代数拓扑基础

第一章　点集拓扑

1.1 拓扑空间

如果说群是对称性的数学化的概念的话, 那么拓扑就是连续性的数学化概念. 由微积分对连续性的直观发现到拓扑的最终严格定义经历了好几个世纪.

定义1.1.1 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 由集合 X 和它的子集族 $\mathscr{T}$ 构成, 其中 $\mathscr{T}$ 满足以下性质.

(O1) $\emptyset\in\mathscr{T}$, $X\in\mathscr{T}$.

(O2) 如果 $O_1,O_2\in\mathscr{T}$, 则 $O_1\cap O_2\in\mathscr{T}$.

(O3) 如果 $O_\alpha\in\mathscr{T}$ 对每个 $\alpha\in\Lambda$, 其中 Λ 为任意下标集, 则 $\cup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha\in\mathscr{T}$.

称 $\mathscr{T}$ 中的元素为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的开集, $\mathscr{T}$ 为集合 X 上的一个开拓扑. 在不引起误解的情况下, 常把拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 简记为 X.

当从开集的角度叙述时, 以上定义可重新叙述为.

(O1) 空集和全集为开集.

(O2) 有限多个开集的交集仍为开集.

(O3) 任意多个开集的并集仍为开集.

例1.1.2 对于任意集合 X, 如果定义它的开集只有空集 $\emptyset$ 和全集 X, 则称这个拓扑为 X 的平凡拓扑; 如果定义它的所有子集都为开集, 则称这个拓扑为 X 的离散拓扑.

例1.1.3 n维实空间 $\mathbb{R}^n$, 它的非空开集定义为任意多个开球的并集, 其中开球定义为以下形式的集合, $B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x-y\|<\varepsilon\}$, 其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$.

定义1.1.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间, A 为 X 的子集, 记 A 的余(补)集为

$$A^c=X\setminus A=\{x\in X\,|\,x\notin A\}.$$

定义 A 为 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集, 如果 A^c 为 X 的开集.

有了余集的概念, 我们就有了拓扑学中的余对偶方法. 把一个有关拓扑空间的叙述(比如定义, 定理, 证明等)中所有的集合都换为它的余集, 就可以得到它的对偶叙述. 比如, 以上拓扑空间的定义是从定义什么是拓扑空间的开集入手的, 而给定一开拓扑 $\mathscr{T}$ 后, 就存在一对偶子集族 $\mathscr{F}=\{O^c\,|\,O\in\mathscr{T}\}$, 这个子集族应该满足与开拓扑对应的对偶性质. 对于这个对偶性质的描述就得到拓扑空间的另一个从定义闭集角度入手的等价的定义.

定义1.1.5 拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$ 由集合 X 和它的子集族 $\mathscr{F}$ 构成, 其中 $\mathscr{F}$ 满足以下性质.

(F1) $\emptyset\in\mathscr{F}$, $X\in\mathscr{F}$.

(F2) 如果 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$, 则 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$.

(F3) 如果 $F_\alpha\in\mathscr{F}$ 对每个 $\alpha\in\Lambda$, 其中 Λ 为任意下标集, 则 $\cap_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha\in\mathscr{F}$.

称 $\mathscr{F}$ 中的元素为拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$ 的闭集, $\mathscr{F}$ 为集合 X 上的一个闭拓扑. 在不引起误解的情况下, 常把拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$ 简记为 X. 称 $\mathscr{T}=\{F^c\,|\,F\in\mathscr{F}\}$ 和 $\mathscr{F}$ 互为对偶拓扑.

与开拓扑一样, 从闭集角度以上定义可以重新叙述为.
(F1) 空集和全集为闭集.
(F2) 有限多个闭集的并集仍为闭集.
(F3) 任意多个闭集的交集仍为闭集.

一个拓扑空间的开拓扑和它的对偶闭拓扑是1-1对应的, 定义了开拓扑也就定义了它的对偶闭拓扑. 虽然开拓扑和闭拓扑是等价的, 但对于具体的拓扑空间来说, 往往只能从一个角度定义才容易理解. 以上实空间的情况定义开拓扑就容易, 但以下例子定义闭拓扑才是自然的.

例1.1.6　n维仿射空间 $\mathbb{C}^n$, 它的闭集定义为任意多个多项式的联立方程的解集, 也就是零点集. 该拓扑称为 $\mathbb{C}^n$ 的Zarisky闭拓扑. 需要注意的是拓扑学中 $\mathbb{C}^n$ 的通常拓扑是指作为集合 $\mathbb{R}^{2n}$ 按照定义1.1.3所定义的开拓扑. 这同一集合上的两个拓扑区别很大, 所以一个称为n维仿射空间, 是代数几何中的典型空间, 另一个称为n维复空间, 在拓扑学中等同于 $\mathbb{R}^{2n}$.

定义1.1.7 设 A 为集合X的子集.
如果 $\mathscr{T}$ 为 X 的开拓扑, 记集族 $\mathscr{T}|_A=\{O\cap A\,|\,O\in\mathscr{T}\}$, 则容易验证 $\mathscr{T}|_A$ 为 A 上的开拓扑. 称拓扑空间 $(A,\mathscr{T}|_A)$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的子空间.
如果 $\mathscr{F}$ 为 X 的闭拓扑, 记集族 $\mathscr{F}|_A=\{F\cap A\,|\,F\in\mathscr{F}\}$, 则容易验证 $\mathscr{F}|_A$ 为 A 上的闭拓扑. 称拓扑空间$(A,\mathscr{F}|_A)$ 为 $(X,\mathscr{F})$ 的子空间.
如果 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 互为对偶拓扑, 则 $\mathscr{T}|_A$ 和 $\mathscr{F}|_A$ 互为对偶拓扑, 统称 A 为 X 的子空间.

例1.1.8 以下给出代数拓扑中最常用的几类空间.
(1) 对于$n\geqslant 0$, n维(单位)球面为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间

$$S^n=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2}=1\}.$$

称 $(0,\cdots,0,1)$ 和 $(0,\cdots,0,-1)$ 分别为 S^n 的北极点和南极点. 特别地, $S^0=\{1,-1\}$ 为两点离散空间.
(2) n维上半球面 S^n_+ 和 n维下半球面 S^n_- 为 n维球面 S^n 的子空间

$$S^n_\pm=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S^n\mid\pm x_{n+1}\geqslant 0\}.$$

(3) 对于 $n\geqslant 1$, n维(单位)球体为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

$$D^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant 1\}.$$

(4) 对于 $n\geqslant 1$, n维(单位)立方体为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

$$I^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\text{每个 } x_i \text{ 满足 } 0\leqslant x_i\leqslant 1\}.$$

特别地, 简记 $I^1=[0,1]$ 为 I.

(5) 把 $\mathbb{R}^n$ 看成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的最后一个坐标为 0 的点构成的子空间, 易证 $\mathbb{R}^n$ 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间拓扑与通常的拓扑一样. 则我们总是有以下的拓扑空间的关系 ($X \subset Y$ 意味着 X 为 Y 的子空间)

$$\{0\} = \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \cdots,$$

$$\{-1, 1\} = S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^n \subset S^{n+1} \subset \cdots,$$

$$\{\pm 1\} = S^0_\pm \subset S^1_\pm \subset \cdots \subset S^n_\pm \subset S^{n+1}_\pm \subset \cdots,$$

$$[-1, 1] = D^1 \subset D^2 \subset \cdots \subset D^n \subset D^{n+1} \subset \cdots,$$

$$[0, 1] = I^1 \subset I^2 \subset \cdots \subset I^n \subset I^{n+1} \subset \cdots,$$

称 S^{n-1} 作为 S^n 的子空间为 S^n 的赤道.

习题 1.1

1.1.1. 证明独点集上只有一个拓扑, 称为独点空间. 一般总是将独点集简记为 v, 而不是 $\{v\}$.

1.1.2. 设 $X = \{0, 1\}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset, 0, X\}$. 证明 $\mathscr{T}$ 为开拓扑, 称为Sierpinski空间.

1.1.3. 试举反例, A 为 X 的子集, $\mathscr{T}$ 为 X 上的开拓扑, 但集族 $\mathscr{T} \cap A = \{O \in \mathscr{T} \mid O \subset A\}$ 不是 A 上的开拓扑. 给出对偶情形的反例.

1.1.4. 设 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为集合 X 上的一族开拓扑, 证明 $\cap_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha$ 仍为 X 上的开拓扑. 对偶地, 设 $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为集合 X 上的一族闭拓扑, 证明 $\cap_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{F}_\alpha$ 仍为 X 上的闭拓扑.

1.1.5. 构造集合 X 上的两个开(闭)拓扑 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, 使得 $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ 不是 X 上的开(闭)拓扑.

1.1.6. 设集合 X 的子集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $X = \cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 这样的子集族也称为 X 的一个覆盖. 证明对于 X 上的开拓扑 $\mathscr{T}$, 集族

$$\mathscr{T}' = \{O \subset X \mid O \cap X_\alpha \in \mathscr{T} \text{ 对所有 } \alpha \in \Lambda\}$$

仍为 X 上的开拓扑, 称为由覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $\mathscr{T}$ 决定的开拓扑. 称 $(X, \mathscr{T}')$ 为由覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $(X, \mathscr{T})$ 决定的开拓扑空间. 对偶地, 证明对于 X 上的闭拓扑 $\mathscr{F}$, 集族

$$\mathscr{F}' = \{O \subset X \mid O \cap X_\alpha \in \mathscr{F} \text{ 对所有 } \alpha \in \Lambda\}$$

仍为 X 上的闭拓扑, 称为由覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $\mathscr{F}$ 决定的闭拓扑. 称 $(X, \mathscr{F}')$ 为由覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $(X, \mathscr{F})$ 决定的闭拓扑空间.

证明上述拓扑中如果 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 互为对偶拓扑, 则 $\mathscr{T}'$ 和 $\mathscr{F}'$ 也互为对偶拓扑.

1.1.7. 设拓扑空间 X 的子集 A, B 满足 $A \subset B$. 则 A 作为 X 的子空间拓扑与 A 作为 X 的子空间 B 的子空间的拓扑一致.

1.1.8. 定义$\mathbb{R}^\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$上的闭拓扑如下

$$\mathscr{F} = \{F \mid F \text{为某个}\mathbb{R}^n\text{的闭子集}\} \cup \{\mathbb{R}^\infty\}.$$

证明由子空间族$\{\mathbb{R}^n\}_{n=1}^\infty$决定的闭拓扑$\mathscr{F}'$真包含$\mathscr{F}$.

1.1.9. 单位区间I有覆盖$[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], \cdots, [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}], \cdots, 1$. 记$I$作为$\mathbb{R}$的子空间的闭拓扑为$\mathscr{F}$, 记由以上覆盖和$\mathscr{F}$决定的闭拓扑为$\mathscr{F}'$. 证明$\mathscr{F}'$真包含$\mathscr{F}$.

1.2 拓扑基

有限维实线性空间是一个复杂的不可数集, 但是它的线性性质却可以由一组有限的基决定. 实多项式$P(x_1, \cdots, x_n)$也是一个复杂的代数, 但是它的代数性质却可以由生成元$x_1, \cdots, x_n$决定. 同样, 描述一个拓扑空间的所有开(闭)集往往也是不容易的, 但是拓扑集族也可以由更简单的集族来刻画.

定义1.2.1 集合X上的两个拓扑$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$如果满足$\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$, 则称$\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$细, 或者$\mathscr{T}_1$比$\mathscr{T}_2$粗. 对偶地, 集合$X$上的两个闭拓扑$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$如果满足$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, 则称$\mathscr{F}_2$比$\mathscr{F}_1$细, 或者$\mathscr{F}_1$比$\mathscr{F}_2$粗.

显然一个集合上最粗的拓扑是平凡拓扑, 最细的拓扑是离散拓扑. 开拓扑$\mathscr{T}_1$比开拓扑$\mathscr{T}_2$粗(细), 当且仅当$\mathscr{T}_1$的对偶闭拓扑$\mathscr{F}_1$比$\mathscr{T}_2$的对偶闭拓扑$\mathscr{F}_2$粗(细).

定义1.2.2 集合X上的开拓扑$\mathscr{T}$称为由子集族$\mathscr{B}$生成, 如果$\mathscr{T}$为包含集族$\mathscr{B}$的最粗拓扑, 如果$\mathscr{B}$还为X的覆盖, 即$X = \cup_{B \in \mathscr{B}} B$, 则称$\mathscr{B}$为$\mathscr{T}$的子基. 如果集族$\mathscr{T}$的每一个非空集都可表为子基$\mathscr{B}$的任意个的集的并, 则称$\mathscr{B}$为$\mathscr{T}$或者拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的拓扑基.

注意拓扑基的概念只针对开拓扑, 对偶的针对闭拓扑的概念很少用. 正因为如此, 以后如果不说明, 拓扑总是指开拓扑.

定理1.2.3 集合X的任一子集族$\mathscr{B}$都生成唯一的拓扑$T(\mathscr{B})$. $\mathscr{B}$为$T(\mathscr{B})$的拓扑基当且仅当$\mathscr{B}$为子基, 并且满足以下性质. 对任何$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$和对任何$x \in B_1 \cap B_2$, 都存在$B_x \in \mathscr{B}$, 使得$x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$.

证 令$T(\mathscr{B}) = \cap_{\mathscr{T} \in Z} \mathscr{T}$, 其中$Z$为所有$X$上的包含集族$\mathscr{B}$的拓扑构成的集合. 则$Z$非空, 因为离散拓扑属于$Z$. 于是$T(\mathscr{B})$自然为满足定理条件的唯一拓扑.

还有一个构造性的证明. 对于集合X的子集族$\mathscr{X}$, 记$I(\mathscr{X})$为所有由$\mathscr{X}$中的有限个集合的交集构成的集族, 记$U(\mathscr{X})$为所有由$\mathscr{X}$中的任意个集合的并集构成的集族. 对于集族$\mathscr{B}$, 令

$$T(\mathscr{B}) = U(I(\mathscr{B})) \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}.$$

现证$T(\mathscr{B})$为拓扑. 由于$\emptyset, X \in T(\mathscr{B})$, 所以$T(\mathscr{B})$满足(O1). 对于$T(\mathscr{B})$的任一子集族$\{O_\mu\}_{\mu \in \Sigma}$, 假设$O_\mu = \cup_{\alpha_\mu \in \Lambda_\mu} (O_{\alpha_\mu, 1} \cap \cdots \cap O_{\alpha_\mu, n_{\alpha_\mu}})$, 其中每个$O_{\alpha_\mu, i} \in \mathscr{B}$, 我们有

$$\cup_{\mu \in \Sigma} O_\mu = \cup_{\mu \in \Sigma, \, \alpha_\mu \in \Lambda_\mu} (O_{\alpha_\mu, 1} \cap \cdots \cap O_{\alpha_\mu, n_{\alpha_\mu}}) \in T(\mathscr{B}).$$

所以 $T(\mathscr{B})$ 满足(O2). 如果 $U=\cup_{\alpha\in\Lambda}(O_{\alpha,1}\cap\cdots\cap O_{\alpha,n_\alpha}), V=\cup_{\beta\in\Pi}(O_{\beta,1}\cap\cdots\cap O_{\beta,n_\beta})\in T(\mathscr{B})$, 其中每个 $O_{\alpha,i}, O_{\beta,j}\in\mathscr{B}$, 则

$$U\cap V=\cup_{\alpha\in\Lambda,\,\beta\in\Pi}\left(O_{\alpha,1}\cap\cdots\cap O_{\alpha,n_\alpha}\cap O_{\beta,1}\cap\cdots\cap O_{\beta,n_\beta}\right)\in T(\mathscr{B}).$$

所以 $T(\mathscr{B})$ 满足(O3). 因此, $T(\mathscr{B})$ 为拓扑.

由拓扑公理易证如果拓扑 $\mathscr{T}$ 包含 $\mathscr{B}$, 则 $U(I(\mathscr{B}))\cup\{\emptyset\}\cup\{X\}\subset\mathscr{T}$, 所以 $T(\mathscr{B})\subset\mathscr{T}$. 因此 $T(\mathscr{B})$ 为包含 $\mathscr{B}$ 的最粗拓扑.

假设 $\mathscr{B}$ 满足定理中的性质, 即对 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ 和任何 $x\in B_1\cap B_2$, 都存在 $B_x\in\mathscr{B}$, 使得 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2$. 则 $B_1\cap B_2=\cup_{x\in B_1\cap B_2}B_x\subset U(\mathscr{B})$. 这说明 $I(\mathscr{B})\subset U(\mathscr{B})$, 所以 $U(I(\mathscr{B}))\subset U(U(\mathscr{B}))=U(\mathscr{B})$. 而由 $\mathscr{B}\subset I(\mathscr{B})$ 又推出 $U(\mathscr{B})\subset U(I(\mathscr{B}))$, 所以 $U(I(\mathscr{B}))=U(\mathscr{B})$. 这说明 $\mathscr{B}$ 为 $T(\mathscr{B})$ 的基. 反之, 如果 $\mathscr{B}$ 为 $T(\mathscr{B})$ 的拓扑基, 即 $T(\mathscr{B})=U(\mathscr{B})\cup\{\emptyset\}$, 则对 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$, $B_1\cap B_2\neq\emptyset$, 存在集族 $\{O_\alpha\in\mathscr{B}\}$ 使得 $B_1\cap B_2=\cup_\alpha O_\alpha$. 于是对任何 $x\in B_1\cap B_2$, 存在 α 使得 $x\in O_\alpha\subset B_1\cap B_2$. 则 $B_x=O_\alpha\in\mathscr{B}$ 满足 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2$.

定理1.2.4 设 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 为集合 X 上的两族拓扑基. 则 $T(\mathscr{B}_1)$ 比 $T(\mathscr{B}_2)$ 细, 当且仅当对任何 $B_2\in\mathscr{B}_2$ 和任何 $x\in B_2$, 都存在 $B_{1,x}\in\mathscr{B}_1$ 使得 $x\in B_{1,x}\subset B_2$.

证 假设 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 满足定理条件, 即对任何 $B_2\in T(\mathscr{B}_2)$ 和 $x\in B_2$, 存在 $B_{1,x}\in\mathscr{B}_1$ 使得 $x\in B_{1,x}\subset B_2$. 于是 $B_2=\cup_{x\in B_2}B_{1,x}\in T(\mathscr{B}_1)$. 所以 $T(\mathscr{B}_2)$ 比 $T(\mathscr{B}_1)$ 粗.

反之, 假设 $T(\mathscr{B}_2)$ 比 $T(\mathscr{B}_1)$ 粗. 则对任何 $B_2\in\mathscr{B}_2$, $B_2=\cup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$, 其中每个 $O_\alpha\in\mathscr{B}_1$. 于是对任何 $x\in B_2$, 存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x\in O_\alpha$. 则 $B_{1,x}=O_\alpha\in\mathscr{B}_1$ 满足 $x\in B_{1,x}\subset B_2$.

例1.2.5 $\mathbb{R}$ 的可数子集族 $\mathscr{B}=\{(-\infty,r),(r,+\infty)\,|\,r\text{ 为有理数}\}$ 生成实空间的拓扑, 但不是实空间的拓扑基. 子集族 $\mathscr{O}=\{(a,b)\,|\,a,b\text{ 为有理数}\}$ 为实空间的拓扑基.

与实数空间性质最相近, 也是人们认识最早的一类拓扑空间就是以下定义的度量空间.

定义1.2.6 集合 X 上的一个二元实函数 $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$ 称为度量函数, 如果它满足以下三条性质.

(D1) (对称性) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 对任何 $x,y\in X$.

(D2) (正定性) $\rho(x,y)\geqslant 0$ 对任何 $x,y\in X$, 且等号成立当且仅当 $x=y$.

(D3) (三角不等式) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ 对任何 $x,y,z\in X$.

称 (X,ρ) 为一个度量空间. 称正实数 $\rho(x,y)$ 为 x 和 y 的距离, 所以度量也称作距离. 称 X 的子集 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X\,|\,\rho(x,y)<\varepsilon\}$ 为 x 的一个球形邻域.

度量空间 (X,ρ) 的开拓扑定义为所有球形邻域构成的集族生成的拓扑.

定理1.2.7 度量空间 (X,ρ) 上的所有球形邻域构成的集族为度量空间的拓扑基.

证 如果两个球形邻域满足 $B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)\neq\emptyset$, 则对任何 $x\in B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)\neq\emptyset$, 取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1-\rho(x,x_1),\varepsilon_2-\rho(x,x_2))$, 则有 $B(x,\varepsilon)\subset B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$. 这说明球形邻域集族满足定理1.2.3的条件, 为拓扑基.

所有在数学分析中涉及到的概念和方法, 比如收敛点列、函数在某点连续等等都可以在度量空间中自然推广. 所以有一个时期, 度量空间被认为是能够在其上定义连续性的最一般的集合. 有了拓扑空间的概

念后, 这个观点显然是错误的. 因此, 在拓扑学中, 传统的从点和点列入手研究连续性的方法都将转变为从开(闭)集的角度叙述.

习题 1.2

1.2.1. 集合上的离散度量为 $\rho(x,y)=1$ 对所有 $x\neq y$. 证明离散度量空间的拓扑为离散拓扑.

1.2.2. 如果度量函数 ρ_1,ρ_2 满足存在正常数 d,c (d可以为无穷大) 使得当 $\rho_2(x,y)\leqslant d$ 时, $\rho_1(x,y)\leqslant c\rho_2(x,y)$, 则 (X,ρ_1) 的拓扑比 (X,ρ_2) 的拓扑要粗.

1.2.3. 证明 $\mathbb{R}^n$ 上的两个度量函数 ($x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$)

$$\rho_1(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

$$\rho_2(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\cdots|x_n-y_n|\}$$

导出相同的拓扑空间 $(\mathbb{R}^n,\rho_1)$ 和 $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$.

1.2.4. 设 ρ 为集合 X 上的度量函数,

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\qquad \rho_2(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y) & \rho(x,y)\leqslant 1,\\ 1 & \rho(x,y)>1\,.\end{cases}$$

证明 ρ_1,ρ_2 仍为 X 上的度量函数.

1.2.5. 证明上题中的三个度量空间的拓扑相同.

1.2.6. 设 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为集合 X 上的一族开拓扑, 描述集族 $\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{T}_\alpha$ 生成的开拓扑.

设 $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为集合 X 上的一族闭拓扑, 描述集族 $\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$ 生成的闭拓扑.

1.2.7. 设开拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一族开子集 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $X=\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 则 $\mathscr{T}$ 为由集族 $\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{T}|_{X_\alpha}$ 生成的开拓扑, 也为由子集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 决定的开拓扑.

1.2.8. 设闭拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$ 的有限个闭子集 $X_1,\cdots,X_n$ 满足 $X=\cup_{k=1}^n X_k$, 则 $\mathscr{F}$ 为由集族 $\cup_{k=1}^n\mathscr{F}|_{X_k}$ 生成的闭拓扑, 也为由子集族 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ 决定的拓扑.

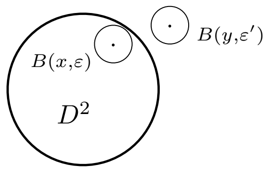
1.2.9. 设闭拓扑空间 $(X,\mathscr{F})$ 的一族闭子集 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $X=\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 则 $\mathscr{F}$ 比由集族 $\cup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}|_{X_\alpha}$ 生成的闭拓扑要细. 试举例使得两个拓扑不同.

1.3 内部、外部和边界

一个集合有了拓扑结构意味着什么呢? 通过观察平面(空间)的具有明确几何形状的集合我们不难发现, 这样的集合将整个平面(空间)分成内部、外部和边界三个互不相交的部分. 这条表面上看属于几何学的性

质其实是完全的拓扑性质, 也就是说它可以推广到任何拓扑空间的任意子集上. 事实上, 如何定义任意子集的内部、外部和边界是拓扑空间的另一个等价的定义.

拿平面上的 D^2 来说, 从下图直观地看, 我们有以下结论. 如果 x 为 D^2 的内部点, 则 x 点附近都在 D^2中, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x,\varepsilon) \subset D^2$; 如果 y 为 D^2 的外部点, 则 x点附近都不在 D^2中, 即存在 $\varepsilon' > 0$, 使得 $B(y,\varepsilon')\cap D^2 = \emptyset$; 其余的点, 也就是粗线圆上的点都是边界点. 把球形邻域换成邻域, 就可以把以上定义推广到任意拓扑空间了.



定义1.3.1 设 A 为拓扑空间 X 的一个子集, 则任何一个包含 A 的开集都称为 A 的一个邻域. 特别地, 如果 A 为单点集 x, 则任何一个含点 x 的开集都称为 x 的一个邻域.

定义1.3.2 设 A 为拓扑空间 X 的子集, 则由排中律, X 的任何一点 x 一定属于以下三种情况之一.

(1) 存在 x 的邻域 O 使得 $O \subset A$.

(2) 存在 x 的邻域 O 使得 $O \subset A^c$, 等价地, $O \cap A = \emptyset$.

(3) 对 x 的任何邻域 O, 都存在 $y, z \in O$ 使得 $y \in A$, $z \notin A$.

满足条件(1)的点称为 A 的内点, A 的所有内点构成的子集称为 A 的内点集, 也叫A 的内部, 记作$\mathrm{Int}(A)$. 满足条件(2)的点称为 A 的外点, A 的所有外点构成的子集称为 A 的外点集, 也叫A 的外部, 记作$\mathrm{Ext}(A)$. 满足条件(3)的点称为 A 的边点, A 的所有边点构成的子集称为 A 的边点集, 也叫A 的边界, 记作$\mathrm{Bd}(A)$. 如果对的 x 的任何邻域 O, 都有 $O \cap A \neq \emptyset$, 则称 x 为 A 的闭包点. A 的所有闭包点构成的子集称为 A 的闭包, 记作$\mathrm{Cl}(A)$. 显然 $\mathrm{Cl}(A) = (\mathrm{Ext}(A))^c = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$.

定理1.3.3 设 A 为拓扑空间 X 的子集, 则 $\mathrm{Int}(A)$ 为包含于A 的最大开集, A 为 X 的开集当且仅当$\mathrm{Int}(A) = A$. 对偶地, $\mathrm{Cl}(A)$ 为包含A 的最小闭集, A 为 X 的闭集当且仅当$\mathrm{Cl}(A) = A$.

证 对于任何 $x \in \mathrm{Int}(A)$, 存在 x 的邻域O_x 使得 $O_x \subset A$, 而显然 O_x 的所有点都是 A 的内点, 即 $O_x \subset \mathrm{Int}(A)$. 所以 $\mathrm{Int}(A) = \cup_{x\in\mathrm{Int}(A)} O_x$ 为开集. 如果开集 O 满足 $O \subset A$, 则对任何 $x \in O$, 由 $x \in O \subset A$ 可知 x 为 A 的内点. 所以 $O \subset \mathrm{Int}(A)$. 这说明 $\mathrm{Int}(A)$ 为包含于 A 的最大开集.

如果 A 为 X 的开集, 则对任何 $x \in A$, A 为 x 的包含于A 的邻域, 所以 x 为 A 的内点. 这说明 $A \subset \mathrm{Int}(A)$. 而由定义总有 $\mathrm{Int}(A) \subset A$. 所以, $\mathrm{Int}(A) = A$. 反之, 如果 $\mathrm{Int}(A) = A$, 则对任何 $x \in A$, 记 O_x 为 x 的任一包含于 A 的邻域, 则 $A = \cup_{x\in A} O_x$ 为 X 的开集.

对偶命题的证明为以下的对偶证明, 即把以上关于集合的叙述变为关于对应余集的否命题叙述就得到对偶证明.

对于任何 $x \notin \mathrm{Cl}(A)$, 存在x 的邻域O_x 使得 $O_x \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$, 所以 $(\mathrm{Cl}(A))^c = \cup_{x\notin\mathrm{Cl}(A)} O_x$, 即 $\mathrm{Cl}(A) = \cap_{x\notin\mathrm{Cl}(A)} (O_x)^c$ 为闭集. 如果闭集 F 满足 $A \subset F$, 则对任何 $x \notin F$, 存在x 的邻域O 使得 $F\cap O = \emptyset$, 即 x 不为 A 的闭包点. 所以 $\mathrm{Cl}(A) \subset F$. 这说明 $\mathrm{Cl}(A)$ 为包含 A 的最小闭集.

如果 A 为 X 的闭集, 则对任何 $x \notin A$, A^c 为 x 的与 A 不相交的邻域, 所以 x 不为 A 的闭包点. 这说明 $\mathrm{Cl}(A) \subset A$. 而由定义总有 $A \subset \mathrm{Cl}(A)$. 所以, $\mathrm{Cl}(A) = A$. 反之, 如果 $\mathrm{Cl}(A) = A$, 则对任何 $x \notin A$,

记 O_x 为 x 的任一与 A 不相交的邻域, 则 $A = (\cup_{x \notin A} (O_x))^c = \cap_{x \notin A} (O_x)^c$ 为 X 的闭集.

学过数学分析后, 我们直观地就会得出一个结论：连续性意味着收敛点列的定义, 从而任何子集有了收敛点集的概念. 而闭集就是收敛点集与自身相等的集合. 这个针对任意拓扑空间的结论对么？

回顾一下数学分析中点列收敛的概念. 在实数集 $\mathbb{R}$ 中, 数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - x| < \varepsilon$. 换作球形邻域的语言就是, 数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 如果对 x 的任何球形邻域 $B(x, \varepsilon)$, 都存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. 将球形邻域换成邻域, 自然就得到了任意拓扑空间中的点列收敛的概念, 拓扑空间中点列 $\{x_n\}$ 收敛到点 x, 如果对 x 的任何邻域 O, 都存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \in O$. 称点 x 为点列 $\{x_n\}$ 的收敛点. 定义拓扑空间的子集 A 的收敛点集 $\mathrm{Con}(A)$ 为所有 A 中的点列的收敛点构成的子集. 那么按照这个定义, A 为闭集是否当且仅当 $\mathrm{Con}(A) = A$? 这个结论对度量空间是正确的, 但以下实例说明这个结论对任意拓扑空间是不成立的.

例1.3.4 定义实数集上的异于通常意义的闭拓扑 $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$ 如下. $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 的所有可数子集构成的集合族. 设 A 为 $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$ 的子集. 则对于任何点 $x \notin A$ 和任何 A 中的点列 $\{x_n\}$, 令闭集 $F = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. 则 $O = \mathbb{R} \setminus F$ 为 x 的邻域满足对任何 n, 都有 $x_n \notin O$. 所以 x 不是 A 的收敛点. 所以这个拓扑空间满足以下性质: 任何子集的收敛点集为自身. 显然这样的子集未必为闭集.

定理1.3.5 设 X 为拓扑空间, 记 2^X 为 X 的所有子集构成的集合. 则取内部集的对应 $A \to \mathrm{Int}(A)$ 为 2^X 到自身的对应, 满足以下性质.

(I1) $\mathrm{Int}(X) = X$.

(I2) $\mathrm{Int}(A) \subset A$ 对任何 $A \in 2^X$.

(I3) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$ 对任何 $A \in 2^X$.

(I4) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ 对任何 $A, B \in 2^X$.

反之, 如果存在 $\Phi \colon 2^X \to 2^X$ 满足以上四条性质, 则集族

$$\mathscr{T} = \{A \in 2^X \mid \Phi(A) = A\}$$

为 X 上的开拓扑, 并且关于开拓扑 $\mathscr{T}$ 的取内点集对应满足 $\mathrm{Int}(A) = \Phi(A)$ 对任何 $A \in 2^X$.

证 首先证明取内点集对应满足公理(I1)到(I4).

对于任何 $x \in X$, X 为 x 的包含于 X 的邻域, 所以 $\mathrm{Int}(X) = X$. (I1)成立.

如果 $x \in \mathrm{Int}(A)$, O 为 x 的包含于 A 的邻域, 则 $x \in O \subset A$. 所以 $\mathrm{Int}(A) \subset A$. (I2)成立.

由定理1.3.3, $\mathrm{Int}(A)$ 为开集, 因而 $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$. (I3)成立.

如果 $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$, O 为 x 的包含于 $A \cap B$ 的邻域, 则 O 也为 x 的包含于 A 的邻域, 所以 $x \in \mathrm{Int}(A)$. 同理, $x \in \mathrm{Int}(B)$. 所以 $\mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. 反之, 假设 $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. 令 O 为 x 的包含于 A 的邻域, U 为 x 的包含于 B 的邻域. 则 $O \cap U$ 为 x 的包含于 $A \cap B$ 的邻域, 即 $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$. 所以 $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cap B)$. (I4)成立.

下面证明如果对应 $\Phi \colon 2^X \to 2^X$ 满足定理的四条公理, 则 $\mathscr{T} = \{A \in 2^X \mid \Phi(A) = A\}$ 为 X 上的拓扑. 由(I2), $\Phi(\emptyset) \subset \emptyset$. 所以 $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, 即 $\emptyset \in \mathscr{T}$. 由(I1)可知 $X \in \mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 满足(O1). 由(I4), 如果 $O_1, O_2 \in \mathscr{T}$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 满足(O2). 由(I4), 如果 $A \subset B$, 则 $\Phi(A) = \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$, 即 $\Phi(A) \subset \Phi(B)$.

由此结论可知, 如果子集族 $\{O_\alpha\}$ 满足每个 $O_\alpha \in \mathscr{T}$, 则对每个 α, 都有 $O_\alpha = \Phi(O_\alpha) \subset \Phi(\cup_\alpha O_\alpha)$. 因此, $\cup_\alpha O_\alpha \subset \Phi(\cup_\alpha O_\alpha)$. 由(I2)得 $\cup_\alpha O_\alpha = \Phi(\cup_\alpha O_\alpha)$, 即 $\cup_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 满足(O3).

现证如果 Φ 满足内点公理, 则 $\Phi = \mathrm{Int}$. 由以上证明可知 Φ 和 Int 满足如果 $A \subset B$, 则 $\Phi(A) \subset \Phi(B)$, $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$. 由(I3), $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$, 所以 $\Phi(A)$ 为开集. 由定理1.3.3, $\Phi(A) = \mathrm{Int}(\Phi(A)) \subset \mathrm{Int}(A)$. 同样由于 $\mathrm{Int}(A)$ 为开集, 我们有 $\mathrm{Int}(A) = \Phi(\mathrm{Int}(A)) \subset \Phi(A)$. 所以 $\mathrm{Int}(A) = \Phi(A)$.

以上定理的对偶定理为

定理1.3.6 设 X 为拓扑空间. 则取闭包集对应 $A \to \mathrm{Cl}(A)$ 为 2^X 到自身的对应, 满足以下性质.

(C1) $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(C2) $A \subset \mathrm{Cl}(A)$ 对任何 $A \in 2^X$.

(C3) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$ 对任何 $A \in 2^X$.

(C4) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$ 对任何 $A, B \in 2^X$.

反之, 如果存在 $\Psi\colon 2^X \to 2^X$ 满足以上四条性质, 则 $\mathscr{F} = \{A \in 2^X \mid \Psi(A) = A\}$ 为 X 上的闭拓扑, 并且关于闭拓扑 $\mathscr{F}$ 的取闭包对应满足 $\mathrm{Cl}(A) = \Psi(A)$ 对所有 $A \in 2^X$.

证 把定理1.3.5中关于集合的叙述变为关于余集的否命题叙述就得到本定理的对偶证明.

最常用的关于闭包和内部的性质是由(I4)和(C4)导出的以下推论. 如果 $A \subset B$, 则有 $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$ 和 $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(B)$.

例1.3.7 S^n 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子集, $\mathrm{Int}(S^n) = \emptyset$, $\mathrm{Ext}(S^n) = \mathbb{R}^{n+1} \backslash S^n$, $\mathrm{Bd}(S^n) = \mathrm{Cl}(S^n) = S^n$. S^n 作为 D^{n+1} 的子集, $\mathrm{Int}(S^n) = \emptyset$, $\mathrm{Ext}(S^n) = D^{n+1} \backslash S^n$, $\mathrm{Bd}(S^n) = \mathrm{Cl}(S^n) = S^n$.

D^n 作为 $\mathbb{R}^n$ 的子集, $\mathrm{Int}(D^n) = D^n \backslash S^{n-1}$, $\mathrm{Ext}(D^n) = \mathbb{R}^n \backslash D^n$, $\mathrm{Bd}(D^n) = S^{n-1}$, $\mathrm{Cl}(D^n) = D^n$. 把 D^n 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间时, $\mathrm{Int}(D^n) = \emptyset$, $\mathrm{Ext}(D^n) = \mathbb{R}^{n+1} \backslash D^n$, $\mathrm{Bd}(D^n) = D^n$, $\mathrm{Cl}(D^n) = D^n$.

有些书把 $\mathrm{Int}(A)$ 记成 $\mathring{A}$, 把 $\mathrm{Cl}(A)$ 记成 $\overline{A}$, 把 $\mathrm{Bd}(A)$ 记成 $\partial(A)$. 通过以上例子我们可以发现, A 的内点集, 外点集, 边点集, 闭包, 这些集合是依赖于一个大的拓扑空间 X 的存在才存在的, 并不存在只依赖于 A 自身的内点集, 外点集, 等等集合.

定义1.3.8 拓扑空间 X 的子集 A 称为稠密的, 如果 $\mathrm{Cl}(A) = X$; A 称为无处稠密的, 如果 $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \emptyset$.

定理1.3.9 设 A 为拓扑空间 X 的子集. 则以下命题等价.

(1) A 为 X 的稠密子集.

(2) 包含 A 闭集只有全空间 X.

(3) A 与任何非空开集的交集非空.

(4) $\mathrm{Int}(A^c) = \emptyset$.

证 (1)$\Rightarrow$(2). 如果 $A \subset F$ 且 F 为闭集, 则 $X = \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(F) = F$. 所以 $F = X$.

(2)$\Rightarrow$(3). 假如非空开集 O 满足 $O \cap A = \emptyset$, 则闭集 O^c 满足 $A \subset O^c$. 所以 $O^c = X$, 即 $O = \emptyset$. 矛盾!

(3)$\Rightarrow$(1). 对 $x \in X$ 和 x 的任何邻域 O, 我们有 $O \cap A \neq \emptyset$, 即 $x \in \mathrm{Cl}(A)$. 所以 $\mathrm{Cl}(A) = X$.

(1)$\Leftrightarrow$(4). $\mathrm{Int}(A^c)=\mathrm{Ext}(A)=\emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Cl}(A)=(\mathrm{Ext}(A))^c=X$.

习题 1.3

1.3.1. 证明度量空间的子集的闭包为该子集的收敛点集.

1.3.2. 描述平凡和离散拓扑空间的所有子集的内部、外部和边界.

1.3.3. 证明拓扑空间的任何子集的边界集一定为闭集.

1.3.4. 证明任何开集的边界无处稠密.

1.3.5. 设 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,x>0\}$. 求 $\mathrm{Int}(A),\mathrm{Ext}(A),\mathrm{Bd}(A)$.

1.3.6. 设 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\{(e^{\arctan x}\cos x, e^{\arctan x}\sin x)\,|\,x>0\}$. 求 $\mathrm{Int}(A),\mathrm{Ext}(A),\mathrm{Bd}(A)$.

1.3.7. 设 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\{(x,y)\,|\,\frac{y}{x}$ 为有理数$\}$. 求 $\mathrm{Int}(A),\mathrm{Ext}(A),\mathrm{Bd}(A)$.

1.3.8. 记 $\mathbb{R}^2$ 的球形邻域 $B_1=B((0,0),1), B_2=B((1+\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}), B_3=B((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},0),\frac{1}{4}),\cdots, B_{n+1}=B((1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},0),\frac{1}{2^n})$. 设 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\cup_{n=1}^{\infty}B_n$. 求 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Ext}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$.

1.3.9. 构造 $\mathbb{R}$ 中测度任意小的稠密开集.

1.4 连续映射和同胚

回顾一下数学分析中连续函数的定义. 函数 $f(x)$ 在 x 点连续, 如果对任何的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得对任何的 $|x-y|<\delta$, 都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 换成球形邻域的语言: 函数 $f(x)$ 在 x 点连续, 如果对任何 $f(x)$ 的球形邻域 $B(f(x),\varepsilon)$, 都存在 x 的球形邻域 $B(x,\delta)$, 使得 $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$. 这个定义自然可以推广到度量空间之间的映射上. 而进一步把球形邻域推广到邻域, 就得到任何两个拓扑空间之间的映射在某点连续的定义. 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的对应, 称 f 在 x 点连续, 如果对任何 $f(x)$ 的邻域 O, 都存在 x 点的邻域 U 使得 $f(U)\subset O$, 即 x 为 $f^{-1}(O)$ 的内点.

与一元函数微积分不同的是, 拓扑学几乎从来不研究在某些点不连续的对应, 而总是研究点点连续的对应. 因此, 如果 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的点点连续的对应, 则对任何 Y 的开集 O, 如果 $x\in f^{-1}(O)$, 则 x 为 $f^{-1}(O)$ 的内点, 即 $f^{-1}(O)$ 为开集. 由此我们得到以下定义.

定义1.4.1 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的对应. f 称为(连续)映射, 如果对任何 Y 的开集 O, $f^{-1}(O)$ 为 X 的开集. 对偶地, 也是等价地, f 称为(连续)映射, 如果对任何 Y 的闭集 F, $f^{-1}(F)$ 为 X 的闭集.

注意, 在集合论中, 对应和映射其实是同一概念, 但是为了免去过多的连续字样, 并且拓扑学几乎从来不研究在某些点不连续的映射, 所以在拓扑学中总习惯把连续映射简称映射.

数学分析中一元函数的连续性有另外一种定义. 函数 $f(x)$ 连续, 当且仅当对任何定义域中的点 x 和收敛到 x 的数列 x_n, 都有 $f(x_n)$ 收敛到 $f(x)$. 等价地, 函数 $f(x)$ 连续, 当且仅当对任何定义域上的子集 A, 都有 $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$. 该性质可以推广到任何的拓扑空间, 成为连续性的另一种等价定义.

定理1.4.2 设 $f\colon X \to Y$ 为拓扑空间之间的对应. 则 f 为映射, 当且仅当对 X 的任何子集 A, 我们都有 $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$.

证 假设 f 为映射. 则对于任何子集 A, 由 $A \subset f^{-1}(f(A))$ 可知 $A \subset f^{-1}(\,\mathrm{Cl}(f(A))\,)$. 而由 $f^{-1}(\,\mathrm{Cl}(f(A))\,)$ 为闭集可知 $\mathrm{Cl}(A) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}(f(A))\,)$, 即 $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$.

假设对任意 X 的子集 A, 都有 $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$. 则对任何 Y 的闭集 F (不妨假设 $F \subset \mathrm{Cl}(f(X))$, 否则用 $F \cap \mathrm{Cl}((f(X))$ 代替 F), 我们有

$$f(\mathrm{Cl}(f^{-1}(F)) \subset \mathrm{Cl}(f(f^{-1}(F))) = \mathrm{Cl}(F) \cap f(X) = \mathrm{Cl}(F) = F.$$

由此推出 $\mathrm{Cl}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(F)$. 所以 $\mathrm{Cl}(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ 为 X 的闭集.

设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 为同一集合 X 上的两个不同的拓扑, 由定义易证恒等映射 $1_X\colon (X, \mathscr{T}_2) \to (X, \mathscr{T}_1)$ 连续, 当且仅当 $\mathscr{T}_2$ 比 $\mathscr{T}_1$ 细. 这说明在此情况下映射只能由细的拓扑向粗的拓扑映. 为了把这个结论推拓展到任意两个拓扑空间之间的对应, 我们有以下定义.

定义1.4.3 设 $f\colon X \to Y$ 为集合间的对应.

