意给定的 $X \in g$，存在唯一的单参数变换子群 $\varphi_x : \mathbb{R} \to G$ 满足:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi_x(t) = X(e)$$

证明 (积分曲线 +ODE 解的完备性) 只需证明任意给定的 $X \in g$, 存在完备的积分曲线 φ_X 使得:$\varphi_X(t+s) = \varphi_X(t)\varphi_X(s)$。

对于任意的 $X \in g$，存在 $\epsilon > 0$ 使得在 $(-\epsilon, \epsilon)$,X 的积分曲线 $\varphi_X(t)$ 存在，且满足 $\varphi_X(0) = e, \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_x(t) = X(e)$. 这是可以做到的，因为是局部的性质。

我们验证这是同态。设 $\varphi_1(t) = \varphi_X(s+t), \varphi_2(t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t)$。则 $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_1(t) = X(\varphi_X(s)), \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_2(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}L_{\varphi_X(s)}\varphi_X(t) = (L_{\varphi_X(s)})_*\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_x(t) = (L_{\varphi_X(S)})_*X(e) = X(\varphi_X(s))$。

根据 ODE 解的存在唯一性，则 $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$。从而这是同态。

再证明完备性。作曲线 $\varphi_x^{\mathbb{R}}(t) := \varphi_X(\epsilon/2)\varphi_X(t-\epsilon/2)$。则根据同态性，$\varphi_X^{\mathbb{R}}$ 与 $\varphi_X(t)$ 在 $(-\epsilon/2, \epsilon)$ 是重合的。由此我们把区间延拓到了 $(-\epsilon, 3/2\epsilon)$. 类推可以延拓 $(-\epsilon, +\infty)$。同理可以延拓到 $(-\infty, \epsilon)$。因此这是完备的曲线。 □

定理 3.1 给定李代数的同态 $\phi : g \to h$，若 G 是单连通的，则存在唯一的李群同态 $\Phi : G \to H$ 满足

$$\Phi_{*e} = \phi: \quad \begin{array}{ccc} \Phi : G & \longrightarrow & H \\ \uparrow & & \uparrow \\ \phi : g & \longrightarrow & h \end{array}$$

证明 (命题3.1李代数同态的提升) 对任意的 X 是 g 里的元素，$\phi_X : \mathbb{R} \to g$,$t \mapsto tX$ 是李代数的同态。这里 $\mathbb{R}$ 的李代数结构为 $[x, y] = 0$.

由于 $\mathbb{R}$ 单连通，$\exists$ 唯一的李群同态 $\varphi_x : \mathbb{R} \to G$ 使得 $(\varphi_X)_{*e} = \phi_X$。即为所求的单参数变换群。□

定义 3.4 (李群的指数映射) 设 G 是李群，李代数为 g。考虑映射 $\exp : g \to G$,$X \mapsto \varphi_X(1)$ 称为 G 的指数映射。

注 指数映射一般非满射。G **是紧李群，则** $\exp$ **是满射。这一点暂时不证明。**

例 3.1 考虑 $\mathbb{R}$ 是李群，则 $g = \mathbb{R}$。我们计算指数映射。对于给定的 $a \in \mathbb{R}$，其单参数变换群为 $\varphi_a(t) = ta$。从而指数映射 $\exp(a) = a$。

例 3.2 设 $G = S^1$。$g = \mathbb{R}$。给定 $a \in \mathbb{R}$，则 $\varphi_a(t) = e^{2\pi i a t}$, 则 $\exp(a) = e^{2\pi i a}$

例 3.3 $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$。任取 A 是可逆矩阵，$\varphi_A(t) = e^{tA}$ 于是 $\exp(A) = e^A$.

我们自然的给出指数映射的性质。

3.2 指数映射的性质

命题 3.2 存在 $(g, +)$ 的单位元邻域 $U(0)$ 以及 $(G, \cdot)$ 的单位元邻域 $V(e)$ 使得 $\exp : U(0) \to V(e)$ 是微分同胚。且满足 $\exp_{*0} = \mathrm{id}$，$T_0 g \cong g$. 从而 $T_e G = g$。

证明 首先证明 $\exp$ 是光滑映射。考虑 $G \times g$ 上由向量场 $(X, 0)$ 诱导的流。

$$\Phi : \mathbb{R} \times G \times g \to G \times g, (t, g, X) \mapsto (g \exp tX, X)$$

这是光滑映射。设 $G\times g\to G$ 是自然投影，从而也使光滑的。因此 $\exp=P\circ\Phi(0,e,X)$ 也是光滑的。

由定义 $\exp_{*0}(X)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp tX=X(e)$，得 $\exp_{*e}=\mathrm{id}$。

从而根据反函数定理可知，存在两个邻域使其为微分同胚。 □

注 该性质可以定义 e 处得一个局部坐标系:

$$\phi:V(e)\to\mathbb{R}^n\quad \exp(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\mapsto(t_1,\ldots,t_n)$$

其中 X_i 是 $g=T_eG$ 的一组基。

命题 3.3 设 $n\geq 1$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 g 里面的元素。当 $\|t\|$ 充分小的时候，有:

$$\exp(tX_1)\exp(tX_2)\ldots\exp(tX_n)=\exp(t\sum_{1\leq i\leq n}X_i+\frac{t^2}{2}\sum_{1\leq i\leq j\leq n}[x_i,x_j]+o(t^3))\tag{1}$$

先给出一个引理:

引理 3.2 设 f 是 G 上的光滑函数，当 $\|t\|$ 充分小的时候，有:

$$f(\exp(tX_1)\exp(tX_2)\ldots\exp(tX_n))=f(e)+t\sum_i X_if(e)+\frac{t^2}{2}(\sum_i X_i^2f(e)+2\sum i<jX_iX_jf(e))+o(t^3)\tag{2}$$

证明 对于 $\forall f\in C^\infty(G)$，$X\in g$ 有:

$$(Xf)(a)=X(a)f=(L_a)_*X(e)(f)=X(e)((L_a)^*f)=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(a\exp tX)\tag{3}$$

于是对于任意的 $t\in\mathbb{R}$，有:

$$(Xf)(a\exp tX)=\frac{d}{ds}f(\exp(t+s)X)=\frac{d}{ds}|_{s=t}f(a\exp sX)\tag{4}$$

对于 $X_1,\ldots,X_k\in\mathfrak{g}$，有:

$$(X_1X_2f)(a)=\frac{d}{dt_1}|_{t_1=0}(X_2f)(a\exp t_1X_1)=\frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}f(a\exp(t_1X_1)\exp(t_2X_2))\tag{5}$$

以此可以类推，从而可知 $(X_1X_2\ldots X_kf)a$ 的情况。取 $a=e$ 可得上述引理。 □

证明 (命题3.3) 由于足够小的邻域内 exp 是同胚，因此构造其逆映射 log。这里我们要求 $\|t\|$ 足够的小。由于 $\exp(0)=e$，则 $\log(e)=0$。且对于任意的 $X\in\mathfrak{g}$，有:

$$Xf(e)=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(\exp tX)=\frac{d}{dt}|_{t=0}tX=X\tag{6}$$

对于任意 $n>1$，$X^nf(e)=\frac{d}{dt^n}|_{t=0}(tX)=0$.

