Introduction to Dynamical System

颜成子游

2022 年 10 月 12 日

目录

1 S^1 上的扩张映射

引理 1.1 f 是 S^1 上 C^1 扩张映射,$deg(f) = d$。F 是 f 的提升. 则 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是同胚,且 $\forall y, F^{-1}(y+d) = F^{-1}(y) + d$.

定理 1.2 (Shub) f, g 是 S^1 上的 C^1 扩张映射,且 $deg(f) = deg(g) \neq 0$。则 $f \sim g$.

证明 要找一个 h 是 S^1 上的同胚,使得 $h \circ f = g \circ h$。在 S^1 上考虑并不方便,我们考虑提升。

设 F, G 是 f, g 的提升。想找 H 是 h 的提升,使得:

$$H \circ F = G \circ H$$

即我们要研究方程:

$$H = G^{-1} \circ H \circ F$$

考虑压缩映像原理,我们记 $T(H) = G^{-1} \circ H \circ F$。

给出完备度量空间:$D = \{H \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | H(x+1)-H(x) = 1\}$. 定义距离为 $d(H, J) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |H(x)-J(x)|$. 距离的定义合理性是显然的。

容易验证 (D, d) 是完备度量空间。只需要给出逐点收敛的极限函数即可。

考虑映射 T:$G^{-1}\circ H\circ F(x+1)=G^{-1}\circ H(F(x)+d)=G^{-1}(H\circ F(x)+d)=G^{-1}\circ H\circ F(x)+1$。从而 T 是 D 上的映射。另一方面，记 $\lambda=\inf_{x\in\mathbb{R}}|G'(x)|>1$，从而其逆映射的导数 $|G^{-1\prime}(x)|<1$。计算：

$$d(T(H),T(J))=\sup_{x\in\mathbb{R}}|T(H)(x)-T(J)(x)|$$

由于 G^{-1} 的导数绝对值小于 1，从而上式小于 $d(H,J)$。(拉格朗日中值定理)。

从而压缩映像的条件符合，存在唯一解 H_0 是不动点：$H_0\circ F=G\circ H_0$。

易知存在 h_0：$h_0(e^{2\pi ix})=e^{2\pi iH_0(x)}$。这是 S^1 上一个映射度为 1 的 h_0。目前我们需要证明 h_0 是同胚。

先证明 H_0 是同胚。

同理可证，存在唯一 $\hat{H}_0$：$\hat{H}_0\circ G=F\circ\hat{H}_0$。从而：

$$H_0\circ\hat{H}_0\circ G=H_0\circ F\circ\hat{H}_0=G\circ H_0\circ\hat{H}_0$$

因为方程:$G\circ H=H\circ G$ 有解 id，且方程有唯一解。从而上述等式表明：$H_0\circ\hat{H}_0=id$。同理后，这意味着 H_0 是同胚。

从而存在 $h_0,\hat{h_0}$. 满足：

$E\circ H_0=h_0\circ E$

$E\circ\hat{H}_0=\hat{h_0}\circ E$

从而：

$$(\hat{(}h_0)\circ h_0)\circ E=\hat{h_0}\circ E\circ H_0=E$$

这意味着 $(\hat{(}h_0)\circ h_0)$ 在 E 的像 S^1 上是 id。同理后,h 是同胚。

最后验证 h,g,f 的关系：

$$E\circ H_0\circ F=h_0\circ E\circ F=h_0\circ f\circ E$$

$$E\circ G\circ H_0=g\circ E\circ H_0=g\circ h_0\circ E$$

从而在 S^1 上关系成立。 □

推论 1.3 f 是 C^1 扩张映射，则 f 是 C^1 结构稳定的。

现在考虑一个模型：$f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$。考虑 $\Lambda=\{x|\forall n,f^n(x)\in[0,1]\}$。

首先，$f(\Lambda)=\Lambda$。

其次，可以证明其是一个 Cantor 集合。

这个系统并不容易研究，但如果我们能够转化其为一个拓扑共轭的一个好研究的系统呢？

2 符号动力系统

2.1 基本概念

符号集合：$X=\{0,1,2,\ldots,k-1\}$。

符号空间：$\Sigma_k=\prod_{i=0}^{\infty}X=\{(a_0a_1\ldots)|a_i\in X\}$

定义符号空间之间的距离：$d(a,b)=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{|a_i-b_i|}{(100k)^i}$

性质：

$\forall\epsilon>0,\exists N$ 使 $\forall a,b\in\Sigma_k$：

$$d(a,b)<\epsilon\Leftrightarrow a_i=b_i,i=0,1,2,\dots,N$$

记 $\alpha\in X$，记 $[\alpha]=\{a\in\Sigma|a_o=\alpha\}$。可以证明 $[0],[1],\dots,[k-1]$ 都是开集，闭集。说明整个空间是不连通的。