如果 $\mathscr{T}$ 为 X 的开拓扑, 易证 Y 的子集族 $f(\mathscr{T}) = \{O \,|\, f^{-1}(O) \in \mathscr{T}\}$ 为 Y 的开拓扑, 称为由 f 导出的 Y 的开拓扑. 对偶地, 如果 $\mathscr{F}$ 为 X 的闭拓扑, 则 Y 的子集族 $f(\mathscr{F}) = \{K \,|\, f^{-1}(K) \in \mathscr{F}\}$ 为 Y 的闭拓扑, 称为由 f 导出的 Y 的闭拓扑. 如果 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 为互对偶拓扑, 则 $f(\mathscr{T})$ 和 $f(\mathscr{F})$ 也互为对偶拓扑.

如果 $\mathscr{T}'$ 为 Y 的开拓扑, 易证 X 的子集族 $f^{-1}(\mathscr{T}') = \{f^{-1}(O) \,|\, O \in \mathscr{T}'\}$ 为 X 的开拓扑, 称为由 f 导出的 X 开拓扑. 对偶地, 如果 $\mathscr{F}'$ 为 Y 的闭拓扑, 则 X 的子集族 $f^{-1}(\mathscr{F}') = \{f^{-1}(K) \,|\, K \in \mathscr{F}'\}$ 为 X 的闭拓扑, 称为由 f 导出的 X 的闭拓扑. 如果 $\mathscr{T}'$ 和 $\mathscr{F}'$ 互为对偶拓扑, 则 $f^{-1}(\mathscr{T}')$ 和 $f^{-1}(\mathscr{F}')$ 也互为对偶拓扑.

定理1.4.4 拓扑空间之间的对应 $f\colon (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{T}')$ 为映射, 当且仅当拓扑 $\mathscr{T}$ 比拓扑 $f^{-1}(\mathscr{T}')$ 要细, 当且仅当拓扑 $\mathscr{T}'$ 比 $f(\mathscr{T})$ 要粗.

证 由定义1.4.1的直接推出.

定理1.4.5 易证以下定义的对应都为映射.

(1) (常值映射) $0_{y_0}\colon X \to Y$ 定义为 $0_{y_0}(x) = y_0$ 对任何 $x \in X$.

(2) (恒等映射) $1_X\colon X \to X$ 定义为 $1_X(x) = x$ 对任何 $x \in X$.

(3) (内射) 设 A 为 X 的子空间, 则内射 $i\colon A \to X$ 定义为 $i(a) = a$ 对任何 $a \in A$.

(4) (限制映射) 设 A 为 X 的子空间, $f\colon X \to Y$ 为映射. 则 f 在 A 上的限制映射 $f|_A\colon A \to Y$ 定义为 $f|_A(a) = f(a)$ 对任何 $a \in A$. f 也称为映射 $f|_A$ 的扩张映射.

(5) 设 $f\colon X \to Y$ 为映射, 则对任何 Y 的满足 $f(X) \subset Y'$ 的子空间 Y', f 看作 X 到 Y' 的对应仍为映射, 记作 $f\colon X \to Y'$.

(6) (复合映射) 如果 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ 为映射, 则复合映射 $gf\colon X \to Z$ 定义为 $(gf)(x) = g(f(x))$ 对任何 $x \in X$.

我们经常要用以下的定理来构造或者证明某个对应是映射.

定理1.4.6 (粘接定理) 设 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间 X 的一个开覆盖, 即每个 O_α 为开集并且 $X=\cup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$. 如果对每个 α, 都存在映射 $f_\alpha\colon O_\alpha\to Y$, 并且映射族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $f_\alpha|_{O_\alpha\cap O_\beta}=f_\beta|_{O_\alpha\cap O_\beta}$ 对所有的$\alpha,\beta\in\Lambda$, 则存在唯一映射 $f\colon X\to Y$ 满足 $f|_{O_\alpha}=f_\alpha$ 对所有 α.

设 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为拓扑空间 X 的一个有限闭覆盖, 即每个 F_i 为闭集并且 $X=\cup_{i=1}^n F_i$. 如果对每个 i 都存在映射 $f_i\colon F_i\to Y$ 并且映射族 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 满足 $f_i|_{F_i\cap F_i}=f_j|_{F_i\cap F_j}$ 对所有的$i,j=1,\cdots,n$, 则存在唯一映射 $f\colon X\to Y$ 满足 $f|_{F_i}=f_i$ 对所有 $i=1,\cdots,n$. 当 n 为无穷时, 如果 X 的拓扑由子集族 $\{F_i\}$决定, 则结论仍成立.

证 只证闭的情形, 开的情形完全类似. 由集合论可知对应 f 的存在性和唯一性.

由 $X=\cup_{i=1}^n F_i$ 可知, 对于 Y 的任何闭集 F, 我们有 $f^{-1}(F)=\cup_{i=1}^n(f^{-1}(F)\cap F_i)=\cup_{i=1}^n f_i^{-1}(F)$ 为闭集. 所以 f 为映射.

在集合论中, 有了集合间的对应后, 就有了势的概念来区分集合. 在代数学中, 有了各种代数对象 (比如群、环、域、模等) 之间的同态后, 就有了同构的概念来区分不同的代数对象. 在拓扑学中, 有了拓扑空间之间的映射后, 也同样有以下的同胚的概念来区分不同的拓扑空间. 所有的这些等势、同构、同胚等等概念不仅建立了这些数学对象 (集合、拓扑空间、代数对象)间的一个等价关系, 而且在表达形式上都一样.

定义1.4.7 如果拓扑空间 X 和 Y之间存在映射 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$, 满足 $gf=1_X$, $fg=1_Y$, 则称 X 和 Y同胚或者拓扑等价, 记为 $X\cong Y$, 称 f 为由 X 到 Y 的一个同胚(映射), g 为 f 的逆同胚(映射).

在以上定义中, 由 $gf=1_X$ 可知对应 f 是单的, 对应 g 是满的. 再由 $fg=1_Y$ 就可以得出 f 是1-1对应, g 是 f 的逆对应. 所以同胚映射总是个1-1对应. 在实际情况中, 往往很容易构造出一个连续的1-1对应, 但一定要注意, 这样的映射未必是同胚映射, 只有当其逆对应也为映射时才是同胚. 例如, 设 $\mathscr{T}_1$ 是比 $\mathscr{T}_2$ 要真细的 X 上的拓扑, 则恒等映射 1_X 为 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(X,\mathscr{T}_2)$ 的映射并且为1-1对应. 但显然其逆映射不连续. 所以两个拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X,\mathscr{T}_2)$ 也不同胚, 因为同胚的拓扑一定粗细相同. 再例如, 定义 $\phi\colon[0,1)\to S^1$ 为 $\phi(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$. ϕ 显然是连续的1-1对应. 但 ϕ^{-1} 不连续. 而代数对象, 例如群、环、域等等, 只要是1-1对应的同态就是同构. 这说明拓扑结构是比代数结构要复杂得多的数学对象.

定理1.4.8 同胚关系为等价关系.

证明 恒等映射 1_X 为 X 到自身的同胚映射. 如果 $f\colon X\to Y$ 为由 X 到 Y 的同胚映射, 则 $f^{-1}\colon Y\to X$ 为由 Y 到 X 的同胚映射. 如果 $f\colon X\to Y$ 为由 X 到 Y 的同胚映射, $g\colon Y\to Z$ 为由 Y 到 Z 的同胚映射, 则 $gf\colon X\to Z$ 为由 X 到 Z 的同胚映射. 所以同胚为等价关系.

如果 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的一个单的映射, 那么 X 是不是与 Y 的子空间 $f(X)$ 同胚呢? 答案不一定, 只是在某些特殊条件下这个结论才成立. 而对于群,环,域等代数对象来说, 只要是单的同态, 就一定有定义域和象集的同构. 这又说明拓扑结构是比代数结构要复杂得多的数学对象.

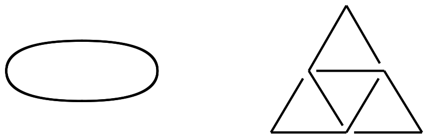
定义1.4.9 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的单映射. 如果 $X\cong f(X)$, 其中 $f(X)$ 取子空间拓扑, 则称 f 为嵌入.

设 $f,g\colon X\to Y$ 为两个嵌入. 称 f 等价于 g, 如果存在 Y 的自同胚映射 $h\colon Y\to Y$ 使得 $f=hg$. 在这种

情况下, 显然有 $f(X)\cong g(X)$ 和 $f(X)^c\cong g(X)^c$. 称 f 同痕于g, 如果存在映射 $H\colon I\times Y\to Y$ (乘积空间的拓扑见后面的1.8节), 满足对于每个 $t\in[0,1]$, $h_t(-)=H(t,-)$ 都为Y 的自同胚映射, h_0 为恒等映射, $f=h_1g$. 在这种情况下, 显然还有 $f(X)\cong g(X)$ 和 $f(X)^c\cong g(X)^c$.

嵌入的等价和同痕都为等价关系, 所有从X 到Y 的嵌入集合按照等价(同痕)关系得到的等价类集合就称为 X在Y中的纽结(同痕)类集合. S^1 在 $\mathbb{R}^3$ 中的每一个(光滑)纽结类就称为一个纽结.

从字面上看, 同痕的概念似乎不太好理解, 因为乘积空间 $I\times X$ 的拓扑还没介绍, 但其实同痕的概念非常直观, 比以后要介绍的同伦的概念要更早就进入了数学的研究范围. 早期的拓扑学有一个俗称橡皮泥几何学, 因为那时的拓扑学就是几何学, 其主要的问题之一就是现实的视觉空间 $\mathbb{R}^3$ 中同胚于标准空间 X (比如 S^1 和 S^2) 的子空间的同痕类. 这里的同痕是从以下直观的角度理解的. $\mathbb{R}^3$ 的子空间可以看成空间的一个橡皮泥做成的物体, 形象地称为橡皮体. 橡皮泥的特点就是有无限的弹性, 可以任意的变形. 如果一个橡皮体 A 随时间连续在 $\mathbb{R}^3$ 中变形, 变形过程中不允许撕裂, 也不允许粘合不同的点, 经过这样一个形变变成另外一个橡皮体 B, 则称两个橡皮体 A 和 B 同痕. 那么 $\mathbb{R}^3$ 的同胚于标准空间 X 的橡皮体按照同痕关系生成的等价类有多少种呢? 这个问题在没有严格的拓扑空间的概念的时候就已经被人研究过, 而这个直观的问题的严格数学定义就是如定义1.4.9所定义的 X 在 $\mathbb{R}^3$ 中的同痕等价类集合的确定. 比如, S^1 在 $\mathbb{R}^3$ 中的同痕类和纽结都有无穷多种. 下图展示了两个不同的同痕等价类, 当然也是不同的纽结.

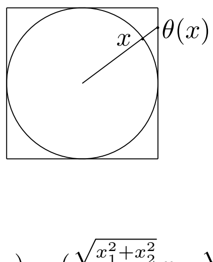
平凡结  三叶结

同痕等价类的问题虽然直观, 但没解决的问题却非常难, 至今都没有特别有效的方法. 比如, 当 $n\leqslant m$ 时, S^m 在 $\mathbb{R}^{m+n+1}$ 中的光滑同痕类问题还没有任何整体性结果. 而当 $n>m$ 时, S^m 在 $\mathbb{R}^{m+n+1}$ 中的光滑同痕类就只有一种.

例1.4.10 我们详细证明 $D^n\cong I^n$ 和 $S^{n-1}\cong\partial(I^n)$, 这里 ∂ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的子集的边点集. 令

$$J^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,-1\leqslant\|x_i\|\leqslant 1\}.$$

显然 $\psi(x_1,\cdots,x_n)=(2x_1,\cdots,2x_n)-(1,\cdots,1)$ 为由 I^n 到 J^n 的同胚映射. 所以只需证明 $D^n\cong J^n$. 首先考虑 $n=2$ 的情形. 从视觉形象上看, 两个 $\mathbb{R}^2$ 的子空间是同痕的. 具体地, 令 θ 为由 D^2 到 J^2 的膨胀, 将 D^2 中过原点的射线1-1映到 J^2 中同方向的射线, 如下图所示,

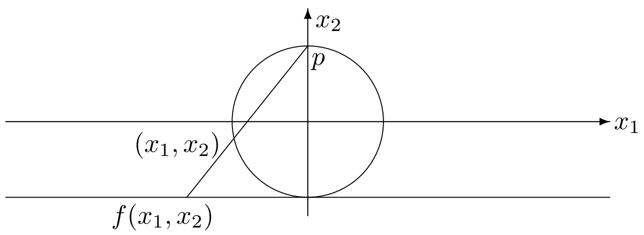


即 $\theta(x_1,x_2)=(\frac{e(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}x_1,\frac{e(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}x_2)$, $\theta^{-1}(x_1,x_2)=(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{e(x_1,x_2)}x_1,\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{e(x_1,x_2)}x_2)$, 其中 $e(x_1,x_2)=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$. 不难看出 θ 和 θ^{-1} 都连续. 所以 θ 为同胚映射. 由 $n=2$ 的情形不难推出一般情形. 即对应

$$\theta(x_1,\cdots,x_n)=(\frac{e(x_1,\cdots,x_n)}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\,x_1,\cdots,\frac{e(x_1,\cdots,x_n)}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\,x_n)$$

为由 D^n 到 J^n 的同胚映射. 将 θ 限制在 $S^{n-1}=\partial D^n$ 上就得到由 S^{n-1} 到 $\partial J^n\cong\partial I^n$ 的同胚映射.

例1.4.11 我们详细证明 $\mathbb{R}^n\cong S^n\backslash p$, 其中 p 为 S^n 上的任意点. 首先考虑$n=1$的情形. 同上例一样, 从视觉上看 $\mathbb{R}$ 和 S^1 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间是同痕的, 因而同胚. 具体同胚映射构造如下. 不妨假设 p 为 S^1 的北极点 $(0,1)$, 将 $\mathbb{R}$ 看成 $\mathbb{R}^2$ 平面上的直线 $x_2=-1$. 则从 p 点出发的射线将 $S^1\backslash p$ 的点1-1对应到 $x_2=-1$ 上的点. 如下图所示.

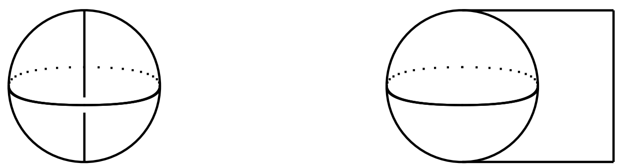


即 $f(x_1,x_2)=\frac{2x_1}{1-x_2}$ 对任何 $(x_1,x_2)\in S^1\backslash p$. 反解得 $f^{-1}(x)=(\frac{4x}{x^2+4},\frac{x^2-4}{x^2+4})$. 显然, f 和 f^{-1} 都连续, 所以 f 为同胚映射. 将 x_1 替换为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 就可以得到一下对应

$$f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=(\frac{2x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{2x_n}{1-x_{n+1}})$$

为由 $S^n\backslash p$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的同胚映射, 其中 p 为北极点 $(0,\cdots,0,1)$.

以后, 如果 $\mathbb{R}^3$ 的两个子空间从视觉上明显可以看出是同胚的, 即为等价或者同痕映射的象子空间, 我们就不具体构造同胚映射了. 比如, 闭三角形和闭圆盘是同胚的, 茶杯的表面和轮胎的表面同胚, 一个子空间和它的镜像子空间同胚, 等等. 但并不是所有 $\mathbb{R}^3$中的同胚子空间都可以由等价或者同痕映射的象空间得到的. 比如下图所示的两个$\mathbb{R}^3$ 的子空间,



从球面内部连一根线, 和从球面外部连一根折线, 这两个嵌入空间显然是同胚的, 但两个嵌入不同痕.

有了同胚的定义, 我们就有拓扑不变性的概念. 一种性质如果满足所有同胚的拓扑空间同时具有, 就称作*拓扑不变性*. 拓扑不变性并不是很容易找出的. 比如, S^n 是光滑的 (就从直观的视觉角度理解), 但 $\mathrm{Bd}(I^n)$ (作为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间) 不光滑. 例1.4.10说明光滑性就不是拓扑不变量. 一个度量空间 (X,ρ) 是有界的, 如果存在正常数 D 使得任何两点的距离都不超过 D. 而例1.4.11说明度量空间的有界性也不是拓扑不变量, 因为 $\mathbb{R}^n$ 按照标准的度量函数是无界的, 但与之同胚的 $S^n\backslash p$ 却有界. 点集拓扑学的中心内容之一就是要找出尽量多的拓扑不变性, 这样就可以证明两个具有不同拓扑不变性的拓扑空间是不同胚的. 以下几节的内容就要介绍几种最常见, 也是最普遍的拓扑不变性, 即连通性, 道路连通性, 紧致性, 分离性(又称Hausdorff性).

一个有趣的现象是, 虽然拓扑是拓扑空间的本质, 但是用拓扑的粗细来区分拓扑空间却意义不大. 具体地, 如果 $f\colon X\to Y$ 为满映射, 则由定理1.4.4, f 导出的 X 上的拓扑就比 X 自身的拓扑要粗, 而导出的拓扑的开集的个数显然与 Y 的拓扑的开集个数一样, 所以从这个意义上来说, X 的拓扑要比 Y 的拓扑要

细. 因此我们就可以得到一个按照拓扑的粗细来衡量的新的等价关系. 两个拓扑空间是等价的, 如果存在两个满映射 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$. 这的确是个等价关系, 但是在这种等价关系下, I 和 I^2 就等价了, 因为从 I^2 到 I 的满映射很容易得到, 比如投射 $p_1(x,y)=x$, 而Peano曲线将 I 满射到 I^2 上. 类似地, I^m 与任何 $I^n\ (n\neq m)$ 都等价了. 所以这个等价关系意义不大.

习题 1.4

1.4.1. 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间的对应, $\mathscr{B}$ 为 Y 的子基. 证明 f 为映射, 当且仅当对任何 $B\in\mathscr{B}$, $f^{-1}(B)$ 为 X 的开集.

1.4.2. 设映射 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=x$, 当 $x\leqslant 1$ 时; $f(x)=2-x$, 当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时; $f(x)=x-4$, 当 $x\geqslant 3$ 时. 找出 $\mathbb{R}$ 的一个子集 A, 使得 $\mathrm{Int}(f(A))$ 真包含于 $f(\mathrm{Int}(A))$. 设映射 $g\colon I^2\to I^2$ 为 $g(s,t)=\phi(t)$, 对所有 $(s,t)\in I^2$, 其中 $\phi\colon I\to I^2$ 为Peano曲线. 找出 I^2 的一个子集 B, 使得 $\mathrm{Int}(g(B))$ 真包含 $g(\mathrm{Int}(B))$. 由上两例说明以下定理1.4.2的对偶命题不成立. 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间之间的对应. 则 f 为映射, 当且仅当对任何 X 的任何子集 A, 都有 $\mathrm{Int}(f(A))\subset f(\mathrm{Int}(A))$.

1.4.3. 验证定义1.4.3中的结论.

1.4.4. 证明定理1.4.5.

1.4.5. 设 $f\colon X\to Y$ 为集合间的对应. 证明如果 X 为拓扑空间, 则 f 导出的 Y 上的拓扑为 Y 上的使 f 连续的最细拓扑; 如果 Y 为拓扑空间, 则 f 导出的 X 的拓扑为 X 上的使 f 连续的最粗拓扑.

1.4.6. 设 $f\colon X\to Y$ 为同胚. 证明 X 的拓扑与 f 导出的 X 上的拓扑相同, Y 的拓扑与 f 导出的 Y 上的拓扑相同.

1.4.7. 设 $i\colon A\to X$ 为映射. 证明 i 为嵌入, 如果存在映射 $r\colon X\to A$ 使得 $ri=1_A$.

1.4.8. 证明有理数集合上的任何拓扑空间与实数集合上的任何空间不同胚.

1.4.9. 设 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$ 为嵌入, 证明存在集合的分解 $X=X_1\cup X_2$, $X_1\cap X_2=\emptyset$, $Y=Y_1\cup Y_2$, $Y_1\cap Y_2=\emptyset$, 使得 $f|_{X_1}\colon X_1\to Y_1$ 和 $g|_{Y_2}\colon Y_2\to X_2$ 都为同胚.

1.5 连通性

定义1.5.1 拓扑空间 X 的子集 A 称为孤立分支, 如果 A 为 X 的非空真子集并且既是开集又是闭集.

定理1.5.2 设 A 为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的非空真子集. 则以下结论等价.

(1) A 为 X 的孤立分支.

(2) A^c 为 X 的孤立分支.

(3) 存在 X 到两点离散空间 $\{0,1\}$ 的满映射 f 使得 $A=f^{-1}(0)$, $A^c=f^{-1}(1)$.

证 (1)$\Longleftrightarrow$(2). 由定义.

(1)$\Longleftrightarrow$(3). 如果 A 为孤立分支, 则定义对应 $f\colon X\to\{0,1\}$ 为 $f(a)=0$ 对 $a\in A$, $f(b)=1$ 对 $b\notin A$. 由定义可验证 f 连续. 反之, 如果存在满映射 $f\colon X\to\{0,1\}$ 满足 $A=f^{-1}(0)$, 则 0 既为两点离散空间的开集又为闭集, 所以 $A=f^{-1}(0)$ 既为 X 的开集也为闭集. 因此 A 为孤立分支.

定义1.5.3 拓扑空间称为连通空间如果它不存在孤立分支.

定理1.5.4 设 X 为拓扑空间, 则 X 为连通空间与以下结论等价.
(1) X 不可表为两个非空不相交的开集的并.
(2) X 不可表为两个非空不相交的闭集的并.
(3) 不存在 X 到两点离散空间的满射.

证 定理1.5.2的否命题.

例1.5.5 实数空间 $\mathbb{R}$ 为连通空间. 假如不连通, 则 $\mathbb{R}=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$, 其中 A,B 为开集. 任取 $a\in A$ 和 $b\in B$, 不妨设 $a<b$. 则存在 ε_i 使得 $(a-\varepsilon_1,a+\varepsilon_1)\in A$, $(b-\varepsilon_2,b+\varepsilon_2)\in B$. 令 $C=(a-\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)\cap A$, $D=(a-\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)\cap B$. 则 C 有上确界 s, 且显然 $a+\varepsilon_1<s<b-\varepsilon_2$. 由于 C 为开集, 所以 $s\notin C$, 否则存在 ε 使 $(s-\varepsilon,s+\varepsilon)\in C$ 与 s 的上确界性矛盾. 同样, 由于 D 也为开集, 所以 $s\notin D$, 否则存在 ε' 使 $(s-\varepsilon',s+\varepsilon')\in D$ 也与 s 的上确界性矛盾. 因此, $s\notin C\cup D=(a-\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)$, 但这与 $a+\varepsilon_1<s<b-\varepsilon_2$ 矛盾! 所以实数集连通.

定义1.5.6 拓扑空间 X 的子集 A 称为 X 的连通子集, 如果子空间 A 是连通的. 规定空集不是连通集子.

定理1.5.7 设 A 为 X 的子空间. 如果存在 X 的一对非空不相交的开集, 或者一对非空不相交的闭集, 或者一对非空的分离子集 U 和 V (分离子集是指 $\overline{U}\cap V=\emptyset$, $U\cap\overline{V}=\emptyset$), 使得 $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$, 并且 $A\cap U$ 和 $A\cap V$ 都非空, 则 A 不连通. 在此情况下称 A 被 X 的子集 U 和 V 分离.

证 U 和 V 都为开(闭)集时, 则 A 表示成为两个非空开(闭)集 $A\cap U$ 和 $A\cap V$ 的不交并, 所以定理成立. 假设 U 和 V 分离. 则 $A\cap\overline{U}=A\cap U$, 这说明 $A\cap U$ 为 A 的闭集. 同样, $A\cap V$ 也为 A 的闭集. A 可表为两个非空的闭子集 $A\cap\overline{U}$ 和 $A\cap\overline{V}$ 的不交并. 所以, 定理成立.

是不是任何拓扑空间 X 的任何一个不连通子集都可以由以上定理中的一对 U 和 V 分离呢? 以下例子给出了反例.

例1.5.8 令有限集 $X=\{1,2,3\}$ 上的开拓扑为 $\mathscr{T}=\{\emptyset,\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, 则子集 $\{1,3\}$ 不连通, 但找不到 X 中的满足定理条件的集合分离该子集.

定理1.5.9 任何映射将定义域空间的连通子集映为值域空间的连通子集. 所以连通性为拓扑不变性, 即同胚的空间具有相同的连通性.

证 先证一个特殊情况, 即设 $f\colon X\to Y$ 为满映射, X 为连通空间, 则 Y 也为连通空间. 假设 Y 不连通,

则存在满映射 $g\colon Y\to\{0,1\}$. 于是 $gf\colon X\to\{0,1\}$ 也为满映射. 这与 X 连通矛盾!

设 $f\colon X\to Y$ 为映射, A 为 X 的连通子集. 则把限制映射 $f|_A$ 看成由 A 到 Y 的子空间 $f(A)$ 的对应仍连续, 由上结论 $f(A)$ 为连通空间.

由上结论, 如果 $f\colon X\to Y$ 为同胚映射, 自然是满映射, 则 X 连通能推出 Y 连通. 反之亦然. 所以连通性为拓扑不变量.

定理1.5.10 设 A 为拓扑空间 X 的连通子集, 则子集 B 如果满足 $A\subset B\subset \mathrm{Cl}(A)$, 就是连通的. 特别地, $\mathrm{Cl}(A)$ 是连通的.

证 假设 B 不连通, 则存在 X 的非空不交开集 U 和 V, 满足 $B=(B\cap U)\cup(B\cap V)$ 并且 $B\cap U$ 和 $B\cap V$ 都非空. 则 A 一定包含于 $B\cap U$ 和 $B\cap V$ 两者之一, 否则两个集合分离 A, 与 A 连通矛盾. 假设 $A\subset B\cap U$. 则对于任何一点 $x\in B\cap V$, 由 $B\subset \mathrm{Cl}(A)$ 可知 x 为 A 的闭包点. 但 x 的邻域 V 与 A 不交. 这与 x 为 A 的闭包点矛盾!

例1.5.11 令 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,x\in(0,1]\}$. 则 A 为由区间 $(0,1]$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 $f(x)=(x,\sin\frac{1}{x})$ 的象集. 由定理1.5.19, 子空间 $A=f((0,1])$ 连通. 所以子空间 $\overline{A}=A\cup(0\times[-1,1])$ 也连通.

定理1.5.12 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间 X 的一族连通子集, 且对任何 $\alpha,\beta\in\Lambda$, 我们有 $X_\alpha\cap X_\beta\neq\emptyset$. 则并集 $\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也是连通子集.

证 不妨假设 $X=\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 否则用子空间 $\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 代替 X. 假设 X 不连通, 则存在 X 的非空不交开集 U 和 V, 使得 $X=U\cup V$. 对于任一 α, $U\cap X_\alpha$ 和 $V\cap X_\alpha$ 两者必有一为空集, 否则 X_α 就被 U,V 分离了. 于是下标集有分解 $\Lambda=\Omega\cup\Sigma$, $\Omega\cap\Sigma$, 满足对任何 $\alpha\in\Omega$, $X_\alpha\subset U$ 以及对任何 $\beta\in\Sigma$, $X_\beta\subset V$. 假如 $\Omega=\emptyset$, 则 $U=\emptyset$. 矛盾! 所以 $\Omega\neq\emptyset$. 同理可知 $\Sigma\neq\emptyset$. 于是存在 $\alpha\in\Omega$ 和 $\beta\in\Sigma$ 满足 $X_\alpha\subset U$, $X_\beta\subset V$. 所以 $X_\alpha\cap X_\beta=\emptyset$. 与定理条件矛盾! 所以 X 连通.

例1.5.13 记 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A(x,y)=(x\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times y)$. 由于 $x\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times y$ 都连通 (因为与 $\mathbb{R}$ 同胚) 且两者的交非空, 所以由定理1.5.12(下标集只有两个元素), 我们有 $A(x,y)$ 连通. 显然任何 $A(x,y)\cap A(x',y')$ 非空, 所以还是由定理1.5.12(下标集无穷), 我们有 $\mathbb{R}^2=\cup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}A(x,y)$ 连通.

类似可以归纳证明对任何正整数 n, $\mathbb{R}^n$ 连通.

定义1.5.14 拓扑空间 X 的子集 A 称为 X 的极大连通子集, 或者连通分支, 如果 A 是连通的并且不存在 X 的真包含 A 的连通子集.

拓扑空间 X 中的点的连通关系 $\sim$ 定义如下. $x\sim y$, 如果存在 X 的连通子集 A 使得 $x,y\in A$.

定理1.5.15 拓扑空间的连通关系为等价关系, 拓扑空间关于连通关系的每一个等价类都是一个连通分支. 反之, 设 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 的所有连通分支集族, 则 X 关于连通关系的等价类族也是 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

证 独点子集 x 显然连通且包含点 x, 所以 $x\sim x$. 如果 $x\sim y$, 则显然 $y\sim x$. 假设 $x\sim y$, $y\sim z$, 而 A,B 为连通子集使得 $x,y\in A$, $y,z\in B$. 由于 $A\cap B$ 含点 y, 所以 $A\cap B\neq\emptyset$. 由定理1.5.12, $A\cup B$ 连通. 所以 $x\sim z$. 因此连通关系为等价关系.

对任何 $x\in X$, 令集族 $\mathscr{C}_x$ 为所有包含 x 的连通集构成的集族, 定义集合 $C_x=\cup_{C\in\mathscr{C}_x}C$. 由于独点

集 $x \in \mathscr{C}_x$, 所以$\mathscr{C}_x$ 和 C_x 都非空. 由定理1.5.12 (取 $\Lambda = \mathscr{C}_x$), C_x 连通. 由于 C_x 为包含 x 的最大连通子集, 因而为连通分支. 记 $[x]$ 为 x 所在的连通等价类. 下面证明 $[x] = C_x$. 对任何 $y \in C_x$, 显然 C_x 连通并且 $x, y \in C_x$. 所以 $x \sim y$. 因而 $C_x \subset [x]$. 反之, 假设 $x \sim y$, 而 A 连通且 $x, y \in A$. 则 $A \subset C_x \cap C_y$. 由定理1.5.12可知 $C_x \cup C_y$ 连通. 由 C_x 和 C_y 的最大性可知 $C_x = C_y = C_x \cup C_y$, 即 $y \in C_x$. 所以 $[x] \subset C_x$. 因此等价类就是连通分支.

由以上定理中的连通分支集族 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 显然满足 $X = \cup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$, $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$ 对任何 $\alpha \neq \beta$. 那么每一个连通分支 C_α 是否为孤立分支呢? 不一定. 我们首先要确定如果每一个连通分支都是孤立分支的话, 空间 X 有什么特殊的性质.

定义1.5.16 设 X 的子集族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足$X = \cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ 对任何 $\alpha \neq \beta$. 如果每个 X_α都是X 的孤立分支, 则称 X 为子空间族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的不交并空间, 记为 $X = \amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 设 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{F}$ 为 X 的开和闭拓扑, 则记 $(X, \mathscr{T}) = \amalg_{\alpha\in\Lambda} (X_\alpha, \mathscr{T}|_{X_\alpha})$, $(X, \mathscr{F}) = \amalg_{\alpha\in\Lambda} (X_\alpha, \mathscr{F}|_{X_\alpha})$.

定理1.5.17 设拓扑空间 X 的子集族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $X = \cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ 对任何 $\alpha \neq \beta$. 则以下命题等价.

(1) $X = \amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

(2) 每个 X_α 都是 X 的开集.

(3) X 的开拓扑 $\mathscr{T}$ 由子空间开拓扑族 $\{\mathscr{T}|_{X_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的并族 $\cup_{\alpha\in\Lambda}(\mathscr{T}|_{X_\alpha})$ 生成.

(4) O 为 X 的开集, 当且仅当对每个 $\alpha \in \Lambda$, $O \cap X_\alpha$ 都为 X 的开集.

(5) 任意个 X_α 的并 $\cup_{\beta\in\Gamma} X_\beta$, $\Gamma \subset \Lambda$, 都是 X 的闭集.

(6) X 的闭拓扑 $\mathscr{F}$ 由子空间闭拓扑族 $\{\mathscr{F}|_{X_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的任意并族 $\{\cup_{\beta\in\Gamma} F_\beta \mid \Gamma \subset \Lambda,\ F_\beta \in \mathscr{F}|_{X_\alpha}\}$ 生成.

(7) F 为 X 的闭集, 当且仅当对每个 $\alpha \in \Lambda$, $F \cap X_\alpha$ 都为 X 的闭集.

证 (1)⇒(2) 由定义. (2)⇒(1) $X_\alpha = (\cup_{\beta\in\Lambda,\beta\neq\alpha} X_\beta)^c$也为闭集.

(2)⇒(3) 记 $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}|_{X_\alpha}$. 由每个 X_α都为 X 的开集可知$\mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}$. 所以 $\mathscr{T}$ 比集族$\cup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha$生成的拓扑要细. 反之, 对于任何 $O \in \mathscr{T}$, $O \cap X_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$, 因而$O = \cup_{\alpha\in\Lambda} (O \cap X_\alpha)$属于集族$\cup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha$生成的拓扑. 所以集族$\cup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{T}_\alpha$生成的拓扑比$\mathscr{T}$要细. (3)⇒(2) 显然.

(2)⇒(4) 如果 O 为开集, 则对每个 α, $O \cap X_\alpha$都为开集. 反之, 如果对每个 α, $O \cap X_\alpha$都为开集, 则我们有 $O = \cup_{\alpha\in\Lambda}(O \cap X_\alpha)$也为开集. (4)⇒(2) X 为开集, 所以对每个 α, $X_\alpha = X \cap X_\alpha$ 为开集.

对偶地可知(1)⇔(5)⇔(6)⇔(7).

定理1.5.18 拓扑空间的每一连通分支都是闭集. 当连通分支个数有限时, 拓扑空间与它的所有连通分支子空间的不交并空间相同.

证 由定理1.5.10可知任何连通分支 C 的闭包 $\mathrm{Cl}(C)$ 也连通, 由 C 的最大性 $\mathrm{Cl}(C) = C$. 所以每个连通分支都为闭集.

如果连通分支有限, 则每个连通分支的余集为其余有限个连同分支并集, 所以还为闭集. 所以每一个连通分支也为开集. 由定理1.5.17, 全空间的拓扑与连通分支的不交并空间的拓扑一样.

例1.5.19 取有理数集 $\mathbb{Q}$ 的拓扑为实数空间 $\mathbb{R}$ 的子空间. 对于任何 $r \in \mathbb{Q}$, 独点集 r 为 $\mathbb{Q}$ 的连通子空间. 假如 $\mathbb{Q}$ 的子集 U 真包含 r, 不妨设 $q \in U$, $q \neq r$. 不妨设 $q < p < r$ 且 p 为无理数. 则 U 被 $\mathbb{R}$ 的子

集 $(-\infty, p)$ 和 $(p, +\infty)$ 分离. 这说明每个独点集都为 $\mathbb{Q}$ 的连通分支, 但不为 $\mathbb{Q}$ 的开集, 所以 $\mathbb{Q}$ 不是连通分支子空间的不交并空间.

习题 1.5

1.5.1. 证明 $\mathbb{R}$ 的任何连通子集 A 一定满足介值性, 即如果 $a, b \in A$, $a < b$, 则对任何 $a < c < b$, $c \in A$. 所以, $\mathbb{R}$ 的连通子集一定为区间, 包括开, 闭, 半开半闭区间和无穷区间.

1.5.2. 证明连通空间上连续实函数满足介值定理, 即象集为区间.

1.5.3. 给出 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ 的连通分支分解.

1.5.4. 利用连通性证明 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ 不同胚.

1.5.5. 已知 A 和 B 都是开(闭)集, 并且 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 都是连通子集. 证明 A 和 B 都是连通子集.

1.5.6. 设 X 为连通空间, x 为空间中的闭点, 即独点集 x 为 X 的闭集. 如果 $X \setminus x$ 不连通且连通分支有限, 证明 $X \setminus x$ 的每一个连通分支 U 都满足 $U \cup x$ 是 X 的连通子集.

1.5.7. 证明 D^n 和 S^n $(n > 0)$ 为连通空间.

1.6 道路连通性

连通性的定义有一个局限性, 那就是不直观, 连 $\mathbb{R}^n$ 这样简单的空间的连通性的证明都很麻烦. 而比它强一些的道路连通性则很直观, 在许多情况下一眼就可以看出来.

定义1.6.1 设 X 为拓扑空间, X 上的一条道路定义为一个从单位区间 I 到 X 的映射 ω. 称 $\omega(0)$ 为道路的起点, $\omega(1)$ 为道路的终点, ω 也称为连接起点和终点(由起点到终点)的道路. 如果道路 ω 和 π 满足 $\omega(1) = \pi(0)$, 则以下定义的道路

$$(\omega * \pi)(t) = \begin{cases} \omega(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \pi(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

称为 ω 和 π 的连接道路(由闭粘接定理它为映射).

拓扑空间 X 称为道路连通的如果 X 上的任何两点都存在连接它们的道路. X 的子集 A 称为道路连通的, 如果子空间 A 是道路连通的. 规定空集不是道路连通子集.

例1.6.2 实拓扑空间 $\mathbb{R}^n$ 由于是线性空间, 所以是道路连通空间, 因为空间中的任何两点都有直线连接. 用映射表示就是对任何 $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\omega(t) = (1-t)a + tb$ 为由 a 到 b 的线性道路. 同样, 任何 $\mathbb{R}^n$ 的凸集(即满足若 $a, b \in \Omega$, 则 $(1-t)a + tb \in \Omega$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 的集合 Ω) 也是道路连通的.

定理1.6.3 任何映射将定义域空间的道路连通子集映为值域空间的道路连通子集. 所以, 道路连通性为拓扑不变量.

证 设 $f\colon X\to Y$ 为映射, A 为 X 的道路连通子集. 则对任何 $x,y\in A$, 存在 A 上连接 x 和 y 的道路 ω. 于是 $f\omega$ 为 $f(A)$ 上连接 $f(x)$ 和 $f(y)$ 的道路. 所以 $f(A)$ 道路连通.

定理1.6.4 道路连通空间一定是连通空间. 反之不成立.

证 假设 X 为不连通空间, 于是存在满映射 $f\colon X\to\{0,1\}$. 则对于 $x\in f^{-1}(0)$ 和 $y\in f^{-1}(1)$, 不存在 X 上连接 x 和 y 的道路, 因为如果存在这样的道路 ω, 则 $f\omega\colon I\to\{0,1\}$ 为满映射. 而 I 是连通的. 矛盾! 所以 X 不是道路连通空间.

例1.6.5 令 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $A=\{(x,\sin x)\,|\,x\in(0,1]\}$ 如例1.5.13. 子空间 $\overline{A}$连通, 但不是道路连通的, 因为不存在 $\overline{A}$ 中连接 $(0,0)$ 和 $(1,\sin 1)$ 的道路. 假如存在连接 $(0,0)$ 到 $(1,\sin 1)$ 的道路 ω. 则存在 t_1 使得 $\omega(t_1)=(\frac{2}{\pi},1)$, 否则连通集 $\omega(I)$ 就被 $(-\infty,\frac{2}{\pi})\times\mathbb{R}$ 和 $(\frac{2}{\pi},+\infty)\times\mathbb{R}$分离, 矛盾了. 同理, 存在 $t_2\in(0,t_1)$ 使得 $\omega(t_2)=(\frac{1}{\pi+\frac{\pi}{2}},-1)$, 否则连通集 $\omega([0,t_1])$ 被 $(-\infty,\frac{1}{\pi+\frac{\pi}{2}})\times\mathbb{R}$ 和 $(\frac{1}{\pi+\frac{\pi}{2}},+\infty)\times\mathbb{R}$分离, 矛盾了. 如此下去就得到单减的数列 t_n, 满足 $\omega(t_n)=(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}},(-1)^n)$. 由单减性, $t=\lim_{n\to\infty}t_n$ 存在. 但 $\lim_{n\to\infty}\omega(t_{2n})=(0,1)$, $\lim_{n\to\infty}\omega(t_{2n+1})=(0,-1)$. 与 ω 的连续性矛盾! 所以 $\overline{A}$ 不道路连通.

定理1.6.6 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间 X 的一族道路连通子集, 满足对任何 $\alpha,\beta\in\Lambda$ 都有 $X_\alpha\cap X_\beta\neq\emptyset$. 则并集 $\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也是道路连通子集.

证 对任何 $x,y\in\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, 如果 x 和 y 同属于某一个 X_α, 则由 X_α 的道路连通性, 存在连接 x 和 y 的道路. 假设 $x\in X_\alpha$, $y\in X_\beta$, 并且 $\alpha\neq\beta$. 任取 $z\in X_\alpha\cap X_\beta$, 则存在 X_α 中由 x 到 z 的道路 ω 和 X_β 中由 z 到 y 的道路 π. 于是连接道路 $\omega*\pi$ 为由 x 到 y 的道路. 所以 $\cup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 道路连通.

例1.6.7 令 $\mathbb{R}^2$ 的子集为 $A=(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times 0)$, $A(x,y)=(x\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times y)$ 如例1.5.15. 由于 $x\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times y$ 都道路连通且两者的交非空, 所以由以上定理 $A(x,y)$ 道路连通. 显然任何 $A(x,0)\cap A(x',0)\neq\emptyset$, 所以还是由以上定理, $A=\cup_{x\in\mathbb{Q}}A(x,0)$ 道路连通. 由图形也可以直接构造连接任两点的道路.

定义1.6.8 拓扑空间 X 的子集 A 称为 X 的极大道路连通子集, 或者道路连通分支, 如果 A 是道路连通的, 并且不存在 X 的真包含 A 的道路连通子集.

拓扑空间 X 中点的道路连通关系$\sim$定义如下. $x\sim y$ 如果存在连接 x 和 y 的道路.

定理1.6.9拓扑空间的道路连通关系为等价关系, 关于道路连通关系的每一个等价类都是一个道路连通分支, 反之亦然.

证 常值道路 $0_x(t)=x$ 对所有 $t\in I$ 为连接 x 到自身的道路. 所以 $x\sim x$. 如果 ω 为连接 x 到 y 的道路, 则 ω^{-1} 为连接 y 到 x 的道路, 其中 $\omega^{-1}(t)=\omega(1-t)$ 对所有 $t\in I$. 所以如果 $x\sim y$, 则 $y\sim x$. 如果 ω 为连接 x 到 y 的道路, τ 为连接 y 到 z 的道路, 则 $\omega*\tau$ 为连接 x 到 z 的道路. 所以如果 $x\sim y$, $y\sim z$, 则 $x\sim z$. 因此道路连通关系为等价关系.

将定理1.5.15的相关证明中的所有“连通”字样替换为“道路连通”就得到本定理的后面结论的证明.

定义1.6.10 拓扑空间 X 称为局部(道路)连通的, 如果对于其上任何一点 x 的任何一个邻域 O, 都存在一个 x 的(道路)连通的邻域 U, 使得 $U\subset O$.

局部性和整体性是不同的概念, 因而互不包含. 设 X, Y 为局部(道路)连通的空间, 则不交并空间 $X \amalg Y$ 仍然是局部(道路)连通的, 但不是(道路)连通的. 反之, (道路)连通空间却未必局部(道路)连通.

例1.6.11 令 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 $A = (\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times 0)$ 如例1.6.7. A 为(道路)连通空间. A 却不是局部(道路)连通空间. 因为对于点 $(1,1)\in A$, 该点半径小于 1 的球形邻域的任何开子集都不(道路)连通.