注意到 $\sum X_i^2+\sum 2X_iX_j=(X_1+\cdots+X_n)^2+\sum_{i<j}[X_i,X_j]$。

对 $\exp(tX_1)\ldots\exp(tX_n)$ 作用 log。只要 t 足够小，那么就有右边式子结论。 □

命题 3.4 设 G 是李群，李代数 $\mathfrak{g}$。H 是 G 的闭子群，则 $\mathfrak{h}:=\{X\in\mathfrak{g}|\exp tX\in H,\forall t\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数。

证明 首先我们说明 $\mathfrak{h}$ 是子空间。由定义 $\forall X \in \mathfrak{h}$ $s \in \mathbb{R}$ 有 $sX \in \mathfrak{h}$。

由上述命题可知：

$$\exp(t/nX)\exp(t/nY) = \exp(t/n(X+Y) + t^2/2n^2[X,Y] + o(1/n^3)) \tag{7}$$

上式 n 次方，即可得到：

$$(\exp(t/nX)\exp(t/nY))^n = \exp(t(X+Y) + t^2/2n[X,Y] + o(1/n^2)) \tag{8}$$

对 n 取极限 $n \to \infty$，则右式自然有为 $\exp(t(X+Y))$ 为左式的极限。而 H 是闭子群，从而极限也属于 H。这就说明 $X+Y \in \mathfrak{h}$.

再证明 $[X,Y] \in \mathfrak{h}$。根据上式的估计:

$$(\exp(-t/nX)\exp(-t/nY)\exp(t/nX)\exp(t/nY))^{n^2} = \exp(t^2[X,Y] + o(1/n)) \tag{9}$$

同样给极限，从而 $[X,Y] \in \mathfrak{h}$. □

我们可以看到，在进行指数映射的计算性质前，我们常常会使用关于乘积的估计。

命题 3.5 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的范数，$\{X_i\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的序列满足：

1. $X_i \to 0, i \to \infty$.
2. $\exp X_i \in H, \forall i$.
3. $\lim_{i\to\infty} \dfrac{X_i}{\|X_i\|} = X \in g$

则 $X \in \mathfrak{h}$ 如上面性质的定义。

证明 给定 $t \neq 0$, 取 $n_i := \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq \dfrac{t}{\|X_i\|}\}$

$$\exp tX = \exp(\lim_{i\to\infty} \frac{tX_i}{\|X_i\|}) = \lim_{i\to\infty} \exp(n_i X_i) = \lim_{i\to\infty} (\exp X_i)^{n_i} \in H \tag{10}$$

于是根据上述性质得到 $X \in \mathfrak{h}$。 □

命题 3.6 $\mathfrak{h}, H$ 的定义如上。$(\mathfrak{h}, +)$ 存在单位元邻域 $U(0)$ 和 $(H, \cdot)$ 的单位元邻域 $V(e)$ 使得:

$$\exp_G|_{U(0)} : U(0) \to V(e) \tag{11}$$

是微分同胚。

证明 设 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间，使得 $g = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$。令 $\Phi : \mathfrak{g} \to G$，使得 $\Phi(X+Y) = \exp_G X \exp_G Y$。显然 $\Phi_{*0}(X+Y) = X+Y$, 则 Φ 是局部的微分同胚。

注意到 $\exp|_h = \Phi|_h$, 只需要证明 Φ 将 $\mathfrak{h}$ 中的单位邻域微分同胚的映射到 H 中的单位邻域。

假设对于 $U(0) \subset \mathfrak{h}$，$\Phi$ 都无法将其微分同胚的映射到 $V(e) \subset H$。即需依赖 h' 中分量 $Y_i \neq 0$ 的元素，才能通过 Φ 得到 $V(e)$。

$$\exp X_i \exp Y_i \in H \Rightarrow \exp(Y_i) \in H \tag{12}$$

又因为 $Y_i \to 0$, 所以 $Y_i/\|Y_i\|$ 的极限 $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$。这产生了矛盾，因为 $\|Y\| = 1$。

最后我们给出闭子群定理。

定理 3.3 (Cartan) 李群 G 的闭子群 H 是 G 的嵌入李子群。

证明 对 G 的单位元邻域 $U(e)$, 存在 $(g,+)$ 的单位元邻域 $V(0)$ 使得:$\log : U(e) \to V(0)$ 是微分同胚。

根据上述命题，自然有:$\log(U(e) \cap H) = V(0) \cap \mathfrak{h}$。于是 $U(e)$ 的坐标使得 H 中 e 的邻域是嵌入子流形。

对于 $\forall g \in G$，由于 L_g 是微分同胚，故给定 $h \in H$:

$$U(h) \to U(e) \to V(0) \tag{13}$$

是 h 邻域 $U(h) := (L_h)(U(e))$ 的坐标。

这意味着每个点 $h \in H$，都有邻域 $U(h)$ 使得 $U(h) \cap H \to L_h^{-1}(U(h) \cap H) \to \log(L_h^{-1}(U(h) \cap H)) = V(0) \cap \mathfrak{h}$。于是这意味着 H 是嵌入子流形。 □

4　2023.03.09

4.1　闭子群定理应用

命题 4.1 $\varphi : G \to H$ 是李群同态，则 $\ker \varphi$ 是嵌入（正规）李子群。

证明 φ 是李群同态，则 $\ker \varphi = \varphi^{-1}(e)$ 是闭子群。根据闭子群定理，$\ker \varphi$ 是嵌入李子群。

法 2：常秩定理。引理: 李群同态 $\varphi : G \to H$ 是常秩映射。这是因为 $\mathrm{rank}\varphi_{*e} = \mathrm{rank}\varphi_{*g}$。

引理证明:$\phi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi$ 得到 $\varphi_{*g} \circ (L_g)_{*e} = (L_{\phi(g)})_{*e}\phi_{*e}$。由于 L_g 是微分同胚，所以 $\forall g \in G$，有 $\mathrm{rank}\phi_{*g} = \mathrm{rank}\phi_{*e}$。

定理 4.1 (秩的整体性定理 (Global rank theorem)) ϕ 是 M 到 N 的光滑映射，则 ϕ 是常秩的。则有:

(1)ϕ 是单射意味着 ϕ 是浸入。

(2)ϕ 是满射意味着 ϕ 是淹没。

(3)ϕ 是双射意味着 ϕ 是微分同胚。

定理 4.2 两个李群的连续同态是李群同态。

证明 设 $\varphi : G \to H$ 是连续同态。则 $\Gamma_\varphi := \{(g, \varphi(g)) | g \in G\}$ 是 $G \times H$ 的闭子群。

由闭子群定理知 Γ_φ 是李子群。

故 $P : \Gamma_\varphi \to G \times H \to G, \quad (g, \varphi(g)) \mapsto (g, \varphi(g)) \mapsto g$ 是一个光滑映射，并且作为抽象群的同构，并且是李群的同态。