现在建立空间上的映射使之成为动力系统。

定义左移位映射 $\sigma:\Sigma_k\to\Sigma_k$，$a_0a_1a_2\dots\mapsto a_1a_2\dots$，这是一个连续映射！

于是我们给出定义：单边符号系统 (Σ_k,σ)。

我们断言以下性质:

1.$\overline{Per(\sigma)}=\Sigma_k$

2.(Σ_k,σ) 是传递的：$\exists a\in\Sigma_k$ 使得 $\overline{O(a)}=\Sigma_k$。

为了说明 2，我们只需要让 a 中包含所有的组合。即 a 一个一个把所有的任意 n 组合全部举完。这样 a 迭代后总能与 Σ_k 中的每个元素任意近。

2 还有一个说法：任意开集 U,V 非空，存在 $n>0$, 使得 $f^n(U)\cap V\neq\emptyset$。

2.2 回到刚才的问题——虫口模型

回到刚才的单边系统 $f_\lambda:\Lambda\to\Lambda$。$f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$。

由于刚才我们说 Λ 是 Cantor 集合，因此 Λ 里的点可以被编码，具体写为：

$$h:\Lambda\to\Sigma_2,x\mapsto a=(a_0a_1\dots)$$

使得 $f^nx\in I_{a_n},\forall n\geq 0$。

其中 I_0，I_1 是使得 $f(x)\in[0,1]$ 的两个分开区间。

显然：

$$h\circ f=\sigma\circ h$$

命题 2.1 *h 是同胚，从而有 $(\Lambda,f)\sim(\Sigma_2,\sigma)$。*

证明 先证明 h 是双射。h 单射：设 $x\neq y$ 但 $h(x)=h(y)$。若 x,y 同属 I_0 或 I_1，则 $|f(x)-f(y)|\geq\mu|x-y|$。这意味着 $|f^n(x)-f^n(y)|\geq\mu^n|x-y|\to+\infty$，矛盾！因为 $|f^n(x)-f^n(y)|$ 总是一致有界的。

h 满射：取 $a=(a_0a_1a_2\dots)$，则要使得 $h(x)=a$，则:

$$x\in I_{a_0}\cap f^{-1}I_{a_1}\cap f^{-2}I_{a_2}\dots$$

根据闭区间套 $\{\bigcap_{n=0}^{N}f^{-n}I_{a_n}\}_{N=1}^{\infty}$，$x$ 存在。(为什么这些区间没有空集？)

再说明 h 和 h^{-1} 是连续的。

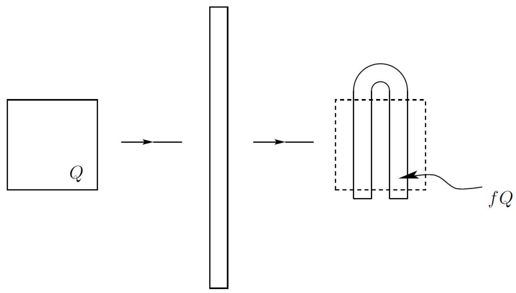
h 连续：由于 $|f'(x)|$ 有上界 β，则 $|f^n(x)-f^n(y)|\leq\beta^n|x-y|$。只要 x,y 足够小，那么他们在前 m 步处于同一个 I_i。任取 $\epsilon>0$，要使得 $d(h(x),h(y))<\epsilon$, 只需要前 N 步 x，y 处于同一个 I_i。这一点已经可以实现了，只要 x,y 距离足够小。

h^{-1} 连续：$\forall \epsilon > 0$，$\exists N > 0, \mu^N \epsilon > 1$。存在 $\delta > 0$，使得 $d(a,b) < \delta \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 0, 1, \ldots, N$。记 $h^{-1}(a) = x, h^{-1}(b) = y$，则 $f^i(x), f^i(y)$ 同属 I_0 或 I_1，$i = 1, 2 \ldots, N$。$1 \geq |f^N(x) - f^N(y)| \geq \mu^N |x - y|$，从而 $|x - y| \leq 1/\mu^N \leq \epsilon$。 □

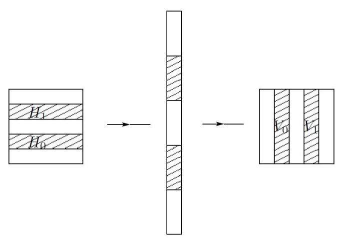
推论 2.1 虫口模型是结构稳定的，因为稍稍扰动并不改变其与 (Σ_2, σ) 拓扑共轭的性质。