定理1.6.12 拓扑空间为局部(道路)连通的充要条件是它的任何一个开子集(作为独立的拓扑空间)的(道路)每个连通分支都仍是 X 的开子集. 特别地, 局部(道路)连通空间的每一个(道路)连通分支都是开子集. 所以, 局部(道路)连通的拓扑空间与其(道路)连通分支子空间族的不交并空间一样.

证 假设 X 为局部(道路)连通的拓扑空间, O 为开集, $\{O_\alpha\}$ 为其(道路)连通分支. 则对任何 $x\in O_\alpha$ 以及 x 的邻域 U, 存在 x 的(道路)连通邻域 V, 满足 $V\subset U$. 由于 O_α 为含 x 点的所有(道路)连通子集的并集, 所以 $V\subset O_\alpha$. 这说明 x 为 O_α 的内点, 因而 O_α 为开集.

假设 X 的任何开集的(道路)连通分支都是开集. 对任何 x 和 x 的任何邻域 U, 令 O 为 x 所在的 U 的(道路)连通分支, 则 $O\subset U$, 且 O (道路)连通. 所以, X 局部(道路)连通.

定理1.6.13 局部道路连通空间的道路连通分支与连通分支一致.

例1.6.14 $\mathbb{R}^n$ 显然为道路连通空间, 因而也是连通空间. 由于所有球形邻域为凸集, 为道路连通子集, 所以 $\mathbb{R}^n$ 也是局部道路连通的, 因而也是局部连通的. 由此可知, 所有 $m\times n$ 阶实矩阵空间 $M_{m\times n}\cong\mathbb{R}^{mn}$ 也是(道路)连通空间和局部(道路)连通空间. 同样, 所有 $m\times n$ 阶复矩阵空间 $M_{m\times n}(\mathbb{C})\cong\mathbb{R}^{2mn}$ 也是(道路)连通空间和局部(道路)连通空间. 所有 n 阶实可逆矩阵空间 $GL(n)$ 作为 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的开子空间也是局部(道路)连通的, 因而是局部(道路)连通空间. 但它有两个道路连通分支, 由行列式值区分. 所有 n 阶复可逆矩阵空间 $GL(n;\mathbb{C})$ 作为 $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 的开子空间也是局部(道路)连通的, 因而是局部(道路)连通空间. 但它是(道路)连通的.

习题 1.6

1.6.1. 说明平凡拓扑空间和离散拓扑空间的连通性和道路连通性, 连通分支和道路连通分支, 局部连通性和局部道路连通性.

1.6.2. 说明以下 $\mathbb{R}^2$ 的子空间 A 和它的补空间 A^c 的连通性和道路连通性, 局部连通性和局部道路连通性. 如果 A 不(道路)连通, 找出所有(道路)连通分支.

(1) A 为 k 条过原点的直线的并集.

(2) $A=\{(x,kx)\,|\,x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Q}\}$.

(3) $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,x\neq 0\}$.

(4) $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\,|\,x\neq 0\}\cup\{(0,y)\,|\,y\in[-1,1]\}$.

(5) $A=\{(\mathrm{e}^{\arctan x}\cos x,\mathrm{e}^{\arctan x}\sin x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.

(6) $A=\{(\mathrm{e}^{\arctan x}\cos x,\mathrm{e}^{\arctan x}\sin x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\}\cup\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\}$.

1.6.3. 证明1维Brower不动点定理. 设 $f\colon I\to I$ 为映射, 则存在 $x\in I$ 使得 $f(x)=x$.

1.6.4. 证明1维Borsuk-Ulam定理. 设 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ 为映射, 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则存在 $z \in S^1$ 使得 $f(z)=0$.

1.6.5. 证明局部(道路)连通空间的开子空间仍是局部(道路)连通. 举例局部(道路)连通空间的闭子空间不是局部(道路)连通的.

1.6.6. 证明局部(道路)连通性为拓扑不变性.

1.7 紧致性

在许多数学问题中, 只有加上某种意义上的有限性问题才可操作. 比如, 线性代数的主要内容都是在空间的维数有限的条件下才成立的. 那么什么样的拓扑空间才具有这种有限性呢? 度量空间的有界性不是拓扑不变性, 因而不具有这种意义. 在微积分中, 只有有界闭集上的函数才达到最值. 这种有界闭集拥有的性质就可以推广到任何拓扑空间上, 来自于Heine-Borel-Lebesgue定理, 就是任何开覆盖都有有限子覆盖.

定义1.7.1 设 A 为拓扑空间 X 的子集. X 的子集族 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为 A 在 X 中的开覆盖, 如果每个 O_α 都是开集并且 $A \subset \cup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$. 如果每个 O_α 都是一组拓扑基 $\mathscr{B}$ 中的开集, 则称 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 A 在拓扑基 $\mathscr{B}$ 中开覆盖. 如果下标集 $\Pi \subset \Lambda$, 并且 $A \subset \cup_{\alpha\in\Pi} O_\alpha$, 则称 A 的在 X 中开覆盖 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 为 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的子覆盖. 特别地, 如果 $A = X$, 则 X 的开覆盖就是指 X 在 X 中的开覆盖.

定义1.7.2 拓扑空间 X称为紧(致)的, 如果 X 的任何开覆盖都有有限子覆盖, X 的子集A称为紧(致)子集, 如果子空间 A是紧(致)拓扑空间.

定理1.7.3 A 为拓扑空间 X 的紧子集, 当且仅当 A 在 X 中的任何开覆盖都有有限子覆盖, 当且仅当 A 在任何给定的拓扑基中的任何开覆盖都有有限子覆盖.

定理1.7.4 任何映射都将定义域空间的紧子集映为值域空间的紧子集. 所以紧性为拓扑不变性.

定理1.7.5 紧子集的任何闭子集都是紧集.

在拓扑学中, 紧性总是和分离性结合才能得到性质好的拓扑空间. 比如, 紧集不一定是闭集, 但反例就只能在分离性不好的空间找出. 这种分离性就是以下的Hausdorff空间的定义.

定义1.7.6 拓扑空间 X 称为Hausdorff空间, 如果空间中任何两个不同的点可以被两个邻域分离, 即对任意 $x, y \in X$, 如果 $x \neq y$, 则存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \emptyset$.

拓扑空间 X 称为正规空间, 如果空间中任何两个不交的闭集可以被两个邻域分离, 即对任意两个闭集 F, K, 如果 $F \cap K = \emptyset$, 则存在 F 的邻域 U 和 K 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \emptyset$.

定理1.7.7 Hausdorff空间的任何子空间仍是Hausdorff空间. 正规空间的任何闭子空间仍是正规空间.

证 设 A 为Hausdorff空间 X 的子集. 则对 A 中不同的两点 x 和 y, 存在 x 在 X 中邻域 U 和 y 在 X 中的邻域 V, 满足 $U\cap V = \emptyset$. 于是 $A\cap U$ 为 x 在 A 中邻域, $A\cap V$ 为 y 在 A 中的邻域, 满足 $(A\cap U)\cap(A\cap V) = \emptyset$. 所

以 A 为Hausdorff空间.

设 A 为正规空间 X 的闭子集. 则对 A 中不相交的两个闭集 K 和 L, 它们仍为 X 的闭集, 所以存在 K 在 X 中邻域 U 和 L 在 X 中的邻域 V, 满足 $U\cap V=\emptyset$. 于是 $A\cap U$ 为 K 在 A 中邻域, $A\cap V$ 为 L 在 A 中的邻域, 满足 $(A\cap U)\cap(A\cap V)=\emptyset$. 所以 A 为正规空间.

在许多情况下，紧性能够将点的性质自然转化为紧子集(空间)的性质. 以下定理的叙述(证明)就采用这种原则, 先叙述点性质(证明), 然后叙述紧子集性质(证明).

定理1.7.8 Hausdorff空间的独点集为闭子集, Hausdorff空间的紧子集也是闭子集.

Hausdorff空间的任何两个不同点可以被邻域分离, Hausdorff空间的任何两个不交紧子集也可以被邻域分离. 因此, 紧Hausdorff空间是正规空间.

证 设 x 为Hausdorff空间 X 的独点集. 对于任何 $y\in X\backslash x$, 即 $y\neq x$, 存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V 满足 $U\cap V=\emptyset$. 这说明 y 为 $X\backslash x$ 的内点, 即 $X\backslash x$ 为开集. 因此独点集 x 为闭集.

设 K 为Hausdorff空间 X 的紧子集. 则对于任何 $y\in X\backslash K$ 和任何 $x\in K$, 存在 x 的邻域 U_x 和 y 的邻域 V_x 使得 $U_x\cap V_x=\emptyset$. 集族 $\{U_x\}_{x\in K}$ 自然为 K 在 X 中的开覆盖, 于是存在 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 $K\subset\cup_{i=1}^n U_{x_i}$. 则 $U=\cup_{i=1}^n U_{x_i}$ 为 K 的邻域, $V=\cap_{i=1}^n V_{x_i}$ 为 y 的邻域, 满足 $V\cap U=\emptyset$. 这说明 y 为 $X\backslash K$ 的内点, 即 $X\backslash K$ 为开集. 因此 K 为闭集.

设 K,L 为Hausdorff空间 X 的两个不相交的紧子集. 对于任何 $y\in L$, 由以上证明可知存在 K 的邻域 U_y 和 y 的邻域 V_y 使得 $U_y\cap V_y=\emptyset$. 集族 $\{V_y\}_{y\in L}$ 自然为 L 的开覆盖, 于是存在 $y_1,\cdots,y_n$ 使得 $L\subset\cup_{i=1}^n V_{y_i}$. 则 $U=\cap_{i=1}^n U_{y_n}$ 为 K 的邻域, $V=\cup_{i=1}^n V_{y_n}$ 为 L 的邻域, 满足 $U\cap V=\emptyset$, 即 U 和 V 分离 K 和 L.

由以上结论可知, 紧Hausdorff空间的子集为闭子集当且仅当为紧子集, 所以紧子集被分离就蕴含闭子集被分离. 所以紧Hausdorff空间为正规空间.

定理1.7.9 度量空间的紧子集一定为有界闭集. $\mathbb{R}^n$ 的子集为紧子集, 当且仅当它为有界闭集.

证 度量空间是Hausdorff空间, 因为任何两个不同的点可由各自半径小于两点间距离的球形邻域分离, 所以度量空间的紧子集一定为闭集. 假设 K 为度量空间的紧子集, 则球形邻域族 $\{B(x,1)\}_{x\in K}$ 为 K 的开覆盖, 于是存在 $x_1,\cdots,x_n\in K$ 使得 $K\subset\cup_{i=1}^n B(x_i,1)$. 而集合 $\cup_{i=1}^n B(x_i,1)$ 有界. 于是 K 有界.

下面证 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集为紧集. 由数学分析可知闭区间 $[a,b]$ 为 $\mathbb{R}$ 的紧子集. 由乘积空间的性质(见1.8.9), $\mathbb{R}^n$ 中形如 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 的乘积子集也为紧集. 而任何有界闭集都为这样形式的紧集的闭子集, 所以由定理1.7.5, 有界闭集为紧集.

例1.7.10 球面 S^n 与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚, 因为球面是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的有界闭集, 所以为紧空间. 而 $\mathbb{R}^n$ 由于无界, 所以非紧. 同样, 开球 $\mathrm{Int}(D^n)$ 和闭球 D^n 也不同胚.

实Hilbert空间 $\mathbb{R}^\infty$ 由所有满足 $\Sigma_{n=1}^\infty a_n^2$ 收敛的实数列 $(a_1,a_2,\cdots)$ 构成. 内积为

$$\langle(a_1,a_2,\cdots),(b_1,b_2,\cdots)\rangle=\Sigma_{n=1}^\infty a_nb_n.$$

所以 $\mathbb{R}^\infty$ 为度量空间. 其单位球 D^∞ 为有界闭集, 但非紧. 下面证明这点. 记 ε_n 为 $\mathbb{R}^\infty$ 中第 n 个坐标为1, 其它坐标都是0的点. 则点集 $S=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $S\subset D^\infty$ 并且任两个不同点间的距离都是 $\sqrt{2}$. 球形邻域集族 $\{B(x,\frac{1}{4})\}_{x\in D^\infty}$ 自然为 D^∞ 的开覆盖. 由 S 的性质可知这个开覆盖不可能的有限子覆盖包含 S, 因而也无法包含 D^∞. 所以 D^∞ 非紧. 这说明度量空间的有界闭集未必为紧子集.

定义1.7.11 拓扑空间中一点的紧邻域是指任何以该点为内点的紧集. 拓扑空间 X 称为局部紧的, 如果对任何 $x \in X$ 和任何 x 的邻域 O, 存在 x 的紧邻域 K 使得 $K \subset O$.

定理1.7.12 局部紧空间的任何闭子空间都是局部紧空间.

证 设 F 为局部紧空间 X 的闭子集. 则对任何 $x \in F$ 和点 x 在 F 中的邻域 $F \cap O$, 其中 O 为 X 的开集, 由 X 的局部紧可知存在 x 在 X 中的紧邻域 K 使得 $K \subset O$. 由于 x 为 K 的内点, 所以存在 X 的开集 U 使得 $x \in U \subset K \subset O$. 则 $F \cap K$ 作为 K 的闭子集仍为紧集, 并且有 $x \in F \cap U \subset F \cap K \subset F \cap O$. 这说明 $F \cap K$ 为 x 在 F 中的紧邻域, 满足 $F \cap K \subset F \cap O$. 所以, F 局部紧.

定理1.7.13 Hausdorff空间为局部紧空间当且仅当空间中任何一点都存在紧邻域. 特别地, 紧Hausdorff空间为局部紧空间.

证 必要性显然. 现证充分性. 设 K 为 x 的紧邻域, 于是存在的 x 邻域 U 使得 $U \subset K$. 则对 x 的任何邻域 O, $U \cap O$ 仍为 x 的邻域且 $U \cap O \subset K$. 由于 K 为紧Hausdorff空间, 所以为正规空间. 独点集 x 和 $K \setminus (U \cap O)$ 都为 K 的闭子集, 所以存在 x 的在 K 中的邻域 M 和 $K \setminus (U \cap O)$ 的在 K 中的邻域 N, 满足 $M \cap N = \emptyset$. 由于 M 包含于 X 的开集 $U \cap O$, 所以 M 为子空间 K 的开集就意味着也是 X 的开集. 于是 $\overline{M}$ 为 x 的紧邻域, 且 $M \subset O$. 所以 X 局部紧.

紧Hausdorff空间的任一点都存在全空间作为其紧邻域, 所以局部紧.

例1.7.14 $\mathbb{R}^n$ 的任何球形邻域的闭包为紧集, 因而任何点有紧邻域, 为局部紧空间. 所以所有 $m \times n$ 阶矩阵空间 $M_{m\times n} \cong R^{mn}$ 也是局部紧空间. 所以所有 n 阶可逆方阵空间 $GL(n)$ 作为行列式函数的 $\mathbb{R} \setminus 0$ 的原象集为 $M_{m\times n}$ 的开子空间, 因而为局部紧空间(习题). 行列式为1的矩阵空间 $SL(n)$ 作为行列式函数的 1 的原象集为 $M_{m\times n}$ 的闭子空间, 因而由定理1.7.12为局部紧空间. 但这两个空间都不是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的有界子集, 因而不紧. 正交矩阵空间 $O(n)$ 为 $M_{m\times n}$ 的闭集(正交矩阵序列的收敛矩阵仍为正交矩阵), 所以为局部紧空间. 由于正交矩阵空间有界, 所以为紧空间.

一般情况下, 局部(道路)连通性和(道路)连通性没有什么联系. 但是在分离性满足的前提下, 局部紧性和紧性只差以下定义的一点紧化性.

定义1.7.15 Hausdorff空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一点紧化空间 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 如下定义. 作为集合, $X^* = X \amalg *$, 其中新加的点 $*$ 称为紧化空间 X^* 的无穷远点. $\mathscr{T}$ 为 $\mathscr{T}^*$ 的子集族, 即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$. $O \in \mathscr{T}^* \setminus \mathscr{T}$ 当且仅当 $* \in O$ 并且存在 X 的紧子集 K 使得 $O \setminus * = X \setminus K$.

定理1.7.16 Hausdorff空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一点紧化空间 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为紧空间, 并且$(X, \mathscr{T})$ 为 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 的开子空间. 如果Hausdorff空间 $(X, \mathscr{T})$ 为局部紧空间, 则 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为紧Hausdorff空间.

证 $(X, \mathscr{T})$ 为 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 的开子空间显然. 现证 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为紧空间. 假设 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{O\}$ 为 X^* 的开覆盖, 其中 $* \in O$, 则 $\{O_\alpha \cap X\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 $X \setminus O$ 的开覆盖. 由于 $X \setminus O$ 紧, 存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ 使得 $X \setminus O \subset \cup_{i=1}^n (O_{\alpha_i} \cap X)$. 于是 $\{O_{\alpha_1}, \cdots, O_{\alpha_n}, O\}$ 为 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{O\}$ 的有限子覆盖. 所以 X^* 紧.

如果 $(X, \mathscr{T})$ 还为局部紧空间, 则对 $x \in X$, 存在 x 的邻域 V 和紧集 K 使得 $x \in V \subset K \subset X$. 则 X^* 的不交开集 V 和 $X^* \setminus K$ 将 x 和 $*$ 分离. 所以 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为Hausdorff空间.

习题 1.7

1.7.1. 证明以下Lebesgue引理. 设 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为紧度量空间 X 上的开覆盖, 则存在正数 $\lambda > 0$ (称为该开覆盖的Lebesgue数), 使得空间任何一个半径小于 λ 的球形邻域都一定包含于某个 O_α 之中.

1.7.2. 闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为具有有限交性质, 如果族中任意有限个闭集的交集非空. 证明 X 为紧空间, 当且仅当 X 的每个具有有限交性质的闭集族都满足其全体闭集的交非空.

1.7.3. 证明有限个紧子集的并集仍是紧子集; 任意个紧闭子集的交集仍是紧闭子集; Hausdorff空间中的任意个紧子集的交集仍是紧子集.

1.7.4. 证明紧空间到Hausdorff空间的单映射一定是嵌入. 试举例局部紧空间到Hausdorff空间的既单又满的映射不是同胚.

1.7.5. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为Hausdorff空间不同的 n 个点. 证明存在 x_i 的邻域 O_i 满足 $O_1,\cdots,O_n$ 两两互不相交.

1.7.6. 设拓扑空间 X 满足以下性质: 对任意两个不同的点 x 和 y, 存在 y 的邻域 O 满足 $x \notin O$. 证明对 X 的任意点 x 和不含 x 的紧子集 K, 存在 K 的邻域 O 满足 $x \notin O$.

1.7.7. 证明局部紧空间满足以下性质: 对任何紧子集 K 和 K 的邻域 O, 存在紧子集 L 和开集 U, 满足 $K \subset U \subset L \subset O$.

1.7.8. 证明度量空间为正规空间.

1.7.9. 证明连通紧空间到 $\mathbb{R}$ 的连续函数的象集为闭区间 $[a,b]$.

1.7.10. 证明局部紧(连通,道路连通)空间的开子空间仍是局部紧(连通,道路连通)空间.

1.7.11. 证明紧Hausdorff空间的一点紧化空间为该空间与独点空间的不交并空间.

1.7.12. 设 Y 为紧Hausdorff空间 X 除去某一点的子空间. 证明一点紧化空间 $Y^* \cong X$. 由此证明 $\mathbb{R}^n$ 的一点紧化空间同胚于 S^n.

1.7.13. 构造紧但非局部紧空间.

1.8 乘积空间

对于 n 个拓扑空间 $X_1,\cdots,X_n$, 乘积集合 $X_1\times\cdots\times X_n$ 上赋予什么样的拓扑是自然的呢？作为集合, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$. 乘积拓扑的定义应该能使 $\mathbb{R}^n$ 从乘积角度定义的拓扑与作为度量空间的拓扑一致.

定义1.8.1 设 $(X_1,\mathscr{T}_1),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$ 为拓扑空间. 它们的乘积拓扑空间

$$(X_1,\mathscr{T}_1)\times\cdots\times(X_n,\mathscr{T}_n)=(X_1\times\cdots\times X_n,\mathscr{T})$$

定义如下. $\mathscr{T}$ 有拓扑基 $\mathscr{B}=\{O_1\times\cdots\times O_n\,|\,O_i\in\mathscr{T}_i,\,i=1,\cdots,n\}$. 易证如果 $\mathscr{B}_i$ 为 $\mathscr{T}_i$ 的基, 则集族

$$\{O_1\times\cdots\times O_n\,|\,O_i\in\mathscr{B}_i,\,i=1,\cdots,n\}$$

也为 $\mathscr{T}$ 的基.

定理1.8.2 n维实空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑与 n 重乘积空间 $\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ 的拓扑一样.

证 记 $\mathbb{R}^n$ 的由所有球形邻域构成的拓扑基为 $\mathscr{B}$, 记 $\mathbb{R}^n$ 的由所有形如 $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ 的集合构成的拓扑基为 $\mathscr{B}'$.

如果 $B(x,\varepsilon)\in\mathscr{B}$, 则对任何 $y\in B(x,\varepsilon)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 当 $\delta<\rho(x,y)$ 时, 便有 $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$. 于是

$$y\in(y_1-\frac{1}{\sqrt{n}}\delta,y_1+\frac{1}{\sqrt{n}}\delta)\times\cdots\times(y_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\delta,y_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\delta)\subset B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon).$$

由定理1.2.4, $T(\mathscr{B})$ 比 $T(\mathscr{B}')$ 粗.

如果 $U=U_1\times\cdots\times U_n\in\mathscr{B}'$, 即每个 U_i 都是 $\mathbb{R}$ 的开集. 则对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in U$, 由于 x_i 为 U_i 的内点, 所以存在 ε_i 使得 $(x_i-\varepsilon_i,x_i+\varepsilon_i)\subset U_i$. 令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$. 则

$$x\in B(x,\varepsilon)\subset(x_1-\varepsilon_1,x_1+\varepsilon_1)\times\cdots\times(x_n-\varepsilon_n,x_n+\varepsilon_n)\subset U.$$

由定理1.2.4, $T(\mathscr{B}')$ 比 $T(\mathscr{B})$ 粗.

乘积拓扑还有从映射的扩张和提升角度得到的定义. 这个角度不仅能使我们把不交并和乘积联系起来, 还能使我们认识到一种新的角度的对偶. 另外从这个角度可以把不交并和乘积同时推广到无穷.

首先回顾一下不交并 $\amalg$ 在集合论中的概念. 任意两个集合 X 和 Y 都可以做乘积集合 $X\times Y$, 那么是不是可以做不交并集合 $X\amalg Y$ 呢? 当然可以, 只是需要注意, 集合 $X\times X$ 很容易理解, 但要理解集合 $X\amalg X$, 就需要注意不交并 $\amalg$ 与并 $\cup$ 的区别. 不交并是没有任何前提条件的, 即任何两个集合都可以做不交并, 但是并集 $X\cup Y$ 是有条件的, 那就是 X 和 Y 都是某个更大集合的子集. 因此在这个背景下, 我们就有两个集合 $X\amalg Y$ 和 $X\cup Y$. 很显然 $X\amalg Y$ 和 $X\cup Y$ 相同, 当且仅当 $X\cap Y=\emptyset$.

同样, 以下要定义的拓扑空间的不交并也是没有条件的. 如果拓扑空间 X 和 Y 都是某个更大的拓扑空间的子空间 Z 的话, 显然 $X\cup Y$ 的拓扑就定义为 Z 的子空间拓扑, 而 $X\amalg Y$ 的拓扑则需要独立定义. 尤其需要注意的是以下结论是错误的! 拓扑 $X\amalg Y$ 和 $X\cup Y$ 相同, 当且仅当集合 $X\cap Y=\emptyset$.

以下定义就是从另一个角度重新叙述了定义1.5.16的下标有限情形.

定义1.8.3 设 $\mathscr{T}_i$ 为拓扑空间 X_i 的开拓扑, $i=1,\cdots,n$. 则它们的不交并拓扑空间

$$(X_1,\mathscr{T}_1)\amalg\cdots\amalg(X_n,\mathscr{T}_n)=(X_1\amalg\cdots\amalg X_n,\mathscr{T})$$

定义如下. 由于每个 X_i 都为 $X_1\amalg\cdots\amalg X_n$ 的子集, 因而 $\mathscr{T}_i$ 也为 $X_1\amalg\cdots\amalg X_n$ 的子集族, 则 $\mathscr{T}$ 拓扑基为集族 $\mathscr{T}_1\cup\cdots\cup\mathscr{T}_n$.

由于我们经常要用到同一集合的不交并, 比如 $X \amalg X$, 所以对于 $X_1\amalg\cdots\amalg X_n$, 我们记其上的一般元素为 $(x)_k$, 其中 $x \in X_k$, 用以区别 X_k 中的元素 x 和 $X_1\amalg\cdots\amalg X_n$ 中对应的元素.

集合的不交并具有从以下对应扩张的角度的定义.

记 $i_k\colon X_k \to X_1\amalg X_2$ 为分量集合到不交并集合的内射, 即 $i_k(x) = (x)_k$ 对所有 $x \in X_k$, $k = 1,2$. 则两个内射 i_1, i_2 满足以下对应扩张性. 对任何集合 Y 和任何两个对应 $f_k\colon X_k \to Y$, $k = 1,2$, 存在唯一的扩张对应 $f\colon X_1\amalg X_2 \to Y$ 使得 $fi_k = f_k$ 对$k = 1,2$. 如下图所示.

$$\begin{tikzcd}
X_1\amalg X_2 \arrow[dr, "f"] & X_1 \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d, "f_1"] \\
X_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "f_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

反之, 若存在两个对应 $i'_k\colon X_k \to X'$, $k = 1,2$, 满足以下对应扩张性, 即对任何集合 Y 和任何两个对应 $f_k\colon X_k \to Y$, $k = 1,2$, 都存在唯一的对应 $f\colon X' \to Y$ 使得 $fi'_k = f_k$ 对 $k = 1,2$, 则存在*1-1*对应 $\phi\colon X' \to X_1 \amalg X_2$ 使得 $i_k = \phi i'_k$ 对$k = 1,2$.

把以上命题中的所有箭头反向, 所有不交并符号替换成乘积符号, 所有复合对应的顺序颠倒, "扩张"替换成"提升", 我们就得到集合的乘积的从对应提升角度的对偶定义.

记 $p_k\colon X_1{\times}X_2 \to X_k$ 为乘积集合到分量集合的投射, 即 $p_k(x_1, x_2) = x_k$ 对所有 $x_k \in X_k$, $k = 1,2$. 则两个投射 p_1, p_2 满足以下对应提升性. 对任何集合 Y 和任何对应$f_k\colon Y \to X_k$, $k = 1,2$, 存在唯一的提升对应 $f\colon Y \to X_1{\times}X_2$ 使得 $p_kf = f_k$ 对$k = 1,2$. 如下图所示.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f"] & X_1 \\
X_2 & X_1{\times}X_2 \arrow[l, "p_2"] \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}$$

反之, 若存在两个对应 $p'_k\colon X' \to X_k$, $k = 1,2$, 满足以下对应提升性, 即对任何集合 Y 和任何两个对应 $f_k\colon Y \to X_k$, $k = 1,2$, 都存在唯一的对应 $f\colon Y \to X'$ 使得 $p'_kf = f_k$ 对$k = 1,2$, 则存在*1-1*对应 $\phi\colon X_1{\times}X_2 \to X'$ 使得 $p_k = p'_k\phi$ 对$k = 1,2$.

把以上的集合都替换成拓扑空间, 对应替换成映射, 是不是有相应的拓扑空间的结论呢? 完全成立. 只需定义不交并集合的拓扑如定义1.8.3, 乘积集合的拓扑如1.8.1即可.

定理1.8.4 记 $i_k\colon X_k \to X_1\amalg X_2$ 为分量集合到不交并集合的内射. 则两个内射 i_1, i_2 满足以下映射扩张性. 对任何拓扑空间 Y 和任何两个映射 $f_k\colon X_k \to Y$, $k = 1,2$, 存在唯一的扩张映射 $f\colon X_1\amalg X_2 \to Y$ 使得 $fi_k = f_k$ 对$k = 1,2$.

反之, 若存在两个映射 $i'_k\colon X_k \to X'$, $k = 1,2$, 满足以下映射扩张性, 即对任何拓扑空间 Y 和任何两个映射 $f_k\colon X_k \to Y$, $k = 1,2$, 都存在唯一的映射 $f\colon X' \to Y$ 使得 $fi'_k = f_k$ 对$k = 1,2$, 则存在同胚映射 $\phi\colon X' \to X_1 \amalg X_2$ 使得 $i_k = \phi i'_k$ 对$k = 1,2$.

$X_1\amalg X_2$ 的不交并拓扑为使内射 i_1, i_2都连续的最细拓扑.

对偶地, 记 $p_k\colon X_1{\times}X_2 \to X_k$ 为乘积集合到分量集合的投射. 则两个投射 p_1, p_2 满足以下映射提升性. 对任何拓扑空间 Y 和任何两个映射 $f_k\colon Y \to X_k$, $k = 1,2$, 存在唯一的提升映射 $f\colon Y \to X_1{\times}X_2$ 使得 $p_kf = f_k$ 对$k = 1,2$.

反之, 若存在两个映射 $p'_k\colon X'\to X_k$, $k=1,2$, 满足以下映射提升性, 即对任何拓扑空间 Y 和任何两个映射 $f_k\colon Y\to X_k$, $k=1,2$, 都存在唯一的映射 $f\colon Y\to X'$ 使得 $p'_kf=f_k$ 对 $k=1,2$, 则存在同胚映射 $\phi\colon X_1\times X_2\to X'$ 使得 $p_k=p'_k\phi$ 对 $k=1,2$.

$X_1\times X_2$ 上的乘积拓扑为使投射 p_1,p_2 都连续的最粗拓扑.

证 我们只证明乘积的情形, 对偶的不交并情形的证明为对偶证明, 即把证明中所有的箭头反向, 所有的复合映射颠倒顺序, 相应的名称替换, 就可得到对偶证明. 由于集合论意义上的对应总存在, 所以只需讨论相应的对应连续即可.

对于 X_1 的开集 U, $p_1^{-1}(U)=U\times X_2$. 所以 p_1 连续. 同理, p_2 也连续. 对任何映射 $f_k\colon Y\to X_k$, $k=1,2$, 提升映射 $f(y)=(f_1(y),f_2(y))$ 满足对任何 X_k 的开集 U_k, $f^{-1}(U_1\times U_2)=f_1^{-1}(U_1)\times f_2^{-1}(U_2)$, 所以 f 连续.

假设 $X_1\times X_2$ 上还有另外的使 p_1,p_2 都连续的拓扑 $\mathscr{T}'$, 则由 p_1,p_2 得到唯一的提升映射 $\phi\colon(X_1\times X_2,\mathscr{T}')\to(X_1\times X_2,\mathscr{T})$, 其中乘积拓扑为 $\mathscr{T}$. 而由提升映射的唯一性可知 ϕ 作为对应就为恒等对应. 所以 $\mathscr{T}'$ 比 $\mathscr{T}$ 要细. 因此乘积拓扑是使投射都连续的最粗拓扑.

在本节以后的叙述中, 所有的结论和定义如果有对偶, 我们都给出其对偶的叙述, 但证明我们只给乘积情形的证明, 对应的不交并情形的证明或者为对偶证明, 或者由定义很显然.

定义1.8.5 对于拓扑空间 X, 上对角映射

$$\Delta'\colon X\amalg X\to X$$

是指取定理1.8.4中 $X_1=X_2=X$, $f_1=f_2=1_X$ 所得到的扩张映射, 即 Δ' 限制在每一分量空间上都是恒等映射.

对偶地, 对角映射

$$\Delta\colon X\to X\times X$$

是指取定理1.8.4中 $X_1=X_2=X$, $f_1=f_2=1_X$ 所得到的提升映射, 即 Δ 投射到每一分量空间都是恒等映射, 具体表达式为 $\Delta(x)=(x,x)$ 对所有 $x\in X$.

对于映射 $f_1\colon X_1\to Y_1$ 和 $f_2\colon X_2\to Y_2$, 不交并映射

$$f_1\amalg f_2\colon X_1\amalg X_2\to Y_1\amalg Y_2$$

是指取定理1.8.4中的X, X_1, X_2分别为 $X_1\amalg X_2$, X_1, X_2, 取定理1.8.4中的 f_k 为复合映射 $i_kf_k\colon X_k\xrightarrow{f_k}Y_k\xrightarrow{i_k}Y_1\amalg Y_2$ 所得到的扩张映射. 具体表达式为 $(f_1\amalg f_2)((x_k)_k)=f_k(x_k)$ 对 $x_k\in X_k$.

对偶地, 乘积映射

$$f_1\times f_2\colon X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$$

是指取定理1.8.4中的X, X_1, X_2分别为 $X_1\times X_2$, X_1, X_2, 取定理1.8.4中的 f_k 为复合映射 $f_kp_k\colon X_1\times X_2\xrightarrow{p_k}X_k\xrightarrow{f_k}Y_k$ 所得到的提升映射. 具体表达式为 $(f_1\times f_2)(x_1,x_2)=(f_1(x_1),f(x_2))$ 对 $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$.

定理1.8.6 对于拓扑空间 X_1,X_2 我们有以下结论, 其中开映射是指把任何开集都映为开集的映射.

内射 $i_k\colon X_k\to X_1\amalg X_2$ 为单的开映射, 所以为嵌入.

投射 $p_k\colon X_1\times X_2\to X_k$ 为满的开映射. 对于任何 $x_1\in X_1$, $X_1\times X_2$ 的子空间 $x_1\times X_2$ 与 X_2 同胚. 同理, 对于任何 $x_2\in X_2$, $X_1\times X_2$ 的子空间 $X_1\times x_2$ 与 X_1 同胚.

证 由于 $f(\cup_\alpha O_\alpha)=\cup_\alpha f(O_\alpha)$, 所以验证 f 为开映射只需验证 f 将基中的开集映为开集. 对于 X_k 的开集 U_k, 我们有 $p_1(U_1\times U_2)=U_1$ 为开集. 所以 p_1 为开映射. 显然 p_1 为满映射.

对于 $x_1\in X_1$, 定义 $f_{x_1}\colon X_1\to X_1\times X_2$ 为 $f_{x_1}(x_2)=(x_1,x_2)$ 对所有 $x_2\in X_2$. 由于 $p_1f_{x_1}=0_{x_1}$ 和 $p_2f_{x_1}=1_{X_2}$ 都为映射, 所以 f_{x_1} 为映射. 由习题1.4.7, $p_2f_{x_1}=1_{X_2}$ 蕴含 f_{x_1} 为嵌入.

以下这些定理说明不交并以及乘积空间的拓扑不变性和因子空间的拓扑不变性有非常好的关系.

定理1.8.7 不交并空间 $X_1\amalg X_2$ 为Hausdorff空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为Hausdorff空间.

乘积空间 $X_1\times X_2$ 为Hausdorff空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为Hausdorff空间.

证 如果 $X_1\times X_2$ 为Hausdorff空间, 则对任何 $x_1,x_1'\in X_1$, $x_1\neq x_1'$, $x_2\in X_2$, 存在形如 $U_1\times V_2$ 和 $U_1'\times V_2'$ 的开集分离 (x_1,x_2) 和 (x_1',x_2), 其中 U_1,U_1' 分别为 x_1,x_1' 的邻域, V_2,V_2' 为 x_2 的邻域. 而 $(U_1\times V_2)\cap(U_1'\times V_2')=(U_1\cap U_1')\times(V_2\cap V_2')=\emptyset$. 显然 $V_2\cap V_2'\neq\emptyset$. 这说明 $U_1\cap U_1'=\emptyset$. 所以 U_1 和 U_1' 分离 x_1 和 x_1'. 因此 X_1 为Hausdorff空间. 同理可证 X_2 也为Hausdorff空间.

如果 X_1,X_2 都为Hausdorff空间, 则对任何 $(x_1,x_2),(x_1',x_2')\in X_1\times X_2$, 不妨设 $x_1\neq x_1'$, 设 x_1 和 x_1' 被邻域 U_1 和 U_1' 分离, V 为任意含点 x_2,x_2' 的开集, 则 $U_1\times V$ 和 $U_1'\times V$ 分离 (x_1,x_2) 和 (x_1',x_2'). 所以 $X_1\times X_2$ 为Hausdorff 空间.

定理1.8.8 不交并空间 $X_1\amalg X_2$ 的(道路)连通分支为 X_1 和 X_2, 当且仅当 X_1,X_2 都为(道路)连通空间; 不交并空间 $X_1\amalg X_2$ 为局部(道路)连通空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为局部(道路)连通空间.

乘积空间 $X_1\times X_2$ 为(道路)连通空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为(道路)连通空间; 乘积空间 $X_1\times X_2$ 为局部(道路)连通空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为局部(道路)连通空间.

证 为节省文字, 省略所有道路字样.

如果 $X_1\times X_2$ 连通, 则投射 $p_k\colon X_1\times X_2\to X_k$ 将连通空间映为连通空间, 所以 X_k 连通.

如果 X_1,X_2 连通, 依照例1.5.15的构造, 令 $A(x_1,x_2)=(x_1\times X_2)\cup(X_1\times x_2)$, 则 $A(x_1,x_2)$ 连通. 由定理1.5.14可知 $X_1\times X_2=\cup_{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2}A(x_1,x_2)$ 也连通.

如果 $X_1\times X_2$ 局部连通, 则对任何 $x_k\in X_k$ 的邻域 O_k, $O_1\times O_2$ 为 (x_1,x_2) 的邻域. 于是存在 (x_1,x_2) 连通的邻域 K 满足 $K\subset O_1\times O_2$. 由定理1.8.6, $p_i(K)$ 为开集. 所以 $p_k(K)\subset O_k$ 为 x_k 的连通的邻域. 所以 X_k 局部连通.

如果 X_1,X_2 都局部连通, 则对任何 (x_1,x_2) 的邻域 O, 存在 x_k 的邻域 O_k, 使得 $O_1\times O_2\subset O$. 于是存在 x_k 的连通邻域 U_k 使得 $U_k\subset O_k$. 由上结论可知 $U_1\times U_2$ 连通, 即 $U_1\times U_2\subset O$ 为 (x_1,x_2) 的连通邻域. 所以 $X_1\times X_2$ 局部连通.

定理1.8.9 不交并空间 $X_1\amalg X_2$ 为紧空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为紧空间；不交并空间 $X_1\amalg X_2$ 为局部紧空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为局部紧空间.

乘积空间 $X_1\times X_2$ 为紧空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为紧空间；乘积空间 $X_1\times X_2$ 为局部紧空间, 当且仅当 X_1,X_2 都为局部紧空间.

证 如果 $X_1\times X_2$ 紧, 则投射 $p_k\colon X_1\times X_2\to X_k$ 将紧空间映为紧空间 X_k, 所以 X_k 紧.

如果 X_1,X_2 都紧, 由定理1.7.3, 只需要证明 $X_1\times X_2$ 的形如 $\{U_\alpha\times V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的开覆盖有有限子覆盖即可, 其中 U_α 为 X_1 的开集, V_α 为 X_2 的开集. 对于任何 $x_1\in X_1$, 由定理1.8.6, $x_1\times X_2$ 与 X_2 同胚, 所以为

紧空间, 于是它在 $X_1 \times X_2$ 中的开覆盖 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 有有限子覆盖. 具体地, 就是 Λ 存在有限子集 Ω_{x_1} 使得 $x_1 \times X_2 \subset \cup_{\alpha\in\Omega_{x_1}}(U_\alpha \times V_\alpha)$. 令 $U_{x_1} = \cap_{\alpha\in\Omega_{x_1}} U_\alpha$, 则 $\{U_{x_1}\}_{x_1\in X_1}$ 为 X_1 的开覆盖, 于是存在 $a_1, \cdots, a_m \in X_1$ 使得 $X_1 = \cup_{i=1}^m U_{a_k}$. 令 $\Omega = \cup_{i=1}^m \Omega_{a_k}$, 则 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ 为 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的有限子覆盖. 所以 $X_1 \times X_2$ 紧.

如果 $X_1 \times X_2$ 局部紧, 则对任何 $x_k \in X_k$ 的邻域 O_k, $O_1 \times O_2$ 为 (x_1, x_2) 的邻域, 于是存在 (x_1, x_2) 的紧邻域 K 满足 $K \subset O_1 \times O_2$ 并且 (x_1, x_2) 为 K 的内点, 即存在 (x_1, x_2) 的邻域 U 使得 $U \subset K$. 于是 $p_k(U) \subset p_k(K)$. 由定理1.8.6, p_k 为开映射, 所以 $p_k(U)$ 仍然为开集. 所以 x_k 为紧集 $p_k(K)$ 的内点, 即 $p_k(K) \subset O_k$ 为 x_k 的紧邻域. 因此, X_k 局部紧.

如果 X_1, X_2 都局部紧, 则对任何 (x_1, x_2) 的邻域 O, 存在 x_k 的邻域 O_k, 使得 $O_1 \times O_2 \subset O$, 于是存在 x_k 的紧邻域 K_k, 使得 $K_k \subset O_k$. 由上面结论可知 $K_1 \times K_2$ 仍然紧. 所以 $K_1 \times K_2 \subset O$ 为 (x_1, x_2) 的紧邻域. 因此 $X_1 \times X_2$ 局部紧.

不交并空间和乘积空间的都可以推广到无穷. 首先回顾任意个集合的不交并和乘积集合.

设 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族集合. 不交并集合 $\amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 的定义显然. 由于我们经常要考虑所有的 S_α 都为同一集合 S 的情形, 所以我们记这个不交并集合中的一般元素为 $(x)_\alpha$, 其中 $x \in S_\alpha$. 这样的记法, 当 $x \in S_\alpha = S_\beta$ 时, $(x)_\alpha$ 和 $(x)_\beta$ 自然就是 $\amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 中的不同元素了. 对于 $\beta \in \Lambda$, 内射 $i_\beta\colon S_\beta \to \amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 就定义为 $i_\beta(x) = (x)_\beta$ 对任何 $x \in S_\beta$. 乘积集合 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 定义为所有满足以下条件的对应 $f\colon \Lambda \to \amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 构成的集合, $f(\alpha) \in S_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$. 我们记这个乘积集合的一般元素为坐标形式 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, 其中每个 $x_\alpha \in S_\alpha$. 特别地, 当 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时, 就是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的形式. 采用这种记法后, 投射 $p_\beta\colon \Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \to S_\beta$ 就定义为 $p_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = x_\beta$ 对任何 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$.

不交并和乘积集合分别满足以下的对应扩张性和对应提升性.

内射族 $\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下对应扩张性. 对任何集合 T 和任何一族对应 $\{f_\alpha\colon S_\alpha \to T\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在唯一的扩张对应 $f\colon \amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \to T$ 使得 $fi_\alpha = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

反之, 若存在对应族 $\{i'_\alpha\colon S_\alpha \to S'\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足对应扩张性, 即对任何集合 T 和任何一族对应 $\{f_\alpha\colon S_\alpha \to T\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的对应 $f\colon S' \to T$ 使得 $fi'_\alpha = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 则存在1-1对应 $\phi\colon S' \to \amalg_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 使得 $i_\alpha = \phi i'_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

投射族 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下对应提升性. 对任何集合 T 和任何一族对应 $\{f_\alpha\colon T \to S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在唯一的提升对应 $f\colon T \to \Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 使得 $p_\alpha f = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

反之, 若存在对应族 $\{p'_\alpha\colon S' \to S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足对应提升性, 即对任何集合 T 和任何一族对应 $\{f_\alpha\colon T \to S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的对应 $f\colon T \to S'$ 使得 $p'_\alpha f = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 则存在1-1对应 $\phi\colon \Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \to S'$ 使得 $p_\alpha = p'_\alpha \phi$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

以下定义中不交并的部分就是从另一个角度重新叙述了定义1.5.16.