现在只用说明 Γ_φ 到 G 的映射 P 的逆是光滑的。由于 P 是常秩的映射，从而根据 Global rank theorem 知这是微分同胚。则 $\varphi : P_2 \circ P^{-1}$ 是李群同态。 □

命题 4.2 任何拓扑群都有唯一的光滑结构使之成为李群。但群上的拓扑结构不一定是唯一的。

我们考虑闭子群定理的逆命题:

命题 4.3 设 G 是李群，H 是 G 的嵌入李子群，则 H 是闭子群。

证明 设 H 是嵌入李子群，对于 $\forall g \in G$，存在邻域 $U(g)$ 使得 $U(g) \cap H = U(g) \cap \overline{H}$。（嵌入李子群的局部性质）。

令 $g = e$，则 $U(e) \cap H = U(e) \cap \overline{H}$。下证 $\overline{H} \subset H$。

对于 $h \in \overline{H}$，$hU(e) \cap H \neq \emptyset$. 取 $h' \in hU(e) \cap H$，则 $h'h \in U(e)$，又 $h \in \overline{H}$，存在序列 $\{h_n\} \subset H$ 使得 $h_n \to h$。于是 $\{h_n^{-1}h'\}$ 收敛于 $h^{-1}h'$。于是 $h{-}1h' \in U(e) \cap \overline{H} = U(e) \cap H$。故 $h \in H$ □

4.2 李群同态和李代数同态

命题 4.4 设 $\varphi : H \to G$ 是李群同态，则 $\varphi_{*e} h \cong T_e H \to g \cong T_e G$ 是李代数同态。

引理 4.3 $f : M \to N$ 的光滑映射。若 M 上的向量场 X_1, X_2 与 N 上的向量场 Y_1, Y_2 是 f 相关的 (即 $f_{*m} X_i(m) = Y_i(f(m))$)，则 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 是 f 相关的。

证明 (命题 3.4) 只需要证明由 $v \in T_e H$ 所诱导的左不变向量场 X 与 $\varphi_{*e}(v) \in T_e G$ 诱导的左不变向量场 Y 是 φ 相关的。

$$\varphi_{*g}(X(g)) = \varphi_{*g}(Lg)_{*e} v = (L_{\varphi(g)})_* \circ \varphi_{*e} v = Y(\varphi(g))$$

命题 4.5 设 ϕ 是李群同态 $H \to G$。则图标可换:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\phi"] & G \\
h \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\phi_*"'] & g \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

证明 考虑 $\psi(t) = \phi(\exp tX)$。由于 ϕ 是李群同态，则 ψ 是单参数变换群 $R \to G$ 使得 $\dfrac{d}{dt}|_{t=0}\psi(t) = \phi_{*e} \circ \exp_{*0}(X(e))$。从而:

$$\exp_G(t\phi_{*e}(X)) = \exp_{*0}^{(H)}(X(e))$$

根据单参数变换群的唯一性。

令 $t = 1$, 就得到 $\exp_G(\phi_*(X)) = \phi(\exp_H(X))$。 □

4.3 李子群与李子代数

命题 4.6 H 是 G 的李子群，则 $\mathrm{Lie}(H) := h$ 是 g 的李子代数。

证明 设 $i : H \to G$ 是包含映射。则 $i_{*e} : h \to g$ 的李代数单同态。从而 $i_{*(e)} h \cong h \subset g$ 是李子代数。 □

命题 4.7 设 G 是李群且 h 是 $\mathrm{Lie}G = g$ 的子代数。则存在唯一的连通李群 $H \subset G$ 使得:$\mathrm{Lie}H = h$。

证明 设 $X_1, \ldots, X_k$ 是 $h \subset g$ 的基底，由于 X_i 是左不变的且 $X_i(e)$ 的值确定了 X_i，并且 $\{X_i(e)\}$ 是线性无关的，则 $\{X_i(g)\}$ 对于任意的 g 都是线性无关的。

故 $D_g = \mathrm{Span}\{X_1(g), \ldots, X_k(g)\}$ 是 G 上的 k 维-分布。

由于 $[X_i, X_j] \in h = \mathrm{Span}\{X_1, \ldots, X_k\}$。根据 Frobenius 定理，存在唯一的 D_g 的极大连通积分子流形 $H \subset G$。

下证 H 具有群结构。由于 X_i 左不变，$(L_h)_*(S_g) = S_g$。

故 $L_h H = H, \forall h \in H$。

最后证明唯一性。设 K 亦是 V_g 的连通积分子流形。则 $K \subset H$。由于 $T_e K = T_e H$。由反函数定理，存在 $U(e) \subset K, V(e) \subset H$ 使得 $U(e)$ 和 $V(e)$ 是微分同胚。由 H, K 群乘法相同且 H, K 连通，则 H 与 K 相同。 □

4.4 李的基本定理

定义 4.1 设 G, H 是李群，$U(e) \subset G$，$V(e) \subset H$ 是邻域。

(1)$f : U(e) \subset G \to V(e) \subset H$ 若满足 $\forall g_1, g_2 \in U(e)$，使得 $g_1 g_2 \in U(e)$ 且 $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$。则称 f 是 G, H 是局部同态。

(2) 若 f 还是（局部）微分同胚，称 f 是局部同构。

定理 4.4 (李的第一基本定理) 设 G 和 H 是局部同构的李群，则 $\mathrm{Lie}G := g$，h 是同构的李代数。$(f : G \to H)$。

证明 局部同构能得到 f_{*e} 是双射且为李代数的同态。 □

定理 4.5 (李的第二定理) g, h 是 G, H 的李代数。$\varphi : g \to h$ 同构推到出 G, H 的局部同构。

证明 令 $a = \mathrm{Graph}(\rho) = \{(x, \rho(x)) | x \in g\}$。

$$[(x_1, \rho(x_1)), (x_2, \rho(x_2))] = ([x_1, x_2], [\rho(x_1), \rho(x_2)]) = ([x_1, x_2], \rho[x_1, x_2])$$

从而 a 是 $g \oplus h$ 上的子代数。存在唯一连通的李子群 $A \subset G \times H$ 使得 $\mathrm{Lie}(A) = a$。

设 $i : A \to G \times H$ 是包含映射，则 $\varphi : A \to G \times H \to G$ 是李群同态且 φ_{*e} 是 id。

根据反函数定理及 φ 是同态，则 $\varphi : A \to G$ 是局部同构。

同理 $\psi : A \to G \times H \to H$ 是李群同态，由于 $\psi_{*e} : (x, \rho(x)) \mapsto \rho(x)$ 是李代数同构，从而 $\psi : A \to H$ 是局部同构。

令 $w(e) = \varphi^{-1}(l) \cap \psi^{-1}(v)$. 则 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(w(e)) \to \psi(w(e))$ 是局部同构。 □

定理 4.6 (李的第三定理) 设 g 是有限维李代数，则存在唯一的单连通李群 $\tilde{G}$ 使得 $\mathrm{Lie}(\tilde{G}) = g$。

