微分流形

撰写者：Tsechi/Tseyu

2023 年 2 月 20 日

微分流行是笔者本科阶段第一门看来真正具有几何意义的课程。从这个角度来说，如果不能搭建好框架，对于后续的几何课程而言是非常不利的。另外，2022 年秋季的时候，笔者曾经选修了南开大学数学科学学院王文龙老师所开设的《微分流形》。

由于各种原因，该课程最终以大作业的方式结课。这对于笔者来说是一种糖衣炮弹——为了应付考试所作的准备在一鲲天的时间就忘完了，很难想象这是真正学会了的人有的情况。因此，最可能的解释是笔者根本没学进去这门课。因此复习（亦或者是重新学习）这门课是迫在眉睫的事情。

本笔记参考《An Introduction to Manifolds》by Loring W.Tu。这本书很适合读（适当的例子，恰到好处的 recall）

本笔记会每周在知乎上发布。同时，欢迎致邮件以获得最新的 pdf 版本。虽然我写的大概率很差劲，但是如若您读后有疑问，也欢迎私信/邮件我。邮箱是：Tsechiyuan@163.com.

目录

1 流形

这一节中，我们给出流形的基础定义以及两个流形之间的映射。我们的目的是积累大量的 example。

1.1 流形的基本概念

1.1.1 拓扑流形

定义 1.1 一个拓扑空间 M 是局部 n 维欧氏的，若 $\forall p \in M,p$ 有一个邻域 U 满足存在 $\varphi : U \to O$ 是一个同胚，其中 O 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集。我们称 (U,φ) 是一张地图，U 是一个坐标邻域或者坐标开集。φ 是坐标映射或者坐标系统。若 $\varphi(p)=0$，则我们称地图 (U,φ) 以 p 为中心。

地图是我自己的翻译，听起来很生动，因为把实在的空间映射到了一个欧氏空间上。就像把地形印刷在了地图上一样。

定义 1.2 一个拓扑流形是这样一个空间：M 是 *Hausdorff*，第二可数且局部欧氏的拓扑空间。若其是局部 n 维欧氏的，则称其为 n 维拓扑流形。

这里存在的问题是，一个拓扑流形可不可能有两个维度？当然，如果本身 M 是不连通的，这一点是可以实现的。但是不连通的拓扑空间实际上没有单独研究的必要。所以我们假定是连通的。（或者道路连通）。

实际上这里假定连通或者道路连通都没有问题：

命题 1.1 对于拓扑流形 M，M 是连通的当且仅当其是道路连通的。

证明 假设 M 是连通的。由于 M 是局部欧氏的，所以对于每个点 $p \in M$ 而言，存在 U 使得 $\forall q \in U, p, q$ 道路连通。设 V 为如下的集合：

$$V = \{q \in M | p \sim q\}$$

这显然是一个开集。由于 M 连通，从而 $M - V$ 不能是开集。然而，对于 $\forall q \in M - V$,q 都有邻域与 V 不相交，因此 $M - V$ 是开集。矛盾！ □

回到正题。假定 M 是连通的，我们断言 M 的维数是良定的。也就是说，$\mathbb{R}^n$ 的开集不可能与 $\mathbb{R}^m$ 的开集同胚，若 $m \neq n$。这一点很难有初等的点拓证明，用代数拓扑的办法是最快的——$\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 有不同的同伦群。

当然我们不会详细讨论这个细节。

例 1.1 作为最平凡的例子，$\mathbb{R}^n$ 显然是拓扑流形。其地图为 $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$.$\mathbb{R}^n$ 的任何开集自然也是非常平凡的拓扑流形。

注意，Hausdorff 性质和第二可数性质都是继承性的。因此对于拓扑流形 M，其子集 N 要成为拓扑流形，我们只需要验证其局部欧氏性。

例 1.2 曲线 $y = x^{2/3}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 平面上的曲线。这也是拓扑流形。因为其是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，并且本身同胚于 $\mathbb{R}$。

例 1.3 $\mathbb{R}^2$ 的两根坐标轴的并集不是拓扑流形。因为交点 O 的邻域去除 O 后的连通分支总是 4。然而任何一个维度的球，去除圆心后连通分支是 1 或者 2。

1.1.2 相容的地图

显然地图不能完全描绘我们这个世界。对于流形而言，显然可能会有多张地图以同胚于欧氏空间的开集。这些不同的地图之间必须存在某种意义的匹配关系。

定义 1.3 两张地图 (U, φ),(V, ϕ) 是 C^∞ 相容的，若两个映射满足：

$$\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \quad \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

都是 C^∞ 的。这样的映射被称为转换函数。

显然流形也不会只有两张地图，因此我们需要考虑所谓的图册：

定义 1.4 在局部欧氏的空间上，一个 C^∞ 的图册是指集族：$\mathbb{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，并且 $\forall U, V \in \mathbb{U}$，$(U, \varphi)$ 和 (V, ϕ) 是相容的地图，使得 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$。

这里的例子是很多的。我们将会看到所有微分流形都会有类似的一个图册。并且还会有最大的图册。因为后面会接触到很多例子，这里就不赘述了。

值得注意的是，两个地图之间的相容性并不具备传递性。这一点很容易从我们所误以为的证明中看到：

$$\varphi_3 \circ \varphi^{-1} = \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

