



Note for Homological Algebra

MORSE 理论笔记

EDITED BY

颜成子游 / 南郭子綦

最后一次编译时间：2024-03-12 10:16



Contents

1	流形上的非退化光滑函数	3
1.1	定义和引理	3

这是笔者于 2023 年本科四年级下学期学习 Milner 所著的 Morse 理论的学习笔记。

我们假定大家拥有基础的微分几何知识和黎曼几何知识。

设 f 是流形 M 上的光滑函数。我们定义: 称一个点 $p \in M$ 是 f 的临界点 (critical point), 若诱导映射 $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} R$ 是 0 映射。

在流形上我们最好用各种各样的局部坐标讨论。设 $(U; x_i, 1 \leq i \leq n)$ 是 p 附近的一个局部坐标系, 则临界点的定义可以写为:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0 \quad (1)$$

此时 $f(p)$ 称为 f 的临界值。

在临界点处 f 的性质有着与非临界值完全不同的性质。Morse 理论则是研究临界点处, M 本身拓扑性质的改变的理论。

流形上的非退化光滑函数

§1.1 定义和引理

我们先用一个引理说明在非临界点 M 的平凡性质。

Lemma 1.1.1

设 $M^a = \{p \in M | f(p) \leq a\}$ 。若 a 不是临界值, 则 M^a 是带边的光滑流形。