从而李代数和单连通有着一一对应的关系。

证明 根据 Ado 引理，g 是 $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ 的子代数。则存在唯一连通的李子群 $G \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ 使得 $\mathrm{Lie}(G) = g$。

5 2023.03.16

5.1 覆盖群及其应用

定义 5.1 G 是连通李群，G 的覆叠空间 $\tilde{G}$ 且 $\tilde{G} \to G$ 是李群同态，则称 $\tilde{G}$ 是 G 的一个覆盖群。

命题 5.1 连通李群 G 的覆叠空间 $\tilde{G}$ 自然蕴含李群结构且使得 $\tilde{\pi}:\tilde{G}\to G$ 是李群同态。

引理 5.1 设 $\pi : X \to M$ 是连通流形上的覆盖。Z 是连通流形且满足对于任何光滑映射 α,π，有 $\alpha_*(\pi(Z))\subset\pi_*(\pi_1(X))$ 且 $\alpha(z_0)=m_0$。对于 $\forall x_0\in$

证明 (命题5.1) 我们说明 $\tilde{G}$ 有群结构。考虑图表:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{G}\times\tilde{G} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

其中 $\alpha(\tilde{g_1},\tilde{g_2})=\pi(\tilde{g_1})\pi(\tilde{g_2})^{-1}$。由 α 定义得到:

$$\alpha_*(\pi_1(\tilde{G}\times\tilde{G}))\subset\pi_*(\pi_1(\tilde{G})) \tag{14}$$

任取 $\tilde{e}\in\pi^{-1}(e)$，则存在唯一的 $\tilde{\alpha}:\tilde{G}\times\tilde{G}\to\tilde{G}$ 使得其为提升且 $\tilde{\alpha}(\tilde{e},\tilde{e})=\tilde{e}$。

我们定义 $\tilde{G}$ 中元素的逆元。对于任意的 $\tilde{g},\tilde{g_1},\tilde{g_2}$，定义 $\tilde{g}$ 的逆元为 $\tilde{\alpha}(\tilde{e},\tilde{g})$,$\tilde{g_1}\tilde{g_2}=\tilde{\alpha}(\tilde{g_1},\tilde{g_2}^{-1})$. □

例 5.1 $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)$ 是 $\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$ 的覆盖群。

对于 $a,b\in\mathbb{H}$，考虑 $T_{ab}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^4, v\mapsto avb$. 可以验证 $T_{a,b}\in\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$。

例 5.2

定理 5.2 G,H 连通子群，$\Phi:G\to H$ 是李群同态，则 Φ 是李群覆盖等价于 $\Phi_{*e}:g\to h$ 是李代数同构。

定理 5.3 G,H 是李群，G 是单连通的。若 $\varphi:g\to h$ 是李代数同态，则存在唯一的李群同态 $\Phi:G\to H$ 满足 $\Phi_{*e}=\varphi$。

证明 (证法 2:BCH 公式) BCH 公式是指:

设 G 是李群，设 $X,Y\in g$，$\|X\|$ 和 $\|Y\|$ 足够小，则定义:

$$X*Y:=\log(\exp X\exp Y)=X+Y=\sum_{m\geq 2}P_m(X,Y) \tag{15}$$

其中 $P_m(X,Y)$ 是由 $m-1$ 层 X,Y 李括号的线性求和:

$$P_2(X,Y)=1/2[X,Y]\quad P_3=1/12([X,[X,Y]]-[Y,[X,Y]])\quad P_4=1/24[X,[Y,[Y,X]]] \tag{16}$$

接下里阐述证明:

首先构造局部的同态: 令 $\Phi:=\exp\varphi\log:U\to H$,$U$ 是满足 BCH 公式的足够小邻域。

对于 $A,B\in U$, 令 $X=\log A, Y=\log B$，则:

$$\Phi(AB)=\Phi(\exp) \tag{17}$$

定义 5.2 (李群中心) $Z(G)$ 定义为 G 的交换李子群。$Z(g)=\{Z\in g|[Z,X]=0,\forall X\in g\}$ 是李代数的中心。

定理 5.4 设 $G,\tilde{G}$ 是连通李群:

1. 若 $\Phi : \tilde{G} \to G$ 是李群覆叠，则 $\ker\Phi$ 是 $Z(G)$ 的离散子群。

2. 若 Γ 是 $Z(G)$ 的离散子群，则 G/Γ 是李群且 Φ 是李群覆盖。

证明 令 Γ 是 $\ker\Phi$。由于 Φ 是局部微分同胚，则存在 $U(e)$ 是 $\tilde{G}$ 的开子集，满足 $U(e)\cap\Gamma = \{e\}$。对于 $\forall r \in \Gamma$,$rU \cap \Gamma = \{r\}$。则 Γ 是离散子群。

对 $\forall g \in \tilde{G}$，$\gamma \in \Gamma$ □

推论 5.5 G 是连通李群，Lie$G = g$，则 $G \cong \tilde{G}/\Gamma$，Γ 是 $Z(G)$ 中的离散子群。

例 5.3 设 G 是 $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ 的覆盖群。则其不是矩阵李群。换言之，不存在单的李群同态:$\varphi : G \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$。

为了说明这一事实，我们采取反证法。即假设存在 φ。考虑图表:

6 2023.03.23

6.1 李群的基本群求法

以 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 为例。考虑 $n \geq 3$ 的情况。

第一步使用极分解。即 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) =\cong \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$。从而:

$$\pi_1(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})) \tag{18}$$

在已知同伦群的作用下构造可迁群作用。（轨道唯一，纤维从）：

$$\mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R}) \times S^n \to S^n : A \times (e_1,\ldots,e_{n+1})^T = A(e_1,\ldots,e_{n+1})^T \tag{19}$$

考虑稳定化子:$\mathrm{Stab}(e_1,0,0,\ldots,0) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \end{pmatrix}$ 从而 $S^n \cong \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ 得到正合列:$\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1) \to S^n$。从而诱导长正合列:

$$\to \pi_{i+1}(C) \to \pi_i(A) \to \pi_1(B) \to \pi_1(C) \to \pi_{i-1}(C) \to \tag{20}$$

已知 $\pi_i(S^n) = 0, i = 1,2,\ldots,i-1$. 上式带入 $n = 3$，有:

$$0 = \pi_2(S^3) \to \pi_1(\mathrm{SO}(3)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(4)) \to \pi_1(S^3) = 0 \tag{21}$$

从而 $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(4))$。同理 $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(n))$。

6.2 李代数的复化和实形式

复李代数 $\mathbb{C}$ 向量空间，有李括号 $[,]$。

命题 6.1 一个复李代数 $(\mathfrak{g},[,])$ 可以看为实李代数 $(\mathfrak{g},[,],I)$。I 是 R 线性变换. 且 $I^2 = -\mathrm{id}$。且 $[Iu,v] = [u,Iv] = I[u,v]$。

证明 先给定 $(\mathfrak{g},[,])$ 作为复李代数。定义 $I : \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ 为 $X \to iX$。

给定 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}},[,])$，定义数乘:

$$\mathbb{C} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}, (a+bi)(u) := au + bIu$$

李代数的复化。设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ 是向量空间的复化。定义:

$$[u+iv, x+iy] = [u,x] - [v,y] + i[u,y] + i[v,x] \tag{22}$$

则称 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, [,])$ 称为 $(\mathfrak{g}, [,])$ 的复化。

命题 6.2 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\mathbb{R}, I)$。其中 $I(u+vi) = -v + ui \in {\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}^{\mathbb{R}}$.