定义1.8.10 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族拓扑空间, X_α 的开拓扑为 $\mathscr{T}_\alpha$.

定义不交并集合 $\amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上的开拓扑 $\mathscr{T}$ 由集族 $\{\mathscr{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的并族 $\amalg_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{T}_\alpha$ 生成. 称 $(\amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T})$ 为拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的不交并空间, 记作 $\amalg_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$, 或者仍记为 $\amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

定义乘积集合 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上的开拓扑 $\mathscr{T}$ 如下. 对于有限个下标 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ 和 X_{α_i} 的开集 O_{α_i}, 记

$$O_{\alpha_1} \times \cdots \times O_{\alpha_n} = \{\, (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \mid x_{\alpha_i} \in O_{\alpha_i} \text{ 对 } i = 1, \cdots, n\}.$$

则 $\mathscr{T}$ 的拓扑基为所有以上形式的子集构成. 易证如果 $\mathscr{B}_\alpha$ 为 $\mathscr{T}_\alpha$ 的基, 则所有形如 $B_{\alpha_1} \times \cdots \times B_{\alpha_n}$, $B_{\alpha_i} \in$

$\mathscr{B}_{\alpha_i}$, 的子集也构成 $\mathscr{T}$ 的基. 称 $(\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathscr{T})$ 为拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的乘积空间, 记作 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$, 或者仍记为 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

定理1.8.11 设 $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族拓扑空间. $i_\alpha\colon X_\alpha \to \amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 和 $p_\alpha\colon \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ 分别为集合间的内射和投射.

内射族 $\{i_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下映射扩张性. 对任何映射族 $\{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在唯一的扩张映射 $f\colon \amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to Y$ 使得 $fi_\alpha = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

反之, 若存映射族 $\{i'_\alpha\colon X_\alpha \to X'\}$ 满足以下映射扩张性, 即对任何映射族 $\{f_\alpha\colon X_\alpha \to Y\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的映射 $f\colon X' \to Y$ 使得 $fi'_\alpha = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 则存在同胚映射 $\phi\colon X' \to \amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 使得 $i_\alpha = \phi i'_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

$\amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的不交并拓扑为使每个内射 i_α 都连续的最细拓扑.

对偶地, 投射族$\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下映射提升性. 对任何映射族 $\{f_\alpha\colon Y \to X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在唯一的提升映射 $f\colon Y \to \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 使得 $p_\alpha f = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

反之, 若存在映射族 $\{p'_\alpha\colon X' \to X_\alpha\}$ 满足以下映射提升性, 即对任何映射族 $\{f_\alpha\colon Y \to X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的映射 $f\colon Y \to X'$ 使得 $p'_\alpha f = f_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$, 则存在同胚映射 $\phi\colon \Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X'$ 使得 $p_\alpha = p'_\alpha \phi$ 对每个 $\alpha \in \Lambda$.

$\Pi_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上的乘积拓扑为使每个投射 p_α 都连续的最粗拓扑.

证 只要把定理1.8.4的证明中的所有的下标范围改成任意下标集 Λ 即可.

需要指出的是无穷不交并空间 $\amalg_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 非常广地被应用在代数拓扑中的各种空间的构造上, 但是无穷乘积空间并没有那么广的应用. 所以定理1.8.7到1.8.9虽然都有对无穷情形的推广, 但由于不常用, 故省略.

习题 1.8

1.8.1. 设 (X_i, ρ_i) 为度量空间, 定义 $X_1\times\cdots\times X_n$ 上的度量 ρ 为

$$\rho((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)) = \sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\cdots+\rho_n(x_n,y_n)^2}.$$

证明度量空间 $(X_1\times\cdots\times X_n, \rho)$ 的拓扑与乘积空间 $(X_1,\rho_1)\times\cdots\times(X_n,\rho_n)$ 的拓扑一样.

1.8.2. 设 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 为拓扑空间 X_1, X_2 的基, 证明 $\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2$ 为乘积空间 $X_1\times X_2$ 的基.

1.8.3. 设 A_i 为 X_i 的子空间. 证明 $A_1\times A_2$ 作为乘积空间的拓扑与作为 $X_1\times X_2$ 的子空间的拓扑一致.

1.8.4. 证明 X 为Hausdorff空间, 当且仅当 $\Delta(X)$ 为 $X\times X$ 的闭子集.

1.8.5. 设 x, y 分别为拓扑空间 X, Y 的点, W 为 (x,y) 的邻域. 显然分别存在 x, y 的邻域U, V 使得 $U\times V \subset W$. 设 A, B 分别为拓扑空间 X, Y 的紧子集, W 为 $A\times B$ 的邻域. 证明分别存在 A, B 的邻域U, V 使得 $U\times V \subset W$.

1.8.6. 设 Y 为紧空间. 证明对任何空间 X, 投射 $p\colon X\times Y\to X$, $p(x,y)=x$, 为闭映射, 即把所有闭集映为闭集的映射.

1.8.7. 设 $f\colon X\to Y$ 为拓扑空间的对应, 则 $\Gamma_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in X\}\subset X\times Y$ 称为 f 的图像. 对应 $\overline{f}\colon X\to X\times Y$ 定义为 $\overline{f}(x)=(x,f(x))$ 对所有 $x\in X$. 证明以下结论.

(1) f 为映射, 当且仅当 $\overline{f}$ 为映射.

(2) 如果 f 为映射, Y 为Hausdorff空间, 则 Γ_f 为 $X\times Y$ 的闭子集.

(3) 如果 Y 为紧空间, Γ_f 为 $X\times Y$ 的闭子集, 则 f 为映射.

(4) 如果 Y 为紧Hausdorff空间, 则 f 为映射, 当且仅当 Γ_f 为 $X\times Y$ 的闭子集.

(5) 举例 f 不连续, 但 Γ_f 为 $X\times Y$ 的闭子集.

1.8.8. 证明 $GL(n)\cong O(n)\times T(n)$, 其中 $GL(n)$ 为所有 n 阶可逆矩阵空间, $O(n)$ 为所有 n 阶正交阵空间, $T(n)$ 为所有 n 阶主对角元大于零的上三角矩阵空间. 但同胚映射并不是群同构.

1.8.9. 证明 $F_1\times\cdots\times F_n$ 为 $X_1\times\cdots\times X_n$ 的闭集, 其中每个 F_i 为 X_i 的闭集.

1.8.10. 设 A,B 分别为拓扑空间 X,Y 的子集, 证明

(1) $\mathrm{Int}(A\times B)=\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)$.

(2) $\mathrm{Cl}(A\times B)=\mathrm{Cl}(A)\times\mathrm{Cl}(B)$.

(3) $\mathrm{Bd}(A\times B)=\big(\mathrm{Cl}(A)\times\mathrm{Bd}(B)\big)\cup\big(\mathrm{Bd}(A)\times\mathrm{Cl}(B)\big)$.

1.8.11. 证明对于 $m,n\geqslant 0$, 我们有同胚 $S^{m+n+1}\cong(D^{m+1}\times S^n)\cup(S^m\times D^{n+1})$.

1.8.12. 证明对于 $m>0$ 和 $n\geqslant 0$, 我们有同胚 $\mathbb{R}^{m+n}\setminus\mathbb{R}^n\cong S^{m+n}\setminus S^n\cong\mathbb{R}^{n+1}\times S^{m-1}$.

1.9 商空间

由四则运算中的除法推广到等价关系导出的商集, 商关系往往是集合论能够解决各种复杂又微妙的数学问题的关键. 商空间和商映射对拓扑学也是如此, 它的特点是逻辑上非常简单易懂, 但几何直观却往往很难想象.

首先回顾一下集合论的相关概念. 设 $\sim$ 为集合 X 上的一个等价关系, 则 X 关于这个等价关系的所有等价类构成一个集合, 叫做 X 关于等价关系 $\sim$ 的商集, 或者等价类集, 记为 $X/{\sim}$. 从 X 到 $X/{\sim}$ 有一个自然的对应 p, 定义为 $p(x)=[x]$ 对所有 $x\in X$, 其中 $[x]$ 表示 x 所在的等价类. 对应 p 称为商投射.

以上集合论的概念可以完全推广到拓扑空间上, 就是以下定义.

定义1.9.1 设为 $(X,\mathscr{T})$ 为开拓扑空间, $\sim$ 为集合 X 上的等价关系. 则商投射 p 导出商集 $X/{\sim}$ 上的拓扑

$$\mathscr{T}/{\sim}\;=p(\mathscr{T})=\{W\,|\,p^{-1}(W)\in\mathscr{T}\},$$

称为 $\mathscr{T}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商拓扑, $(X/{\sim},\mathscr{T}/{\sim})$ 称为 $(X,\mathscr{T})$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间.

对偶地, 如果 $\mathscr{F}$ 为闭拓扑, 则

$$\mathscr{F}/\!\sim\ = p(\mathscr{F}) = \{W \,|\, p^{-1}(W) \in \mathscr{F}\},$$

称为 $\mathscr{F}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商拓扑, $(X/\!\sim, \mathscr{F}/\!\sim)$ 称为 $(X, \mathscr{F})$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间.

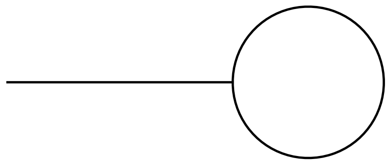
定理1.9.2 设 $\mathscr{T}, \mathscr{F}$ 为拓扑空间 X 上的互为对偶的拓扑, $\sim$ 为集合 X 上的等价关系. 则商拓扑 $\mathscr{T}/\!\sim$, $\mathscr{F}/\!\sim$ 也是 $X/\!\sim$ 上互为对偶的拓扑, 都是使商投射 $p\colon X \to X/\!\sim$ 连续的最细拓扑.

证 由于 $p^{-1}(W) \in \mathscr{T}$ 当且仅当 $p^{-1}(W^c) = (p^{-1}(W))^c \in \mathscr{F}$, 所以 $\mathscr{T}/\!\sim$ 和 $\mathscr{F}/\!\sim$ 也是对偶拓扑. 假如集合 $X/\!\sim$ 上的开拓扑 $\mathscr{T}'$ 使商投射 p 连续, 则对任何 $O \in \mathscr{T}'$, $p^{-1}(O) \in \mathscr{T}$. 这说明 $\mathscr{T}'$ 比 $\mathscr{T}/\!\sim$ 粗. 所以商拓扑为使商投射连续的最细拓扑.

定义1.9.3 设 A 为拓扑空间 X 的子空间, 则 X 商去 A 的商空间 X/A 定义为 X 中关于以下等价关系的商空间. A 中所有的点都等价, $X\backslash A$ 中的点只和自己等价. 称这个等价关系为把 A 粘成一点的等价关系.

从直观上讲, 商空间就是将拓扑空间中的点按照等价关系把所有等价的点粘起来得到的拓扑空间. 相比代数中商线性空间、商群、商环等概念, 拓扑的商空间不需要任何条件, 只不过粘起来后得到的商空间的性质就未必好了. 比如, 商空间自然保持紧(连通,道路连通)性, 即如果 X 为紧(连通,道路连通)空间, 则 X 的任何商空间仍然(局部)紧(连通,道路连通). 但是, 商空间不一定保持Hausdorff性.

例1.9.4 在不交并拓扑空间 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 上定义的等价关系 $\sim$ 如下. 记 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 中的一般元素为 $(x)_i$, $i = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}$. 则 $(x)_1 \sim (x)_2$ 如果 $x < 0$, $(x)_1 \sim (\frac{1}{x})_2$ 如果 $x > 0$. 则商空间如下图示意.



其中线和圆的交点处为两个点 $[(0)_1]$ 和 $[(0)_2]$, 这两点不能被开集分开.

定理1.9.5 如果 K 为紧Hausdorff空间 X 的闭子集, 则我们有 $(X\backslash K)^* \cong X/K$.

如果 K 为局部紧Hausdorff空间 X 的闭子集, 则我们有 $(X\backslash K)^* \cong X^*/(K\cup *) \cong X^*/K^*$, 其中点 $*$ 为一点紧化空间 X^* 的无穷远点.

证 假设 K 为紧Hausdorff空间 X 的闭子集, 因而也是紧子集. 记 $[K]$ 为 X/K 的由 K 所在的等价类对应的点. 则我们有1-1对应 $\phi\colon (X\backslash K)^* \to X/K$ 定义为 $\phi(x) = x$ 如果 $x \in X\backslash K$, $\phi(*) = [K]$. $(X\backslash K)^*$ 中的不含无穷远点 $*$ 的开集自然也为 X/K 中不含点 $[K]$ 的开集, 反之亦然. $(X\backslash K)^*$ 中的含无穷远点 $*$ 的开集的余集为 X 的与K不交的紧集, 由于 X 为紧Hausdorff空间, 所以也为 X 的与 K 不交的闭集. 而 X/K 中的含 $[K]$ 的开集的余集也为 X 的与 K 不交的闭集. 所以 ϕ 导出两个空间的开拓扑的1-1对应, 为同胚.

假设 K 为局部紧Hausdorff空间 X 的闭子集, 由定义 $K \cup *$ 为紧Hausdorff空间 X^* 的闭子集, 因而也是紧子集, 还是局部紧Hausdorff空间 K 的一点紧化空间. 由上结论 $(X\backslash K)^* = (X^*\backslash(K\cup *))^* \cong X^*/(K\cup *) \cong X^*/K^*$.

例1.9.6 显然 $D^n\backslash \mathrm{Bd}(D^n)$ 与 $S^n\backslash * \cong \mathbb{R}^n$ (基点 $*$ 任取) 同胚, 其中 $\mathrm{Bd}(D^n)$ 是作为 $\mathbb{R}^n$ 子集的边点集, 所以我们有 $D^n/\mathrm{Bd}(D^n) \cong (D^n\backslash \mathrm{Bd}(D^n))^* \cong (S^n\backslash *)^* \cong S^n$.

定理1.9.7 (商投射基本定理) 设 $f\colon X \to Y$ 为拓扑空间的映射, $\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系满足如果 $x \sim x'$, 就有 $f(x) \approx f(x')$, 则存在映射 $\tilde{f}\colon X/\!\sim\ \to Y/\!\approx$ 使得 $pf = \tilde{f}p$, 即映射满足以下交换图(商投射都用 p 表示).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X/\sim \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y/\approx \end{tikzcd}$$

特别地, 取 $\approx$ 为平凡的等价关系, 即投射为恒等映射, 我们就有以下结论. 假设 X 上的等价关系满足如果 $x \sim x'$, 就有 $f(x) = f(x')$, 则存在映射 $\widetilde{f}\colon X/\!\sim\ \to Y$ 使得 $f = \widetilde{f}p$, 即映射满足以下交换图.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

证 从集合论的角度, 对应 $\widetilde{f}$ 自然存在. 对于任何 $Y/\!\approx$ 的开集 O, $p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O)) = (\tilde{f}p)^{-1}(O) = (pf)^{-1}(O)$ $= f^{-1}(p^{-1}(O))$ 为 X 的开集. 这说明 $\tilde{f}^{-1}(O)$ 为 $X/\!\sim$ 的开集. 所以 $\tilde{f}$ 连续.

以上定理最常用的是后半部分, 它蕴含以下经常用到的结论: 对应 $\widetilde{f}\colon X/\!\sim\ \to Y$ 是连续的, 当且仅当存在映射 $f\colon X \to Y$ 使得 $f = \widetilde{f}q$. 换个说法, 商空间 $X/\!\sim$ 到 Y 的映射集合 $\{\widetilde{f}\}$ 与空间 X 到 Y 的满足 $f(x) = f(y)$ 对所有 $x \sim y$ 的映射集合 $\{f\}$ 之间有1-1对应 $\widetilde{f} \to f{=}\widetilde{f}q$.

例1.9.8 记 $G(r,n)$ 为线性空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有 r 维线性子空间构成的集合. 在什么意义下, $G(r,n)$ 构成拓扑空间呢？我们至少有两种角度来定义这个拓扑空间.

记 $M(r,n)$ 为秩为 r 的 $r{\times}n$ 阶矩阵构成的集合. 则 $M(r,n)$ 为 $\mathbb{R}^{rn}$ 的开子空间, 因为它的 $k = \binom{n}{r}$ 个 r 阶子式不全为零, 即 $M(r,n) = f^{-1}(\mathbb{R}^k\backslash 0)$, 其中 $f(M) = (x_1,\cdots,x_k)$ 的坐标 x_i 为 $r{\times}n$ 阶矩阵 M 的所有 r 阶子式. 存在集合的对应 $\phi\colon M(r,n) \to G(r,n)$ 定义为对每个 $M \in M(r,n)$, $\phi(M)$ 为 M 的 r 个行向量张成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 定义 $M(r,n)$ 上的等价关系 $\sim$ 如下. $M \sim M'$, 如果 $\phi(M) = \phi(M')$, 等价地, 如果存在可逆矩阵 V 使得 $M = VM'$. 所以存在集合的1-1对应 $\widetilde{\phi}\colon M(r,n)/\!\sim\ \to G(r,n)$.

同样, 记 $O(r,n)$ 为所有标准正交的 $r{\times}n$ 阶矩阵构成的集合, 标准正交矩阵就是指该矩阵的行向量互相垂直且长度为1, 等价地, 该矩阵可以扩张成一个正交矩阵. 则 $O(r,n)$ 为紧空间, 因为它是 $\mathbb{R}^{rn}$ 的有界闭子集. 存在集合的对应 $\psi\colon O(r,n) \to G(r,n)$ 定义为对每个 $O \in O(r,n)$, $\phi(O)$ 为 O 的 r 个行向量张成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 定义$O(r,n)$ 上的等价关系 $\approx$ 如下. $O \approx O'$, 如果 $\psi(O) = \psi(O')$, 等价地, 如果存在正交矩阵 V 使得 $O = VO'$. 所以存在集合的1-1对应 $\widetilde{\psi}\colon O(r,n)/_{\approx} \to G(r,n)$.

由以上两个1-1对应$\widetilde{\phi}$ 和 $\widetilde{\psi}$ 定义的 $G(r,n)$ 的拓扑是否相同呢？由习题1.8.10, $M(r,n) \cong T(r){\times}O(r,n)$. 记 $p\colon M(r,n) \to O(r,n)$ 为投射. 假设在 $G(r,n)$ 中 $M \sim M'$, 即 $M = VM'$, 其中 V可逆. 令 $M = TO$, $M' = T'O'$, 其中 $T,T' \in T(r)$, $O,O' \in O(r,n)$. 则 $TO = GT'O'$. 所以 $W = T^{-1}GT'$ 为正交阵, 即 $O \approx O'$.

由商投射基本定理, 我们有以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} M(r,n) & \xrightarrow{p} & O(r,n) \\ \widetilde{\phi}\downarrow & & \widetilde{\psi}\downarrow \\ M(r,n)/\!\sim & \xrightarrow{\widetilde{p}} & O(r,n)/_{\approx}. \end{array}$$

由 p 为开映射可知 $\widetilde{p}$ 也为开映射, 因而连续的1-1对应 $\widetilde{p}$ 也是同胚映射. 所以 $\widetilde{\phi}$ 和 $\widetilde{\psi}$ 定义了 $G(r,n)$ 上相同的拓扑. 从 $M(r,n)$ 的商空间角度我们看不出 $G(r,n)$是紧空间. 但是由于 $O(r,n)$ 紧, 所以 $G(r,n)$ 也紧. $G(r,n)$ 称为Grassmann流形.

特别地, $G(1,n+1)$ 称为 n维实射影空间, 记为 RP^n. 由以上讨论, 它是 $\mathbb{R}^n\backslash 0$ 关于以下等价关系 $\sim$ 的商空间. $x\sim y$ 如果存在 $\lambda\neq 0$ 使得 $x=\lambda y$. 从这个角度很难想象 RP^n 的几何形象. 它也是球面 S^n 关于以下等价关系 $\approx$ 的商空间. $x\approx y$ 如果 $x=-y$. 等价说法, 射影空间 RP^n 是球面 S^n 将所有对径点粘合得到的商空间.

把以上定义中的实数变为复数, 我们就有复Grassmann流形和复射影空间 CP^n. 复射影空间 CP^n 在代数, 拓扑和几何中都是非常重要的空间.

设 $\sim$ 和 $\approx$ 分别为集合 X 和 Y 上的等价关系, 则乘积集合 $X\times Y$ 上的自然存在乘积等价关系 $(\sim,\approx)$ 如下定义. $(x,y)\,(\sim,\approx)\,(x',y')$, 如果 $x\sim x'$ 并且 $y\approx y'$. 由此得到以下集合对应的交换图.

$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \xrightarrow{p\times q} & (X/\!\sim)\times(Y/_{\approx}) \\ \Phi\downarrow & \nearrow \phi & \\ (X\times Y)/_{(\sim,\approx)} & & \end{array}$$

其中 p,q,Φ 为商投射, $\phi([(x,y)])=([x],[y])$. ϕ 显然为1-1对应. 当 X,Y 都为拓扑空间时, 由商投射基本定理得到以上映射的交换图. 但是1-1对应 ϕ 却不一定是同胚! 也就是说乘积空间关于乘积等价关系的商空间与商空间的乘积空间未必同胚. 要想更好地理解这个问题就必须从商映射的角度重新审视商空间.

定义1.9.9 映射 $f\colon X\to Y$ 称为商映射, 如果 f 为满射并且 Y 的拓扑由 f 导出, 即 O 为 Y 的开集, 当且仅当 $f^{-1}(O)$ 为 X 的开集; 对偶地, 也是等价地, F 为 Y 的闭集, 当且仅当 $f^{-1}(F)$ 为 X 的闭集. 称拓扑空间 X 为商映射 f 的全空间, 称 Y 为商映射 f 的商空间.

定理1.9.10 商投射为商映射. 反之, 设 $f\colon X\to Y$ 为商映射, 定义 X 上的等价关系 $\sim$ 为 $x\sim x'$ 如果 $f(x)=f(x')$. 则由商投射基本定理得到的商投射 $g\colon X/\!\sim\ \to Y$ 为同胚映射.

证 商投射为商映射由定义. 反之, 如果 $f\colon X\to Y$ 为商映射, 则导出映射 $g\colon X/\!\sim\ \to Y$ 为1-1对应. 由商映射定义, Y 的子集 O 为开集, 当且仅当 $f^{-1}(O)=p^{-1}(g^{-1}(O))$ 为 X 的开集, 当且仅当 $g^{-1}(O)$ 为 $X/\!\sim$ 的开集. 所以 g 为同胚映射.

显然满的开(闭)映射(将开(闭)集映为开(闭)集的映射)为商映射, 但是逆命题不成立.

例1.9.11 不考虑拓扑结构而只把 $\mathbb{R}$ 看成一个Abel群, 记这个群为 $A(\mathbb{R})$. 同样 $\mathbb{R}$ 的子集 $\mathbb{Q}$ 也是 $A(\mathbb{R})$ 的子群, 记这个子群为 $A(\mathbb{Q})$. 于是我们得到商群 $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$. 由定义, 商群 $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ 为实数集 $\mathbb{R}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商集 $\mathbb{R}/_{\sim}$, 其中 $x\sim y$ 如果 $x-y$ 为有理数. 因此 $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ 从 $\mathbb{R}$ 上继承了商拓扑. 记 $p\colon\mathbb{R}\to$

$A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ 为商投射. 设 O 为 $\mathbb{R}/\!\sim$ 的开集, 即 $p^{-1}(O)$ 为 $\mathbb{R}$ 的开集, 则存在开区间 $(a,b) \subset p^{-1}(O)$. 于是对任何 $r \in \mathbb{Q}$, 都有 $(a{+}r, b{+}r) \subset p^{-1}(O)$. 所以 $\mathbb{R} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}(a{+}r, b{+}r) \subset p^{-1}(O)$, 即 $p^{-1}(O) = \mathbb{R}$. 这说明 $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ 的唯一非空开集为全集, 即其拓扑为平凡拓扑. 任取一个 $\mathbb{R}$ 的包含 $\mathbb{Q}$ 的真开子集 U, 则 $p(U)$ 不是开集. 所以 p 不是开映射. 由于 $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ 为平凡拓扑, 所以 p 的意义不大.

不考虑群结构, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间, 我们有商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. 作为集合, $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}]\amalg(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. 所以 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的所有非空开集与 $\mathbb{R}$ 的所有包含 $\mathbb{Q}$ 的开集1-1对应. 对于任何开区间 (a,b), $q((a,b))$ 不是 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的开集. 所以商投射 $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 也不是开映射.

定理1.9.12 设 $f\colon X \to Y$ 为商映射. 如果 K 是局部紧空间, 则 $1_K{\times}f$ 仍为商映射. 所以如果两个商映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Z \to W$ 满足 X, W 都为局部紧空间或者 Y, Z 都为局部紧空间, 则 $f{\times}g$ 为商映射.

证 设对于 $K{\times}Y$ 的一个未必开的子集 O, 它的原象集 $U = (1_K{\times}f)^{-1}(O)$ 为 $K{\times}X$ 的开集.

对任何 K 的子集 W, 定义 X 的子集 W_X (可以为空集) 为满足 $W{\times}W_X \subset U$ 的最大子集, 即 $W{\times}W_X \subset U$ 并且如果存在 S 满足 $W{\times}S \subset U$, 则 $S \subset W_X$. 类似地, 定义 Y 的子集 W_Y 为满足 $W{\times}W_Y \subset O$ 的最大子集.

对于独点集 w, 显然 $w_X = p_{_X}((w{\times}X)\cap U)$, 其中 $p_{_X}\colon K{\times}X \to X$ 为投射. 同理, $w_Y = p_{_Y}((w{\times}Y)\cap O)$, 其中 $p_{_Y}\colon K{\times}Y \to Y$ 为投射. 所以我们有 $w_X = (1_K{\times}f)^{-1}(w_Y)$. 于是, 对于 K 的任何子集 W, 我们有

$$W_X = \cap_{w\in W}\, w_X = \cap_{w\in W}\,(1_K{\times}f)^{-1}(w_Y) = (1_K{\times}f)^{-1}(\cap_{w\in W}\, w_Y) = (1_K{\times}f)^{-1}(W_Y).$$

对于独点集 w, w_X 为 X 的开集, 因为如果 $x \in w_X$, 则 $(w,x) \in U$, 所以存在 w 的邻域 O 和 x 的邻域 P 满足 $O{\times}P \subset U$, 这说明 $P \subset w_X$, 即 x 为 w_X 的内点. 现证如果 W 为 K 的紧子集, 则 W_X 仍为 X 的开集. 对于任何 $x \in W_X$ 和 $w \in W$, 存在 (w,x) 的方形开邻域 $M_{(w,x)} \times N_{(w,x)}$ 使得 $M_{(w,x)} \times N_{(w,x)} \subset U$. 于是得到紧集 W 的开覆盖 $\{M_{(w,x)}\}_{w\in W}$. 所以存在有限个 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $W \subset \cup_{k=1}^n M_{(w_k,x)}$. 令 $V_x = \cap_{i=1}^n N_{(w_i,x)}$, 则 $W{\times}V_x \subset U$, 即 $V_x \subset W_X$. 这说明 x 为 W_X 的内点, 所以 W_X 为 X 的开集.

由上结论和 $W_X = (1_K{\times}f)^{-1}(W_Y)$ 可知, 当 W 为 K 的紧子集时, W_Y 为 Y 的开集.

现证 O 为 $K{\times}Y$ 的开集. 对于任何 $(w,x) \in U$, 存在它的方形邻域 $M_{(w,x)}{\times}N_{(w,x)}$ 包含于 U. 由 K 的局部紧性可知, 存在 w 的紧邻域 $K_{(w,x)}$ 使得 $K_{(w,x)} \subset M_{(w,x)}$. 由定义可知 $K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_X \subset U$ $((-)_X$ 如上定义). 所以 $(1{\times}f)(K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_X) = K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_Y \subset O$ 并且 $(K_{(w,x)})_Y$ 为 Y 的开集. 于是

$$O = (1_K{\times}f)(U) = (1_K{\times}f)(\cup_{(w,x)\in U} K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_X) = \cup_{(w,x)\,\in U} K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_Y$$

为 Y 的开集, 因为 x 为 $K_{(w,x)}$ 的内点, 所以每个 $K_{(w,x)}{\times}(K_{(w,x)})_Y$ 包含某个方形开集.

不难由定义证明商映射的复合映射还是商映射. 所以如果 X, W 都局部紧, 则 $f{\times}g = (f{\times}1_W)(1_X{\times}g)$ 为商映射. 同理, 如果 Y, Z 都局部紧, 则 $f{\times}g = (1_Y{\times}g)(f{\times}1_Z)$ 为商映射.

以上定理最主要的应用是以下同伦的情况.

定理1.9.13 设 $\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系. 如果映射 $H\colon I{\times}X \to Y$ 满足以下性质, 只要 $x \sim x'$, 就有 $H(t,x) \approx H(t,x')$ 对所有的 $t \in I$, 则存在映射 $\overline{H}\colon I{\times}(X/_\sim) \to Y/_\approx$ 使得下图可交换,

$$\begin{tikzcd}
I{\times}X \arrow[r, "1_I{\times}H"] \arrow[d, "1_I{\times}q"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
I{\times}(X/_\sim) \arrow[r, "\overline{H}"] & Y/_\approx
\end{tikzcd}$$

即 $qH=\overline{H}(1_I\times q)$, 其中纵向的两个 q 为商投射.

习题 1.9

1.9.1. 设 $p\colon X\to X/{\sim}$ 为商投射, X 为Hausdorff空间, 等价关系 $\sim$ 满足以下条件.

(1) 每一个等价类都有限.

(2) 对每一点 $x\in X$, 存在 x 的邻域 O 使得 p 限制在 O 上为同胚.

证明商空间 $X/{\sim}$ 仍为Hausdorff空间.

1.9.2. 设 A 为局部紧Hausdorff空间 X 的闭子空间, 证明 X/A 为Hausdorff空间.

1.9.3. 证明对于 $m>n$, $\mathbb{R}^m/I^n\cong\mathbb{R}^m/D^n\cong\mathbb{R}^m$.

1.9.4. 证明对于 $m>n$, $(\mathbb{R}^m\backslash\mathbb{R}^n)^*\cong S^m/S^n$.

1.9.5. 证明 $(S^1\times S^1)/(*\times S^1)\cong(S^1\times S^1)/\Delta(S^1)$, $(D^1\times D^1)/1\times D^1\not\cong(D^1\times D^1)/\Delta(D^1)$, 其中 $*$ 为 S^1 上任一点, Δ 为对角映射.

1.9.6. 令 $X=(S^1\times S^1)/((*\times S^1)\cup(S^1\times *))$, 试在 $\mathbb{R}^3$ 中画出 $S^1\times S^1$ 和 X 的嵌入子空间.

1.9.7. 令 $Y=(S^1\times S^1)/((*\times S^1)\cup\Delta(S^1)$, 问 Y 和上题的 X 是否同胚?

1.9.8. 令 $X=(I\times S^0\times S^1)/\sim$, 其中 $(1,\pm1,x)\sim(1,\pm1,x')$, $(0,-1,x)\sim(0,1,x)$, 对所有 $x,x'\in S^1$, 试在 $\mathbb{R}^3$ 中画出 X 的嵌入子空间.

1.10 基本乘积空间

定义1.10.1 拓扑空间 X 和 Y 的连接空间 $X{*}Y$ 定义如下. 在乘积空间 $X\times I\times Y$ 中定义等价关系 $\sim$ 为

$$(x,1,y)\sim(x',1,y),\quad (x,0,y)\sim(x,0,y')\ \text{对所有}\ x,x'\in X\ \text{和}\ y,y'\in Y.$$

则定义 $X{*}Y=(X\times I\times Y)/{\sim}$.

由于对于任何 $x{\in}X$ 和 $y{\in}Y$, $X{*}Y$ 的子空间 $x\times I\times y$ 同胚于 I, 而 I 在几何形象上为一直线段, 所以总是把 $X{*}Y$ 的点 $[x,t,y]$ 记为 $(1{-}t)x{+}ty$. 采用这种记号的好处就是直线段 $x\times I\times y$ 的两个端点分别为 $[x,0,y]=1x{+}0y=x$ 和 $[x,1,y]=0x{+}1y=y$. 所以采用这种表示法, 连接空间又有另一种定义

$$X*Y=\{(1{-}t)x{+}ty\,|\,(x,y)\in X\times Y,\ t\in I\},$$

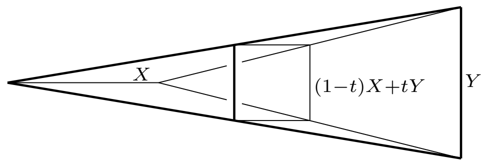
而且 X 和 Y 自然是 $X{*}Y$ 的子空间 $X=1X{+}0Y$ 和 $Y=0X{+}1Y$. 从这个角度看, 连接空间 $X{*}Y$ 就是由以 X 中的点为起点, 以 Y 中的点为终点的所有直线段"拼"成的空间. 另外, 空集 $\emptyset$ 为任何拓扑空间的子空间, 所以定义 $X{*}\emptyset=X$, $\emptyset{*}Y=Y$, 则 X 和 Y 也可以看成 $X{*}Y$ 的子空间 $X{*}\emptyset=X$ 和 $\emptyset{*}Y=Y$.

类似地, 我们可以定义多重连接空间

$$X_1*\cdots*X_n=\{\,t_1x_1+\cdots+t_nx_n\,|\,t_i\geqslant 0,\,t_1+\cdots+t_n=1,\,x_i\in X_i\,\},$$

其中如果某个 $t_i=0$, 则 $t_1x_1+\cdots+t_nx_n=t_1x_1+\cdots+t_{i-1}x_{i-1}+t_{i+1}x_{i+1}+\cdots+t_nx_n$.

我们用一条横线表示空间 X, 一条竖线表示空间 Y, 则一个方框就表示空间 $X\times Y$, 于是 $X*Y$ 可由下图表示



其中左边的横线表示子空间 X, 右边的竖线表示子空间 Y, 中间任一横截的方框就表示同胚于 $X\times Y$ 的子空间 $(1-t)X+tY$, 其中 $t\in(0,1)$.

连接空间最直接的应用就是单纯复形的定义.

定义1.10.2 组合单纯复形 K 为以有限集合为元素的集合, 满足如果 $\sigma\in K$ 并且 $\tau\subset\sigma$, 则 $\tau\in K$. 称 K 的元素为组合单形, 组合单形的维数定义为单形所含元素的个数减 1. K 的一个组合 0-单形又称为 K 的一个顶点, K 的一个组合 1-单形又称为 K 的一个边, K 的一个组合 2-单形又称为 K 的一个三角形. 一般地, K 的由 $n+1$ 个顶点构成的组合单形就称为 K 的一个组合 n-单形. 特别地, 规定空集 $\emptyset$ 为 K 的唯一一个组合 (-1)-单形. 如果两个组合单形满足 $\sigma\subset\tau$, 则称 σ 为 τ 的一个面. 如果 τ 的一个面作为集合真包含于它, 则称该面为真面.

组合单纯复形 K 的维数 $\dim K$ 为 K 的所有组合单形维数中的最大值(可以为无穷). 特别地, 只有一个 (-1) 维单形构成的组合单纯复形称为空组合单纯复形, 规定其维数为 -1. 有限维组合单纯复形是指维数有限的组合单纯复形. 有限组合单纯复形是指组合单形个数有限的组合单纯复形.

组合单纯复形 L 称为组合单纯复形 K 的组合单纯子复形, 如果 $L\subset K$. 记 K 的所有维数不超过 n 的组合单形构成的单纯复形为 K^n, 称为 K 的 n 维组合骨架.

组合单纯复形 K 唯一对应一个拓扑空间 $|K|$, 也称为一个几何单纯复形和 K 的几何实现, 定义如下. 设 $\sigma=\{v_0,\cdots,v_n\}$ 为 K 的一个 n-单形, 则 σ 对应一个拓扑空间 $|\sigma|=v_0*v_1*\cdots*v_n$, 其中 v_i 又表示由该顶点构成的独点拓扑空间. 这类拓扑空间满足如果 σ 为 τ 的面, 则 $|\sigma|$ 为 $|\tau|$ 的闭子空间. 所以我们有以下几何单纯复形的定义

$$|K|=\cup_{\sigma\in K}|\sigma|.$$

上式中 $|K|$ 的闭子空间 $|\sigma|$ 称为 $|K|$ 的一个几何 n-单形.

几何复形 $|K|$ 的维数 $\dim|K|=\dim K$, 为 $|K|$ 的所有几何单形维数中的最大值. 特别地, 空拓扑空间 $\emptyset$ 称为空几何单纯复形, 规定其维数为 -1. 有限维几何单纯复形是指维数有限的几何单纯复形. 有限几何单纯复形是指几何单形个数有限的几何单纯复形.

如果组合单纯复形 L 为组合单纯复形 K 的组合单纯子复形, 则称 $|L|$ 为 $|K|$ 的几何单纯子复形. 记 $|K|$ 的所有维数不超过 n 的几何单形并成的几何单纯复形为 $|K|^n$, 称为 $|K|$ 的 n 维几何骨架.

由于组合单纯复形和几何单纯复形是1-1对应的, 所以以后在不引起误解的情况下, 总是省略组合和几何的字样, 把两者统称为单纯复形, 把 $|K|$ 简记为 K, 把几何单形 $|\sigma|$ 简记为组合单形 σ, 把几何骨架 $|K|^n$ 简记为组合骨架 K^n.

定义1.10.3 组合单纯复形 K 和 L 的连接复形 $K{*}L$ 定义为

$$K * L = \{\sigma \amalg \tau \mid \sigma \in K,\ \tau \in L\},$$

其中 $\amalg$ 为集合的不交并, 规定 $\emptyset \amalg \emptyset = \emptyset$. 显然有几何实现的相同 $|K{*}L| = |K|{*}|L|$.

早期人们总是把单纯复形定义为某个有限维线性空间的具有局部线性结构的紧子空间, 而以这种方式定义的单纯复形在环面拓扑中有着非常重要的应用, 所以我们有以下从这个角度出发的定义. 以下定义的单纯复形对应着以上定义的单纯复形中的有限单纯复形.

定义1.10.4 有限维实线性空间 V 中的 n-单形是指 V 中的 $n{+}1$ 个几何无关的向量生成的闭包子空间. 具体地, 如果 $x_0,\cdots,x_n$ 为 V 的几何无关 ($x_1{-}x_0,\cdots,x_n{-}x_0$ 线性无关) 的向量, 则 n-单形 $\Delta(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 定义为

$$\Delta(x_0,\cdots,x_n) = \{t_0x_0{+}\cdots{+}t_nx_n \,|\, t_i \geqslant 0,\ t_0{+}\cdots{+}t_n = 1\}.$$

由于 x_i 为线性空间中的向量, 所以上式中的加号为线性空间的加法运算, 如果把 x_i 理解为独点拓扑空间, 上式中的加号理解为定义1.10.1中的形式加号, 就自然得出 $\Delta(x_0,\cdots,x_n)$ 与连接空间 $x_0{*}\cdots{*}x_n$ 的同胚. 对于 $\{x_0,\cdots,x_n\}$ 的任意非空子集 $\{i_0,\cdots,i_s\}$, s-单形 $\Delta(x_{i_0},\cdots,x_{i_s})$ 称为 n-单形 $\Delta(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 的一个面. 如果 $s < m$, $\Delta(x_{i_0},\cdots,x_{i_s})$ 称为 $\Delta(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 的一个真面. 特别地, 0-单形 $\Delta(x)$ 由于就是独点空间 x, 所以总是简记为 x. 一个单形 $\Delta(x_0,\cdots,x_n)$ 的每个 0 维面 x_i 也称为单形的顶点. 总是定义空集 $\emptyset$ 为唯一的一个 -1 维单形, 称为空单形.

有限维实线性空间 V 上的一个单纯复形 K 是指由 V 中的有限个规则相处的单形的并构成的子空间, 这里规则相处如下定义. 单形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 规则相处, 如果对任何 $i \neq j$, 都有 $\sigma_i \neq \sigma_j$, 并且交集 $\sigma_i{\cap}\sigma_j$ 总是 σ_i 和 σ_j 的共同的真面(当然包括空集).

K 的维数定义为规则相处的单形的维数中的最大的那个数. 规定空集为维数 -1 的单纯复形, 称为空复形.

线性空间 V 上的单纯复形 K 和线性空间 W 上的单纯复形 L 的连接复形 $K{*}L$ 是指 $V{\oplus}\mathbb{R}{\oplus}W$ 上如下定义的单纯复形. 对于 V 上的单形 $\Delta(x_0,\cdots,x_m)$ 和 W 上的单形 $\Delta(y_0,\cdots,y_n)$, 定义 $V{\oplus}\mathbb{R}{\oplus}W$ 上的连接单形为

$$\Delta(x_0,\cdots,x_m){\sqcup}\Delta(y_0,\cdots,y_n) = \Delta((x_0,0,0),\cdots,(x_m,0,0),(0,1,y_0),\cdots,(0,1,y_n)).$$

则如果 K 由规则相处的单形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$ 的并构成, L 由规则相处的单形 $\tau_1,\cdots,\tau_t$ 的并构成, 那么 $K{*}L$ 就是由规则相处的单形 $\{\sigma_i{\sqcup}\tau_j\}_{i=1,\cdots,s,\,j=1,\cdots,t}$ 的并构成.

不难证明以上定义的 $V{\oplus}\mathbb{R}{\oplus}W$ 上的连接复形 $K{*}L$ 和连接拓扑空间 $K{*}L$ 同胚, 所以我们在符号上不必区分两者. 具体地, 由连接空间 $\Delta(x_0,\cdots,x_m){*}\Delta(y_0,\cdots,y_n)$ 到连接单形 $\Delta(x_0,\cdots,x_m){\sqcup}\Delta(y_0,\cdots,y_n)$ 的同胚 ϕ 定义为

$$\begin{aligned}
&\phi((1{-}\lambda)(s_0x_0{+}\cdots{+}s_mx_m) + \lambda(t_0y_0{+}\cdots{+}t_ny_n))\\
= \;\;&(1{-}\lambda)s_0(x_0,0,0){+}\cdots{+}(1{-}\lambda)s_m(x_m,0,0) + \lambda t_0(0,1,y_0){+}\cdots{+}\lambda t_n(0,1,y_n).
\end{aligned}$$

由粘结定理, 以上的单形之间的同胚映射 ϕ 可以粘结成从拓扑空间 $K*L$ 到单纯复形 $K*L$ 的同胚映射 ϕ.

下图表示了平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两个不规则相处的 2-单形的两种情况.

注意, 一个 m-单形 σ 和一个 n-单形 τ 的连接单形 $\sigma*\tau$ 的维数是 $m+n+1$. 因此如果单纯复形 K 和 L 的维数分别为 m 和 n, 则 $K*L$ 的维数为 $m+n+1$. 而拓扑空间 $K\times L$ 并没有自然的单纯复形结构, 需要人为地对其进行剖分才能看成单纯复形, 而且剖分后的单纯复形维数是 $m+n$. 所以拓扑空间 $K*L$ 和 $K\times L$ 一般地讲是很不一样的拓扑空间.

代数拓扑的主要内容包括同伦论和同调论. (上)同调群是建立在空间偶上的, 而同伦论的主要结论也都是定义在带基点空间上的. 所以我们必须了解什么是空间偶和带基点空间以及相关的空间构造.

定义1.10.5 (拓扑)空间偶 (X,A) 为一对拓扑空间, 其中 A 为 X 的子空间. 经常把拓扑空间 X 看成特殊的空间偶 $(X,\emptyset)$. 两个空间偶之间的偶映射 $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ 为一个满足 $f(A)\subset B$ 的映射 $f\colon X\to Y$.