2.3 Smale 马蹄

对区域 $[0,1] \times [0,1]$，定义如下图的微分同胚 f：



但为了研究动力系统，我们需要研究只在 Q 里面的变化：



2.4 T^2 上的扩张映射

考虑 $T^2 = S^1 \times S^1$，则可以定义 E：

$$E : \mathbb{R}^2 \to T^2, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

此时 T^2 上的自同胚 f 可以诱导 $\mathbb{R}^2$ 上的同胚 A：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "E"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "E"'] \\
T^2 \arrow[r, "f"] & T^2
\end{tikzcd}$$

定理 2.2 $f : T^2$ 是 C^1 结构稳定的。

定义 2.1 $f, g \in C^r(T^2)$。称 $f, g C^r$ 近，若存在适当的提升使得 $|Q - G|_{C^r} << 1$

引理 2.3 若 q,g 是 $C^0-1/2$ 近的，且 Q,G 是提升。则 Q,G 对两个变量都是 1-周期的。

为了证明引理，考虑 $P_r=\{\varphi\in C^r(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)|\varphi\text{double per}\}$。从而我们可以再给出引理：

引理 2.4 若 $\varphi\in P_1$，且 $|\varphi|<<1$，则 $A+\varphi$ 可逆且 $(A+\varphi)^{-1}=A^{-1}+\omega$,$\omega\in P_0$.

证明 首先说明是单射。当 φ 的模长足够小，由于 $Ax=0$ 意味着 $x=0$。

为了说明其可逆，我们解方程：

$$(A+\varphi)(A^{-1}+\omega)=id$$

可以解出：

$$\omega=-A^{-1}\varphi(A^{-1}+\omega)$$

可以使用压缩映像原理来解决该问题。 □

现在证明定理。

证明 设 A 是 f 的提升，g,f 是 C^1 足够近，G 是 g 的提升。令 $G-A=\varphi\in P_1$.

我们解方程：

$$(id+\eta)(A+\phi)=(A+\varphi)(id+\eta)$$

且

$$\eta\in P_0$$

$$\eta(A+\phi)=A\eta+\varphi(id+\eta)-\phi$$

由于 A 在不同方向上有扩张，也有压缩。所以在一维上分别研究：

设 A 的特征子空间为 E_1,E_2, 对应 $\lambda_1<1,\lambda_2>1$。记 p 的投影为 $p_i=\pi\circ p$。

从而得到：

$$\eta_1=(\lambda_1\eta_1+\varphi_1(id+\eta)-\phi_1)(A^{-1}+\omega)$$

$$\eta_2=\frac{1}{\lambda_2}(\eta_2(A+\phi)-\varphi_2(id+\eta)+\phi_2)$$

为运用压缩映像原理，定义：

$$T_1\eta_1=(\lambda_1\eta_1+\varphi_1(id+\eta)-\phi_1)(A^{-1}+\omega)$$

$$T_2\eta_2=\frac{1}{\lambda_2}(\eta_2(A+\phi)-\varphi_2(id+\eta)+\phi_2)$$

从而定义 $T:P_0\to C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2),\eta=\eta_1+\eta_2\mapsto T_1(\eta_1)+T_2(\eta_2)$。

要验证以下事实：

1. $\forall\eta\in P_0,T(\eta)\in P_0$
2. $\forall\eta\in P_0$，令 $|\eta|=\max(|\eta_1|,|\eta_2|)$. 这是一个完备度量。

然后也是一个压缩映射：

$$\eta,p\in P_0,|T\eta-Tp|<|\eta-p|$$

验证压缩映像需要验证 114514 次（悲） □

3 混沌

一种混沌：$0 < d(x,y) \lll 1$, 总存在 $n > 0$,$d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon_0$

混沌描述的是一种初值敏感依赖。因为初值的观测总是有误差的，如果系统混沌，那么系统难以进行长期的预测。

3.1 混沌的定义

定义 3.1 (Li-Yorke 混沌) $0 < d(x,y) \lll 1$, 总存在 $n > 0$,$d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon_0$

这种混沌有定理：

定理 3.1 $f : [0,1]$ 连续。若 f 有 *3*-周期点，则对 $\forall n > 0$，有 n 周期点。

定理 3.2 (Sharkovsky 定理) 把自然数排列：先排列奇数：$3, 5, 7, 9 \ldots$，再排列 $2 \times 3, 2 \times 5, \ldots, 4 \times 3, 4 \times 5, \ldots, 2^k \times 3, 2^k \times 5, \ldots, 2^{k+1}, 2^k, \ldots, 8, 4, 2, 1.$

若 $f : [0,1]$ 有 p 周期点，则任何在 p 后的 q，f 都有 q 周期点。