定义 6.1 (实形式) 设 h 是实李代数 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}$，则是实形式。

命题 6.3 实形式等价于 τ 是 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的共轭线性对合自同构。

注 1. 并非所有复李代数都有实形式。若实形式存在，则 $(\mathfrak{g}, I) \cong (\mathfrak{g}, -I)$。

2. 实形式不一定唯一。比如 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$:

$$\tau(x) = \overline{x} \Rightarrow \mathfrak{g}^{\tau} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \tag{23}$$

分裂实形式。

$$\tau(x) = -x^* \Rightarrow \mathfrak{g}^{\tau} = \mathrm{SU}(n) \tag{24}$$

紧实形式。

6.3 复流形

复流形是具有复结构的实流形。即 M 上有开覆盖 $\{U_\alpha\}$，其中 $\{U_\alpha\}$ 与 $\mathbb{C}$ 中的开子集微分同胚。使得 U_α 具有复坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$，满足任意坐标变换的转移函数全体光滑。

然而复结构的流形很难做实际的验证。我们考虑 (M, J)，J 是一个 $(1,1)$ 型张量，$J: TM \to TM$ 满足 $J^2 = -\mathrm{id}$。J 称为近复结构。

当 M 是偶数维，$J_x: T_xM \to T_xM$，$J_x^2 = -\mathrm{id}$ 意味着 $\det(J_x)^2 = (-1)^n > 0$

近复结构是复结构等价 $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$，

$$[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = 0 \tag{25}$$

定义 6.2 (复李群) 复流形且是个群。群乘法和逆都是全纯的。

定理 6.1 一个连通李群 G 是复李群等价于 G 的李代数是复的李代数。

证明 (G, J) □

6.4 泛包络代数

对于域 $\mathbb{F}$ 的李代数 $\mathfrak{g}$，存在唯一的结合代数 $U(\mathfrak{g})$ 以及双线性映射 $i: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ 使得:

1. $i[X, Y] = i(X)i(Y) - i(Y)i(X)$
2. $U(g)$ 由 $i(g)$ 生成。
3.

7 2023.3.30

7.1 $U(g)$

定义 $T(g)$ 为:

$$T(g) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} g^{\oplus k} \tag{26}$$

其中加法是形式的加法，乘法我们只考虑基: 单纯做张量积即可。于是上述结构其实是一个分次环。

定义 $U(g) = T(g)/(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - [e_i, e_j])$。

定理 7.1 (PBW) 设 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基底，则

注 1. PBW 基形式上与 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 保持一致。但是不交换。

2. $U(g)$ 上有滤子 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \ldots$，其中:

$$F_k = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}, k_1 + \cdots + k_n \le k)$$

得到交换的 k 代数：

$$F_0 \oplus F_1/F_0 \oplus \ldots \cong S(g) \cong k[x_1, \ldots, x_n]$$

其中 $S(g)$ 是对称的张量集。

3. 考虑单射 $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, 则 $i(a_1), \ldots, i(a_n)$ 是线性无关的。

定义 7.1 ($U(\mathfrak{g})$ 的上乘法) 定义 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$。我们给出基底的定义即可: 设 e_i 是 $\mathfrak{g}$ 的基底，由:

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$$

并且直接同态的定义乘法:

$$\Delta(e_i \otimes e_j) = \Delta(e_i)\Delta(e_j)$$

定义 7.2 对于 $r \in U(\mathfrak{g})$，若 $\Delta(r) = r \otimes 1 + 1 \otimes r$，则称其为本原元 (primitive)。若 $\Delta(r) = r \otimes r$，则称其为类群元 (grouplike)。

命题 7.1 1. 若 r, s 本原，则 $[r, s]$ 是本原的。即本原元构成李代数。

2. 若 r, s 是类群元，则 rs 是类群元。从而所有的类群元构成一个 $\mathfrak{g}$ 的形式李群。

3. 若 r 是本原的，则 $\exp r$ 是 $U(\hat{\mathfrak{g}})$(定义为 PBW 基生成的形式幂级数) 的类群元。

4. 若 r 是类群元，且常数项是 1，则 $\log r$ 是 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 的本原元。

定理 7.2 设 $\mathfrak{g}$ 是特征为 0 域上的李代数，则 $\mathfrak{g}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 中所有的本原元。

证明 先设 $\mathfrak{g}$ 是交换的基底。此时 $U(\mathfrak{g}) = k[x_1, \dots, x_n]$。考虑:

$$\Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1 \Leftrightarrow f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in k^n$$

对于 $f^{(k)}$ 中的 k 次齐次多项式:

$$2^k f^{(k)}(x) = f^{(k)}(2x) = 2f^{(k)}(x) \Rightarrow (2^k - 2)f^{(k)} = 0$$

于是 $\deg(f) = 1$。

接着考虑非交换。$U(\mathfrak{g}) : F_0 \subset F_1 \subset F_2$。接着考虑:

$$\mathrm{Span}_k\{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} : k_1 \dots k_n \leq k\}$$

例 7.1 反例:$\mathfrak{g}$ 是一维的，$\mathrm{char} k = p > 0$. 基底 $X \in \mathfrak{g}$，则 X^p 也是本原元。

定理 7.3 (BCH 公式) $\exp X \exp Y = \exp(X + Y + 1/2[X, Y] + [X, [X, Y]], \dots)$

证明 不妨假设 X, Y 线性无关。 □

注 BCH 对特征为 p 的李代数不成立。

7.2 代数群和李群

定义 7.3 代数群:$G.k$ 上的仿射态射簇 (多项式零点集) 且是个群。满足群乘法是态射 (多项式函数)

命题 7.2 当 $k = \mathbb{R}$，任何 k 上的代数群都是李群且是 $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ 的闭子群。即矩阵李群。则非矩阵李群不是代数群。

代数群 G 的李代数是 $k[G]$ 上的满足 $\delta \circ L_g = L_g \circ \delta$ 的导子 δ。李括号受到 $\mathrm{Char} k$ 的影响。若 k 的特征是 0，则 $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$。

7.3 李群李代数的表示

V 是复的向量空间。$\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上的线性同构构成的集合, 自然根据维数有:$\mathrm{GL}(V) =\cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$。$\mathrm{gl}(V)$ 是 V 上线性变换。$\mathrm{gl}(V) \cong \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$。

定义 7.4 设 G 是李群，光滑的李群同态:$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 称为 G 的复表示。

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，则李代数同态:$\mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的表示。

注
1. 李群表示等价于线性群作用
2. 李代数表示等价于 $\mathfrak{g}$ 模。
3. 对于任何的李代数表示 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ 都存在唯一的 $U(\mathfrak{g})$ 上的同态是的交换图成立（泛性质）

$$:\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\tilde{\pi}"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[u] \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{gl}(V) \end{tikzcd}$$