两个空间偶 (X,A) 和 (Y,B) 是同胚的, 记为 $(X,A)\cong(Y,B)$, 如果存在偶映射 $f\colon(X,A)\to(Y,B)$ 和 $g\colon(Y,B)\to(X,A)$ 使得 $gf=1_{(X,A)}$, $fg=1_{(Y,B)}$, 其中 1 表示恒等映射.

空间偶的不交并定义为空间偶 $(X,A)\amalg(Y,B)=(X\amalg Y, A\amalg B)$.

空间偶的乘积定义为空间偶 $(X,A)\times(Y,B)=(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$.

空间偶的对角乘积定义为空间偶 $(X,A)\widehat{\times}(Y,B)=(X\times Y, A\times B)$.

空间偶的连接定义为空间偶 $(X,A)*(Y,B)=(X*Y,(X*B)\cup(A*Y))$.

空间偶的对角连接定义为空间偶 $(X,A)\widehat{*}(Y,B)=(X*Y,A*B)$.

定义1.10.6 带基点空间空间 (X,x_0) 就是子空间为独点空间的空间偶, 其中点 x_0 称为基点. 两个带基点空间之间的偶映射 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 就称为保基点映射. 换个说法, 保基点映射就是把基点映为基点的映射.

两个带基点空间 (X,x_0) 和 (Y,y_0) 是同胚的, 记为 $(X,x_0)\cong(Y,y_0)$, 如果存在保基点映射 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 和 $g\colon(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 使得 $gf=1_{(X,x_0)}$, $fg=1_{(Y,y_0)}$, 其中 1 表示恒等映射.

带基点空间的乘积空间定义为 $(X,x_0)\times(Y,y_0)=(X\times Y,(x_0,y_0))$.

带基点空间的一点并空间 (有时称为楔积空间) $(X,x_0)\vee(Y,y_0)=(X\vee Y,*)$ 为如下定义的带基点空间. $X\vee Y$ 定义为商空间 $(X\amalg Y)/\{x_0,y_0\}$, 基点 $*$ 定义为商空间中的等价类 $\{x_0,y_0\}$. 记 $X\vee Y$ 中的点为 $x\vee y$ 的形式. 则符号 $x\vee y$ 蕴含 x 和 y 中至少有一点为基点. $x_0\vee y_0$ 为 $X\vee Y$ 的基点. 总是把 X 看成 $X\vee Y$ 的子空间 $X\vee y_0$, 把 Y 看成 $X\vee Y$ 的子空间 $x_0\vee Y$. 另一种等价的定义为把 $X\vee Y$ 看成 $X\times Y$ 的子空间 $(X\times y_0)\cup(x_0\times Y)$, 基点为 (x_0,y_0).

带基点空间的压缩积空间(有时称为外积空间) $(X,x_0)\wedge(Y,y_0)=(X\wedge Y,*)$ 如下定义. $X\wedge Y$ 定义为商空间 $\big((X\times Y)/((X\times y_0)\cup(x_0\times Y)),*\big)$, 基点定义为由子空间 $(X\times y_0)\cup(x_0\times Y)$ 压缩成的一点. 等价地, 当把一点并空间 $X\vee Y$ 看成 $X\times Y$ 的子空间 $(X\times y_0)\cup(x_0\times Y)$ 时, $X\wedge Y$ 就为商空间 $(X\times Y)/(X\vee Y)$, 基点定义为由子空间 $X\vee Y$ 压缩成的一点. 记 $X\wedge Y$ 中的点为 $x\wedge y$. 则 $x_0\wedge y=x\wedge y_0=x_0\wedge y_0$ 对所有 $x\in X$ 和 $y\in Y$.

如不说明, 带基点空间 $(X/A,*)$ 的基点 $*$ 总是取由子空间 A 压缩成的一点 $[A]$.

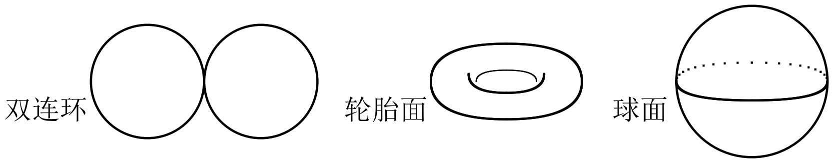
例1.10.7 定义映射 $f\colon S^1\vee S^1\to\mathbb{R}^3$, $g\colon S^1\times S^1\to\mathbb{R}^3$, $h\colon S^1\wedge S^1\to\mathbb{R}^3$ 如下, 其中 S^1 的基点取为 $(1,0)$.

$$f((x_1,x_2)\vee(1,0))=(x_1-1,0,x_2),\quad f((1,0)\vee(x_1,x_2))=(1-x_1,0,x_2),$$

$$g((\cos\theta,\sin\theta),(\cos\vartheta,\sin\vartheta))=(\cos\theta(1+\tfrac{1}{2}\sin\vartheta),\sin\theta(1+\tfrac{1}{2}\sin\vartheta),\tfrac{1}{2}\cos\vartheta),$$

$$h((x_1,x_2)\wedge(y_1,y_2))=(\frac{\lambda^2+\mu^2-1}{\lambda^2+\mu^2+1},\frac{-2\lambda}{\lambda^2+\mu^2+1},\frac{-2\mu}{\lambda^2+\mu^2+1}),\ \lambda=\frac{x_1}{x_2},\ \mu=\frac{y_1}{y_2}.$$

显然 f,g,h 的像为下图中从左至右的三个 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.



所以这三个由紧空间到Hausdorff空间的连续的单射都为嵌入.

映射的扩张(提升)性不难推广到偶映射的扩张(提升)性和保基点映射的扩张(提升)性, 这里不再以定理的方式详细叙述. 具体地, 由 (X,A) 和 (Y,B) 到不交并偶 $(X\amalg Y,A\amalg B)$ 的两个内射满足偶映射的扩张性, 由对角乘积偶 $(X\times Y,A\times B)$ 到 (X,A) 和 (Y,B) 的两个投射满足偶映射的提升性. 由 (X,x_0) 和 (Y,y_0) 到一点并空间 $(X\vee Y,*)$ 的两个内射满足保基点映射的扩张性, 由乘积空间 $(X\times Y,(x_0,y_0))$ 到 (X,x_0) 和 (Y,y_0) 的两个投射满足保基点映射的提升性.

需要指出的是乘积偶 $(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$ 并没有到 (X,A) 和 (Y,B) 的投射, 压缩积 $(X\wedge Y,*)$ 也没有到 (X,x_0) 和 (Y,y_0) 的投射, 但这并不影响两类空间在代数拓扑中的重要性.

球面 S^n 是代数拓扑最基本也是最重要的一类空间, 而球面关于运算 $\wedge$ 和 $*$ 在同胚的意义上都是封闭的, 即我们有 $S^m\wedge S^n\cong S^{m+n}$ 和 $S^m*S^n\cong S^{m+n+1}$. 为了严格证明这两个等式, 我们需要以下更一般的概念和使用范围更广的公式的证明.

定理1.10.8 设空间偶(X,A) 和 (Y,B) 满足 X 和 Y 都为紧Hausdorff空间, A 和 B 都为闭子空间, 则

$$((X\times Y)/((X\times B)\cup(A\times Y)),*)\cong((X/A)\wedge(Y/B),*).$$

证 定义 $\phi\colon X\times Y\to(X/A)\wedge(Y/B)$ 为 $\phi(x,y)=q(q_A(x),q_B(y))=[x]\wedge[y]$, 其中 $q_A\colon X\to X/A$, $q_B\colon Y\to Y/B$ 和 $q\colon(X/A)\times(Y/B)\to(X/A)\wedge(Y/B)$ 为商投射. 显然 ϕ 限制在 $(X\setminus A)\times(Y\setminus B)$ 上为1-1对应, $\phi^{-1}(*)=(X\times B)\cup(A\times Y)$. 由商投射基本定理, 存在 $\bar\phi\colon(X\times Y)/((X\times B)\cup(A\times Y))\to(X/A)\wedge(Y/B)$ 为连续的1-1对应. 显然 $(X\times Y)/((X\times B)\cup(A\times Y))$ 为紧空间, 而易证 $(X/A)\wedge(Y/B)$ 为Hausdorff空间, 所以 $\bar\phi$ 为同胚映射. 换个说法, 公式 $\bar\phi([x,y])=[x]\wedge[y]$ 定义了紧空间到Hausdorff空间的连续的1-1对应, 所以为同胚映射.

例1.10.9 取以上定理中的 $(X,A)=(I^m,\partial(I^m))$, $(Y,B)=(I^n,\partial(I^n))$, 其中 $\partial(I^k)$ 为关于 $\mathbb{R}^k$ 的子集的边点集, 就有 $S^{m+n}\cong(I^m\times I^n)/((I^m\times\partial(I^n))\cup(\partial(I^m)\times I^n))\cong(I^m/\partial(I^m))\wedge(I^n/\partial(I^n))\cong S^m\wedge S^n$.

定义1.10.10 拓扑空间 X 的锥空间 $\widetilde{C}(X)$ 和双角锥(同纬)空间 $\widetilde{S}(X)$ 定义为商空间

$$\widetilde{C}(X)=(I\times X)/(0\times X),\quad \widetilde{S}(X)=\widetilde{C}(X)/(1\times X)\ (\neq(I\times X)/(\{0,1\}\times X)).$$

总是记 $\widetilde{C}(X)$ 和 $\widetilde{S}(X)$ 中的点为 $[s,x]$, 即 $X\times Y$ 的点 (s,x) 所代表的商空间中的等价类. 用这种记号以上定义就写成 $\widetilde{S}(X)=\widetilde{C}(X)/[1,X]$. 总是把 X 看成 $\widetilde{C}(X)$ 的子空间 $[1,X]$, 所以还有等价表达式 $\widetilde{S}(X)=\widetilde{C}(X)/X$.

带基点拓扑空间 (X,x_0) 的锥空间 $(C(X),*)$ 和双角锥(同纬)空间 $(S(X),*)$ 定义为压缩积空间

$$(C(X),*)=(I\wedge X,*),\quad (S(X),*)=(S^1\wedge X,*),$$

其中 0 为 I 的基点, S^1 的基点任意. 等价地, $C(X)$ 和 $S(X)$ 分别为将 $\widetilde{C}(X)$ 和 $\widetilde{S}(X)$ 的同胚于直线段 I 的子空间 $[I,x_0]$ 粘为一点的商空间. 我们总是把 (X,x_0) 看成 $(C(X),*)$ 的子空间 $(1\wedge X,*)$, 所以还有等价表达式 $(S(X),*)=(C(X)/X,*)$.

我们用一条横线表示空间 X, 则一个三角形就表示空间 $\widetilde{C}(X)$, 一个菱形就表示空间 $\widetilde{S}(X)$, 如下图

其中左边三角形的底边表示同胚于 X 的子空间 $[1,X]$, 左边三角形的任一平行于底边的线段代表同胚于 X 的子空间 $[t,X]$, $t\in(0,1)$, 左边三角形的顶点代表锥空间的顶点 $[0,X]$, 右边菱形的中横线表示子空间 $[\frac{1}{2},Y]$, 右边菱形的任一平行于中线的线段代表同胚于 X 的子空间 $[t,X]$, $t\in(0,1)$, 右边菱形的上下两顶点分别代表双角锥空间的两个顶点 $[0,X]$ 和 $[1,X]$. 由上图不难看出空间的同胚关系

$$\widetilde{C}(X)\cong v*X,\quad \widetilde{S}(X)\cong\{u,v\}*X\cong S^0*X,$$

其中 v 代表独点空间, 也称为锥空间的顶点. 具体地, 映射 $[t,x]\to(1-t)v+tx$ 为锥空间 $\widetilde{C}(X)$ 到 $v*X$ 的同胚映射. 映射 $[t,x]\to(1-2t)u+2tx$, $t\in[0,\frac{1}{2}]$, $[t,x]\to(2t-1)v+(2-2t)x$, $t\in[\frac{1}{2},1]$, 为双角锥空间 $\widetilde{S}(X)$ 到 $\{u,v\}*X$ 的同胚映射.

代数拓扑最常用到的空间偶就是 $(\widetilde{C}(X),X)$ 和 $(C(X),X)$. 如不特别说明, 带基点空间 $(\widetilde{S}(X),*)$ 的基点总是取 $[1,X]$.

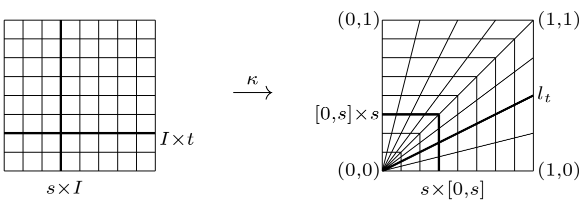
定理1.10.11 对于紧Hausdorff空间 X 和 Y, 我们有以下结论.

(1) $\big(\widetilde{C}(X)\times\widetilde{C}(Y),(\widetilde{C}(X)\times Y)\cup(X\times\widetilde{C}(Y))\big)\cong\big(\widetilde{C}(X*Y),X*Y\big)$.

(2) $(\widetilde{S}(X*Y),*)\cong(\widetilde{S}(X)\wedge\widetilde{S}(Y),*)$.

(3) $\big(\widetilde{C}(X)*\widetilde{C}(Y),(\widetilde{C}(X)*Y)\cup(X*\widetilde{C}(Y))\big)\cong\big(\widetilde{C}(\widetilde{S}(X*Y)),\widetilde{S}(X*Y)\big)$.

证 令映射 $\kappa\colon I^2\to I^2$ 为任何一个将 $0\times I$ 压缩映到 $(0,0)$, 将 $I\times 0$ 同胚地映到 $I\times 0$, 将 $I\times 1$ 同胚地映到 $0\times I$, 将 $1\times I$ 同胚地映到 $(I\times 1)\cup(1\times I)$, 将 $(0,1)\times(0,1)$ 同胚地映到 $(0,1)\times(0,1)$ 的映射. 具体地, 我们可以取 κ 如下图所定义的映射. κ 将左边的左边 $0\times I$ 映到右边的点 $(0,0)$, 将左边的竖线族 $s\times I$ 映到右边的折线段族 $s\times[0,s]\cup[0,s]\times s$, 将左边的横线段族 $I\times t$ 映到右边的斜线段族 l_t.



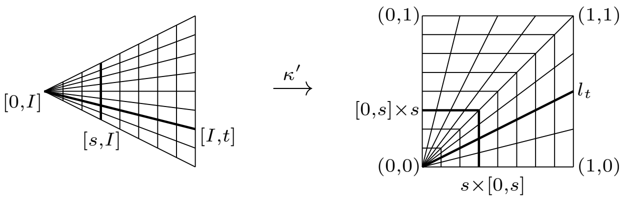
κ 的具体表达式为

$$\kappa(s,t)=\begin{cases}(0,0) & s=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ (s,2ts) & 0<s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ ((2-2t)s,s) & 0<s\leqslant 1,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由于 $\kappa(0\times I)=(0,0)$, 由商投射基本定理存在空间偶之间的同胚映射

$$\kappa'\colon(\widetilde{C}(I),I)\to(I^2,(I\times 1)\cup(1\times I))$$

满足 $\kappa=\kappa' q$, 其中 $q\colon I^2\to I^2/(0\times I)=\widetilde{C}(I)$ 为商投射. 下图示意了由三角形 $\widetilde{C}(I)$ 到正方形 I^2 的同胚映射 κ', 将左边的顶点 $[0,I]$ 映到右边的点 $(0,0)$, 将左边的斜线段族 $[I,t]$ 映到右边的斜线段族 l_t, 将左边的竖线族 $[s,I]$ 映到右边的折线段族 $s\times[0,s]\cup[0,s]\times s$.



(1) 取定理中的 $X=x$, $Y=y$ 为独点空间, 则以上同胚 κ' 定义空间偶之间的同胚映射

$$\kappa'\colon(\widetilde{C}(x*y),x*y)\to(\widetilde{C}(x)\times\widetilde{C}(y),(\widetilde{C}(x)\times y))\cup(x\times\widetilde{C}(y))).$$

具体地, 记 $\kappa(s,t)=(\kappa_1(s,t),\kappa_2(s,t))$. 则 κ' 定义为

$$\kappa'[s,(1-t)x+ty]=([\kappa_1(s,t),x],[\kappa_2(s,t),y]).$$

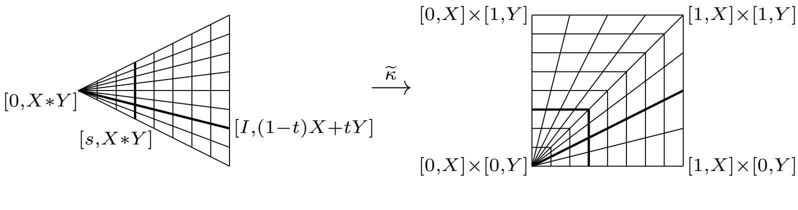
对于任何空间 X 和 Y, 同样的公式定义了空间偶之间的同胚映射

$$\widetilde{\kappa}\colon\big(\widetilde{C}(X*Y),X*Y\big)\to\big(\widetilde{C}(X)\times\widetilde{C}(Y),(\widetilde{C}(X)\times Y)\cup(X\times\widetilde{C}(Y))\big)$$

如下. 对任何 $x\in X$ 和 $y\in Y$,

$$\widetilde{\kappa}[s,(1-t)x+ty]=([\kappa_1(s,t),x],[\kappa_2(s,t),y]).$$

这个抽象的过程就相当于用以下同样的图形, 当我们把左边三角形上的点 (s,t) 看成乘积空间 $[s,(1-t)X+tY]$, 把右边正方形的点 (s,t) 看成乘积空间 $[s,X]\times[t,Y]$,



则以上图形就示意了映射 $\widetilde{\kappa}$. 需要注意的是 $\widetilde{\kappa}$ 的连续性只能由图形示意却不能证明, 但是由图形我们不难给出以下严格的证明. 记 $\sim$ 和 $\approx$ 为 $I^2\times X\times Y$ 上的两个使得商空间分别为 $\widetilde{C}(X*Y)$ 和 $\widetilde{C}(X)\times\widetilde{C}(Y)$ 的等价关系, 我们显然有以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} I^2\times X\times Y & \xrightarrow{\kappa\times 1_X\times 1_Y} & I^2\times X\times Y\\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q}\\ \widetilde{C}(X*Y) & \xrightarrow{\widetilde{\kappa}} & \widetilde{C}(X)\times\widetilde{C}(Y)\end{array}$$

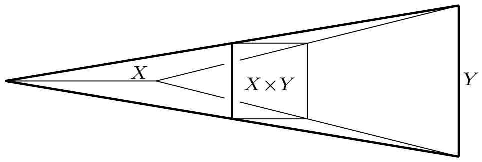
其中两个 q 为商投射. 所以 $\widetilde{\kappa}$ 为映射.

(2) 由(1)和定理1.10.8,

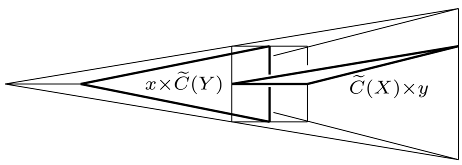
$$\widetilde{S}(X*Y) \cong \widetilde{C}(X*Y)/(X*Y) \cong (\widetilde{C}(X)\times\widetilde{C}(Y))/\big((\widetilde{C}(X)\times Y)\cup(X\times\widetilde{C}(Y))\big) \cong (\widetilde{C}(X)/X)\wedge(\widetilde{C}(Y)/Y).$$

(3) $\widetilde{C}(X)*\widetilde{C}(Y) \cong u*X*v*Y \cong u*v*X*Y \cong \widetilde{C}(\{u,v\})*X*Y \cong w*\{u,v\}*X*Y \cong \widetilde{C}(\widetilde{S}(X*Y))$.
$(\widetilde{C}(X)*Y)\cup(X*\widetilde{C}(Y)) \cong (u*X*Y)\cup(X*v*Y) = \{u,v\}*X*Y \cong \widetilde{S}(X*Y)$.

以上证明(1)中的同胚 $X*Y \cong (\widetilde{C}(X)\times Y) \cup (X\times\widetilde{C}(Y))$ 还可由下图形象地示意,



其中左边的横线表示 X, 右边的竖线表示 Y, 中间的方块表示同胚于 $X\times Y$ 的子空间 $\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y$. 不难由下图看出被方框所截的左半部分同胚于 $X\times\widetilde{C}(Y)$, 被方框所截的右半部分同胚于 $\widetilde{C}(X)\times Y$, 两个子空间的交为方框 $X\times Y$. 如下图



其中左半部分的每一个竖的三角形切面为同胚于 $\widetilde{C}(Y)$ 的子空间 $x\times\widetilde{C}(Y)$, 其中 $x \in X$, 右半部分的每一个横的三角形切面为同胚于 $\widetilde{C}(X)$ 的子空间 $\widetilde{C}(X)\times y$, 其中 $y \in Y$.

例1.10.12 由于 $\widetilde{C}(S^n)\backslash[I,*] \cong \widetilde{C}(S^n)\backslash[1,*]$, 其中 S^n 的基点 $*$ 任取, 所以它们的一点紧化空间也同胚. 由定理1.9.5, $C(S^n) \cong \widetilde{C}(S^n)/[I,*] \cong \widetilde{C}(S^n)/[1,*] = \widetilde{C}(S^n)$. 同理, 由 $\widetilde{S}(S^n)\backslash[I,*] \cong \widetilde{S}(S^n)\backslash[\frac{1}{2},*]$ 可得 $S(S^n) \cong \widetilde{S}(S^n)$. 我们显然有同胚 $\widetilde{C}(S^n) \cong D^{n+1}$ 和 $\widetilde{S}(S^n) \cong S^{n+1}$. 综上可得

$$C(S^n) \cong \widetilde{C}(S^n) \cong D^{n+1}, \quad S(S^n) \cong \widetilde{S}(S^n) \cong S^{n+1}.$$

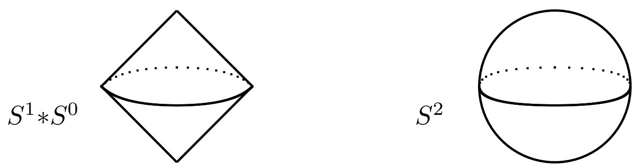
取 $X*Y \cong (\widetilde{C}(X)\times Y)\cup(X\times\widetilde{C}(Y))$ 中的 $X = S^m$, $Y = S^n$, 再结合习题1.8.11的结论, 就有

$$S^m*S^n \cong (\widetilde{C}(S^m)\times S^n) \cup (S^m\times\widetilde{C}(S^n)) \cong (D^{m+1}\times S^n) \cup (S^m\times D^{n+1}) \cong S^{m+n+1}.$$

还有直接的同胚映射 ϕ: $S^m*S^n \to S^{m+n+1}$ 定义为对所有的 $x \in S^m$ 和 $y \in S^n$,

$$\phi((1-t)x+ty) = (\,(1-t)(x,0)+t(0,y)\,)_0,$$

其中 $(z)_0$ 表示向量的单位化 $(z)_0 = \frac{1}{\|z\|}z$, $(x,0)$ 表示后 $n+1$ 个坐标为0, $(0,y)$ 表示前 $m+1$ 个坐标为0. 当取 $m = 1$, $n = 0$ 时, 如下图所示.



习题 1.10

1.10.1. 证明一点并运算的单位性、交换性和结合性.

(1) $(*\vee X, *\vee x) \cong (X\vee *, x\vee *) \cong (X, x)$, 其中 $(*, *)$ 为带基点独点空间.

(2) $(X_1\vee X_2, x_1\vee x_2) \cong (X_2\vee X_1, x_2\vee x_1)$.

(3) $((X_1 \vee X_2) \vee X_3, (x_1\vee x_2)\vee x_3) = (X_1 \vee (X_2 \vee X_3), x_1\vee(x_2\vee x_3))$.

1.10.2. 证明压缩积运算的零元性、交换性和结合性.

(1) $(*\wedge X, *\wedge x) \cong (X\wedge *, x\wedge *) \cong (*, *)$.

(2) $(X_1\wedge X_2, x_1\wedge x_2) \cong (X_2\wedge X_1, x_2\wedge x_1)$.

(3) $((X_1 \wedge X_2) \wedge X_3, (x_1\wedge x_2)\wedge x_3) = (X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3), x_1\wedge(x_2\wedge x_3))$.

1.10.3. 证明连接运算的单位性、交换性和结合性.

(1) $\emptyset * X = X * \emptyset = X$.

(2) $X * Y \cong Y * X$.

(3) $(X * Y) * Z = X * (Y * Z)$.

1.10.4. 对于映射 $f_1\colon (X_1, x_1) \to (Y_1, y_1)$ 和 $f_2\colon (X_2, x_2) \to (Y_2, y_2)$, 证明

$$f_1 \vee f_2\colon X_1\vee X_2 \to Y_1\vee Y_2, \quad f_1 \wedge f_2\colon X_1\wedge X_2 \to Y_1\wedge Y_2, \quad f_1 * f_2\colon X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$$

仍为映射, 其中 $(f_1\vee f_2)(x_1\vee x_2) = f_1(x_1) \vee f_2(x_2)$, $(f_1\wedge f_2)(x_1\wedge x_2) = f_1(x_1)\wedge f_2(x_2)$, $(f_1 * f_2)(tx_1+(1-t)x_2) = tf_1(x_1)+(1-x)f_2(x_2)$ (在 $f_1 * f_2$ 中把 f_i 看成非保基点映射).

1.10.5. 证明 $((X_1 \vee X_2) \wedge X_3, *) \cong ((X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3), *)$.

1.10.6. 设 X 和 Y 都为局部紧Hausdorff空间, 则 $X\wedge Y$ (基点任意) 仍为Hausdorff空间.

1.10.7. 证明对于 $n \geqslant 0$, $\widetilde{C}(S^n\vee S^n) \ncong C(S^n\vee S^n)$, $\widetilde{S}(S^n\vee S^n) \ncong S(S^n\vee S^n)$.

1.10.8. 证明局部紧Hausdorff空间 X, Y 的一点紧化空间满足

$$((X\times Y)^*, *) \cong (X^*, *) \wedge (Y^*, *),$$

其中所有空间的基点都取无穷远点. 由此证明 $(S^m\wedge S^n, *) \cong (S^{m+n}, *)$.

1.10.9. 证明局部紧Hausdorff空间 X, Y 的一点紧化空间满足

$$((X\amalg Y)^*, *) \cong (X^*, *) \vee (Y^*, *),$$

其中所有空间的基点都取无穷远点. 由此证明 $(\mathbb{R}^{n+1}\setminus S^n)^* \cong S^{n+1} \vee ((S^1\times S^n)/(*\times S^n))$, 其中 $*$ 为 S^1 上任一点, $(S^1\times S^n)/(*\times S^n)$ 的基点为等价类 $*\times S^n$, $n = 0, 1, \cdots$.

1.10.10. 证明一点紧化空间的同胚 $GL(2)^* \cong \big((S^3\times S^1)/(*\times S^1)\big)\vee\big((S^3\times S^1)/(*\times S^1)\big)$, 其中 $GL(2)$ 为 2 阶可逆矩阵空间.

1.10.11. 证明任何一个 n 维有限单纯复形都可以嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中.

1.10.12. 画出以下空间在 $\mathbb{R}^3$ 中的嵌入子空间的立体图,

$$
\begin{array}{llll}
(1)\ \widetilde{S}(S^1); & (2)\ S(S^1); & (3)\ \widetilde{S}\big((S^1)^*\big); & (4)\ \widetilde{S}\big((S^1)^*\big);\\
(5)\ \widetilde{S}(S^1\vee S^1); & (6)\ S(S^1\vee S^1); & (7)\ \widetilde{S}\big((S^1\vee S^1)^*\big); & (8)\ \widetilde{S}\big((S^1\vee S^1)^*\big);\\
(9)\ \widetilde{S}(S^1\amalg S^1); & (10)\ S(S^1\amalg S^1); & (11)\ \widetilde{S}\big((S^1\amalg S^1)^*\big); & (12)\ \widetilde{S}\big((S^1\amalg S^1)^*\big),
\end{array}
$$

其中一点紧化空间的基点取为无穷远点, 其它情况基点任选.

1.11 映射空间

对于拓扑空间 X, Y, 所有从 X 到 Y 的映射的集合 Y^X 是不是有拓扑结构呢? 如果没有代数拓扑, 这个映射集合也许不会成为重要的研究对象, 因为其性质过于复杂, 而我们能认识的手段还不多. 在不同的背景下, 这个集合的拓扑结构有不同的定义, 这其中代数拓扑只需要最简单的拓扑, 就是紧开拓扑, 因为代数拓扑其实只关心这个空间的道路连通分支的特点, 比如是否是构成群, 是否构成Abel群, 是否为有限生成的Abel群, 等等, 因而目前所知的各种不同方式定义的拓扑结构并不影响道路连通分支的这方面性质.

定义1.11.1 对于拓扑空间 X 和 Y, 记 Y^X 为所有从 X 到 Y 的映射的集合. 对于 X 的紧子集 K 和 Y 的开子集 U, 定义 Y^X 的子集 $M(K,U)=\{f\in Y^X\mid f(K)\subset U\}$. 则 Y^X 的紧开拓扑是指由集族 $\{M(K,U)\}_{K,U}$ 生成的开拓扑, 其中 K 取遍 X 的所有紧子集, U 取遍 Y 的所有开集.

对于空间偶 (X,A) 和 (Y,B), 记 $(Y,B)^{(X,A)}$ 为所有从 (X,A) 到 (Y,B) 的偶映射的集合. $(Y,B)^{(X,A)}$ 自然为 Y^X 的子集, $(Y,B)^{(X,A)}$ 的紧开拓扑也定义为 Y^X 的子空间拓扑.

对于带基点拓扑空间 (X,x_0) 和 (Y,y_0), 记 $(Y,y_0)^{(X,x_0)}$ 为所有从 (X,x_0) 到 (Y,y_0) 的保基点映射的集合. $(Y,y_0)^{(X,x_0)}$ 自然为 Y^X 的子集, $(Y,y_0)^{(X,x_0)}$ 的紧开拓扑也定义为 Y^X 的子空间拓扑.

定理1.11.2 设 X 为紧空间, Y 为度量空间. 令 Y^X 上的度量为 $\rho(f,g)=\sup\{\rho(f(x),g(x))\}_{x\in X}$. 则这个度量导出的拓扑与紧开拓扑一样.

证 对于 $g\in B(f,\varepsilon)$, 记 $\varepsilon_1=\rho(f,g)$, $\varepsilon_2=\varepsilon-\varepsilon_1$, 则 $\{f^{-1}(B(y,\varepsilon_2))\}_{y\in Y}$ 为 X 的开覆盖, 于是存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(B(y_1,\varepsilon_2)),\cdots,f^{-1}(B(y_n,\varepsilon_2))\}$. 令 K_i 为 $f^{-1}(B(y_i,\varepsilon_2))$ 的闭包, $U_i=B(y_i,\frac{1}{2}\varepsilon_2)$. 则对于任何映射 $h\in\cap_{i=1}^n M(K_i,U_i)$ 和 $x\in X$, 存在某个 i 使得 $x\in K_i$. 于是 $\rho(f(x),h(x))\leqslant\rho(f(x),y_i)+\rho(h(x),y_i)\leqslant\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2<\varepsilon$. 所以 $\cap_{i=1}^n M(K_i,U_i)\subset B(f,\varepsilon)$. 这说明紧开拓扑比度量拓扑要细.

反之, 对于 $f\in M(K,U)$, 由于 $f(K)$ 紧, U^c 闭, 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\rho(y,y')>\varepsilon$ 对所有 $y\in f(K)$ 和 $y'\in U^c$. 这说明 $B(f,\varepsilon)\subset M(K,U)$, 即度量拓扑比紧开拓扑要细.

定理1.11.3 设 $f\colon X\to Y$ 为映射. 则对任何拓扑空间 W 和 Z,

$$f^W\colon X^W\to Y^W,\ \ Z^f\colon Z^Y\to Z^X$$

为映射, 其中 $f^W(\theta) = f\theta$ 对所有 $\theta \in X^W$, $Z^f(\vartheta) = \vartheta f$, 对所有 $\vartheta \in Z^Y$. 因此可知, 如果 $X_1 \cong X_2$, $Y_1 \cong Y_2$, 则 $Y_1^{X_1} \cong Y_2^{X_2}$.

以上结论对于空间偶和带基点空间也成立.

证 对于 Y^W 的开集 $M(K,U)$, 我们有

$$(f^W)^{-1}(M(K,U)) = \{\theta \in Y^W \mid f\theta \in M(K,U)\} = \{\theta \in Y^W \mid \theta \in M(K, f^{-1}(U))\} = M(K, f^{-1}(U)).$$

所以 f^W 为映射.

对于 Z^X 的开集 $M(K,U)$, 我们有

$$(Z^f)^{-1}(M(K,U)) = \{\vartheta \in Z^X \mid \vartheta f \in M(K,U)\} = \{\vartheta \in Z^X \mid \vartheta \in M(f(K),U)\} = M(f(K),U).$$

所以 Z^f 为映射.

如果 $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon Y_1 \to Y_2$ 为同胚映射, 则 $g^{f^{-1}}\colon Y_1^{X_1} \to Y_2^{X_2}$ 为同胚映射, 其中 $g^{f^{-1}} = g^{X_2} Y_1^{f^{-1}} = Y_2^{f^{-1}} g^{X_1}$.

定理1.11.4 对于任何拓扑空间 X, Y, Z, 我们有

$$X^{Y \amalg Z} \cong X^Y \times X^Z, \quad (X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z.$$

对于任何空间偶$(X,A), (Y,B), (Z,C)$, 我们有

$$(X,A)^{(Y \amalg Z, B \amalg C)} \cong (X,A)^{(Y,B)} \times (X,A)^{(Z,C)}, \quad (X \times Y, A \times B)^{(Z,C)} \cong (X,A)^{(Z,C)} \times (Y,B)^{(Z,C)}.$$

对于任何带基点空间 $(X,x_0), (Y,y_0), (Z,z_0)$, 我们有

$$(X,x_0)^{(Y \vee Z, *)} \cong (X,x_0)^{(Y,y_0)} \times (X,x_0)^{(Z,z_0)}, \quad (X \times Y, (x_0,y_0))^{(Z,z_0)} \cong (X,x_0)^{(Z,z_0)} \times (Y,y_0)^{(Z,z_0)}.$$

证 由映射扩张性得到对应 $\phi\colon X^{Y \amalg Z} \to X^Y \times X^Z$ 定义为 $\phi(f) = (fi_Y, fi_Z)$, 其中 i_Y, i_Z 为内射. 对于 $Y \amalg Z$ 的紧集 K 和 X 的开集 U, 我们有 $\phi(M(K,U)) = M(K \cap Y, U) \times M(K \cap Z, U)$. 所以 ϕ 为同胚映射.

由映射提升性得到对应 $\psi\colon (X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ 定义为 $\psi(f) = (p_X f, p_Y f)$, 其中 p_X, p_Y 为投射. 对于 Z 的紧集 K 和 $X \times Y$ 的开集 $U \times V$, $\psi(M(K, U \times V)) = M(K,U) \times M(K,V)$. 所以 ϕ 为同胚映射.

空间偶和带基点空间情形完全类似.

以上定理可以看成自然数的公式 $a^{b+c} = a^b \times a^c$ 和 $(a \times b)^c = a^c \times b^c$ 在拓扑空间上的推广. 我们还有自然数的公式 $(a^b)^c = a^{bc}$. 该公式是否有在拓扑空间上的推广呢? 答案是肯定的.

定理1.11.5 对于任何拓扑空间 X, Y, Z, 我们有以下结论.

(1) 如果 X 为局部紧空间, 则赋值对应 $e\colon Y^X \times X \to Y$ 为映射, 其中 $e(f,x) = f(x)$ 对 $x \in X$ 和 $f \in Y^X$.

(2) 如果 $f\colon X \times Z \to Y$ 为映射, 则 $\hat{f}\colon Z \to Y^X$ 为映射, 其中 $\hat{f}(z)(x) = f(x,z)$ 对 $x \in X$ 和 $z \in Z$. 如果 X 为局部紧空间, 则 f 为映射当且仅当 $\hat{f}$ 为映射.

(3) 如果 Z 为Hausdorff空间, 则 $E\colon Y^{X \times Z} \to (Y^X)^Z$ 为映射, 其中 $E(f) = \hat{f}$, $\hat{f}$定义如(2). 进一步, 如果 X 为局部紧Hausdorff空间, 则 E 为同胚映射.

证 (1) 对 Y 的开集 U 和 $(f,x) \in e^{-1}(U)$, 由 X 局部紧可知存在 x 的紧邻域 K 使得 $f(K) \subset U$. 由于 x 为 K 的内点, 于是存在 x 的邻域 $V \subset K$. 则 $M(K,U) \times V$ 为 (f,x) 的开邻域满足 $e(M(K,U)\times V) \subset U$. 所以 e 为映射.

(2) 假设 $f\colon X\times Z \to Y$ 为映射. 则对任何 $M(K,U) \in Y^X$,

$$\hat{f}^{-1}(M(K,U)) = \{z \in Z \mid \hat{f}(z) \in M(K,U)\} = \{z \in Z \mid f(K,z) \subset U\}$$

为开集, 因为如果 $f(K,z) \subset U$, 即 $K \times z \subset f^{-1}(U)$, 则由 K 的紧性, 存在 z 的邻域 V 使得 $K \times V \subset f^{-1}(U)$. 所以 $V \subset \hat{f}^{-1}(M(K,U))$, z 为 $\hat{f}^{-1}(M(K,U))$ 的内点. 所以 $\hat{f}$ 为映射.

如果 $\hat{f}$ 为映射, X 局部紧, 则由(1), $f = e(1_X \times \hat{f})$ 为映射.

(3) 设 A, B 分别为 X, Z 的紧集, U 为 Y 的开集, 则

$$\begin{aligned}
& E^{-1}(M(B,M(A,U))) \\
= \ & \{f \in Y^{X\times Z} \mid E(f) \subset M(B,M(A,U))\} \\
= \ & \{f \in Y^{X\times Z} \mid \hat{f}(B) \subset M(A,U)\} \\
= \ & \{f \in Y^{X\times Z} \mid f(A\times B) \subset U\} \\
= \ & M(A\times B,U)
\end{aligned}$$

首先证明以下引理. 如果 Z 为Hausdorff空间, 拓扑空间 W 的拓扑由集族$\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$生成, 则 W^Z 的紧开拓扑由集族$\mathscr{T}'' = \{M(K,B_\alpha)\}_{K,\,\alpha\in\Lambda}$生成, 其中 K取遍所有 Z 的紧集.

设 K 为 Z 的紧集, U 为 W 的开集, $U = \cup_{\beta\in\Gamma} U_\beta$, $U_\beta = \cap_{\alpha\in\Omega_\beta} B_\alpha$, 其中每个 $\Omega_\beta \subset \Lambda$ 为有限子集. 则对于任何 $f \in M(K,U)$, $\{f^{-1}(U_\beta)\}_{\beta\in\Gamma}$ 为 K 的开覆盖. 于是对于每一个 $x \in K$, 存在 $\beta_x \in \Gamma$ 使得 $x \in f^{-1}(U_{\beta_x})$. 由于 Z 为Hausdorff空间, 所以 K 为正规空间. 于是存在分离 x 和 $K\backslash f^{-1}(U_{\beta_x})$ 的开集 M 和 N. 令 $F_x = \overline{M}$, 则 F_x 为 x 的紧邻域满足 $x \in F_x \subset f^{-1}(V_{\beta_x})$. 由于 $\{F_x\}_{x\in K}$ 为 K 的紧邻域覆盖, 所以存在有限个 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $K \subset \cup_{i=1}^m F_{x_i}$. 因此,

$$\begin{aligned}
f \in \cap_{i=1}^m M(F_{x_i}, U_{\beta_{x_i}}) &= \cap_{i=1}^m (\cap_{\alpha\in\Omega_{\beta_{x_i}}} M(F_{x_i}, B_\alpha)) \\
&\subset \cap_{i=1}^m (\cap_{\alpha\in\Omega_{\beta_{x_i}}} M(F_{x_i}\cap K, B_\alpha)) = \cap_{i=1}^m M(F_{x_i}\cap K, U_{\beta_{x_i}}) \subset M(K,U).
\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{T}''$ 为子基. 引理成立.

由以上引理, $\{M(B,M(A,U))\}$ 为 $(Y^X)^Z$ 的子基, 所以 E 为映射.

由于 E 是1-1对应, 只需证明 $Y^{X\times Z}$ 的紧开拓扑由以下集族 $\mathscr{T}' = \{M(A\times B,U)\}$ 生成即可, 其中 A, B 分别取遍 X, Z 的紧集, U 取遍Y 的开集. 这个结论只需要条件 X 和 Z 都为Hausdorff空间. 设 K 为 $X\times Z$ 的紧集, 令 K_X 和 K_Z 为 K 投射到分量空间的像, 则 $K_X\times K_Z$ 为正规空间. 于是对于任何 $f \in M(K,U)$ 和 $x \in f^{-1}(U)$, 存在分离 x 和 $(K_X\times K_Z)\backslash f^{-1}(U)$ 的不交邻域, 所以存在 x 的方形紧邻域 $A_x\times B_x$ 满足 $x \in A_x\times B_x \subset ((K_X\times K_Z)\cap f^{-1}(U))$. 由于 $\{A_x\times B_x\}_{x\in K}$ 为 K 的紧邻域覆盖, 存在有限子覆盖 $\{A_{x_1}\times B_{x_1}, \cdots, A_{x_n}\times B_{x_n}\}$ 满足 $K \subset \cup_{i=1}^n A_{x_i}\times B_{x_i}$. 于是

$$f \in \cap_{i=1}^n M(A_{x_i}\times B_{x_i}, U) \subset \cap_{i=1}^n M((A_{x_i}\times B_{x_i})\cap K, U) = M(K,U).$$

所以 $\mathscr{T}'$ 为子基. 定理成立.

以上定理显然对空间偶和带基点空间都成立, 具体表述如下, 证明省略.

定理1.11.6 对于拓扑空间偶 $(X,A),(Y,B),(Z,C)$, 我们有以下结论.

(1) 如果 X 为局部紧空间, 则赋值对应 $e\colon (Y,B)^{(X,A)}\times(X,A)\to(Y,B)$ 为空间偶映射, 其中 $e(f,x)=f(x)$ 对所有 $x\in X$ 和 $f\in(Y,B)^{(X,A)}$.

(2) 如果 $f\colon (X,A)\times Z\to(Y,B)$ 为偶映射, 则 $\hat f\colon Z\to(Y,B)^{(X,A)}$ 为映射, 其中 $\hat f(z)(x)=f(x,z)$ 对所有 $x\in X$ 和 $z\in Z$. 如果 X 为局部紧空间, 则以上为充要条件.

(3) 如果 Z 为Hausdorff空间, 则 $E\colon (Y,B)^{(X,A)\times(Z,C)}\to\big((Y,B)^{(X,A)},B^X\big)^{(Z,C)}$ 为映射, 其中 $E(f)=\hat f$, $\hat f$ 定义如(2). 进一步, 如果 X 为局部紧Hausdorff空间, 则 E 为同胚映射.

对于带基点空间 $(X,x_0),(Y,y_0),(Z,z_0)$, 我们有以下结论.

(1) 如果 X 为局部紧空间, 则赋值对应 $e\colon (Y,y_0)^{(X,x_0)}\times(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为空间偶映射, 其中 $e(f,x)=f(x)$ 对所有 $x\in X$ 和 $f\in(Y,y_0)^{(X,x_0)}$.

