PDE 知识整理

整理者：颜成子游/南郭子綦

2023 年 5 月 11 日

目录

1. 齐次化原理。

设 L 是 t,x 的线性微分算子。且关于 t 的最高阶求导次数小于 m，则定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m \omega}{\partial t^m} = L\omega + f(x,t), t > 0 \\ \omega|_{t=0} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-1}\omega}{\partial t^{m-1}}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解表示为:

$$\omega = \int_0^t z(x,t;\tau)d\tau$$

其中 z 是定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m z}{\partial t^m} = Lz, t > \tau > 0 \\ z|_{t=\tau} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-2}z}{\partial t^{m-2}}|_{t=\tau} = 0, \dfrac{\partial^{m-1}z}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

的解。

在实际应用中，如果有第一个方程待解，可以考虑下面的方程。把 τ 看作参数般解出 z 后，对 τ 做积分得到第一个方程的解。

例 0.1 (Duhamel 原理: 对于波动方程) 设柯西问题为:

$$\begin{cases} \Box_4\omega = 0, t > \tau \\ \omega(x,\tau,\tau) = 0 \\ \omega_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

则 $u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau)d\tau$ 是柯西问题:

$$\begin{cases} \Box_4 u = f(x,t), t > 0 \\ u(\dot{x},0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

的解。只需要把 L 代为 Δ 算子即可。