Note for Homological Algebra

Morse 理论笔记

Edited by

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-03-14 22:38

LOGO NAME
Slogan Here

Contents

这是笔者于 2023 年本科四年级下学期学习 Morse 理论的学习笔记。

我们假定大家拥有基础的微分几何知识和黎曼几何知识。

设 f 是流形 M 上的光滑函数。我们定义: 称一个点 $p \in M$ 是 f 的临界点 (critical point), 若诱导映射 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}R$ 是 0 映射。

在流形上我们最好用各种各样的局部坐标讨论。设 $(U; x_i, 1 \leq i \leq n)$ 是 p 附近的一个局部坐标系, 则临界点的定义可以写为:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0 \tag{1}$$

此时 $f(p)$ 称为 f 的临界值。

在临界点处 f 的性质有着与非临界值完全不同的性质。Morse 理论则是研究临界点处,M 本身拓扑性质的改变的理论。

Chapter 1

流形上的非退化光滑函数

§1.1 Morse 函数

我们先用一个引理说明在非临界点 M 的平凡性质。

Lemma 1.1.1: 非临界点

设 $M^a = \{p \in M | f(p) \leq a\}$。若 a 不是临界值, 则 M^a 是带边的光滑流形。

引理的证明留作练习。主要使用到隐函数定理以及带边流形的定义。

Definition 1.1.1: 非退化点

考虑 M 上的函数 f. 若在 f 的临界点 p 处存在一个局部坐标 $(U;x^i)$ 使得矩阵：

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)) \tag{1.1}$$

非奇异，则称 p 是一个非退化点。

这里需要注意的是,p 的非退化性显然与局部坐标 x^i 无关。因此 p 的非退化性是 f 内蕴的性质。

如果 p 是 f 的临界点, 我们就可以定义在 T_pM 上的双线性函数 f_{**}。若 $v, w \in T_pM$, 用 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 表示在 p 处值为 v, w 的向量场。定义:

$$f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}f) \tag{1.2}$$

我们断言:

Lemma 1.1.2

f_** 是对称的良定双线性函数。

Proof. 考虑:

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}f) - \tilde{w}_p(\tilde{v}f) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0 \tag{1.3}$$

最后一个等号成立，是因为 p 是 f 的临界点。

从而 f_{**} 是对称的。因此，$\tilde{v}_p(\tilde{w}f)$ 与 $\tilde{v}$ 的选取无关,$\tilde{w}_p(\tilde{v}f)$ 与 $\tilde{w}$ 的选取无关.

于是 f_{**} 与 $\tilde{v}, \tilde{w}$ 的选取都无关，因而是良定的双线性函数。 ■

Definition 1.1.2: Hessian, 指数, 零化度

称 f_{**} 为函数 f 在 p 处的 Hessian 双线性函数。

而 f_{**} 的指数定义为满足 f_** 限制在上为负定双线性函数的子空间 V 的最大维数。f_{**} 的零化度

定义为 f_{**} 的零空间 W 的维数, 即子空间 $W=\{v\in V|f_{**}(v,w)=0,\forall w\in V\}$ 的维数。

可以验算 f_{**} 在坐标 $(U;x^i)$ 下给出的就是矩阵1.1. 显然,f 在 p 处非退化等价于 f_{**} 的零化度是 0。f_{**} 的指数也称为 f 在 p 处的指数。

Lemma 1.1.3: Morse 引理

设 p 是 f 的非退化点，则存在一个 p 处的局部坐标 $(U;y^i)$ 满足 $y^i(p)=0,\forall i$ 且:

$$f(q)=f(p)-(y^1)^2-\cdots-(y^\lambda)^2+(y^{\lambda+1})^2+\cdots+(y^n)^2 \tag{1.4}$$

在整个 U 上都成立. 其中 λ 是 f 在 p 处的指数。

Proof. 我们首先说明如果 f 拥有这样的表达式，则指数为 λ.