(2) 如果 $f\colon (X,x_0)\times Z\to(Y,y_0)$ 为空间偶映射, 则 $\hat f\colon Z\to(Y,y_0)^{(X,X_0)}$ 为映射, 其中 $\hat f(z)(x)=f(x,z)$ 对所有 $x\in X$ 和 $z\in Z$. 如果 X 为局部紧空间, 则以上为充要条件.

(3) 如果 X_1 为局部紧Hausdorff空间, 则 $E\colon (Y,y_0)^{(X_1\wedge X_2,*)}\to\big((Y,y_0)^{(X_1,x_1)},*\big)^{(X_2,x_2)}$ 为映射, 其中 $E(f)=\hat f$, $\hat f$ 定义如(2), $(Y,y_0)^{(X_1,x_1)}$ 的基点为常值映射. 进一步, 如果 X_2 为Hausdorff空间, 则 E 为同胚映射.

带基点空间在代数拓扑中起着非常重要作用，原因就是许多同伦论中的基本概念都只能建立在带基点的空间上, 而且带基点空间有更完整的对偶对象. 比如, 锥空间与道路空间可以看成对偶空间. 具体地, $(I,0)\wedge(X,x_0)$ 和 $(X,x_0)^{(I,0)}$ 对偶, $(S^1,*)\wedge(X,x_0)$ 和 $(X,x_0)^{(S^1,*)}$ 对偶. 进而还有更广的映射锥空间和映射纤维空间的对偶. 这种对偶性(也称Eckmann-Hilton对偶)在以后的同伦论当中有非常普遍的应用, 而不带基点空间则没有对偶概念. 正因为如此, 我们把不带基点空间的锥和同纬记为特别的 $\widetilde C$ 和 $\widetilde S$, 而许多书却把这两个空间记为 C 和 S. 为了更好地体现对偶性, 以下定义有些地方重复给出了锥空间的定义.

定义1.11.7 带基点空间 (X,x_0) 的锥空间、双角锥(同纬)空间和 n 重双角锥(同纬)空间分别定义为

$$(C(X),*)=(I,0)\wedge(X,x_0),\ (S(X),*)=(S^1,*)\wedge(X,x_0),\ (S^n(X),*)=(S^n,*)\wedge(X,x_0),$$

其中球面的基点任取.

对偶地, 带基点空间 (X,x_0) 的道路空间, 回路空间和 n 重回路空间分别定义为

$$(P(X),0)=((X,x_0)^{(I,0)},0),\ (\Omega(X),0)=((X,x_0)^{(S^1,*)},0),\ (\Omega^n(X),0)=((X,x_0)^{(S^n,*)},0),$$

其中 0 为保基点常值映射.

例1.11.8 对于带基点空间 (X,x_0), 由 $(S^{m+n},*)\cong(S^m\wedge S^n,*)$ 我们有

$$(S^m(S^n(X)),*)=(S^m,*)\wedge(S^n,*)\wedge(X,x_0)\cong(S^{m+n},*)\wedge(X,x_0)\cong(S^{m+n}(X),*),$$

$$(\Omega^m(\Omega^n(X)),0)=\big((X,x_0)^{(S^n,*)}\big)^{(S^m,*)}\cong(X,x_0)^{(S^m\wedge S^n,*)}\cong(X,x_0)^{(S^{m+n},*)}=(\Omega^{m+n}(X),0).$$

1.12 CW复形

CW复形是代数拓扑最基本也是最重要的空间, 它在同伦论和同调论中都起着十分重要的作用.

CW复形的定义需要将一点并空间的定义推广到无穷. 对于一族带基点空间 $\{(X_\alpha,x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, 一点并空间 $\vee_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha,x_\alpha)=(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,*)$ 为不交并空间 $\amalg_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 把所有分量空间的基点 x_α 都粘合为一个基点的商空间. 内射族 $\{i_\alpha\colon(X_\alpha,x_\alpha)\to(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,*)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足保基点映射扩张性. $\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 的拓扑为弱拓扑, 即 F 为 $\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 的闭集当且仅当对每个 $\alpha\in\Lambda$, $F\cap X_\alpha$ 都为 X_α 的闭集. 换句话说, 定义1.5.16和定理1.5.17自然可以推广到无穷一点并的情形, 因此就不赘述了.

形象地说, CW复形是由球面按维数由低到高一层层“粘和”成的空间. 为了理解好这点, 我们首先回顾一个群论的问题. 相对于非交换群, Abel群是性质非常好的群, 那么非交换群中和Abel群性质最接近的群是什么呢？我们首先想到的就是可解群 G, 即存在一列 G 的正规子群 $1{=}G_0\subset G_1\subset\cdots\subset G_n{=}G$ 使得每个商群 G_i/G_{i-1} 都是Abel 群. 类似地, 若干同维数的球面的一点并空间 $\vee_{\alpha\in\Lambda_n}S^n_\alpha$ (这里每个 S^n_α 都同胚于S^n, 下标集Λ_n可以无穷, $n=0,1,\cdots$) 是代数拓扑的典型空间, 而CW复形就是和球面的一点并空间性质最接近的空间. 具体地, 一个CW复形 X 满足以下*分层球面性*: 存在 X 的一列闭子空间

$$\emptyset{=}X^{-1}\subset X^0\subset X^1\subset\cdots\subset X^n\subset X^{n+1}\subset\cdots$$

满足 $X=\cup_{n=0}^\infty X^n$, 并且每个商空间 $X^n/X^{n-1}\cong\vee_{\alpha\in\Lambda_n}S^n_\alpha$.

由分层球面性我们就提出一个问题. 在X^{n-1}已知的前提下, 如果 X^n 满足 $X^n/X^{n-1}\cong\vee_{\alpha\in\Lambda_n}S^n_\alpha$, 那么$X^n$ 的拓扑一定很简单么？答案是否定的, 以后的例子会说明这个问题. 换句话说, X 的分层球面性并不能保证它成为CW复形, 因为CW复形是在保证分层球面性的前提下, 人为地构造出的一类典型空间, 这里的典型性只是在同伦的意义上才成立. 而这个典型的结构就来自于映射锥空间的定义.

为了说明映射锥空间, 我们首先考虑一个更广一点的问题. 如果Y是W 的闭子空间并且满足 $(W/Y,*)\cong(\widetilde{C}(X)/X,*)=(\widetilde{S}(X),*)$, 那么$W$是一个什么样的空间呢？进一步, 如果如果$Y$是$W$ 的闭子空间并且满足 $(W/Y,*)\cong(\vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha),*)$, 那么$W$是一个什么样的空间呢？以下定义的映射锥空间就是满足上述性质的典型空间.

定义1.12.1 映射 $f\colon X\to Y$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_f$ 定义为

$$\widetilde{C}_f=(\widetilde{C}(X)\amalg Y)/{\sim},\ \text{其中}\ [1,x]\sim f(x)\ \text{对所有}\ x\in X.$$

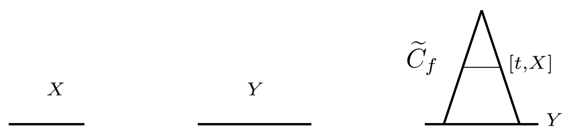
设 $\{f_\alpha\colon X_\alpha\to Y\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族映射, 则该映射族的锥空间 $\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 如下定义.

$$\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}=(\,(\amalg_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{C}(X_\alpha)\amalg Y\,)/\sim,\ \text{其中}\ [1,x]\sim f_\alpha(x)\ \text{对所有}\ x\in X_\alpha,\ \alpha\in\Lambda.$$

经常将以上锥空间记为 $Y\cup_{f_\alpha}\{\widetilde{C}(X_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 或者 $Y\cup_{f_\alpha}\{\widetilde{C}(X_\alpha)\}$ 的形式.

当上述映射族中的所有 X_α 都是相同的球面 S^{n-1} $(n>0)$ 时, 称锥空间 $\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 为 Y 的一个 n 胞腔扩张. 对于 $n=0$, 规定 Y 与离散空间 X_0 的不交并空间 $Y\amalg X_0$ 为 Y 的一个 0 胞腔扩张. 规定 Y 总是 Y 自身的一个 n 胞腔扩张, 对应下标集 Λ 为空集的情形.

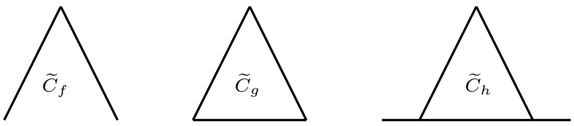
我们经常用一条短线段表示空间 X, 用一条长线段表示空间 Y, 用短线段到长线段的一个嵌入表示映射 f, 则映射锥空间 $\widetilde{C}_f$ 就可以用一个底边突出的三角形表示. 如下图



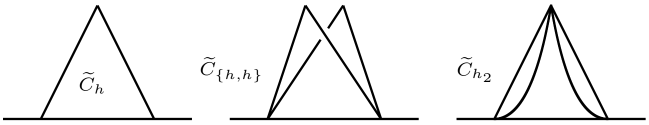
其中突出的底边表示空间 Y, 三角形中任意一条平行于底边的横线段表示空间 $[t,X]$, $t\in(0,1)$, 三角形的顶点为锥空间的顶点 $[0,X]$. 则由上图不难看出 $\widetilde{C}_f/Y\cong\widetilde{S}(X)$. 同理, $\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}/Y\cong\vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha)$.

例1.12.2 恒等映射 $1_X\colon X\to X$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_{1_X}$ 为 $\widetilde{C}(X)$, 零映射 $0_X\colon X\to *$ (独点空间) 的映射锥空间 $\widetilde{C}_{0_X}$ 为 $\widetilde{S}(X)$, 常值映射 $0\colon X\to Y$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_0=\widetilde{S}(X)\vee Y$, 其中 Y 的基点为 $0(X)$.

设 $f\colon S^0\to S^0$ 为恒等映射, $g\colon S^0\to[-1,1]$, $h\colon S^0\to\mathbb{R}$ 为自然的嵌入, 则 $\widetilde{C}_f$, $\widetilde{C}_g$, $\widetilde{C}_h$ 为下图的线构成的 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.



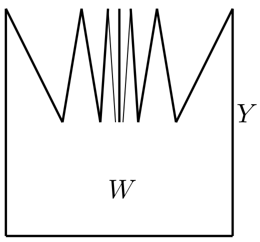
其中 $\widetilde{C}_g$ 的底边为 $[-1,1]$, $\widetilde{C}_h$ 的底边为 $\mathbb{R}$. 下图比较了三个不同的锥空间,



其中 $\{h,h\}$ 为由相同的 h 构成的两个映射的映射族, $h_2\colon S^0\amalg S^0\to\mathbb{R}$ 为映射族 $\{h,h\}$ 的扩张映射.

如果 W 的闭子空间 Y 满足 $(W/Y,*)\cong(\vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha),*)$, 那么是不是有 $W\cong\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 呢? 见下例.

例1.12.3 令 Y 为下图中从两边无限震荡到中间的折线和中间的竖线的并, Y 将 $\mathbb{R}^2$ 分成两个开区域, 令 W 为其中的有界区域的闭包.



显然 $(W/Y,*)\cong(S^2,*)=(\widetilde{S}(S^1),*)$, 但是 W 不是某个映射 $f\colon S^1\to Y$ 的映射锥空间, 因为如果 f 存在, 则 Y 道路连通. 矛盾!

实际上并没有一个从点集拓扑角度看很适当的条件限制在空间 W,Y,X 上, 使得 $(W/Y,*)\cong(\widetilde{S}(X),*)$, 当且仅当 W 为映射锥空间. 映射族情形也一样. 以下定理给出了上述问题的一个充分但不是必要条件, 而这个条件就是CW复形定义中不可回避的特征映射和粘合映射的根源.

定理1.12.4 设Hausdorff空间 W 的闭子空间 Y 满足 $(W/Y,*)\cong(\widetilde{S}(X),*)$, 其中 X 为紧Hausdorff空间. 不区分 W/Y 和 $\widetilde{S}(X)$, 则有商投射 $q\colon W\to\widetilde{S}(X)$. 记 W 的开子集 $\hat{e}=q^{-1}(\widetilde{S}(X)\backslash *)$, e 为 $\hat{e}$ 的闭包, $\dot{e}=e\backslash\hat{e}$. 如果存在偶映射 $\phi\colon(\widetilde{C}(X),X)\to(e,\dot{e})$ 为相对同胚, 即 ϕ 限制在 $\widetilde{C}(X)\setminus X$ 上为到 $e\setminus\dot{e}$ 的同胚映射, 则我们有 $W\cong\widetilde{C}_{i\psi}$, 其中 $\psi\colon X\to\dot{e}$ 为 ϕ 在 X 上的限制映射, $i\colon\dot{e}\to Y$ 为内射.

证 令 $\widetilde{C}(X)\amalg Y$ 到 W 的映射 $\widetilde{\Phi}$ 满足限制在 $\widetilde{C}(X)$ 上为 ϕ, 限制在 Y 上为恒等映射. 由商投射基本定理可知存在映射 $\Phi\colon\widetilde{C}_{\psi i}\to W$ 满足 $\widetilde{\Phi}=\Phi\widetilde{q}$, 其中 $\widetilde{q}\colon\widetilde{C}(X)\amalg Y\to\widetilde{C}_{\psi i}$ 为商投射. Φ 限制在 $\widetilde{q}(\widetilde{C}(X))$ 上为紧空间到Hausdorff空间的连续的单射, 为嵌入. Φ 限制在 Y 上由定义为嵌入. 由闭粘结定理可知 Φ^{-1} 为映射. 所以 Φ 为同胚映射.

从点集拓扑的角度看, 映射锥空间的拓扑性质不一定简单. 比如, 取 $f\colon S^1 \to S^2$ 为一个满的映射, 则 $\widetilde{C}_f$ 的点集拓扑性质就很复杂(它的子集 S^2 上任一点的邻域很不好描述). 但是, 代数拓扑研究的是同伦性质, 所以虽然 $\widetilde{C}_f$ 从点集拓扑的角度来看性质很不好, 但从代数拓扑角度来看, 却属于性质非常好的空间. 比如上述的 $\widetilde{C}_f$, 它在同伦等价的意义上和 $S^1 \vee S^2$ 一样.

另外, 映射锥空间的定义其实和 f 的连续性无关, 因而可以推广到针对不连续的对应 f 的锥空间, 并且对应锥空间也满足 $W/Y \cong \widetilde{S}(X)$. 但是对应锥空间的意义不大. 首先是因为即使 X, Y 都是Hausdorff 空间, 对应锥空间 $\widetilde{C}_f$ 一般情况下也不是Hausdorff空间. 即使对应锥 $\widetilde{C}_f$ 为Hausdorff空间, 其拓扑性质由例1.12.3可知也很复杂, 尤其在同伦论中没有典型性.

定理1.12.5 设 W 的闭子空间 Y 满足 $(W/Y, *) \cong (\vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha), *)$, 其中 W 为Hausdorff空间, 每个 X_α 为紧Hausdorff空间. 不区分 W/Y 和 $\vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha)$, 则我们有商投射 $q\colon W \to \vee_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}(X_\alpha)$. 于是有 W 的开子空间 $\hat{e}_\alpha = q^{-1}(\widetilde{S}(X_\alpha)\backslash *)$, 令 e_α 为 $\hat{e}_\alpha$ 的闭包, $\dot{e}_\alpha = e_\alpha\backslash\hat{e}_\alpha$. 如果对每个 $\alpha\in\Lambda$, 都存在偶映射 $\phi_\alpha\colon (\widetilde{C}(X_\alpha), X_\alpha) \to (e_\alpha, \dot{e}_\alpha)$ 满足以下条件.

(1) 每个偶映射 ϕ_α 为相对同胚, 即 ϕ_α 限制在 $\widetilde{C}(X_\alpha)\backslash X_\alpha$ 上为到 $\hat{e}_\alpha$ 的同胚映射.

(2) W 的拓扑关于子集族 $\{Y, e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为弱拓扑, 即 W 的子集 F 为闭子集, 当且仅当 $F\cap Y$ 为 Y 的闭集并且每个 $F\cap e_\alpha$ 为 e_α 的闭集.

则 $W \cong \widetilde{C}_{\{i_\alpha\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$, 其中 $\psi_\alpha\colon X_\alpha \to \dot{e}_\alpha$ 为 ϕ_α 的限制映射, $i_\alpha\colon \dot{e}_\alpha \to Y$ 为内射.

特别地, 允许下标集 $\Lambda = \emptyset$, 对应 $W = Y$ 的情形.

如果上述定义中的每个 X_α 都为同一个拓扑空间 S^{n-1} $(n \geqslant 0)$, 也就是说 W 为 Y 的 n-胞腔扩张, 则分别记 $e_\alpha, \hat{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha$ 为 $e^n_\alpha, \hat{e}^n_\alpha, \dot{e}^n_\alpha, \phi^n_\alpha, \psi^n_\alpha$. 称 e^n_α 为 W 的一个 n-胞腔, 称 $\hat{e}^n_\alpha$ 为 e^n_α 的内部, 称 $\dot{e}^n_\alpha$ 为 e^n_α 的边缘, 称映射 ϕ^n_α 为 e^n_α 的特征映射, 称映射 ψ^n_α 为 e^n_α 的粘合映射.

证 由上一个定理的证明不难类似地得到连续的1-1对应 $\phi\colon \widetilde{C}_{\{i_\alpha\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}} \to W$, 其中 ϕ 限制在 Y 上为恒等映射, 限制在 $\widetilde{C}(X_\alpha)$ 上为特征映射 ϕ_α. 而由不交并空间的商空间的定义可知 $\widetilde{C}_{\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 上的子集 F 为闭集, 当且仅当 $F\cap Y$ 为 Y 的闭集并且每个 $F\cap\widetilde{C}(X_\alpha)$ 都为 $\widetilde{C}(X_\alpha)$ 的闭子集. W 的弱拓扑使 ϕ 为同胚映射.

注意, 虽然上述定理中条件 $(W/Y, *) \cong (\vee_\alpha\widetilde{S}(X_\alpha), *)$ 与偶映射族 $\{\phi_\alpha\}$ 的存在性并不是充要条件, 但在实际情况中, 由于 Y 都是取 W 的比较规范的闭子空间, 所以前者蕴含后者. 反而是不符合情况的反例需要我们大费周折地构造. 也正是由于这个原因, 下例中的所有CW复形的实例中, 从来都忽略特征映射, 尤其是粘合映射的描述, 而只需用分层球面性和弱拓扑性(胞腔个数无穷的情况下)来说明为CW复形.

例1.12.6 记可数个球面 S^n 的一点并空间为 $\vee_{\mathbb{N}}S^n$, 即 $\vee_{\mathbb{N}}S^n = \vee_{n=1}^{\infty}S^n_n$, 其中每个 $(S^n_n, *) \cong (S^n, *)$. 记可数个球面 S^n 的伪一点并空间 $\uplus_{\mathbb{N}}S^n$ 为如下定义的空间. 令 $S(\frac{1}{n})$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的以点 $(\frac{1}{n}, 0, \cdots, 0)$ 球心, 半径为 $\frac{1}{n}$ 的球面, 则 $\uplus_{\mathbb{N}}S^n$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间 $\cup_{n=1}^{\infty}S(\frac{1}{n})$, 规定 $\uplus_{\mathbb{N}}S^n$ 的基点为原点0. 显然有 $(\vee_{\mathbb{N}}S^n, *)$ 到 $(\uplus_{\mathbb{N}}S^n, 0)$ 的保基点映射为1-1对应, 但不是同胚映射. 由无穷一点并空间的拓扑为弱拓扑可知, $\vee_{\mathbb{N}}S^n$ 为基点的 n 胞腔扩张. 记 y_n 为 $S(\frac{1}{n})$ 中原点0的对径点, 显然子集 $S = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的闭包满足 $\mathrm{Cl}(S) = S\cup 0$, 因而 S 不是 $\uplus_{\mathbb{N}}S^n$ 的闭子集, 虽然它和每个胞腔的交都是闭子集. 所以 $\uplus_{\mathbb{N}}S^n$ 的拓扑不是弱拓扑, 因而它也不是基点的 n-胞腔扩张.

取 $W_1 = (0, 1]$, W_1 的闭子空间 $Y_1 = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. 取 $W_2 = (-\infty, -1]$, W_2 的闭子空间 $Y_2 = \{-n\}_{n=1}^{\infty}$. 取 $W_3 = \mathbb{R}$, W_3 的闭子空间 $Y_3 = \mathbb{Z}$. 则由于每个 Y_i 都是 W_i 的离散子空间, 所以 W_i/Y_i 关于胞腔族满足弱拓

扑, 因而同胚于 $\vee_{\mathbb{N}}S^1$, 也就是说 W_i 为 Y_i 的 1 胞腔扩张.

取 $W=[0,1]$ 的闭子空间 $Y=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. 由于 Y 不是 W 的离散子空间, 则 $W/Y\cong\uplus_{\mathbb{N}}S^1$, 所以 W 不是 Y 的 1 胞腔扩张.

定义1.12.7 Hausdorff空间偶 (X,A) 称为相对CW复形, 如果存在 X 的一列子空间

$$A=X^{-1}\subset X^0\subset X^1\subset\cdots\subset X^n\subset X^{n+1}\subset\cdots$$

满足以下性质.

(1) $X=\cup_{n=0}^{\infty}X^n$.

(2) 对于每个 $n=0,1,\cdots$, X^n 为 X^{n-1} 的 n 胞腔扩张.

(3) X 的拓扑关于子集族 $\{X^n\}$ 为弱拓扑, 即 F 为 X 的闭集, 当且仅当每个 $F\cap X_n$ 为 X_n 的闭集.

称上述定义中的 X^n 为相对CW复形 (X,A) 的 n维骨架. 称 X^n 的 n-胞腔 e^n_α 为相对CW复形 (X,A) 的一个 n-胞腔. 称满足条件(1)和(2)的子空间列 $\{X^n\}$ 为空间偶 (X,A) 的一个骨架结构.

如果上述定义中存在 n 满足 $X^{n-1}\neq X^n$, $X^n=X^{n+k}$ 对所有 $k>0$, 即 X 有 n-胞腔但没有大于 n维的胞腔, 则称 X 为 n维CW复形, 维数 n 记为 $\dim(X)$ (可以为无穷大). 如果CW复形 X 只有有限个胞腔, 则称 X 为有限CW复形. 如果CW复形 X 满足对每个 n, 只有有限个n-胞腔, 则称 X 为有限型CW复形.

拓扑空间 X 称为CW复形, 如果 $(X,\emptyset)$ 为相对CW复形.

需要强调的是, 与可解群的分解本质上唯一这条性质不同, 一个(相对)CW复形一般都有不穷多种骨架结构, 而且不同的骨架结构的差别很大. 但是我们总是取定一个骨架结构来讨论(相对)CW复形的拓扑性质, 而从不讨论同一个空间(偶)上不同的骨架结构之间的关系. 这还是因为CW复形是用来研究同伦性质的, 用不同的骨架结构研究出的同伦性质都相同.

例1.12.8 对于 $n>0$, S^n 为一CW复形, 通常取以下最简单的骨架结构 $\{X^n\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X^0 & \subset & X^1 & \subset & \cdots & \subset & X^{n-1} & \subset & X^n & \subset & X^{n+1} & \subset & \cdots \\
\| & & \| & & & & \| & & \| & & \| & & \cdots \\
* & = & * & = & \cdots & = & * & \subset & S^n & = & S^n & = & \cdots
\end{array}$$

其中 $*$ 为 S^n 上任一定点. 显然 S^n 有一个 0-胞腔 $*$, 一个 n-胞腔 S^n.

对于 $n\geqslant m>0$, 设 $f\colon S^n\to S^m$ 为一映射. 则 $\widetilde{C}_f$ 为一CW复形, 通常取以下最简单的骨架结构.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
X^0 & \subset & \cdots & \subset & X^{m-1} & \subset & X^m & \subset & \cdots & \subset & X^n & \subset & X^{n+1} & \subset & X^{n+2} & \subset & \cdots \\
\| & & & & \| & & \| & & \cdots & & \| & & \| & & \| & & \cdots \\
* & = & \cdots & = & * & \subset & S^m & = & \cdots & = & S^m & \subset & \widetilde{C}_f & = & \widetilde{C}_f & = & \cdots
\end{array}$$

其中 $*$ 为 S^m 上任一定点. 显然 $\widetilde{C}_f$ 有一个 0-胞腔 $*$, 一个 m-胞腔 S^m, 一个$(n{+}1)$-胞腔 e^{n+1}. e^{n+1} 为 $\widetilde{C}_f$ 的子空间 $\widetilde{C}_g$, 其中 g 就是把 f 看成由 S^n 到 $\operatorname{im}f$ 的满射. 特别地, 当 f 为满射时, 我们有 $e^{n+1}=\widetilde{C}_f$.

对于 $n>m>0$, 设 $f\colon S^m\to S^n$ 为一映射. 则 $(\widetilde{C}_f,S^n)$ 为一相对CW复形, 通常取以下最简单的骨架结构.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X^{-1} & \subset & X^0 & \subset & \cdots & \subset & X^m & \subset & X^{m+1} & \subset & X^{m+2} & \subset & \cdots \\
\| & & \| & & & & \| & & \| & & \| & & \cdots \\
S^n & = & S^n & = & \cdots & = & S^n & \subset & \widetilde{C}_f & = & \widetilde{C}_f & = & \cdots
\end{array}$$

$(\widetilde{C}_f, S^n)$只有一个$(m+1)$-胞腔e^{m+1}. e^{m+1}为$\widetilde{C}_f$的子空间$\widetilde{C}_g$, 其中g就是把f看成由S^m到$\operatorname{im} f$的满射. 特别地, 当f为满射时, 就有$e^{m+1}=\widetilde{C}_f$.

例1.12.9 对于$n>0$, 射影空间RP^n为CW复形, 其最常用的骨架结构如下定义. 首先考虑球面S^n如下的另一种骨架结构$\{X^k\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
X^0 & \subset & X^1 & \subset & \cdots & \subset & X^{n-1} & \subset & X^n & \subset & X^{n+1} & \subset & \cdots \\
\| & & \| & & & & \| & & \| & & \| & & \\
S^0 & \subset & S^1 & \subset & \cdots & \subset & S^{n-1} & \subset & S^n & = & S^n & = & \cdots
\end{array}$$

对于$k=0,1,\cdots,n$, 由于$X^k/X^{k-1}\cong S^k\vee S^k$, 所以$S^n$有两个$k$-胞腔$S^k_+$和$S^k_-$. 记$q_k\colon S^n\to RP^n$为把对径点粘合的商映射, 则我们有以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
S^0 & \subset & S^1 & \subset & \cdots & \subset & S^{n-1} & \subset & S^n \\
{\scriptstyle q_0}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow & & & & {\scriptstyle q_{n-1}}\downarrow & & {\scriptstyle q_n}\downarrow \\
RP^0 & \subset & RP^1 & \subset & \cdots & \subset & RP^{n-1} & \subset & RP^n
\end{array}$$

由商映射基本定理, 存在映射$\tilde{q}_k\colon S^k/S^{k-1}{=}S^k\vee S^k\to RP^k/RP^{k-1}{=}S^k$. 所以$RP^k$有如下骨架结构$\{Y^k\}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
Y^0 & \subset & Y^1 & \subset & \cdots & \subset & Y^{n-1} & \subset & Y^n & \subset & Y^{n+1} & \subset & \cdots \\
\| & & \| & & & & \| & & \| & & \| & & \\
RP^0 & \subset & RP^1 & \subset & \cdots & \subset & RP^{n-1} & \subset & RP^n & = & RP^n & = & \cdots
\end{array}$$

对于$k=0,1,\cdots,n$, RP^n只有一个k-胞腔$q_k(S^k_+)=q_k(S^k_-)=RP^k$.

类似地, 对于$n>0$, 复射影空间CP^n也是CW复形, 通常取以下的骨架结构. 记$\bar{q}_k\colon S^{2k+1}\to CP^k$为复空间$\mathbb{C}^{k+1}$的单位球面$S^{2k+1}=\{(z_1,\cdots,z_{k+1})\,|\,z_i\in\mathbb{C},\,|z_1|^2{+}\cdots{+}|z_{k+1}|^2=1\}$按照等价关系$x\sim\lambda x$对所有$x\in S^{2k+1}$和$\lambda\in S^1\subset\mathbb{C}$得到的商投射. 则有我们以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
S^1 & \subset & S^3 & \subset & \cdots & \subset & S^{2n-1} & \subset & S^{2n+1} \\
{\scriptstyle \bar{q}_0}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{q}_1}\downarrow & & & & {\scriptstyle \bar{q}_{n-1}}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{q}_n}\downarrow \\
CP^0 & \subset & CP^1 & \subset & \cdots & \subset & CP^{n-1} & \subset & CP^n
\end{array}$$

上一行的嵌入中, S^{2k+1}/S^{2k-1}并不是球面, 但是下一行的嵌入满足$CP^k/CP^{k-1}\cong S^{2k}$. 下面证明这个结论. 对于$k>0$, 记$S^{2k}_+=\{(z_1,\cdots,z_k,x)\in S^{2k+1}\,|\,x\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C},\,x\geqslant 0\}$. 显然$\bar{q}_k(S^{2k}_+)=CP^k$, $\bar{q}_k(S^{2k-1})=CP^{k-1}$, 并且$q_k$限制在子空间$S^{2k}_+\backslash S^{2k-1}$上为到$CP^k\backslash CP^{k-1}$的同胚映射. 这说明$CP^k/CP^{k-1}\cong S^{2k}_+/S^{2k-1}\cong S^{2k}$. 因此, 由下一行的嵌入我们有$CP^n$的骨架$\{Z^k\}$定义如下.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
Z^0 & \subset & Z^1 & \subset & Z^2 & \subset & Z^3 & \subset & \cdots & \subset & Z^{2n} & \subset & Z^{2n+1} & \subset & Z^{2n+2} & \subset & \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \cdots & & \| & & \| & & \| & & \\
CP^0 & = & CP^0 & \subset & CP^1 & = & CP^1 & \subset & \cdots & \subset & CP^n & = & CP^n & \subset & CP^{n+1} & = & \cdots
\end{array}$$

对于$k=0,1,\cdots,n$, CP^n有一个$2k$-胞腔CP^k. CP^n没有奇数维胞腔.

从骨架结构定义CW复形虽然在实际应用中简单, 却有一个局限性, 比如如何定义CW子复形, 如何定义乘积和连接空间的CW复形结构, 等等. 所以我们需要CW复形从胞腔角度的定义. 大部分教材都是从胞腔的角度定义CW复形的. 我们只给出CW复形的情形, 相对CW复形的定义由于较少用, 就省略了.

定义1.12.10 Hausdorff空间 X 的一个胞腔复形 K 为一族闭子空间 $\{e_\alpha^n\}_{\alpha\in\Lambda_n,\, n=-1,0,1,\cdots}$ 满足以下性质. 对于 $n=-1,0,1,\cdots$, 记 $K^n=\cup_{\alpha\in\Lambda_k,\, k\leqslant n} e_\alpha^k$, 称 K^n 为 K 的 n 为骨架. 称每个 e_α^n 为 K 的一个 n-胞腔, 定义 $\dot{e}_\alpha^n=e_\alpha^n\cap K^{n-1}$, 称为胞腔 e_α^n 的边缘, 定义 $\hat{e}_\alpha^n=e_\alpha^n\setminus\dot{e}_\alpha^n$, 称为胞腔 e_α^n 的内部. 特别地, 空集 $\emptyset$ 规定为唯一的(-1)-胞腔, 不定义空集的内部和边缘.

(1) $X=\cup_{\alpha\in\Lambda_k,\, k=0,1,\cdots} e_\alpha^k$.

(2) 如果 $\hat{e}_\alpha^m\cap\hat{e}_\beta^n\neq\emptyset$, 则 $m=n$, $\alpha=\beta$. 这蕴含 $X=\amalg_{\alpha\in\Lambda_k,\, k=0,1,\cdots}\hat{e}_\alpha^k$ ($\amalg$ 为集合的不交并).

(3) 每个0-胞腔 e_α^0 为一个点. 对于 $n>0$ 的胞腔 e_α^n, 存在特征映射 $\phi_\alpha^n\colon(D^n,S^{n-1})\to(e_\alpha^n,\dot{e}_\alpha^n)$ 为相对同胚, 即 ϕ_α^n 限制在 $D^n\backslash S^{n-1}$ 上为到 $\hat{e}_\alpha^n$ 的同胚映射. 限制映射 $\psi_\alpha^n=\phi_\alpha^n|_{S^{n-1}}\colon S^{n-1}\to\dot{e}_\alpha^n$ 称为 e_α^n 的粘合映射.

对于CW复形 X, 其所有的胞腔集自然构成一个胞腔复形 K, 称为CW复形 X 的胞腔复形. X 的子空间 Y 称为 X 的CW子复形, 如果 Y 为CW复形并且 Y 的胞腔复形 L 为 X 的胞腔复形 K 的子集.

以上定义中胞腔复形 K 使得 X 具有分层球面性. 具体地, K 的骨架空间满足

$$\emptyset=K^{-1}\subset K^0\subset K^1\subset\cdots\subset K^{n-1}\subset K^n\subset\cdots$$

并且 $X=\cup_{n=0}^{\infty}K^n$, 每个商空间 $K^n/K^{n-1}\cong\vee_{\alpha\in\Lambda_n}S_\alpha^n$. 需要注意的是具有分层球面性的空间并不一定是CW复形! 所以胞腔复形 K 并不一定蕴含 X 是CW复形. 以下定理给出了一个充要条件.

定理1.12.11 拓扑空间 X 为CW复形, 当且仅当 X存在胞腔复形 $K=\{e_\alpha^n\}_{\alpha\in\Lambda_n,n=-1,0,1,\cdots}$ 满足以下性质. 对于胞腔复形, 我们自然有如下的面的定义. 如果有 $e_\beta^m\subset e_\alpha^n$, 则称 e_β^m 为 e_α^n 的一个面. 如果进一步有 $e_\beta^m\neq e_\alpha^n$, 等价地, $e_\beta^m\subset\dot{e}_\alpha^n$, 则称 e_β^m 为 e_α^n 的一个真面.

(1) (闭包有限性) 每个胞腔 e_α^n 只有有限个面.

(2) (弱拓扑性) X 的子集 F 为闭集, 当且仅当对每一个胞腔 e_α^n, $F\cap e_\alpha^n$ 都为 e_α^n 的闭集.

由此可知以下两条等价的性质.

(1) X 的任何紧子集一定包含在有限个胞腔的并之中.

(2) 对应 $f\colon X\to Y$ 是连续的, 当且仅当 f 限制在每一个胞腔上都是连续的.

证 对于满足两条性质的胞腔复形 K, 取定义1.2.7中的 $A=\emptyset$, $X^n=K^n$, 则 X 为CW复形.

反之, CW复形有所有胞腔构成的胞腔复形结构. 我们只需证明 X 的任何紧子集一定包含在有限个胞腔的并之中, 其它性质显然. 设 W 为 X 的紧子集, 构造集合 T 如下. 如果 $W\cap\hat{e}_\alpha^n\neq\emptyset$, 取一个点 $x_\alpha^n\in W\cap\hat{e}_\alpha^n$. 令 $T=\{x_\alpha^n\}$. 则 T 的任何子集 T' 都满足以下性质. 对每个 $\alpha\in\Lambda$, $T'\cap\hat{e}_\alpha^n$ 或者为空集, 或者为独点集. 不难由归纳法证明 $T'\cap X^n$ 对每个 n 都为闭集, 所以为闭集. 所以 T 为离散拓扑. 而离散的拓扑空间为紧空间, 只有当 T 为有限集时才成立. 所以 W 一定包含在有限个胞腔的并之中.

闭包有限性的英文Closure finite 和弱拓扑性的英文Weak topology 中的头两个字母是CW复形的名称的来源.

例1.12.12 行列式大于 0 的正交阵空间 $SO(n)$ $(n\geqslant 2)$ 的CW复形有以下的胞腔复形.

以下构造中, ε_k 为 $\mathbb{R}^n$ 中的第 k 个坐标为1, 其余坐标为0的向量. 对于 $O\in SO(n)$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $O\alpha$ 为把 α 看成 $n\times1$阶矩阵的乘积矩阵, 等价地, 为线性变换 O 对向量 α 的取值向量.

首先构造映射 $\rho_n\colon S^{n-1}\backslash\varepsilon_n\to SO(n)$ 满足 $\rho_n(\alpha)^{-1}\alpha=\varepsilon_n$ 对所有 $\alpha\in S^{n-1}\backslash\varepsilon_n$. 这里 $(-)^{-1}$ 表示逆矩

阵. 记 $O_-(n)$ 为行列式小于 0 的正交矩阵空间, 则对于 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in S^{n-1}\backslash\varepsilon_n$, 我们有反射矩阵

$$s_\alpha=\begin{pmatrix} 1{-}2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & 1{-}2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2x_nx_1 & -2x_nx_2 & \cdots & 1{-}2x_n^2 \end{pmatrix}\in O_-(n).$$

于是我们有映射 $\varrho_n\colon S^{n-1}\backslash\varepsilon_n\to O_-(n)$ 定义为 $\varrho_n(\alpha)=s_{(\alpha-\varepsilon_n)_0}$, 其中 $(\alpha{-}\varepsilon_n)_0$ 为 $\alpha{-}\varepsilon_n$ 的单位化向量. 显然 ϱ_n 满足 $\varrho_n(\alpha)^{-1}\alpha=\varrho_n(\alpha)\alpha=\varepsilon_n$ 对所有 $\alpha\in S^{n-1}\backslash\varepsilon_n$. 令 $\rho_n(\alpha)=s_{(\alpha-\varepsilon_n)_0}s_{\varepsilon_1}$, 则 ρ_n 就映到 $SO(n)$ 满足 $\rho_n(\alpha)^{-1}\alpha=\varepsilon_n$ 对所有 $\alpha\in S^{n-1}\backslash\varepsilon_n$.

对于 $m<n$, 由于 $\mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的由后 $n{-}m$ 个坐标为 0 的点构成的子空间, 所以 $SO(m)$ 为由 $SO(n)$ 的后 $n{-}m$ 个列向量为 $\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵构成的子空间. 因此, 对于 $1<i_1<\cdots<i_s\leqslant n$, 我们有映射

$$\rho_{i_1,\cdots,i_s}\colon (S^{i_1-1}\backslash\varepsilon_{i_1})\times\cdots\times(S^{i_s-1}\backslash\varepsilon_{i_s})\to SO(n)$$

定义为 $\rho_{i_1,\cdots,i_s}(\eta_1,\cdots,\eta_s)=\rho_{i_s}(\eta_s)\cdots\rho_{i_1}(\eta_1)$ 对所有 $\eta_k\in S^{i_k-1}\backslash\varepsilon_{i_k}$. 下面证明我们有集合的不交并

$$SO(n)=(\mathrm{im}\rho_\emptyset)\amalg(\amalg_{1<i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\,\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s}),$$

其中 $\mathrm{im}\rho_\emptyset$ 为单位阵构成的独点空间. 我们对 n 作归纳. 当 $n=2$ 时, $SO(2)=\mathrm{im}\rho_\emptyset\amalg\mathrm{im}\rho_2$, 等式成立. 假设等式对 $2<k<n$ 成立. 则对 $O\in SO(n)$, 如果 O 的第 n 个列向量为 ε_n, 则 $O\in SO(n{-}1)$, 由归纳假设, O 属于某个 $\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s}$, 其中 $i_s<n$. 如果 O 的第 n 个列向量 γ_n 不是向量 ε_n, 则 $\rho_n(\gamma_n)^{-1}O\in SO(n{-}1)$, 同样由归纳假设, $\rho_n(\gamma_n)^{-1}O$ 属于某个 $\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s}$, 其中 $i_s<n$, 所以 $O=\rho_n(\gamma_n)(\rho_n(\gamma_n)^{-1}O)$ 属于 $\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s,n}$. 归纳完成.

令 $e^0=\mathrm{im}\rho_\emptyset$, $e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s}=\mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s})$, 其中 $n(s)=i_1{+}\cdots{+}i_s{-}s$. 则闭子集族

$$\{\emptyset\}\cup\{e^0\}\cup\{e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s}\}_{1<i_1<\cdots<i_s\leqslant n}$$

为 $SO(n)$ 的胞腔胞腔. 特征映射如下定义. 定义映射 $\bar\rho_n\colon S^{n-1}_-\to SO(n)$ 为 $\bar\rho_n(\beta)=s_{\varepsilon_1}s_\beta$ 对 $\beta\in S^{n-1}_-$. 显然 $\mathrm{im}\bar\rho_n=\mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_n)$. 同样可得映射

$$\bar\rho_{i_1,\cdots,i_s}\colon S^{i_1-1}_-\times\cdots\times S^{i_s-1}_-\to SO(n)$$

满足 $\mathrm{im}\bar\rho_{i_1,\cdots,i_s}=\mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s})$. 显然 $(S^{i_1-1}_-\times\cdots\times S^{i_s-1}_-,\partial(S^{i_1-1}_-\times\cdots\times S^{i_s-1}_-))\cong(D^{n(s)},\partial D^{n(s)})$. 不区分两者, 则 $\bar\rho_{i_1,\cdots,i_s}$ 就是胞腔 $e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s}$ 的特征映射. 由于上述胞腔复形的胞腔个数有限, 所以自然满足闭包有限性和弱拓扑性, 因此为CW复形 $SO(n)$ 的胞腔复形.

类似地, 酉矩阵空间 $U(n)$ $(n\geqslant 1)$ 也有以下的CW复形结构. 为了方便比较, 所有推广情形的符号尽量不变. 特别地, ε_k 为 $\mathbb{C}^n$ 中第 k 个复坐标为 1 其它复坐标都是 0 的复向量. 只是 $\mathbb{C}^n$ 的复单位球记为实的形式 S^{2n-1}.

首先构造映射 $\rho_n\colon S^{2n-1}\backslash\varepsilon_n\to U(n)$ 满足 $\rho_n(\alpha)\alpha=\varepsilon_n$ 对所有 $\alpha\in S^{2n-1}\backslash\varepsilon_n$. 对于复单位向量 $\alpha=(z_1,\cdots,z_n)\in S^{2n-1}\backslash\varepsilon_n$, 我们有反射复矩阵

$$s_\alpha=\begin{pmatrix} 1{-}2\dot z_1^2 & -2z_1\bar z_2 & \cdots & -2z_1\bar z_n \\ -2z_2\bar z_1 & 1{-}2\dot z_2^2 & \cdots & -2z_2\bar z_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2z_n\bar z_1 & -2z_n\bar z_2 & \cdots & 1{-}2\dot z_n^2 \end{pmatrix}\in U(n),$$

其中$\bar{z}$为z的共轭复数, $\dot{z}^2 = z\bar{z}$. 由于$U(n)$道路连通, 我们直接定义$\rho_n\colon S^{2n-1}\backslash\varepsilon_n \to U(n)$为$\rho_n(\alpha) = s_{(\alpha-\varepsilon_n)_0}$, 其中$(\alpha-\varepsilon_n)_0$为$\alpha-\varepsilon_n$的单位化向量. 显然$\rho_n$满足$\rho_n(\alpha)^{-1}\alpha = \varepsilon_n$对所有$\alpha \in S^{2n-1}\backslash\varepsilon_n$.

对于$m < n$, $U(m)$为由$U(n)$的后$n-m$个复列向量为$\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$的矩阵构成的子空间. 因此, 对于$1 < i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$, 我们有映射

$$\rho_{i_1,\cdots,i_s}\colon (S^{2i_1-1}\backslash\varepsilon_{i_1})\times\cdots\times(S^{2i_s-1}\backslash\varepsilon_{i_s}) \to U(n)$$

定义为$\rho_{i_1,\cdots,i_s}(\eta_1,\cdots,\eta_s) = \rho_{i_s}(\eta_s)\cdots\rho_{i_1}(\eta_1)$. 完全类似实的情形, 可以证明集合的不交并

$$U(n) = (\mathrm{im}\rho_\emptyset)\amalg(\amalg_{1<i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s}),$$

其中$\mathrm{im}\rho_\emptyset$为单位阵构成的独点空间.