的定义区域只有 $U_3 \cap U_2 \cap U_1$。

然而，如果对于一个图册而言，情况就不同了。我们说一个地图与一个图册 C^∞ 相容，若其与该图册的每个地图都相容。

引理 1.1 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是局部欧氏空间 M 的图册。如果 (V, ϕ) 和 (W, σ) 都与该图册相容，则他们俩也是相容的。

这个引理实际上非常显然。因为上述假证明的问题在于定义域。而图册覆盖了整个 M, 因而很好的解决了定义域的问题。这里就省略了。

1.1.3 光滑流形

我们现在把流形的光滑性加强。实际上我们已经给出了光滑流形所必须的所有条件。

定义 1.5 一个光滑的流形是指一个具有图册的微分流形。如果其所有连通分支都是 n 维的，则称该流形是 n 维的。

在理论上还存在所谓“最大图册”的概念。我们简单记录如下：

定义 1.6 对于局部欧式空间 M，称其的一个图册 $\mathbb{U}$ 是最大图册，若对于任何图册 $\mathbb{V}$ 满足 $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$，都有 $\mathbb{U} = \mathbb{V}$. 一个最大图册也被称为一种微分结构。

这类概念实际上有一些集合论的味道。即我们可以利用 Zorn 引理说明下面的命题：

命题 1.2 任何在局部欧氏空间 M 上的图册 $\mathbb{U}$ 都包含在一个唯一的最大图册中。

类似于这种证明的有很多。如果读者了解过如向量空间必然存在基这样的命题的证明，就不难给出上述命题的证明。因此我们省略这个命题的证明。

接下来我们给出一些记号。这些记号将会在整个笔记中使用。

1. 本笔记中，之后的“流形”全部指代光滑的微分流形。
2. $\mathbb{R}^n$ 中的标准直角坐标记为 $(r^1, \ldots, r^n)$。
3. 对于流形 M，其地图 $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^n)$ 中也有坐标：$(x^1, \ldots, x^n)$。具体定义为 $x^i = r^i \circ \varphi$。即 p 被映射到 $\mathbb{R}^n$ 的分量坐标。从而 $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点。函数 $x_i : U \to \mathbb{R}$ 被称为 U 上的坐标或者局部坐标。

1.1.4 光滑流形的例子

光滑流形具有大量的例子。我们省略平凡的例子的说明过程，对一些比较难的例子则给出证明。

例 1.4 $\mathbb{R}^n$ 是微分流形。

下面给出两个基础的构造微分流形的命题。之后还会有更多深层的命题以得到新的微分流形。

命题 1.3 一个流形 M 的开子集 U 也是流形。

证明 我们只给出提示：考虑 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是 M 的图册。根据继承性，Hausdorff 性质和第二可数显然。$(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha)$ 是 U 的图册。 □

命题 1.4 若 M 和 N 都是微分流形，则乘积空间 $M \times N$ 也是微分流形。

证明 由点集拓扑知识，Hausdorff 性质和第二可数是可乘的性质。我们依然不给出具体证明。我们只说明:

$$\mathbb{S} = \{U_\alpha \times V_\beta | U_\alpha \in \mathbb{U}, V_\beta \in \mathbb{V}\}$$

是 $M \times N$ 的图册。

转化函数只有在两类地图都相交的时候才有意义，因此其光滑性是比较明显的。 □

例 1.5 一个点是微分流形。函数 $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的图像，A 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集：

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in A \times \mathbb{R}^m\}$$

也是微分流形。其本身是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 的子集，因此 *Hausdorff* 和第二可数显然。由于：

$$(1, f) : A \to \Gamma(f), \quad p_1 : \Gamma(f) \to A$$

这两个函数显然是连续的，并且互逆，从而 $\Gamma(f)$ 在拓扑上与 A 同胚。既然在拓扑上同胚，那么就可以构造相同的结构使 $\Gamma(f)$ 成为微分流形。

例 1.6 一般线性群和复一般线性群都是微分流形。

例 1.7 S^n 和 $\mathbb{R}P^n$ 都是微分流形。S^n 可以看作为一个欧氏空间的子集，因此拓扑性质立即可得。对于其地图，我们不多做说明，只说明 S^n 去掉一个点后与 $\mathbb{R}^n$ 同胚，从而 S^n 只需要两张地图就可以构成一个图册。其中的转化映射略显繁杂，这里就不记述了。读者可以在任何一本微分流形的参考书上找到这样的具体描述。

对于 $\mathbb{R}P^n$ 而言，拓扑性质就显得不平凡。我们把 $\mathbb{R}P^n$ 写为：

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$$

取其中的两个不同等价类 $[x], [y]$。$\mathbb{R}P^n$ 中的开集的原像都是 S^n 中的开集。$[x], [y]$ 不同等价于 x, y 不相同也不对径。从而存在足够小的开集 U, V 使得 U, V 不仅不相交，而且对径也不相交。因此 U 和 V 在 $\mathbb{R}P^n$ 中的像集也不相交。

第二可数的性质则比较明显。

接下来说明微分结构。定义:

$$U_k = \{[x] \in \mathbb{R}P^n | x = (x^1, \ldots, x^{n+1}), x^k \neq 0\}$$

这是一个开集，并且所有的 U_k,$1 \leq k \leq n+1$ 覆盖了 $\mathbb{R}P^n$。定义：

$$\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^n : \varphi_k([x]) = (x^1/x^k, ;x^{n+1}/x^k)$$

这是恰当的定义，并且是一个双射。显然这也是一个同胚。转化映射的计算比较容易，这里就省略了，请读者自行验证。