对于坐标 (z^i), 若:

$$f(q)=f(p)-(z^1(q))^2-\cdots-(z^\lambda(q))^2+\cdots+(z^n(q))^2$$

则容易求出 f_{**} 在该坐标下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-2,\ldots,-2,2,\ldots,2)$. 其中 -2 一共有 λ 个。

因此存在一个 λ 维的子空间使得 f_{**} 是负定的, 存在一个 $n-\lambda$ 维的子空间 V 使得 f_{**} 是正定的。如果 p 处的指数大于 λ, 则对应的子空间与 V 相交不为空。但这是不可能的，因此 λ 是 f 在 p 处的指数。

接下来我们说明 (y^i) 坐标存在。不妨设 p 是 $\mathbb{R}^n$ 的原点且 $f(p)=f(0)=0$. 从而有:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)x_i\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

令 $g_j=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\mathrm{d}t$, 则 $f=\sum_j x_jg_j$ 在 0 处的一个邻域上成立。

因为 0 是 f 的临界点, 从而 $\frac{\partial f}{\partial x)i}(0)=0$。这意味着 $g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. 因而对 g_j 作上述 f 同样的分解:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j}x_ix_jh_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

不妨假设 h_{ij} 关于 i,j 对称。通过计算, 不难验证矩阵 $(h_{ij}(0))$ 等于:

$$(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0))$$

因此 $h_{ij}(0)$ 是非奇异的矩阵。仿照模仿有理标准型的构造，可以证明存在一组坐标 (y^i) 使得 f 呈现为引理中的形式。具体的构造办法详见 Milnor 原书。(附录) ■

Morse 引理的好处在于我们可以用指数唯一确定 f 在 p 处的一个标准形式。根据这个引理，可以得知 f 在非退化点 p 的一个邻域内只有 p 一个临界点。

Corollary 1.1.1

非退化临界点是离散的。特别的, 紧致流形 M 上的非退化临界点只有有限个。

Definition 1.1.3: Morse 函数

若 $f\in\mathcal{O}(M)$ 且只有非退化的临界点, 则称该函数为 Morse 函数。

Morse 函数的好处是显而易见的。然而存在性则是一个问题。本节我们剩下的内容为下面的定理。

Theorem 1.1.1

任何流形 M 上都存在一个可微的函数 f, 满足不存在退化临界点, 且 M^a 对于任何 $a \in \mathbb{R}$ 都是紧致的。

根据 Whitney 嵌入定理, 任何流形都可以嵌入到维数足够高的欧氏空间。因而我们考虑 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维嵌入子流形（之后统称为 "子流形"）。

定义 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 为:

$$N = \{(q,v) : q \in M, v \in T_q\mathbb{R}^n, v \perp M\}$$

即 N 是 M 在 $\mathbb{R}^n$ 中的法丛。不难验证 N 是 n 维的流形, 且光滑的嵌入进 $\mathbb{R}^{2n}$ 中。定义 $E : N \to \mathbb{R}^n$ 为映射 $(q,v) \mapsto q + v$.

Definition 1.1.4: 焦点

称 $e \in \mathbb{R}^n$ 是 (M,q) 重数为 μ 的焦点, 若 $e = E(q,v), (q,v) \in N$ 且 E 在 (q,v) 处的 Jacobian 矩阵有零化度 μ.

根据 Sard 定理, 两个微分流形之间的可微映射的临界点是很有限的——临界值只有 0 测度。显然焦点是 E 的临界值, 因而:

Corollary 1.1.2

对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$,x 都不是 M 的焦点。

现在固定 $p \in \mathbb{R}^n$. 定义函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 为:

$$L_p = f : q \mapsto \|q - p\|^2 \tag{1.6}$$

在坐标 $(U; u^1, \ldots, u^k)$ 下,f 的表达式为:

$$f(u^1, \ldots, u^k) = \|\vec{x}(u^1, \ldots, x^k) - \vec{p}\|^2 = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{p} + \vec{p}\vec{p}$$

因此可以计算:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

因此 q 是 f 的临界点, 当且仅当 $q - p$ 垂直与 M 垂直。

考虑 f 的二阶导数。我们有:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} u^j \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

从而有

Lemma 1.1.4

q 是 $f = L_p$ 的退化临界点等价于 p 是 (M,q) 的焦点。根据推论1.1.2, 总存在这样的 L_p 使得该函数不存在退化的临界点。另外, 若 q 是 L_p 的退化临界点，则该点的零化度是 p 的重数。

§1.2 临界值处的伦形

§1.3 Morse 不等式

Chapter 2

Morse 理论的应用——测地线变分

§2.1 道路的能量积分

§2.2 指标定理

§2.3 道路空间的伦型

Chapter 3

Morse 不等式的解析证明

§3.1 Witten 形变与 Hodge 定理

§3.2 算子在临界点的分析

§3.3 Morse 不等式的证明