令$e^0 = \mathrm{im}\rho_\emptyset$, $e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s} = \mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s})$, 其中$n(s) = 2i_1+\cdots+2i_s-s$. 则闭子集族

$$\{e^0\}\cup\{e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s}\}_{1<i_1<\cdots<i_s\leqslant n}$$

为$U(n)$的胞腔复形. 特征映射如下定义. 定义映射$\bar{\rho}_n\colon S^{2n-1}_- \to U(n)$为$\bar{\rho}_n(\beta) = s_\beta$对所有$\beta \in S^{2n-1}_-$, 其中$S^{2n-1}_-$为$S^{2n-1}$的子空间, 由所有最后一个坐标$z_n$满足实部$\mathrm{Re}z_n \leqslant 0$的点构成. 显然, $\mathrm{im}\bar{\rho}_n = \mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_n)$. 同样可得映射

$$\bar{\rho}_{i_1,\cdots,i_s}\colon S^{2i_1-1}_-\times\cdots\times S^{2i_s-1}_- \to U(n)$$

满足$\mathrm{im}\bar{\rho}_{i_1,\cdots,i_s} = \mathrm{Cl}(\mathrm{im}\rho_{i_1,\cdots,i_s})$. 显然$(S^{2i_1-1}_-\times\cdots\times S^{2i_s-1}_-, \partial(S^{2i_1-1}_-\times\cdots\times S^{2i_s-1}_-)) \cong (D^{n(s)}, \partial D^{n(s)})$. 不区分两者, 则$\bar{\rho}_{i_1,\cdots,i_s}$就是胞腔$e^{n(s)}_{i_1,\cdots,i_s}$的特征映射.

单纯复形是最简单的CW复形, 其特点是所有的特征映射都是同胚, 虽然所有特征映射都是同胚的CW复形并不一定是单纯复形.

定义1.12.13 标准n-单形Δ^n为$\mathbb{R}^{n+1}$中包含点$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n+1}$的最小凸集, 其中$\varepsilon_k$的第$k$个坐标为1, 其它坐标为0. 具体地,

$$\Delta^n = \{\,(x_1,\cdots,x_{n+1}) = x_1\varepsilon_1+\cdots+x_{n+1}\varepsilon_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1+\cdots+x_{n+1} = 1,\ x_i \geqslant 0\,\}.$$

记$\partial_k\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$为嵌入$(x_1,\cdots,x_n) \to (x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)$. 在以下特征映射的定义中, 我们总是用$(\Delta^n,\partial\Delta^n)$代替同胚的$(D^n,S^{n-1})$, 其中$\partial\Delta^n$为$\Delta^n$的所有真面的并.

对于单纯复形K, 其上的胞腔复形结构如下定义. 首先在K的顶点集给一个全序. 则K的每一个n-单形$\sigma = \{v_0,\cdots,v_n\}$都是一个$n$-胞腔, 其特征映射$\phi^n_\sigma\colon (\Delta^n,\partial\Delta^n) \to (\sigma,\dot{\sigma})$满足

$$\phi^n_\sigma(x_1,\cdots,x_{n+1}) = x_1v_0+\cdots+x_{n+1}v_n \text{ 对所有 } (x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \Delta^n,$$

其中要求顶点序列保序, 即$v_0 < \cdots < v_n$.

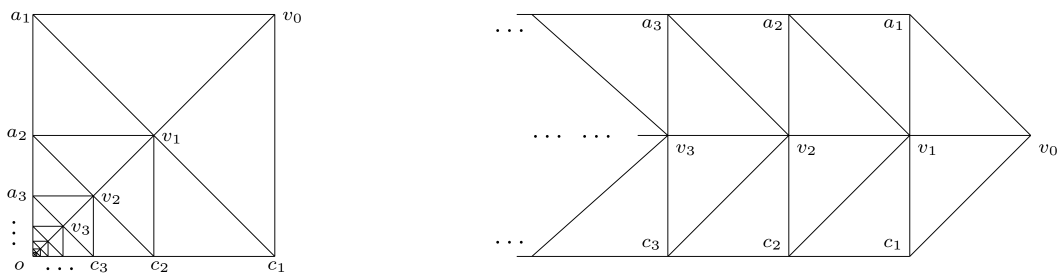
拓扑空间X的一个单纯胞腔复形$K = \{e^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n, n=-1,0,1,\cdots}$是指满足以下性质的胞腔复形. 对于$n > 0$, 每一个胞腔$e^n_\alpha$的特征映射和粘合映射

$$\phi^n_\alpha\colon (\Delta^n,\partial\Delta^n) \to (e^n_\alpha,\dot{e}^n_\alpha), \quad \psi^n_\alpha = \phi^n_\alpha|_{\partial\Delta^n}\colon \partial\Delta^n \to \dot{e}^n_\alpha$$

都是同胚映射, 并且对每个$k = 1,\cdots,n+1$, $\phi^n_\alpha\partial_k$都是另一个$(n-1)$-胞腔的特征映射. 显然当$n > 0$时, 胞腔e^n_α有$n+1$个$(n-1)$-面. 如果把胞腔e^n_α写成集合的形式$\{\phi^n_\alpha(\varepsilon_1),\cdots,\phi^n_\alpha(\varepsilon_{n+1})\}$, 则$K$就是一个抽象单纯

复形. 所以我们可以不区分两者, 称 K 为拓扑空间 X 的一个单纯复形. 如果 X 的拓扑与单纯复形 K 的拓扑同胚, 即 X 的拓扑关于子集族 $\{e^n_\alpha\}$ 为弱拓扑, 就称单纯复形 K 为 X 的一个剖分.

例1.12.14 下图示意了平面 $\mathbb{R}^2$ 的两个闭子集上的单纯复形.



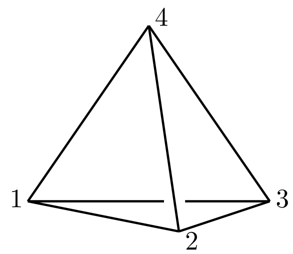
左图的为 I^2 的一个单纯复形 K, 显然该胞腔结构满足闭包有限性但不满足弱拓扑性, 因而不是 I^2 的剖分. 但是如果我们把 I^2 的左下顶点 o 去掉的话, 则 $K\backslash o$ 就是就是 $I^2\backslash o$ 的一个剖分, 并且 $K\backslash o$ 与右图展示的CW复形同胚. 而 K 为 $K\backslash o$ 与独点复形 o 的不交并复形.

最直观的一类CW复形就是单纯复形的商空间. 对于单纯复形的两个 n 单形 $\{x_0,\cdots,x_n\}$ 和 $\{y_0,\cdots,y_n\}$ (允许$x_i=y_j$), 我们用符号 $\{x_0,\cdots,x_n\}\sim\{y_0,\cdots,y_n\}$ 表示如下定义的等价关系 $\sim$.

$$t_0x_0+\cdots+t_nx_n\sim t_0y_0+\cdots+t_ny_n$$

对任何 $t_0x_0+\cdots+t_nx_n\in\{x_0,\cdots,x_n\}$. 所以 $\{x_0,\cdots,x_n\}\sim\{y_0,\cdots,y_n\}$ 蕴含对任何 $0\leqslant i_0<\cdots<i_s\leqslant n$, 我们都有 $\{x_{i_0},\cdots,x_{i_s}\}\sim\{y_{i_0},\cdots,y_{i_s}\}$. 我们在实例中往往用自然数来代表顶点. 比如, 用 $\{1,2,3\}$ 表示一个 2-单形. 而 $\{1,2,3\}$ 和 $\{3,2,1\}$ 显然代表同一个单形. 需要注意的是由于 $\sim$ 实际上表示的是几何单形之间的1-1对应, 所以在表示等价关系 $\{1,2,3\}\sim\{k,l,m\}$ 时, 显然 $\{1,2,3\}$ 不能用 $\{3,2,1\}$ 来替换得到等价关系 $\{3,2,1\}\sim\{k,l,m\}$, 而是必须在等价号两边同时置换位置, 得到同样的等价的关系 $\{3,2,1\}\sim\{m,l,k\}$.

例1.12.15 我们给出以下由正四面体的按照不同的单形间的等价关系得到的商空间的CW复形结构, 记 q 为商投射, 记 $q(\{i_1,\cdots,i_s\})$ 为 $\lfloor i_1,\cdots,i_s\rfloor$ 的形式.



(1) $X=\{1,2,3,4\}/_\sim$, 其中 $\{1,4\}\sim\{2,3\}$, $\{2,4\}\sim\{3,1\}$, $\{3,4\}\sim\{1,2\}$.

X 的 0-胞腔只有一个 $e^0=\lfloor 1\rfloor=\lfloor 2\rfloor=\lfloor 3\rfloor=\lfloor 4\rfloor$. X 的 1-胞腔有 3 个, $e^1_1=\lfloor 1,4\rfloor=\lfloor 2,3\rfloor$, $e^1_2=\lfloor 2,4\rfloor=\lfloor 3,1\rfloor$, $e^1_3=\lfloor 3,4\rfloor=\lfloor 1,2\rfloor$. 显然每个 e^1_k 都同胚于 S^1 并且 X 的 1 维骨架同胚于 $S^1\vee S^1\vee S^1$. X 的 2-胞腔有 4 个, $e^2_1=\lfloor 1,2,4\rfloor$, $e^2_2=\lfloor 2,3,4\rfloor$, $e^2_3=\lfloor 3,1,4\rfloor$, $e^2_4=\lfloor 1,2,3\rfloor$. X 的 2 维骨架不同胚于若干 S^2 的一点并空间. X 的 3-胞腔只有一个 $e^3=\lfloor 1,2,3,4\rfloor$.

(2) $Y=\{1,2,3,4\}/_\sim$, 其中 $\{1,2,3\}\sim\{1,2,4\}$, $\{3,4,1\}\sim\{3,4,2\}$.

Y 的 0-胞腔有两个 $e^0_1=\lfloor 1\rfloor=\lfloor 2\rfloor$, $e^0_2=\lfloor 3\rfloor=\lfloor 4\rfloor$. Y 的 1-胞腔有 3 个, $e^1_1=\lfloor 1,2\rfloor$, $e^1_2=\lfloor 3,4\rfloor$, $e^1_3=\lfloor 1,4\rfloor=\lfloor 2,4\rfloor=\lfloor 1,3\rfloor=\lfloor 2,3\rfloor$. 显然 e^1_1,e^1_2 都同胚于 S^1, 而 e^1_3 同胚于连接 e^1_1 和 e^1_2 的基点的线段.

Y 的2-胞腔有2个, $e_1^2=\lfloor 1,2,3\rfloor=\lfloor 1,2,4\rfloor$, $e_2^2=\lfloor 3,4,1\rfloor=\lfloor 3,4,2\rfloor$. Y 的2维骨架不同胚于若干 S^2 的一点并空间. Y 的3-胞腔只有一个 $e^3=\lfloor 1,2,3,4\rfloor$.

(3) $Z=\{1,2,3,4\}/\sim$, 其中 $\{1,2,3\}\sim\{2,3,4\}\sim\{3,4,1\}\sim\{1,3,4\}$.

本例不同于上两例之处在于我们有等价关系 $\{i,j\}\sim\{j,i\}$ 对任意边 $\{i,j\}$. 这说明 q 限制在线段 $\{i,j\}$ 的内部不是同胚映射, 所以 $\lfloor i,j\rfloor$ 不再是一个商空间中的1-胞腔. 而添加上 $\{i,j\}$ 的中点后, q 限制在分半后的线段的内部就是同胚映射了. 记正四面体的六条边 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$, $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ 的中点分别为 $5,6,7,8,9,10$. Z 的0-胞腔只有一个 $e^0=\lfloor i\rfloor$, $i=1,\cdots,10$. Z 的1-胞腔也只有1个, $e^1=\lfloor i,j\rfloor$, $i\leqslant 4$, $j\geqslant 5$, j 为某个$\{i,k\}$ 的中点. 显然 e^1 同胚于 S^1, 因此 Y 的1维骨架同胚于 S^1. q 限制在原正四面体的任何维数大于1的单形的内部仍然是同胚映射, 所以 Z 的2-胞腔有1个, $e^2=\lfloor 1,2,3\rfloor=\lfloor 2,3,4\rfloor=\lfloor 3,4,1\rfloor=\lfloor 4,1,2\rfloor$. Z 的2维骨架也不是若干 S^2 的一点并空间. Z 的3-胞腔也只有一个 $e^3=\lfloor 1,2,3,4\rfloor$.

定理1.12.16 设 X_i 为紧Hausdorff空间, $\phi_i\colon(\widetilde{C}(X_i),X_i)\to(W_i,Y_i)$ 为相对同胚, 即 ϕ_i 限制在 $\widetilde{C}(X_i)\backslash X_i$ 上为到 $W_i\backslash Y_i$ 的同胚映射, $\psi_i\colon X_i\to Y_i$ 为 ϕ_i 在 X_i 上的限制映射, $i=1,2$. 则我们有同胚

$$W_1{\times}W_2\cong\widetilde{C}_{\psi_1\boxtimes\psi_2},\quad W_1{*}W_2\cong\widetilde{C}_{\psi_1\circledast\psi_2},$$

其中

$$\psi_1\boxtimes\psi_2\colon(\widetilde{C}(X_1){\times}X_2)\cup(X_1{\times}\widetilde{C}(X_2))\to(W_1{\times}Y_2)\cup(Y_1{\times}W_2)$$

和

$$\psi_1\circledast\psi_2\colon(\widetilde{C}(X_1){*}X_2)\cup(X_1{*}\widetilde{C}(X_2))\to(W_1{*}Y_2)\cup(Y_1{*}W_2)$$

分别为 $\phi_1{\times}\phi_2$ 和 $\phi_1{*}\phi_2$ 的限制映射.

证 两个偶映射

$$\phi_1{\times}\phi_2\colon\big(\widetilde{C}(X_1){\times}\widetilde{C}(X_2),(\widetilde{C}(X_1){\times}X_2)\cup(X_1{\times}\widetilde{C}(X_2))\big)\to\big(W_1{\times}W_2,(W_1{\times}Y_2)\cup(Y_1{\times}W_2)\big)$$

$$\phi_1{*}\phi_2\colon\big(\widetilde{C}(X_1){*}\widetilde{C}(X_2),(\widetilde{C}(X_1){*}X_2)\cup(X_1{*}\widetilde{C}(X_2))\big)\to\big(W_1{*}W_2,(W_1{*}Y_2)\cup(Y_1{*}W_2)\big)$$

由定理1.10.11的同胚可以等同于如下的映射

$$\phi_1{\times}\phi_2\colon(\widetilde{C}(X_1{*}X_2),X_1{*}X_2)\to\big(W_1{\times}W_2,(W_1{\times}Y_2)\cup(Y_1{\times}W_2)\big),$$

$$\phi_1{*}\phi_2\colon(\widetilde{C}(\widetilde{S}(X_1{*}X_2)),\widetilde{S}(X_1{*}X_2))\to\big(W_1{*}W_2,(W_1{*}Y_2)\cup(Y_1{*}W_2)\big),$$

而且两个偶映射为相对同胚. 由定理1.12.4, 结论成立.

设 e_α^m 和 e_β^n 分别为CW复形 X 和 Y 的两个胞腔, 特征映射分别为 e_α^m 和 e_β^n. 取以上定理中的

$$(\widetilde{C}(X_1),X_1)=(D^m,S^{m-1}),\ (\widetilde{C}(X_2),X_2)=(D^n,S^{n-1}),\ (W_1,Y_1)=(e_\alpha^m,\dot{e}_\alpha^m),\ (W_1,Y_1)=(e_\alpha^m,\dot{e}_\alpha^m).$$

则 $e_\alpha^m{\times}e_\beta^n$ 和 $e_\alpha^m{\times}e_\beta^n$ 分别为 $X{\times}Y$ 和 $X{*}Y$ 的 $m{+}n$ 维和 $m{+}n{+}1$ 维胞腔, 特征映射分别为

$$\phi_\alpha^m{\times}\phi_\beta^n\colon(D^{m+n},S^{m+n-1}){\cong}(D^m{\times}D^n,(D^m{\times}S^{n-1}){\cup}(S^{m-1}{\times}D^n))\to(e_\alpha^m{\times}e_\beta^n,(e_\alpha^m{\times}\dot{e}_\beta^n){\cup}(\dot{e}_\alpha^m{\times}e_\beta^n))$$

$$\phi_\alpha^m{*}\phi_\beta^n\colon(D^{m+n+1},S^{m+n})\cong(D^m{*}D^n,(D^m{*}S^{n-1}){\cup}(S^{m-1}{*}D^n))\to(e_\alpha^m{*}e_\beta^n,(e_\alpha^m{*}\dot{e}_\beta^n){\cup}(\dot{e}_\alpha^m{*}e_\beta^n)).$$

因此以下定义合理.

定义1.12.17 设CW复形 X 和 Y 的胞腔复形分别为 $\{\emptyset, e_\alpha^m\}_{\alpha\in\Lambda_m, m=0,1,\cdots}$ 和 $\{\emptyset, e_\beta^n\}_{\beta\in\Gamma_n, n=0,1,\cdots}$, 其中胞腔 e_α^m 和 e_β^n 的特征映射分别为 ϕ_α^m 和 ϕ_β^n.

不交并CW复形 $X\amalg Y$ 的胞腔复形定义为 $\{\emptyset, e_\alpha^m, e_\beta^n\}_{\alpha\in\Lambda_m, \beta\in\Gamma_n, m,n=0,1,\cdots}$. 所以不交并CW复形的骨架满足 $(X\amalg Y)^n = X^n\amalg Y^n$ 对所有 $n\geqslant 0$.

乘积CW复形 $X\times Y$ 的胞腔复形定义为 $\{\emptyset, e_\alpha^m\times e_\beta^n\}_{\alpha\in\Lambda_m, \beta\in\Gamma_n, m,n=0,1,\cdots}$, 其中胞腔 $e_\alpha^m\times e_\beta^n$ 的特征映射为 $\phi_\alpha^m\times\phi_\beta^n$. 所以乘积CW复形的骨架满足 $(X\times Y)^n = \cup_{k=0}^n (X^k\times Y^{n-k})$ 对所有 $n\geqslant 0$.

连接CW复形 $X{*}Y$ 的胞腔复形为 $\{\emptyset, e_\alpha^m, e_\beta^n, e_\alpha^m{*}e_\beta^n\}_{\alpha\in\Lambda_m, \beta\in\Gamma_n, m,n=0,1,\cdots}$, 其中胞腔 $e_\alpha^m{*}e_\beta^n$ 的特征映射为 $\phi_\alpha^m{*}\phi_\beta^n$. 所以连接CW复形的骨架满足 $(X{*}Y)^n = X^n\cup Y^n\cup(\cup_{k=0}^{n-1} X^k{*}Y^{n-k-1})$ 对所有 $n\geqslant 0$. 等价地, 由 $\emptyset{*}W = W{*}\emptyset = W$ 可知 $(X{*}Y)^n = \cup_{k=-1}^n X^k{*}Y^{n-k-1}$ 对所有 $n\geqslant 0$.

注意, 乘积CW复形 $X\times Y$ 应该记为另外的符号, 比如许多书记为 $X\hat{\times}Y$, 因为当 X 或者 Y 不是有限型时, 乘积复形的弱拓扑与各自弱拓扑的乘积拓扑, 即 $X\times Y$ 的拓扑不一致. 但这种区别并不太影响实际应用, 所以就不做符号的区分了. 同样, $X{*}Y$ 的拓扑也有两种, 我们在符号上不加区别. 需要注意的是, 对于CW复形 X, 对角映射 $\Delta(x)=(x,x)$ 的象集 $\Delta(X)$ 并不是乘积CW复形 $X\times X$ 的CW子复形.

例1.12.18 记 $q_n\colon (D^n, S^{n-1})\to(D^n/S^{n-1},*)=(S^n,*)$ 为商投射, $n\geqslant 1$. 取定理1.12.16中的特征映射 $\phi_1=q_m$, $\phi_2=q_n$, 则定理中粘合映射 $\psi_1=0_{m-1}$, $\psi_2=0_{n-1}$, 其中 $0_{k-1}\colon S^{k-1}\to *$ 为常值映射. 于是我们有映射

$$0_{m-1}\boxtimes 0_{n-1}\colon (D^m\times S^{n-1})\cup(S^{m-1}\times D^n)\to S^m\vee S^n$$

$$0_{m-1}\circledast 0_{n-1}\colon (D^m{*}S^{n-1})\cup(S^{m-1}{*}D^n)\to(S^m{*}v)\cup(u{*}S^n)$$

使得 $S^m\times S^n\cong\widetilde{C}_{0_{m-1}\boxtimes 0_{n-1}}$, $S^m{*}S^n\cong\widetilde{C}_{0_{m-1}\circledast 0_{n-1}}$, 其中 u, v 为球面基点. 把以上两个映射中的定义域空间分别换成同胚的 S^{m+n-1} 和 S^{m+n}, 就得到粘合映射

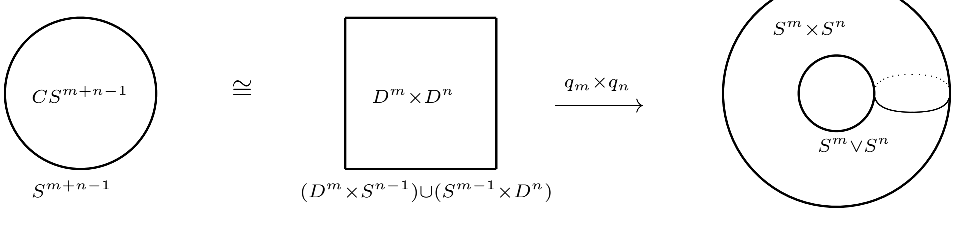
$$\psi_{m,n}\colon S^{m+n-1}\to S^m\vee S^n,$$

$$\psi_{m,n}^*\colon S^{m+n}\to(S^m{*}v)\cup(u{*}S^n)$$

使得 $S^m\times S^n\cong\widetilde{C}_{\psi_{m,n}}$, $S^m{*}S^n\cong\widetilde{C}_{\psi_{m,n}^*}$. 粘合映射 $\psi_{m,n}^*$ 因为从同伦的角度看零伦, 所以没有那么重要. 而 $\psi_{m,n}$ 非常重要, 它的具体定义如下. 把球面 S^{m+n-1} 看成 $(D^m\times S^{n-1})\cup(S^{m-1}\times D^n)$, 则

$$\psi_{m,n}(x,y)=\begin{cases} q_m(x)\vee *, & x\in D^m,\ y\in S^{n-1},\\ *\vee q_n(y), & x\in S^{m-1},\ y\in D^n.\end{cases}$$

下图示意了 $S^m\times S^n$ 如何成为映射锥空间 $\widetilde{C}_{\psi_{m,n}}$,



图中中间的方块表示 $D^m\times D^n$, 方块的黑边表示同胚于球面 S^{m+n-1} 的 $(D^m\times S^{n-1})\cup(S^{m-1}\times D^n)$, 方块的四个顶点代表 $(D^m\times S^{n-1})$ 和 $(S^{m-1}\times D^n)$ 的交 $S^{m-1}\times S^{n-1}$. 右边的环面表示 $S^m\times S^n$, 环面上的横纵两个圆环表示 $S^m\vee S^n$. 当 $m=n=1$ 时为真实空间.

习题 1.12

1.12.1. 设 K,L 为 X 的CW子复形, 证明 $K\cap L$ 和 $K\cup L$ 仍为 X 的CW子复形.

1.12.2. 带基点CW复形 (X,x_0) 就是指作为空间偶, (X,x_0) 为相对CW复形, 等价说法, x_0 为 X 的一个顶点. 设 K 为 X 的CW子复形, 证明 $(X/K,*)$ 为带基点CW复形.

1.12.3. 证明带基点CW复形 (X,x_0) 和 (Y,y_0) 的压缩积空间 $(X\wedge Y,*)$ 为带基点CW复形.

1.12.4. 证明CW复形 X 的锥空间 $\widetilde{C}(X)$ 和同纬空间 $\widetilde{S}(X)$ 为CW复形.

1.12.5. 证明带基点CW复形 (X,x_0) 的锥空间 $(C(X),*)=(I\wedge X,*)$ 和同纬空间 $(S(X),*)=(S^1\wedge X,*)$ 为带基点CW复形, 其中 I 的基点为 1, S^1 的基点任意.

1.12.6. 给出 $I^3=I\times I\times I$ 作为三重乘积CW复形的胞腔结构, 其中 I 的胞腔结构为作为1-单形的单纯结构. 说明该胞腔复形不是单纯胞腔复形(等价地,不是 I^3 的单纯复形).

1.12.7. 给出 $S^1\times S^1\times S^1$ 作为三重乘积CW复形的胞腔结构, 其中 S^1 取最简单的胞腔结构, 即 1 个 0-胞腔 $*$, 1 个 1-胞腔 S^1.

1.12.8. 令 $S^1{\cdot}S^1=(S^1\times S^1)/\sim$, 其中 $(*,x)\sim(x,*)$ 对所有 $x\in S^1$, S^1 的基点为 $*$. 取 S^1 最简单的胞腔结构, 其中 0-胞腔为基点 $*$. 由 S^1 的胞腔结构描述 $S^1{\cdot}S^1$ 的胞腔结构.

1.12.9. 记 $(S^1)^{\times n}=(S^1\times\cdots\times S^1)$ (n重乘积). 令

$$T(S^1)=\big(\cup_{n=1}^{\infty}(S^1)^{\times n}\big)/\sim,$$

其中 $(*,x_1,\cdots,x_n)\sim(x_1,*,x_2\cdots,x_n)\sim\cdots\sim(x_1,\cdots,x_n,*)\sim(x_1,\cdots,x_n)$, 其中 $*$ 为上题中 S^1 的 0-胞腔. 由 S^1 的胞腔结构描述 $T(S^1)$ 的胞腔结构.

1.12.10. 设 $\{f_\alpha\colon X_\alpha\to Y\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族映射, $f\colon \amalg_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to Y$ 为映射族的扩张映射. 说明 $\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 和 $\widetilde{C}_f$ 的关系. 当每个 X_α 都为 S^{n-1}, 每个 f_α 为到 y_0 的常值映射时, 描述此时的 $\widetilde{C}_{\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}}$ 和 $\widetilde{C}_f$.

1.13 二维流形

流形及其分类是数学的中心问题之一. 关于流形分类的问题涉及概念非常复杂, 相关理论也及其丰富, 我们只简单介绍一些最基本的概念和思想.

所谓流形, 就是局部同胚于$\mathbb{R}^n$或者$\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n\geqslant 0\}$的拓扑空间. 但如何认识流形的几何性质却是非常困难的一个问题. 在黎曼创立现代微分几何之前, 人们一直都没有整体认识流形的好的方法, 体现在弯曲空间从定义到计算方法总是要从更高维数的嵌入来描述. 比如, 我们从非常小的范围上看, 球面S^2与$\mathbb{R}^2$是没有区别的, 就像我们生活的地球表面和平面一样. 而在小范围内, 用平直的取代弯曲的则是微积分的中心思想. 但是从三维空间中整体上看, S^2明显是弯曲的, $\mathbb{R}^2$是平直的. 可这种弯曲性我们只有把S^2嵌入到更高维的$\mathbb{R}^3$中才看得出来. 那么是否存在一种数学方法, 直接从二维的独立的角度定义并计算出S^2的弯曲性呢? 如果有这种方法, 那么现实的四维时空的弯曲性, 我们就很容易理解了. 黎曼就给出了摆脱对更高维数的嵌入, 直接从同维数角度定义并计算流形的弯曲程度的方法.

黎曼发现的这种方法, 从拓扑的角度改变了我们对经典拓扑空间的看法. 假设拓扑空间X有一个开覆盖$\mathscr{C}=\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 那么我们定义一个新的拓扑空间$X_{\mathscr{C}}$如下.

$$X_{\mathscr{C}}=(\amalg_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha)/_\sim,\quad \text{其中 } (x)_\alpha\sim(x)_\beta \text{ 对任何 } x\in O_\alpha\cap O_\beta.$$

显然$X_{\mathscr{C}}$和X同胚, 因此我们可以不区分这两个空间. 要注意, $\mathscr{C}$可以是任何一个开覆盖, 所以我们不区分的是一大类空间$X_{\mathscr{C}}$. $X_{\mathscr{C}}$的定义方法表面上看属于集合论范畴, 但其实经典的集合论从来没有这么被使用过. 沿用这种用开覆盖的不交并粘合的思想, 一个拓扑空间具有好的性质, 比如是流形等, 就是存在具有好的性质的开覆盖. 以下的所有定义都是沿用这种思想.

定义1.13.1 拓扑空间X的一个坐标卡是指二元对象(O,f), 其中O为X的开子集, f为O到$\mathbb{R}^n$或者$\mathbb{R}^n_+$的同胚映射. 记$\phi\colon\mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n_+)\to X$为$f$的逆映射, 二元对象$(\mathbb{R}^n,\phi)$就称为$X$的一个参照系. 以下所有涉及$\mathbb{R}^n$的概念都有对应的涉及$\mathbb{R}^n_+$的概念. 为了简化叙述, 除非无法回避, 我们总是省略所有涉及$\mathbb{R}^n_+$的叙述.

拓扑空间X的一个图册$\{(O_\alpha,f_\alpha)\}$为一族坐标卡, 满足$\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为$X$的开覆盖, 对应就得到一参照族$\{(\mathbb{R}^n_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, 其中每个$\phi_\alpha\colon\mathbb{R}^n_\alpha\to X$为$f_\alpha$的逆映射, $\mathbb{R}^n_\alpha\cong\mathbb{R}^n$. 显然不是所有拓扑空间都存在图册或者参照族的. 但只要X存在一个图册, X的所有坐标卡构成的集合就是X的一个最大的图册. 参照族也一样. 对于同一空间X, 我们要求所有坐标卡和参照系中的$\mathbb{R}^n$的维数n都一样, 称为X的维数.

拓扑空间M称为拓扑流形, 如果M是Hausdorff空间并且存在图册, 等价于存在参照族. 如果M和N为同维数的拓扑流形, 则不交并空间$M\amalg N$仍为同维数的拓扑流形. 如果M为m维流形, N为n维流形, 则乘积空间$M\times N$为$m+n$维拓扑流形, 其坐标卡形如$(O_\alpha\times U_\beta,\phi\times\psi)$, 其中$(O_\alpha,f_\alpha)$和$(U_\beta,g_\beta)$分别为$M$和$N$的坐标卡. 对应地, 其参照系形如$(\mathbb{R}^m_\alpha\times\mathbb{R}^n_\beta,\phi_\alpha\times\psi_\beta)$, 其中$(\mathbb{R}^m_\alpha,\phi_\alpha)$和$(\mathbb{R}^n_\beta,\psi_\beta)$分别为$M$和$N$的参照系.

拓扑流形M上的点x称为M的边点, 如果存在x的参照系$(\mathbb{R}^n_+,\phi)$使得$\phi(0)=x$. 拓扑流形M的所有边点集记为∂M. M称为闭流形, 如果M为紧流形并且$\partial M=\emptyset$.

拓扑流形上还可以附加上许多更细致的结构, 其中和代数拓扑联系最紧密也是最基本的就是微分(光滑)结构和单纯(分片线性,简写成PL)结构. 有了以上把X等同于一大类$X_{\mathscr{C}}$空间的想法, 流形上的这种整体的结构, 就可以通过对特殊的开覆盖上定义附加结构来刻画了. 当然, 并不是流形的所有整体的结构只能通过这种方法来定义. 例如, PL结构(不仅针对流形)就有组合方式的独立定义.

定义1.13.2 由单纯复形K到L的单纯映射$f\colon K\to L$从组合单纯复形角度说就是一个从K的顶点集到L的顶点集的一个对应, 满足如果$\sigma\in K$, 则$f(\sigma)\in L$(重复顶点合并). 从几何单纯复形角度说, 对于K的任何几何单形$\sigma=\{x_0,\cdots,x_n\}$, 公式$f(t_0x_0+\cdots+t_nx_n)=t_0f(x_0)+\cdots+t_nf(x_n)$导出$\sigma$到$f(\sigma)$的一个映射,

称为局部线性映射 (因为是线性映射的限制映射). 由闭粘结定理 (弱拓扑使得闭集个数可以无穷) 可知局部线性映射可以扩张为 K 到 L 的映射.

两个单纯复形 K 和 L 是单纯同胚的, 如果存在单纯映射 $f\colon K \to L$ 和 $g\colon L \to K$ 使得 $gf = 1_K$, $fg = 1_L$.

单纯复形 K' 称为单纯复形 K 的加细, 如果每一个 K 的几何单形都是有限个 K' 的几何单形的并. 由单纯复形 K 到 L 的PL映射(分片线性映射) $f\colon K \to L$ 是指存在 K 的加细复形 K' 和 L 的加细复形 L', 使得 f 为由 K' 到 L' 的单纯映射. 单纯复形 K 和 L 是PL同胚(分片线性同胚)的, 如果存在PL映射 $f\colon K \to L$ 和 $g\colon L \to K$ 使得 $gf = 1_K$, $fg = 1_L$. 等价地, 如果存在 K 的加细复形 K' 和 L 的加细复形 L', 使得 K' 和 L' 单纯同胚.

单纯流形 K 为一个单纯复形, 作为拓扑空间为拓扑流形, 等价说法, 单纯流形就是某个拓扑流形的剖分.

需要指出的是 $\mathbb{R}^n$ 是可剖分的, 并且其PL结构唯一, 也就是说 $\mathbb{R}^n$ 上的任何两个剖分都可以通过加细而单纯同胚. 正是由于 $\mathbb{R}^n$ 的这个性质, 单纯流形的PL结构和光滑流形的微分结构有以下形式上统一的定义.

定义1.13.3 拓扑流形 M 上的两个坐标卡 (O_α, f_α) 和 (O_β, f_β) 称为光滑相容的(PL相容的), 同时, 对应的参照系 $(\mathbb{R}^n, \phi_\alpha)$ 和 $(\mathbb{R}^n, \phi_\beta)$也称为光滑相容的(PL相容的), 如果 $f_\beta\phi_\alpha$ 限制在 $\phi^{-1}(O_\alpha \cap O_\beta)$ 上和 $f_\alpha\phi_\beta$ 限制在 $\phi_\beta^{-1}(O_\alpha \cap O_\beta)$ 上都是分量函数的任意阶偏导都连续的光滑映射(可通过加细 $\mathbb{R}^n$ 的剖分成为单纯映射的PL映射). M 的一个图册 $\{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为光滑图册(PL图册), 对应的参照系族 $\{(\mathbb{R}^n, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为光滑参照族(PL参照族), 如果其中任两个坐标卡和参照系都是光滑(PL)相容的.

拓扑流形 M 称为可微分的(可剖分)的, 如果它存在光滑(PL)图册. 显然 M 的任一光滑(PL)图册可以通过添加光滑(PL)相容的坐标卡扩充为一个最大的光滑(PL)图册, 这个最大的光滑(PL)图册就称为 M 上的一个微分(PL)结构, 其上的坐标卡就称为光滑(PL)坐标卡. 参照系也类似.

微分(PL)流形(微分流形也叫光滑流形)为二元对象 $(M, \{O_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中 $\{O_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为由坐标卡构成的一个微分(PL)结构. 等价地, 也可以是二元对象 $(M, \{(\mathbb{R}^n, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中 $\{(\mathbb{R}^n, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为由参照系构成的一个微分(PL)结构. 在不引起误解的情况下, 总是把二元对象的微分(PL)流形简写为一元对象 M.

微分(PL)流形 M 到 N 的光滑(PL)映射 $f\colon M \to N$ 是指满足以下性质的映射. 对任何 M 的光滑(PL)参照系 $(\mathbb{R}^m, \phi_\alpha)$ 和 N 的光滑(PL)参照系 $(\mathbb{R}^n_\beta, \psi_\beta)$ (允许$m \neq n$), 映射 $\psi_\beta f \phi_\alpha$ 是光滑(PL)映射.

微分(PL)流形 M 和 N 称为微分(PL)同胚的, 如果存在光滑(PL)映射 $f\colon M \to N$ 和 $g\colon N \to M$, 使得 $gf = 1_M$, $fg = 1_N$.

以上通过描述开覆盖性质的方法我们给出了光滑流形的不依赖于高维空间的嵌入的定义(在此之前, 光滑流形总是定义为几个光滑函数的零点集的交, 或者在更高维 $\mathbb{R}^n$ 的嵌入子流形). 由Whitney定理, 任何 n维光滑(单纯)流形都可以光滑(单纯)地嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中去, 因此从逻辑上讲以上独立定义的流形并没有在经典的嵌入流形之外构造出新的流形. 然而, 实际情况完全不是这样, 这个独立的定义使我们构造出以前想象不到的流形. 同样, 以上PL流形的定义与定义1.13.2的定义是等价的, 但是由于这个定义的存在, 使得大部分PL流形的分类问题和微分流形的分类问题有了一致的同伦论方法的解决, 而从组合角度却无法解决相应的分类问题.

一般地, 坐标卡的定义中可以不要求 $f(O) = \mathbb{R}^n$, 而只要求 $f(O)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集. 同样, 参照系也可以是从 $\mathbb{R}^n$ 的某个开子集到 X 的一个嵌入. 我们采用以上条件更强的定义是因为对于理论证明较容易应用. 同样地, 涉及数量计算的时候, 从参照系的角度讨论问题比较方便, 所以以后我们总是从参照系的角度

描述流形的性质, 因而采用以下的符号和观点.

总是把坐标卡 (O_α, f_α) 和对应的参照系 $(\mathbb{R}^n_\alpha, \phi_\alpha)$ 中的 f_α 和 ϕ_α 看成恒等映射, 也就是说不区分 O_α 和 $\mathbb{R}^n_\alpha$, 所以总是把 (O_α, f_α) 和 $(\mathbb{R}^n_\alpha, \phi_\alpha)$ 统一写成 $\mathbb{R}^n_\alpha$. 为了区别不同的 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^n_\beta$ 中的元素, 总是把 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 中的一般元记为 $(x)_\alpha$ 的形式, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$. 一定要注意的是, 对于不同的参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^n_\beta$, 点 $(x)_\alpha \in \mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $(y)_\beta \in \mathbb{R}^n_\beta$ 是否代表 $\mathbb{R}^n_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta$ 中的同一点是要由以下区分 $\mathbb{R}_\alpha$ 和 O_α 的命题

$$(x_1, \cdots, x_n)_\alpha = (y_1, \cdots, y_n)_\beta, \text{ 当且仅当 } \phi_\alpha(x_1, \cdots, x_n) = \phi_\beta(y_1, \cdots, y_n) \in O_\alpha \cap O_\beta$$

决定的. 因此, 对于 $z \in \mathbb{R}^n$, 点 $(z)_\alpha$ 和 $(z)_\beta$ 一般并不是同一点, 也不一定在 $\mathbb{R}^n_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta$ 中.

从以上角度看, 对于拓扑流形 M 的一个参照族 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 我们得到 M 的另一个定义

$$M = (\amalg_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{R}^n_\alpha)/_\sim, \text{ 其中 } (x)_\alpha \sim (y)_\beta, \text{对所有 } (x)_\alpha = (y)_\beta \in \mathbb{R}^n_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta.$$

流形有了微分结构后并不能成为几何对象, 因为其上任何两点的距离还没有定义, 等价地, 其上任意闭子流形的体积也没有定义.

定义1.13.4 对于微分流形 M 的两个参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^n_\beta$, 转移函数

$$t_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R}^n_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta \to GL(n)$$

如下定义. 由等式 $(x_1, \cdots, x_n)_\alpha = (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n))_\beta \in \mathbb{R}^n_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta$ 我们就得到函数 $y_1, \cdots, y_n$ 的 Jacobi行列式 $t_{\alpha,\beta} = (\frac{\partial y_i}{\partial x_j})_{n\times n}$. 记 $\{t_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为所有转移函数构成的转移函数族. 则转移函数族满足以下性质.

i) 对任何 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 我们有 $t^{-1}_{\alpha,\beta} = t_{\beta,\alpha}$.

ii) 对于任何 $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, 我们有 $t_{\beta,\gamma} t_{\alpha,\beta} = t_{\alpha,\gamma}$.

微分流形 M 的一个黎曼参照系为二元对象 $(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)$, 其中 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 为一光滑参照系, G_α 为 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 上的处处正定的二次型, 具体表示为正定函数矩阵 (省略多余的下标 α)

$$G_\alpha(x) = \begin{pmatrix} g_{1,1}(x) & g_{1,2}(x) & \cdots & g_{1,n}(x) \\ g_{2,1}(x) & g_{2,2}(x) & \cdots & g_{2,n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n,1}(x) & g_{n,2}(x) & \cdots & g_{n,n}(x) \end{pmatrix}_\alpha,$$

其中每个 $g_{i,j}$ 都为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑函数, 对取定的 $x \in \mathbb{R}^n$, 实数矩阵 $G_\alpha(x)$ 都是正定的.

微分流形 M 上的两个黎曼参照系 $(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)$ 和 $(\mathbb{R}^n_\beta, G_\beta)$ 称为刚性相容的, 如果 $t^T_{\beta,\alpha} G_\beta(y) t_{\beta,\alpha} = G_\alpha(x)$ 对所有的 $(x)_\alpha = (y)_\beta \in \mathbb{R}_\alpha \cap \mathbb{R}^n_\beta$ 成立, 其中 $(-)^T$ 代表转移函数的转置矩阵.

微分流形 M 的一个黎曼参照族 $\{(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为由刚性相容的黎曼参照系构成的集合, 满足 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 M 的光滑参照族. 显然 M 的任一黎曼参照族都可以通过添加刚性相容的参照系扩充为一个最大的黎曼参照族, 这个最大的黎曼参照族就称为 M 上的一个黎曼微分结构.

黎曼流形为一二元对象 $(M, \{(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中 $\{(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 M 上的一个黎曼微分结构. 经常把二元对象的黎曼流形简写为 M.

m维黎曼流形 M 到 n维黎曼流形 N $(m \leqslant n)$ 的刚性映射 $f \colon M \to N$ 是指满足以下性质的光滑映射. 对任何 M 的黎曼参照系 $(\mathbb{R}^m_\alpha, G_\alpha)$ 和 N 的黎曼参照系 $(\mathbb{R}^n_\beta, G_\beta)$, 设 f 的局部表达式为

$$f(x_1, \cdots, x_m)_\alpha = (y_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_m))_\beta.$$

则 $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})^T G_\beta(y)(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}) = G_\alpha(x)$.

黎曼流形 M 和 N 称为刚性(等距)同胚的, 如果存在刚性映射 $f\colon M \to N$ 和 $g\colon N \to M$ 使得 $gf = 1_M$, $fg = 1_N$. 显然刚性同胚的流形维数一定相同.

如果要求以上定义中的二次型族 $\{G_\alpha\}$ 是非退化而不一定是正定的, 就得到广义黎曼参照系, 参照族, 流形, 等等的定义.

以上定义中的正定矩阵 G_α 并不是黎曼的首创, 因为流形上的任一闭子流形的体积的计算离不开它.