定义 7.5 (伴随表示) 李代数:$\mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}) : X \to \mathrm{ad}_X \in \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示。$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$。

Jacobbi 恒等式:

8 2023.04.06

8.1 李代数的表示和李代数模

命题 8.1 李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的嵌入李子群，李代数为 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$。其中 $\mathrm{Der}(g)$ 是导子李代数。

证明 这是因为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是由方程 $A[x,y]=[Ax,Ay]$ 定义的。因此 $\mathrm{Aut}(g)$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的闭子群，从而是嵌入李子群。

考虑 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的李代数:

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))=\{D\in \mathrm{gl}(\mathfrak{g})|e^{tD}\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\forall t\} \tag{27}$$

即 $e^{tD}[X,Y]=[e^{tD}X,e^{tD}Y]$

下面证明导子满足上述要求。

考虑 $\mathfrak{g}$ 值函数 $y_1(t)=e^{tD}[X,Y],y_2=[e^{tD}X,e^{tD}Y]$. 当 $t=0$，$y_1=y_2$。为了证明 $y_1=y_2$，验证发现 $y_1'=y_2'$。根据 ODE 解的存在唯一性，$y_1=y_2$。 □

命题 8.2 设 G 是连通李群，则:(a)$\ker\mathrm{Ad}=Z(G)$ (b)$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})=\mathrm{Im}(\mathrm{Ad})\cong G/Z(G)$。

定义 8.1 1. 如果表示是单射，则称为忠实表示。

2. V 的子空间 W 满足 $g\cdot W=\{\pi(g)w,\forall w\in W\}\subset W$,$\forall g\in G$。

3. 若表示 (G,π,V) 的不变子空间只有 0,V，则称表示 π 是不可约的。

例 8.1 (非矩阵李群) 设 $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1$。定义乘法为 $(x_1,y_1,u_1)(x_2,y_2,u_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,e^{ix_1y_2}u_1u_2)$.

对于 G 的任意表示 (有限维)，$\pi_G:G\to\mathrm{GL}(V)$，π_G 都不是忠实的。

考虑海森堡群

$$H=\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}|a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

以及李群同态:$\Phi:H\to G.G\to\mathrm{GL}(V)$。

其中

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\mapsto(a,c,e^{ib})\mapsto\pi_G(a,c,e^{ib})$$

φ 的核是 $\ker\Phi=\{\begin{pmatrix}1&0&2n\pi\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}|n\in\mathbb{Z}\}$。是 $Z(H)$ 的离散正规子群。

于是 H 是 G 的覆盖群。李代数相同。为

$$\mathfrak{h}=\{\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}|a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

基底为 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 且 $[A,C]=B,[A,B]=[C,B]=0$。

命题 8.3 设 π 是 H 的表示。若 $\ker\Phi\subset\ker\pi$, 则 $Z(H)\subset\ker\pi$.

若上述性质成立，假设存在忠实表示 π_G, 则 $\ker\pi_H=\ker\Phi\subset Z(H)\subset\pi_H$ 矛盾！从而前面我们的 G 没有忠实表示。

证明 考虑两个引理:$\pi(B)$ 是幂零矩阵。X 是非零幂零矩阵，则 $e^{tX}=I$ 等价于 $t=0$。

我们说明根据两个引理可以得到上述命题。

由于 $e^{tB}=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$e^{kn\pi(B)}=\pi(e^{knB})=I(\ker\Phi\subset\ker\pi)$。对所有的 $n\in\mathbb{Z}$ 成立，则由引理 1,2 知 $\pi(B)=0$。因此对于 $t\in\mathbb{R}$，$\pi(e^{tB})=e^{t\pi(B)}=I(Z(H)\subset\ker\pi)$。

对于两个引理的证明，我们放在下面。 □

引理 8.1 $\pi(B)$ 是幂零矩阵。

证明

引理 8.2 X 是非零幂零矩阵，则 $e^{tX}=I$ 等价于 $t=0$。

证明 由于 X 幂零,e^{tX} 是关于 t 的多项式，因此存在 $P_{jk}(t)$ 使得 $(e^{tX})_{jk}=P_{jk}(t)$.

假设 $\exists t\neq 0$，使得 $e^{tX}=I$。则 $e^{ntX}=(e^{tX})^n=I$。从而 $P_{jk}(nt)=\delta_{jk}$。于是 $e^{tX}\equiv I$. 这说明 e^{tX} 不显含 t。对 e^{tX} 求导，则 $Xe^{tX}=X=0$。因此 $X=0$ 与题设矛盾！ □

9 2023.04.13

9.1 不变内积的存在性

定理 9.1 交换李群的表示都是 1 维的。

证明 设表示为 (G,π,V)。对于 $\forall g\in G$,$\pi(g):V\to V$ 是 G 可换的。则 $\pi(g)=\lambda\mathrm{id}$。从而 V 的任何子空间一定是不变子空间，因此 V 是 1 维的。 □

Haar 测度: 紧李群存在左右不变的积分（等价于测度）

即 $\forall f\in C^\infty(G)$:
$$\int_G f(g)\omega=\int_G f(hg)\omega=\int_G f(gh)\omega=\int_G f(g^{-1})\omega$$
其中 ω 是体积形式，即 $\int 1\omega=1$。

第一步，在一般的李群上定义左不变形式。在 $e\in G$, 取定 $\omega_e\in\wedge^n T_e^*G$,$n=\mathrm{dim}G$。在 G 上定义体积形式:
$$\omega\in\Omega^n(G)\Leftrightarrow(L_h^*\omega)(g)=\omega(hg),\forall g,h\in G$$

从而

$$\int_G f(g)\omega(g)\text{是左不变的，即}\int_G f(hg)\omega(hg)=\int_G f(g)\omega(g)$$

我们对 ω 做正规化，即定义:

$$\int_G 1\omega=1$$

我们称正规的左不变测度为左 Haar 测度。

第二步，我们说明紧李群上模函数恒为 1, 这等价于左不变测度是右不变的。

由于对于 $\forall g\in G$，$R_g^*\omega$ 仍然是左不变的，左不变 n 形式是 1 维向量空间。故存在 $\Delta:G\to R_{>0}$（称为模函数）使得 $\omega=\Delta(g)R_g^*(\omega)$。

下证: 紧李群左 Haar 测度是右不变的等价于 $\Delta\equiv 1$。

思路: 证明 Δ 是李群（反）同态。

考虑 $\omega(hg_1g_2)=\Delta(g_1g_2)(R^*_{g_1g_2})h=\Delta(g_1g_2)R^*_{g_1}(R^*_{g_2}\omega)h$。

又 $R^*_{g_2}\omega$ 是左不变的，则 $(R^*_{g_2})(hg_1)=\Delta(g_1)(R^*_{g_1})(R^*_{g_2}\omega)h$。

于是 $\omega(hg_1g_2)=\Delta(g_2)R^*_{g_2}(hg_1)=\Delta(g_2)\Delta(g_1)R^*_{g_1}(R^*_{g_2}\omega)h.$

因此可以看出来 Δ 是反同态。但是 R 是交换的，从而这也是同态。

由于 $(R_+,\times)$ 紧子群只有 $\{1\}$，因此 $\Delta(g)\equiv 1$. 因此紧李群是右不变的。

定理 9.2 紧李群表示 $G\to \mathrm{GL}(V)$ 表示空间上有不变内积。

证明 取 V 的一个内积 $\langle,\rangle$。在 V 上定义新的内积:

$$\langle v,u\rangle:=\int_G\langle g\cdot v,g\cdot u\rangle dg, g\text{是 Haar 不变测度}$$

根据积分的左右不变性:

$$\langle hv,hu\rangle_G=\langle u,v\rangle$$

推论 9.3 紧李群李代数 $\mathfrak{g}$ 上存在 Ad 不变的内积。

定理 9.4 紧李群的表示完全可约。

9.2 一个例子:SU(2)

首先考虑一个例子。这个例子本身很重要.

