



# *Note for Homological Algebra*

## 范畴论笔记

EDITED BY

颜成子游 / 南郭子綦

最后一次编译时间：2024-03-11 22:41



LOGO NAME  
Slogan Here

# Contents

<b>1</b>	<b>范畴论基础</b>	<b>2</b>
1.1	函子范畴与泛性质	2
1.1.1	函子范畴	2
1.1.2	泛性质	4
1.2	可表函子	5
1.2.1	四个函子和米田引理	5
1.3	可表函子	8
1.4	伴随函子	9
1.5	极限与完备化	14
1.5.1	极限和函子的可表性	16
1.5.2	常用的极限	21
1.5.3	完备性	23
1.5.4	极限与函子之间的关系	25
1.6	基础范畴论补充	26
1.6.1	子商	26
<b>2</b>	<b>么半范畴</b>	<b>29</b>
2.1	基础定义	29

范畴论基础是学习现代数学理论重要的语言。很多时候如果预先学习过范畴论，就可以很好的了解许多已知的数学理论。我们将会以李文威所著的《代数学方法》为讲义，撰写该笔记。以此在将来遇到该门语言时可以进行快速的复习。

由于范畴本身的概念在撰写笔记中可以得到反复强化，因此我们省略范畴论中最基础的定义，直接从函子范畴开始撰写笔记。

# 么半范畴

## §2.1 基础定义

### Definition 2.1.1: 么半范畴

么半范畴意指一组资料  $(\mathcal{V}, \otimes, a, 1, \iota)$ , 其中:

1.  $\mathcal{V}$  是一个范畴。
2.  $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  是一个二元函子, 其在对象和态射集上定义的映射分别记为:  $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$  和  $(f, g) \mapsto f \otimes g$ .
3.  $a$  是函子范畴  $\text{Fct}(\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$  中的同构:

$$a : ((\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot) \cong (\cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot)) \quad (2.1)$$

使得对于所有对象  $X, Y, Z, W$ , 下图:

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \\
 \swarrow a(X, Y, Z) \otimes \text{id}_W & & \searrow a(X \otimes Y, Z, W) \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 \downarrow a(X, Y \otimes Z, W) & & \downarrow a(X, Y, Z \otimes W) \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & \xrightarrow{\text{id}_X \otimes a(Y, Z, W)} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
 \end{array}$$

交换。

4. 对象  $1$  称为么元, 相应的函子  $1 \otimes -$  和  $- \otimes 1$  给出范畴  $\mathcal{V}$  到自身的等价。
5.  $\iota : 1 \otimes 1 \rightarrow 1$  是同构。