例 9.1 (SU(2) 的表示) 1. 李代数方法:

目标给出了 SU(2) 的不可约表示的分类和构造。$\mathrm{SU}(2)=\{M\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}):M^*M=I,\det M=1\}\cong S^3$ 单连通。

考虑 SU(2) 的

10　2023.04.20

令 $W_{kl}=\{v\in V:D(\theta_1,\theta_2)v=e^{i(k\theta_1+l\theta_2)},k,l\in\mathbb{Z}\}$ 权为 (k,l) 的权空间。则 $V=\oplus_{k,l\in\mathbb{Z}}W_{kl}$。

SU(3) 的李代数的复化为 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$。考察 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ 基底在 W_{kl} 的作用。

李代数 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ 的基底:

$$H_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},H_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

注 当 k,l 固定的时候，$\lambda:=k\theta_1+l\theta_2$ 可以看为线性函数:$\mathfrak{h}\to\mathbb{C},\begin{pmatrix}\theta_1&0&0\\0&\theta_2&0\\0&0&-\theta_1\theta_2\end{pmatrix}\mapsto k\theta_1+l\theta_2$

即 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$。

此时，权空间 W_{kl} 记为:

$$W_\lambda=\{v:H(\theta_1,\theta_2)v=\lambda(H(\theta_1,\theta_2))v,\text{所有}H(\theta_1,\theta_2)\in\mathfrak{h}\}$$

例 10.1 (标准表示) 设 $\mathbb{C}^3=\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_3\}$。

例 10.2 ($\mathbf{Sym^2\mathbb{C}^3}$) 考虑 $e_1^2=e_1\otimes e_1$

例 10.3 (伴随表示) 设 $H(\theta_1,\theta_2)$ 如上。设 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$。

(a)$i=j$

11　李群的表示

定义 11.1 (基本权) 1. 设 $\{H_i\}$ 为 $(h_i,\langle\rangle)$ 的标准正交基，定义:

$$\lambda_i(H_j)=\delta_{ij},\lambda_i\in h^*$$

λ_i 称为基本权，λ 是整支配权等价于 $\lambda=\sum k_i\lambda_i,k_i\in\mathbb{N}$.

2. 素根系的基本权:

(a) 当选定 h 和素根系 Φ，基本权 $\lambda_i:=\dfrac{2\langle\lambda_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}=\delta_{ij},\forall\alpha_i\in\Phi$

例 11.1 $\mathrm{SU}(2)=\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$。素根系 $\Phi=\{L_1\}$。

Cartan 矩阵 $A=(2)$。则 $\alpha_1=2\lambda_1$,$\lambda_1=1/2\alpha_1$。

基本权空间构造 Type A_n:$\mathrm{SU}(n+1)$ 与 $\mathrm{sl}(n+1,\mathbb{C})$。

基本权:$\lambda_i=L_1+L_2+\cdots+L_i$,$1\le i\le n$. 权系:$\Gamma_w=\{\sum c_i\lambda_i|c_i\in\mathbb{Z}\}=\{\sum k_iL_i|k_i\in\mathbb{Z}\}$。

整支配权：$\Gamma_w^d=\{\sum c_i\lambda_i|c_i\in\mathbb{N}\}=\{\sum k_iL_i|k_1\ge k_2\ldots k_n\}$。

设 R_n 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的基本表示。

11.1 Schur 正交化定理

定理 11.1 设 (π_1,V_1) 和 (π_2,V_2) 是紧李群 G 的不可约表示。$\langle,\rangle_i$ 是 V_i 上的 G 不变内积，$i=1,2$。则有:

$$\int_G \langle\pi_1(x)u_1,v_1\rangle_1\langle\pi_2(x)u_2,v_2\rangle_2 dx=0$$

证明 设 $l:V_2\to V_1$ 是线性映射，定义新的线性映射:L_2

$$L_2:V_2\to V_1,\quad L=\int_G \pi_1(x)\circ l\circ\pi_2(x^{-1})dx$$

下面验证 L 是 G 可换的。这等价于:

$$\forall y\in G,\pi_1(y)\circ L\circ\pi_2(y^{-1})=L$$

对于 $v_2\in V_2$，有:

$$\pi_1(y)\circ L\circ\pi_2(y^{-1})v=\pi_1(y)\int_G\pi_1(x)\circ l\circ\pi_2((yx)^{-1})v_2dx=\int_G\pi_1(x)\circ l\circ\pi_2(x^{-1})v_2dx=Lv_2$$

由于 π_1,π_2 是不等价的，根据 Schur 引理，这说明 $L=0$。故 $\langle Lv_2,v_1\rangle_1=0$。

接下来我们令 $l:V_2\to V_1,\omega_2\mapsto\langle\omega_2,u_2\rangle_2u_1$。对于 $\forall\omega_2\in V_2$:

$$0=\langle Lv_2,v_1\rangle_1=\int_G\langle\pi_1(x)\circ l\circ\pi_2(x^{-1})v_2,v_1\rangle_1dx\text{带入}l,\text{根据内积不变得到结果。}vr$$

定义 11.2 对于任意给定 $v,L\in V^*$，$\phi:G\to\mathbb{C}.\phi(g)=L(\pi(g)v)$，称为 G 的矩阵系数。

注 当 $(\pi,V,\langle,\rangle_G)$ 是酉表示 (eg.G 是紧李群):

$$\phi(g):=\langle\pi(g)v,u\rangle_{G'},\text{给定}u,v\in V$$

定理 11.2 ϕ 是矩阵系数当且仅当 $\mathrm{Span}(R_g^*\phi:g\in G)$ 是有限维向量空间, 其中 $R_g:G\to G\forall g,h\mapsto hg$。

定理 11.3 (Schur 正交化定理) G 是紧李群。π_1,π_2 是不等价的表示。设 ϕ_1,ϕ_2 分别是对应的矩阵系数，则有:

$$\int_G\phi_1(g)\phi_2(g)dg=0$$

推论 11.4

$$\int_G\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}dg=0$$

下面两个判别法可以判定是否有等价表示:

定理 11.5 1.(π_1,V_1) 不可约等价于:

$$\int_G|\chi_{\pi_1}(g)|^2dg=1$$

2. 两个表示等价等价于 $\chi_{\pi_1}=\chi_{\pi_2}$。

注 设 $\pi=\bigoplus_{i=1}^n\pi_i$ 是紧李群 G 上的表示且 τ 是 G 的不可约表示，则:

$$\int_G\chi_\tau(g)\chi_\pi(g)dg$$

是与 τ 等价的不可约表示的个数，即在 π 中的重数。

类函数

定义 11.3 类函数定义为 $\phi : G \to \mathbb{C}$ 使得 $\phi(ghg^{-1}) = \phi(h), \forall g, h \in G$.

因而特征标是连续的类函数。我们用特征标来对表示进行分类。

例 11.2 ($T^n = (S^1)^n$) $T^n = (S^1)^2$ 的不可约分类。

注意到有用的事实:T^n 是交换李群，所以其不可约表示只可能是 1 维。考虑不可约表示族:

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot v = e^{i(\sum_{k=1}^n m_i\theta_i)} \cdot v, m_i \in \mathbb{Z}$$

我们证明 T^n 的不可约表示与 $\mathbb{Z}^n$ 中的格点有一一对应。

首先说明对于不同的对 n 元整数对，上面的表示都是不等价的。

注意到这是 1 维表示，则特征标是明显的。因此特征标显然不同。

由于 $L^2((S^1)^n)$ 的基恰为:

$$\{e^{i(m_1\theta_1 + \dots + m_n\theta_n)} : m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\}$$

故不存在不可约表示的特征标 χ 与上面所有的 χ_π 都正交，则不存在其他不可约表示。

例 11.3 (SU(2)) $\mathrm{Sym}^n\mathbb{C}^2$。

基底 $\{e_1^k, e_2^{n-k}\} = \mathrm{Span}\{z_1^k z + 2^{n-k} : 0 \le k \le n\}$.

表示可以由标准表示诱导的线性作用:

$$(g : p)(v) := p(g^{-1}v)$$

证明 先证明不可约推导不等价。

$\forall g \in \mathrm{SU}(2)$，特征根 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$，因此 $g \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} := t(\theta)$ 对于 $\forall 0 \le k \le n$，令 $p_k := z_1^k z_2^{n-k}$。

由定义:$\pi_n(t(\theta))p_k$，所以算得 $\chi_{\pi_n}(g) = \chi_{\pi_n}(t(\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta} = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$。所以计算有:

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} |\chi_{\pi_n}(g)|^2 dg = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}^2 \sin^2\varphi \sin\psi d\psi d\varphi d\theta = 1$$

下证 (π_n, V_n) 是所有不可约表示。等价于说明 $\{\chi_{\pi_n} : n \in \mathbb{N}\}$ 在所有 SU(2) 的连续类函数中稠密 (L^2-范数下). 这等价于说明 $\{t(\theta)\} \cong S^1$ 中的类函数。由于 $t(\theta) \sim t(-\theta)$，则 S^1 上的所有偶函数。

根据 Fourier 分析，$\{\cos(n\theta)\}$ 是 S^1 上的偶函数空间上的稠密子集，且 $\chi_{\pi_n}(t(\theta)) - \chi_{\pi_{n-2}}(t(\theta)) = 2\cos(n\theta)$。则 $\{\chi_{\pi_n}\}$ 是 SU(2) 类函数空间上的稠密子集。于是是所有的不可约表示。 □

Peter-Weyl 定理

定理 11.6 分析: 矩阵系数空间是 $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ 的稠密子集。

代数: 紧李群是矩阵李群。

推论 11.7 特征标空间是类函数空间的稠密子集。

证明 代数到分析 (Stone-Weiseestrass 定理)

设 X 是紧拓扑空间，$C(X)$ 是连续复值函数构成的代数。若 $A \subset C(X)$ 是子代数。满足 1.A 可分类，即 $\forall x_1 \neq x_2$,$\exists f : f(x_1) \neq f(x_2)$。2.$A$ 中有常函数。3. 若 $f \in A$，则 $\overline{f} \in A$。则 A 是 $C(X)$ 的稠密子集。

我们验证矩阵系数构成子代数。略。

由于存在单同态 $i : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的闭子群。对于 $\forall g \in G$，$g \mapsto g_{ij}$,$g \mapsto overline g_{ij}$,$g \mapsto 1$ 都是矩阵系数。因此 1,2,3 成立，这意蕴着矩阵系数空间是稠密的。

分析到代数: 一个引理:

引理 11.8 设 G 是紧李群，对于 $\forall g \neq e$, 存在不可约表示 (π, v) 使得 $\pi(g)$ 不是 id。

事实上，取 $f \in C(G)$，使得 $f(e) = 0, f(g) = 1$。则存在 π 以及矩阵系数 ϕ 使得 $\|f - \phi\|_\infty < \epsilon$. 于是 $\phi(e) \neq \phi(g)$ 推的 $\pi(g) \neq \pi(e) = \mathrm{id}$。

下面构造 G 的忠实表示。

对于 $\forall g \in G^0$(单位连通分支),$g_1 \neq e$。于是存在表示 $\pi(g_1) \neq \mathrm{id}$ 从而 G^0 不是 $\ker \pi_1$ 的子集。于是 $\ker \pi_1$ 的维数小于 G 的维数。

若 ker 的维度不是 0，则取 $g_2 \neq e$ 使其在 $(\ker \pi_1)^0$ 中。则表示的直和 $\pi_1 \oplus \pi_2$ 的 ker 维度进一步降低。

最终把 ker 降为 0 维。设 $\ker = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 是有限集合。取 $\{\varphi_i\}$:$\varphi_i(c_i) \neq \mathrm{id}$。于是进一步减少 ker 的个数。 □

11.2 紧李群的分类

先考虑紧李代数。紧李代数的分类为:

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots S_m$$

S_i 是单李代数。

但是以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的李群 G 不一定是紧李群。问题出在交换的部分。

然而 $[G, G] := \{ghg^{-1}h : g, h \in G\}$ 是以 $\mathfrak{g}$ 的交换子 $[\mathfrak{g} : \mathfrak{g}] = S_1 \oplus S_m$ 为李代数的连通紧半单李群。

从而由 Dynkin 分类得到紧李代数的分类，然后得到紧李代数对应的连通李群 G 的分类:$G = \tilde{G}/\Gamma$。Γ 是 $Z(\tilde{G})$ 离散的正规子群。

从而在得到连通紧半单李群的分类 $[G : G]$。而连通紧李群的分类为 $[G \times G] \times T^n$

$$S_1 \otimes S_2 \cdots \otimes S_m / \Gamma \times T^n$$

其中 Γ 是 $Z(S_1 \times \cdots \times S_m)$ 的有限子群。

从而 Peter-Weyl 定理对连通成立。如果不连通，则对每个连通分支:G/G_0 是有限群。从而 $\forall g \notin G_0$，存在表示 ρ 使得 $\rho(g)$ 不是 id。