首先考虑线性空间的 r 维体的体积的定义. 设 $\alpha_i = (v_{i,1}, \cdots, v_{i,n})$, $i = 1, \cdots, r$, 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 r 个向量. 取 $\mathbb{R}^n$ 的内积为标准内积 $\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \rangle = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i$, 也就是说内积由单位阵 I_n 表示. 由外代数 $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ 的内积可知由向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 围成的 r 维体的体积 ($r = 1$ 时为向量 α_1 的长度, $r = 2$ 时为 α_1, α_2 围成的平行四边形面积, $r=3$ 时为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 围成的平行六面体的体积) 为

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \left(\Sigma_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \begin{vmatrix} v_{1,i_1} & v_{1,i_2} & \cdots & v_{1,i_r} \\ v_{2,i_1} & v_{2,i_2} & \cdots & v_{2,i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{r,i_1} & v_{r,i_2} & \cdots & v_{r,i_r} \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

一般地, 取 $\mathbb{R}^n$ 的内积为 $\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \rangle = \Sigma_{i,j=1}^n x_i g_{i,j} y_j$, 也就是说内积由正定阵 $(g_{i,j})$ 表示. 还是对于以上的向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 以上公式就变成了

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \left(\Sigma_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \begin{vmatrix} w_{1,i_1} & w_{1,i_2} & \cdots & w_{1,i_r} \\ w_{2,i_1} & w_{2,i_2} & \cdots & w_{2,i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{r,i_1} & w_{r,i_2} & \cdots & w_{r,i_r} \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中矩阵 $(w_{i,j}) = (v_{i,j})C$, C 为任一个满足 $(g_{i,j}) = CC^T$ 的可逆阵.

把取标准内积的 $\mathbb{R}^n$ 看成一个测度空间而不是线性空间, 那么对于其上的一个 r 维带边紧子流形 N, N 的体积又是多少呢? 假设 N 有参数表示 $\gamma\colon I^r \to \mathbb{R}^n$ 为 $\gamma(t_1, \cdots, t_r) = (x_1(t_1, \cdots, t_r), \cdots, x_n(t_1, \cdots, t_r))$, 其中 $I = [0,1]$. 由 γ 我们得到一组(偏)导向量 $\alpha_i = (\frac{\partial x_1}{\partial t_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial t_i}) = (v_{1,i}, \cdots, v_{n,i})$, $i = 1, \cdots, r$, 其中每个 $v_{s,t}$ 为 I^r 上的函数. 则

$$V(N) = \int_{I^r} \left(\Sigma_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \begin{vmatrix} v_{1,i_1} & v_{1,i_2} & \cdots & v_{1,i_r} \\ v_{2,i_1} & v_{2,i_2} & \cdots & v_{2,i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{r,i_1} & v_{r,i_2} & \cdots & v_{r,i_r} \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt_1 \cdots dt_n$$

容易验证以上的定义不依赖于参数表示 γ 的选取.

对于黎曼流形 M 的一个黎曼参照系 $(\mathbb{R}^n_\alpha, G_\alpha)$, 作为测度空间, $\mathbb{R}^n_\alpha$ 上的一个 r 维带边紧子流形 N 的体积又是多少呢? 可以假设 N 有同上的参数表示 $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))_\alpha \in \mathbb{R}^n_\alpha$, $t \in I^r$. 由 γ 我们得到一组偏导向量 $\alpha_i = (\frac{\partial x_1}{\partial t_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial t_i}) = (v_{1,i}, \cdots, v_{n,i})$. 令函数矩阵 $(w_{i,j}) = (v_{i,j})C_\alpha$, 其中 C_α 为任一个满足 $G_\alpha =$

$C_\alpha C_\alpha^T$ 的可逆阵. 则

$$V(N)=\int_{I^r}\left(\Sigma_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\begin{vmatrix} w_{1,i_1} & w_{1,i_2} & \cdots & w_{1,i_r}\\ w_{2,i_1} & w_{2,i_2} & \cdots & w_{2,i_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ w_{r,i_1} & w_{r,i_2} & \cdots & w_{r,i_r}\end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt_1\cdots dt_n$$

同样容易验证以上的定义不依赖于参数表示 γ 的选取.

假设 N 同时又落在 M 的另一个参照系 $(\mathbb{R}^n_\beta, G_\beta)$ 内. 则把以上公式中的 G_α 替换为 G_β 又能计算出 N 的另一个体积. 而由刚性相容性 $t^T_{\beta,\alpha}G_\beta t_{\beta,\alpha}=G_\alpha$ 可验证这两个体积的值相同. 这说明以上公式计算出的体积不依赖于黎曼参照系 $(\mathbb{R}_\alpha, G_\alpha)$ 的选取, 为黎曼流形M 的子流形N 的体积. 同样地, 对于 M 的任何紧子流形, 可以通过把 N 分成若干片, 使每片都落到某个 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 上, 然后利用以上公式计算出每一片的体积, 再相加就可以计算出 N 的体积了. 特别地, 如果 M 是紧流形, M 自身的体积也可以计算出来了. 而当取 $r=1$ 时, 还可以定义 M 上的任何两点的距离为所有连接两点的道路的长度的下确界. 由此可见 G_α 和几何学的关系.

虽然 G_α 在局部微分几何中就已经存在了, 但是黎曼却用 G_α 结合张量代数定义了流形不依赖于参照系选取的几何不变量:曲率, 从而创立了现代微分几何. 不仅如此, 黎曼从粘合开集的角度反用以上定义, 奠定了现代微分几何的基本计算方法, 构造了以前人们无法想象的空间. 举一个和现实相关的例子.

直觉地看, 两个不同的参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^n_\beta$ 作为集合应该为流形 M 的不同的开子集. 但其实这点是不对的. 比如, 对于拓扑空间 $\mathbb{R}^n$, 把正交群 $O(n)$ 作为下标集和坐标卡 (O_α, f_α) 中的 f_α, 我们有 $\mathbb{R}^n$ 上的一个黎曼参照系 $\{(\mathbb{R}^n_O, G_O)\}_{O\in O(n)}$, 其中每个 $\mathbb{R}^n_O\cong\mathbb{R}^n$, 所有的 G_O 都是单位阵 I_n. 因此这个黎曼参照系也记为 $\{(\mathbb{R}^n_O, I_n)\}_{O\in O(n)}$. 如果区分坐标卡和参照系中的开集, 则参照系 $\mathbb{R}^n_O$ 对应的坐标卡为 $(O_o=\mathbb{R}^n, O)$ (即所有的 O_O 都是 $\mathbb{R}^n$ 自身), 其中 $O\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n_\alpha$ 为正交矩阵在线性空间的标准作用 (把 $\mathbb{R}^n$ 到自身的变换看成到 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 的线性映射). 因此对于 $U,V\in O(n)$, 转移函数 $t_{U,V}=VU^{-1}$, 即 $(x)_U=(VU^{-1}(x))_V$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^n$. 由于对所有正交矩阵 O, 我们都有 $O^TI_nO=I_n$. 所以这族参照系是刚性相容的, 即 $\{(\mathbb{R}^n_O, I_n)\}_{O\in O(n)}$ 为黎曼参照族. 那么由这个参照族得到的商空间

$$(\amalg_{O\in O(n)}\mathbb{R}_O)/\sim,\ (x)_U\sim((VU^{-1})(x))_V\ \text{对所有}\ x\in\mathbb{R}^n\ \text{和}\ U,V\in O(n)$$

又是什么呢? 如果把 $\mathbb{R}_{I_n}$ 看成是标准的欧式空间的话, 则 $\mathbb{R}^n_O$ 就可以看成 $\mathbb{R}^n_{I_n}$ 中换一个以 O 的 n 个列向量为标准正交基的新的欧式空间, 于是 $\amalg_{O\in O(n)}\mathbb{R}_O$ 就是把这族线性空间做不交并的空间, 以上的商空间就是把不交并空间的不同的连通分支按照正交变换的法则粘和到一起, 所以商空间其实还是标准的欧式空间 $\mathbb{R}^n$, 所以这个黎曼参照系扩张成的黎曼微分结构就是拓扑空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准黎曼微分结构 ($\mathbb{R}^n$ 上还有其它黎曼微分结构).

类似地, 令 G 为 $\mathbb{R}^4$ 上的常系数的非退化二次型矩阵

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-c^2\end{pmatrix},$$

其中 c 为一正常数. 所有保持 G 不变的 4 阶常系数方阵构成Lorence群 $L(c)$, 即 $L(c)=\{A\,|\,A^TGA=G\}$. 则同上我们得到一广义黎曼参照族 $\{(\mathbb{R}^4_A, G)\}_{A\in L(c)}$, 其中每个 $\mathbb{R}^4_A\cong\mathbb{R}^4$, 所有的 G_α 都是 G. 记由这个参照族

扩充成的广义黎曼微分结构得到的广义黎曼流形为 E, 则 E 可以看成以下商空间

$$E = (\amalg_{A\in L(c)} \mathbb{R}^4_A)/_\sim,\ (x)_A \sim ((BA^{-1})(x))_B \text{ 对所有 } x\in\mathbb{R}^4 \text{ 和 } A,B\in L(c).$$

我们采用物理中的符号, 记 $\mathbb{R}^4_{I_4}$ 中的一般点为 (x,y,z,t), 记 $\mathbb{R}^4_A$ 中的一般点为 (x',y',z',t'). 那么什么时候两个坐标 (x,y,z,t) 和 (x',y',z',t') 代表 E 中的同一点呢? 显然只要确定了 A, 这个问题就解决了. 我们只讨论最简单的 A 和 y,z 无关的情形, 即 $y'=y$, $z'=z$, $x'=\alpha x+\beta t$, $t'=\xi t+\eta x$. 由 $A^TGA=G$ 可知未知数 α,β,ξ,η 由一个常数确定. 特别地, 方程 $x'=y'=z'=0$ 对应方程 $\alpha x+\beta t=0$, $y=z=0$. 把第一个方程解释为参照系 (x',y',z',t') 的静止不动, 第二个方程解释为参照系 (x,y,z,t) 沿 x 轴的速度为 v 的匀速移动, 则 $\beta/\alpha=-v$, 我们就确定了 A, 也就是坐标变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{为} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x-vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t-\frac{v}{c^2}x) \end{cases}.$$

取 c 为光速, 则 E 就是狭义相对论的时空. 而广义相对论的时空就是将以上常系数的矩阵 G 在引力的作用下变为非常系数的矩阵.

我们经常要用的一个概念就是可定向流形. n维拓扑流形 M 是可定向的, 如果它的 n 阶同调群为整数加群 $\mathbb{Z}$, 否则它的 n阶同调群就是 0 群. 但是单纯流形和微分流形的可定向性, 有以下基于单纯结构和微分结构的独立定义.

定义1.13.5 对于 $(0,\cdots,n)$ 的一个置换排列 $(i_0,\cdots,i_n)$, 单形 $\{x_0,\cdots,x_n\}$ 和 $\{x_{i_0},\cdots,x_{i_n}\}$ 代表同一单形空间. 我们把所有这些 $(n+1)!$ 个代表同一单形空间但顶点排列顺序不同的单形叫形式单形. 所有的形式单形分为两类, 同一类的形式单形的顶点列可以通过偶置换互相得到. 一个定向单形就是指把这两类形式单形中的一类规定为正向单形, 另一类规定为负向单形.

n维单纯流形 K 有一个基本特点, K 的任何一个不在边缘上的 $(n-1)$-单形存在并且只存在两个 n-单形以此单形为共同的面, 称这两个 n-单形为相邻的. 注意, 这个概念在非流形上不存在! 反之, 满足以上性质的单纯复形却未必是流形, 而称为伪(单纯)流形.

n维单纯流形 K 称为可定向的, 如果存在其上的每一个 n单形的定向, 满足任何相邻的两个 n-单形的定向都是相容的, 其中相容性如下定义. 如果形式单形 $\{x,y_1,\cdots,y_n\}$ 和形式单形 $\{x',y_1,\cdots,y_n\}$ 相邻, 则两个单形的定向相容是指$\{x,y_1,\cdots,y_n\}$ 和 $\{x',y_1,\cdots,y_n\}$ 的定向相反. 显然一个道路连通的可定向单纯流形存在并且只存在两个相反的定向构成两个定向相反的定向单纯流形. 所以如果一个可定向单纯流形 K 在每个道路连通分支上都取了定向, 就称 K 为一定向流形.

微分流形 M 上的两个光滑参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^n_\beta$ 称为定向相容的, 如果转移函数 $t_{\alpha,\beta}$ 的行列式在每点都大于0. M 的一个光滑参照族 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为定向参照族, 如果其中任两个参照系都是定向相容的.

微分流形 M 称为可定向的, 如果存在其上的一个定向参照族. 显然 M 的任一定向参照族可以通过添加定向相容的参照系扩充为一个最大的定向参照族, 这个最大的参照族就称为 M 的一个定向微分结构.

定向微分流形为二元对象 $(M,\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 M 的一个定向微分结构. 定向微分结构中的每个光滑参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 都称为定向流形的一个正向参照系, 其余的光滑参照系就称为 M 的负向参照系. 显然一个连通的可定向微分流形存在并且只存在两个相反的定向构成两个定向相反的定向微分流形.

例1.13.6 我们给出球面 S^n 的标准黎曼微分结构和单纯结构.

设实数 r 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个光滑函数 f 的横截点, 即对于任何 $(x_1\cdots,x_{n+1})\in f^{-1}(r)$, 梯度向量 $(\frac{\partial f}{\partial x_i})^T\neq 0$. 下面说明 $M=f^{-1}(r)$ 为 n维闭的黎曼流形. 对于 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in M$, 不妨假设 $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\neq 0$. 由隐函数定理, 存在一个定义在点 $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 附近的同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一个邻域 O 上的光滑函数 $\phi(u_1,\cdots,u_n)$ 满足恒等式 $f(u_1,\cdots,u_n,\phi(u_1,\cdots,u_n))\equiv r$. 于是我们就得到一个光滑嵌入 $\Phi\colon O\to M$ 定义为 $\Phi(u_1,\cdots,u_n)=(u_1,\cdots,u_n,\phi(u_1,\cdots,u_n))$. 令 $\Psi\colon\mathbb{R}^n\to O$ 为任一光滑同胚, 则我们得到光滑嵌入 $i_y=\Phi\Psi\colon\mathbb{R}^n\to M$. 显然 $\{(i_y(\mathbb{R}^n),i_y^{-1})\}_{y\in M}$ 为 M 的一个光滑图册. 一般地, M 的光滑参照系 $(\mathbb{R}^n_\alpha,\lambda_\alpha)$ 的光滑映射 ϕ_α 为 n+1 个光滑函数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ 满足恒等式

$$f(\lambda_1(s_1,\cdots,s_n),\cdots,\lambda_{n+1}(s_1,\cdots,s_n))\equiv r$$

对所有 $(s_1,\cdots,s_n)\in\mathbb{R}^n_\alpha$. 假设 M 的另一个光滑参照系 $(\mathbb{R}^n_\beta,\phi_\beta)$ 的光滑映射 ϕ_β 为函数 $\mu_1,\cdots,\mu_n,\mu_{n+1}$ 满足恒等式

$$f(\mu_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,\mu_{n+1}(t_1,\cdots,t_n))\equiv r$$

对所有 $(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n_\beta$. 在 $\lambda_\alpha(\mathbb{R}^n_\alpha)\cap\lambda_\beta(\mathbb{R}^n_\alpha)$ 上我们有, $\lambda_i(s_1,\cdots,s_n)=\mu_i(t_1,\cdots,t_n)$. 对 s_i 求偏导得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\mu_1}{\partial t_1}&\cdots&\frac{\partial\mu_1}{\partial t_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\mu_{n+1}}{\partial t_1}&\cdots&\frac{\partial\mu_{n+1}}{\partial t_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial t_1}{\partial s_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial t_n}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial t_n}{\partial s_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_n}\end{pmatrix},$$

其中矩阵 $(\frac{\partial t_i}{\partial s_j})$ 为转移函数 $t_{\alpha,\beta}$. 令

$$G_\alpha=\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_n}{\partial s_1}&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_1}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial s_n}&\cdots&\frac{\partial\lambda_n}{\partial s_n}&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\lambda_n}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_n}{\partial s_n}\\ \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_n}\end{pmatrix},\ G_\beta=\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial t_j}\right)\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial t_j}\right)^T.$$

则 $t^T_{\alpha,\beta}G_\beta t_{\alpha,\beta}=G_\alpha$. 所以 $\{(\mathbb{R}^n_\alpha,G_\alpha)\}$ 为 M 的黎曼微分结构. 不仅如此, 黎曼流形 M 还是可定向的. 对于以上的黎曼参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$, 如果行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}&\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_1}{\partial s_n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial f}{\partial\lambda_n}&\frac{\partial\lambda_n}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_n}{\partial s_n}\\ \frac{\partial f}{\partial\lambda_{n+1}}&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_1}&\cdots&\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial s_n}\end{vmatrix}>0,$$

则 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 就是 M 的正向参照系, 否则就是负向参照系.

取 $f=x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2$, 则 $f^{-1}(1)=S^n$ 的标准定向微分结构就是以上方式确定的定向黎曼闭流形.

已知当 $n\neq 4$ 时, 拓扑空间 S^n 上有唯一的单纯结构, 而 S^4 上是否有唯一的单纯结构还是个未解决的问题. 但是对任意 n, 拓扑空间 S^n 的标准的单纯结构就是由 $\partial\Delta^{n+1}$ 的所有加细单形决定的单纯结构.

当维数较高的时候, 一个拓扑流形未必是可剖分或者可微分的. 对于可剖分或者可微分流形, 拓扑流形的拓扑同胚类与微分同胚类或者PL同胚类也都未必一致. 高维流形的各种结构的同胚分类如果不加条件,

是没有一般办法的. 目前都是加条件, 把问题转化成同伦类的计算, 或者等价地, 广义同调群的计算问题而解决的. 反而是低维流形的分类非常困难, 因为不能化为类似的代数问题.

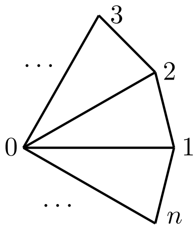
当维数 $n \leqslant 3$ 时, 任何拓扑流形都存在光滑和单纯结构, 并且拓扑流形的拓扑同胚类, 微分同胚类, 和PL同胚类都一致. 所以我们可以简称流形而不必区分是拓扑流形, 或是单纯流形, 或是微分流形.

显然道路连通的1维闭流形只有一类, 就是一个 k 边形, $k \geqslant 3$. 而所有 k 边形的边界都同胚于 S^1. 所以道路连通的1维闭流形的同胚类只有一类, 由 S^1 代表.

道路连通的2维流形的分类问题可以用组合的方法解决. 下面我们用商空间的办法定义一类CW复形, 包含了所有的道路连通的2维流形.

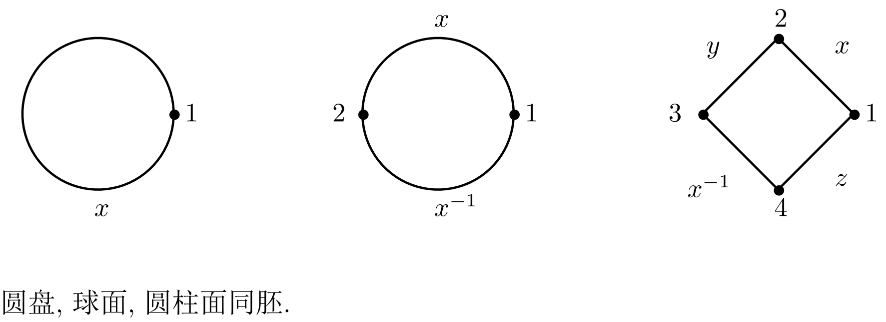
首先回顾一下字的概念. 由字母 $x_1,\cdots,x_n$ 写成的一个字是一字母列 $l_1\cdots l_s$, 其中每一个 l_i 为某个字母 x_j 或者逆字母 x_j^{-1}, 这里字母的逆是相对的, 即 x_j 和 x_j^{-1} 互为逆字母. 定义字 $l_1\cdots l_s$ 的长度为 s. 连续相同的字母可以简写成高次方, 比如 xx 可简写为 x^2, $x^{-1}x^{-1}$ 可简写为 x^{-2}. 但不允许将正负混淆, 比如 $xx^{-1}x$ 和 x 不是同一字. 两个字 $A=l_1\cdots l_s$ 和 $B=u_1\cdots u_t$ 可以做连接构成一个新字 $AB=l_1\cdots l_su_1\cdots u_t$. 显然两个字的连接字的长度为各自长度的和. 由于字母有逆字母, 所以字也有逆字. 定义为 $(l_1\cdots l_s)^{-1} = l_s^{-1}\cdots l_1^{-1}$. 则对于任何字 $L_1,\cdots,L_n$, 我们有 $(L_1\cdots L_n)^{-1}=L_n^{-1}\cdots L_1^{-1}$. 特别地, 记 1 为空字, 即字母集为空集写成的空字. 定义空字的长度为 0. 因此总有 $1L=L1=L$ 对任何字 L.

定义1.13.7 设 $l_1\cdots l_n$ 为一字, 由该字对应的拓扑空间 $S(l_1\cdots l_n)$ 定义如下. 给圆盘 D^2 如下的剖分,



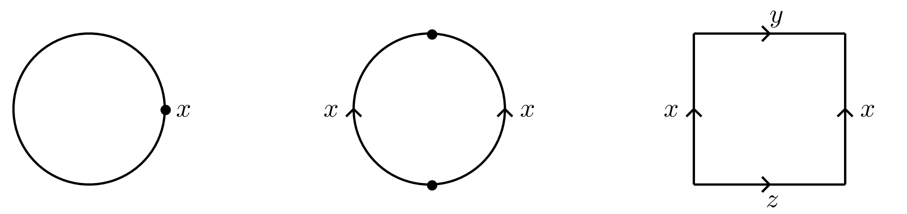
其中圆盘的边为正 n 边形, 沿逆时针方向排列, 顶点为 $1,2,\cdots,n$, 圆盘的中心点为顶点0. 该剖分由 n 个规则相处的三角形 $\{0,i,i{+}1\}$ $(n{+}1=1)$ 构成. 规定以上单纯复形的等价关系如下. 如果 l_s 和 l_t 是相同的字母, 则 $\{s,s{+}1\}\sim\{t,t{+}1\}$; 如果 l_s 和 l_t 是互逆的字母, 则 $\{s,s{+}1\}\sim\{t{+}1,t\}$. 定义 $S(l_1\cdots l_n)$ 为以上剖分的 D^2 关于等价关系 $\sim$ 的商CW复形. 也用等分的圆盘来表示正 n 边形. 当 $n=2$ 时, 用圆盘加两个对径点来代表2边形. 当 $n=1$ 时, 用圆盘加一点来表示1边形. 特别地, 规定 $S(1)$ 为球面 S^2.

我们在边 $\{s,s{+}1\}$ 的旁边用字母 l_s 标注, 下图由左到右分别为 $S(x)$, $S(xx^{-1})$, $S(xyx^{-1}z)$.



它们显然分别与圆盘, 球面, 圆柱面同胚.

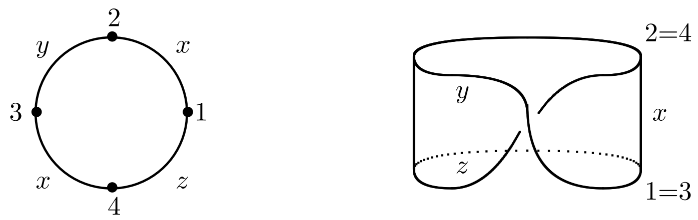
为了更形象和方便, 我们经常采用另外的方法来表示空间 $S(l_1\cdots l_n)$, 那就是不用数字标记划分点, 也不用负次方 x_i^{-1} 标注边, 而总是用 x_i 标注边, 但每条边却用箭头表示方向, 这样标注字母相同的边沿着箭头的方向对应粘合. 用这种方法以上空间就有以下等价的表示方法.



$S(l_1\cdots l_n)$ 作为 D^2 的商空间自然为紧空间. 不难用定义直接验证 $S(l_1\cdots l_n)$ 上任何两点可以被开邻域分开, 因而是Hausdorff空间. 作为CW复形, $S(l_1\cdots l_n)$ 的顶点集为圆盘边缘的 n 个划分点按照等价关系粘合后的商集(不一定只有一个顶点), 1-胞腔与表示 $l_1\cdots l_n$ 的字母1-1对应, 2-胞腔只有一个, 就是 $S(l_1\cdots l_n)$ 自身.

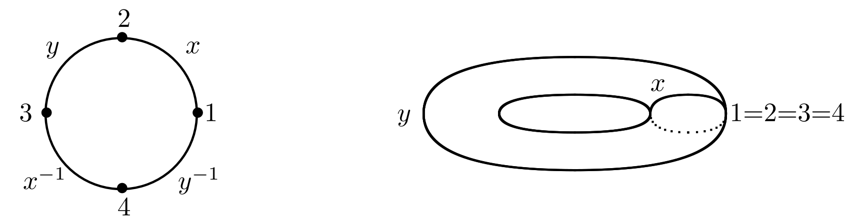
例1.13.8 以下图形中右边是拓扑空间的立体形象或其示意图, 字母在左边空间对应一段圆弧, 在右边对应1胞腔, 顶点用自然数表示.

(1) Möbius带 $S(xyxz)$.



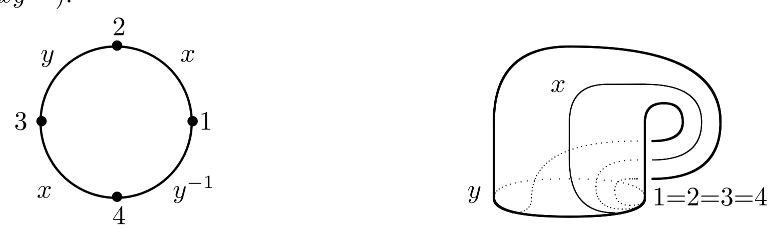
这个空间是个带边流形, 是不可定向的. 不可定向性在3维空间直观地看, 就是一个人站在这个面的中线走一圈后站在出发点位置的下方, 因此曲面无法分成正反两面.

(2) 轮胎面 $S(xyx^{-1}y^{-1})$.



这是个可定向闭流形, 同胚于乘积空间 $S^1\times S^1$, 后者又称为环面. 可定向性在3维空间看就是曲面可以分为正反两面.

(3) Klein瓶 $S(xyxy^{-1})$.



这是个闭流形, 是不可定向的, 而且无法嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中, 因而是很容易从逻辑上构造但却无法在 $\mathbb{R}^3$ 中“看到”的最著名的例子.

(4) 射影空间 $RP^2=S(x^2)$.

同Klein瓶一样, 射影空间也是闭流形, 也不可定向, 也无法嵌入到$\mathbb{R}^3$中, 甚至都很难像Klein瓶那样画出$\mathbb{R}^3$中的示意图. 将$S(x^2)$沿中间圆割成两部分A, B, 则A为圆盘, B为Möbius带. 所以射影空间是圆盘和Möbius带把边界S^1粘在一起得到的空间.

定理1.13.9 我们有以下同胚空间.

(1) $S(l_1 l_2 \cdots l_{n-1} l_n) \cong S(l_n l_1 l_2 \cdots l_{n-1})$, 称为字母轮换不变性.

(2) $S(l_1 \cdots l_n) \cong S(l_1^{-1} \cdots l_n^{-1})$, 称为逆字不变性.

(3) $S(l_1 \cdots l_n) \cong S(l_1' \cdots l_n')$, 其中$l_1' \cdots l_n'$为将$l_1 \cdots l_n$中某些字母换成新字母得到的字, 称为改写字母不变性.

(4) $S(xy\, l_1 \cdots l_n) \cong S(z\, l_1 \cdots l_n)$, 其中字母$x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}$都不在字$l_1 \cdots l_n$中出现.

证 由定义显然.

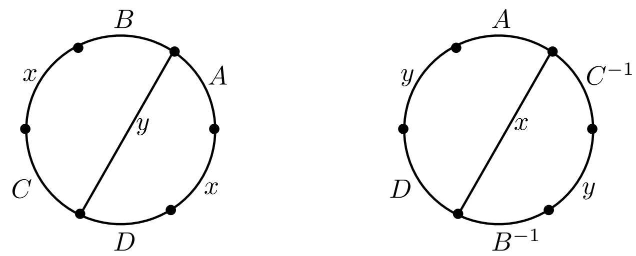
定理1.13.10 我们有以下同胚空间, 其中A, B, C, D为字, 字母$x^{\pm 1}$不出现在大写的字中.

(1) $S(ABxCDx) \cong S(C^{-1}AxDB^{-1}x)$.

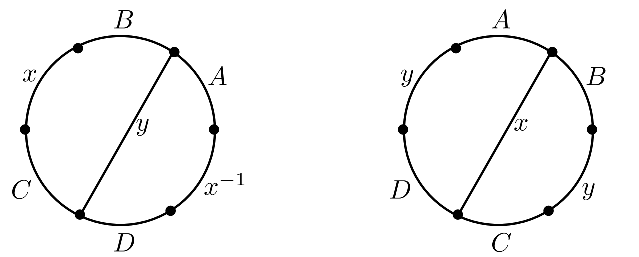
(2) $S(ABxCDx^{-1}) \cong S(BAxDCx^{-1})$.

(3) $S(Axx^{-1}) = S(A)$.

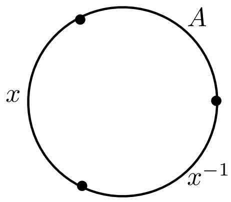
证 (1) 下图显示$S(ABxCDx) \cong S(C^{-1}AyDB^{-1}y)$. 由前定理, $S(C^{-1}AyDB^{-1}y) \cong S(C^{-1}AxDB^{-1}x)$.

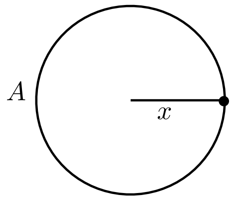


(2) 下图显示$S(ABxCDx^{-1}) \cong S(BAyDCy^{-1})$.



(3) 下图显示$S(Axx^{-1}) = S(A)$ ($S(xx^{-1}) = S(1)$直接验证).





定理1.13.11 我们有以下同胚空间, 其中 A, B, C, D, E 为字, 字母 $x^{\pm1}, y^{\pm1}, z^{\pm1}, x_k^{\pm1}$ 都不出现在大写的字中.

(1) $S(AxBxC) \cong S(Ax^2B^{-1}C)$.

(2) $S(AxBCx^{-1}D) \cong S(AxCBx^{-1}D)$.

(3) $S(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E) \cong S(ADCBxyx^{-1}y^{-1}E)$.

(4) $S(Ax^2yzy^{-1}z^{-1}B) \cong S(Ax^2z^2y^2B)$.

(5) $S(A\,x\,x_1^2\cdots x_s^2\,x^{-1}B) \cong S(A\,x_1^2\cdots x_s^2B)$.

证 (1) 前定理(1)中取 $B = D = 1$ 得, $S(AxCx) = S(Ax^2C^{-1})$, 即 $S(AxBx) = S(Ax^2B^{-1})$. 所以

$$S(AxBxC) = S(CAxBx) = S(CAx^2B^{-1}) = S(Ax^2B^{-1}C).$$

(2) 前定理(2)中取 $B = 1$ 得, $S(AxBCx^{-1}) \cong S(AxCBx^{-1})$. 所以

$$S(AxBCx^{-1}D) = S(DAxBCx^{-1}) = S(DAxCBx^{-1}) = S(AxCBx^{-1}D).$$

(3) 由本定理中(2)得

$$\begin{aligned}
& S(AxByCx^{-1}Dy^{-1}E) && \text{字母轮换顺序} \\
\cong\ & S(EAxByCx^{-1}Dy^{-1}) && \text{由(2) } x \text{ 和 } x^{-1} \text{ 之间的字母可以轮换顺序} \\
\cong\ & S(EAxyCBx^{-1}Dy^{-1}) && \text{由(2) } y \text{ 和 } y^{-1} \text{ 之间的字母可以轮换顺序} \\
\cong\ & S(EAxyx^{-1}DCBy^{-1}) && \text{字母轮换顺序} \\
\cong\ & S(yx^{-1}DCBy^{-1}EAx) && \text{由(2) } x \text{ 和 } x^{-1} \text{ 之间的字母可以轮换顺序} \\
\cong\ & S(yx^{-1}y^{-1}EADCBx) && \text{字母轮换顺序} \\
\cong\ & S(EADCBxyx^{-1}y^{-1}) && \text{字母轮换顺序} \\
\cong\ & S(ADCBxyx^{-1}y^{-1}E)
\end{aligned}$$

(4) 由本定理中(1)和(2)得

$$\begin{array}{lll} & S(Axxyzy^{-1}z^{-1}B) & \text{字母轮换顺序} \\ \cong & S(BAxxyzy^{-1}z^{-1}) & \text{由(1) } x^2\text{后的字可逆插入} \\ \cong & S(BAxy^{-1}xzy^{-1}z^{-1}) & \text{由(1) 两个 } y^{-1}\text{ 之间的字可逆置后} \\ \cong & S(BAxy^{-1}y^{-1}z^{-1}x^{-1}z^{-1}) & \text{由(2) } x\text{和 } x^{-1}\text{ 之间的字母可以轮换顺序} \\ \cong & S(BAxz^{-1}y^{-1}y^{-1}x^{-1}z^{-1}) & \text{由(1) 两个 } z^{-1}\text{ 之间的字可逆置后} \\ \cong & S(BAxz^{-1}z^{-1}xyy) & \text{由(1) 两个 } x\text{ 之间的字可逆置后} \\ \cong & S(BAxxzzyy) & \text{字母轮换顺序} \\ \cong & S(AxxzzyyB) & \end{array}$$

(5) 由本定理中(1)和(2)得

$$\begin{array}{lll} & S(Axx_1^2\cdots x_s^2x^{-1}B) & \text{由(1) } x_s^2\text{ 后的字可逆插入} \\ \cong & S(Axx_1^2\cdots x_{s-1}^2x_sxx_sB) & \text{由(1) 两个 } x\text{ 之间的字可逆置后} \\ \cong & S(Ax^2x_s^{-1}x_{s-1}^{-2}\cdots x_1^{-2}x_sB) & \text{将字母 } x, x_s^{-1}, x_{s-1}^{-1}, \cdots, x_1^{-1}\text{ 改写为 } x_1, x, x_2, \cdots, x_s \\ \cong & S(Ax_1^2\,x\,x_2^2\cdots x_s^2x^{-1}B) & \end{array}$$

将此过程重复就可得到定理结论.

定理1.13.12 假如长度为偶数的字 $l_1\cdots l_{2n}$ $(n\geqslant 1)$ 满足每个字母都出现两次, 具体地, 字 $l_1\cdots l_{2n}$ 由 n 个字母 $x_1,\cdots,x_n$ 写成, 每个字母 x_i 和 x_i^{-1} 总共出现两次, 即或者 x_i 在字中出现两次但 x_i^{-1} 在字中不出现, 或者 x_i^{-1} 在字中出现两次但 x_i 在字中不出现, 或者 x_i 和 x_i^{-1} 都在字中出现一次. 则 $S(l_1\cdots l_{2n})$ 同胚于以下情况之一.

(1) $S(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_sy_sx_s^{-1}y_s^{-1})$, $s\geqslant 1$, 其中 $S(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1})$ 为轮胎面, 也是环面$S^1\times S^1$.

(2) $S(x_1^2\cdots x_s^2)$, $s\geqslant 1$, 其中 $S(x_1^2)$ 为射影空间, $S(x_1^2x_2^2)$ 为Klein瓶.

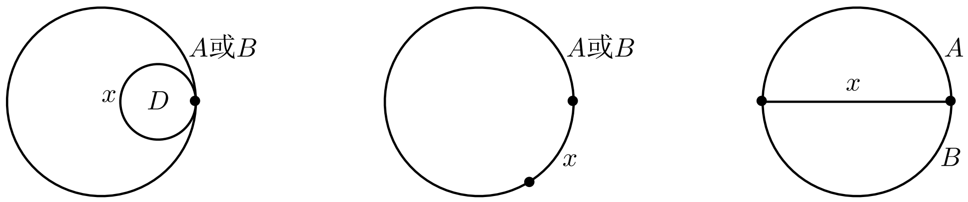
(3) $S(1)$, 为球面.

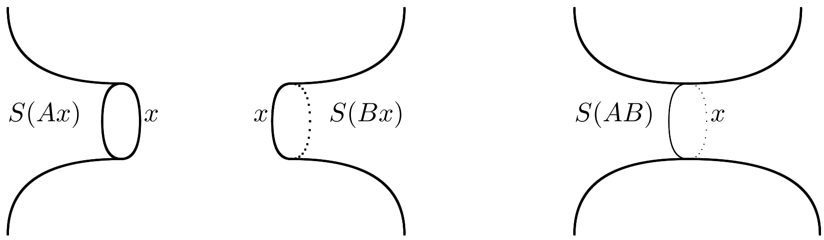
证 由前定理(1)可以假设如果字母 x (或者 x^{-1}) 出现在 $l_1\cdots l_{2n}$ 中出现两次, 则一定以 x^2 (或者 x^{-2}) 的形式出现在字中. 通过将 x^{-1} 改写成 x 可以假设没有形如 x^{-2} 的字样出现在字中, 只有形如 x^2 的字样出现在字中. 由前定理(5)可知如果 x 和 x^{-1} 都出现在 $l_1\cdots l_{2n}$ 中, 则 $l_1\cdots l_{2n}$ 形如 $Ax^{\pm1}By^{\pm1}Cx^{\mp1}D$, 其中 $y^{\pm1}$ 不出现在 B,C 中. 由前定理(3)可知, $S(l_1\cdots l_{2n})$ 同胚于某个 $S(Uxyx^{-1}y^{-1}V)$. 综上可以假设字 $l_1\cdots l_{2n}$ 满足以下条件, 如果字母 x 和 x^{-1} 都出现在字中, 则存在字母 y 使得 $l_1\cdots l_{2n}$ 为以下的形式 $Axyx^{-1}y^{-1}B$; 如果字母 x 出现在字中两次, 则 $l_1\cdots l_{2n}$ 为以下形式Ax^2B. 再由前定理(4)可知 $S(l_1\cdots l_{2n})$ 一定同胚于定理中的情形之一.

以上定理实际上分类了所有道路连通的2维闭流形.

首先, 我们要证明以上定理中的 $S(l_1\cdots l_{2n})$ 都是闭流形. 假设对于字 A, $S(A)$ 同胚于闭流形 M, 如果字母 x 不出现在 A 中, 那么 $S(Ax)$ 就是 M 抠去一个开圆盘 D 所得到的带边流形 $M\backslash D$, 其中 $\mathrm{Bd}(M\backslash D)$ 就是字母 x 对应的那段圆弧在商空间中的同胚于 S^1 的象子空间. 同样, $S(B)$ 同胚于闭流形 N, 字母 x 也不出现

在 B 中的话, 则 $S(Bx)$ 就是带边流形 $N\backslash D$, 其中 $\mathrm{Bd}(N\backslash D)$ 为字母 x 对应的那段圆弧在商空间的象子空间. 如果 A 和 B 没有相同的字母的话, 则 $S(AB)$ 就是把 $M\backslash D$ 和 $N\backslash D$ 把同胚的边S^1粘在一起所得到的流形, 称为两个流形的连通和流形, 通常记为 $M\#N$. 如下图所示.

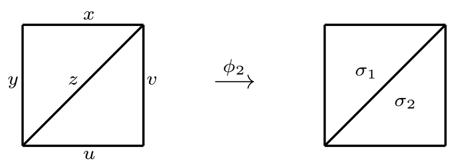




由于 $S(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1})$ 和 $S(x_1^2)$ 都为闭流形, 所以以上定理中所有的 $S(l_1\cdots l_{2n})$ 都是流形.

下面我们证明任何一个道路连通的2维单纯闭流形 M 一定同胚于某个以上定理中的$S(l_1\cdots l_{2n})$. 假设 M 为 $m(>2)$ 个规则相处的三角形并, 我们要归纳地证明存在这 m 个三角形的排序 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 满足以下性质. 对于 $k=1,\cdots,m$, 由 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 的并构成的单纯复形 M_k 是道路连通的, 并且存在一个 $S(A_k)$ 到 M_k 的同胚映射 ϕ_k, 其中 A_k 为一字, 其上每一个字母在字中最多出现两次, 并且当 $k<m$ 时, 至少有一个字母只出现一次.

当 $k=1$ 时, $S(xyz)$ 与M_1 显然同胚. 取 σ_2 为与 σ_1 相邻的三角形, ϕ_1 将字母 z 所对应的边映为 $\sigma_1\cap\sigma_2$, 则显然 $S(xyuv)$ 与 K_2 同胚. 如下图.



假设对于 $2<k<m$, 存在由 $S(A_k)$ 到 M 的嵌入 ϕ_k, 其中每个字母最多在字 A_k 中出现2次. 首先证明至少有一个字母在字 A_k 中只出现一次. 如果不然, 则每个字母都在字A_k中出现两次. 则由上定理可知 $\phi_k(S(A_k))$ 为 M 的道路连通的闭子流形. 设 σ_{k+1} 与 σ_i 相邻, $i\leqslant k$. 则 $\sigma_{k+1}\cap\sigma_i$ 为 σ_i 的一条边. 由于 $\phi_k(S(A_k))$ 为 M 的闭流形, 所以存在 σ_j, $j\leqslant k$, $j\neq i$ 使得 $\sigma_i\cap\sigma_j=\sigma_i\cap\sigma_{k+1}$. 所以边 $\sigma\cap\sigma_j$ 有三个 2-胞腔 $\sigma_i,\sigma_j,\sigma_k$ 以它为真面. 这与 M 为闭流形矛盾! 所以至少有一个字母在字 A_k 中只出现一次. 不妨设 $A_k=l_1\cdots l_s$ 并且字母 $l_s\neq l_i^{\pm}$ 对 $i=1,\cdots,s-1$, ϕ_k 将字母 l_s 所代表的 $S(A_k)$ 的 1-胞腔嵌入到 M 为 σ_t 的真面. 取 σ_{k+1} 为与唯一的 σ_t 相邻的三角形. 于是存在由 $S(l_1\cdots l_{s-1}uv)$ 到 M_{k+1} 的同胚映射 ϕ_{k+1}, 其中字母 u 和 v 或者不出现在 A_k中, 或者在 A_k 中只出现过一次. $S(l_1\cdots l_s)$ 和 $S(l_1\cdots l_{s-1}uv)$ 的关系如下图.

其中 ϕ_{k+1} 将 u, v 代表的边和细线围成的三角形映为 σ_{k+1}. 所以归纳地, 我们有 $S(A_k)$ 到 M_k 的同胚映射对所有的 $k=1,\cdots,m$. 特别地, A_m 中的每个字母一定出现2次, 因为否则就与 M 是闭流形矛盾. 这说明 M 一定同胚于以上定理中的某个 $S(l_1\cdots l_{2n})$.

综上所述, 任何一个道路连通的2维闭流形一定是以下三种情况之一. 第一, 同胚于可定向流形球面$S(1)$. 第二, 同胚于若干个环面的连通和构成的可定向流形$S(xyx^{-1}y^{-1})\#\cdots\#S(xyx^{-1}y^{-1})$. 第三, 同胚于若干个射影平面的连通和构成的不可定向流形$S(x^2)\#\cdots\#S(x^2)$. 通过计算一些常见的同伦不变量, 比如欧拉数, 同调群, 等等, 就可以很容易证明以上三类流形互不同胚了.

空间 $S(l_1\cdots l_n)$ 的定义可以类似推广到 n维圆盘 D^n 的剖分在边界做粘合得到的商空间上, 即任意道路连通的 n维闭单纯流形一定存在一个CW复形结构, 只有一个 n-胞腔. 但是当 $n>2$ 时这类商空间的分类却没有办法像 $n=2$ 时那样简单地组合分类.

习题 1.13

1.13.1. 用$S(l_1\cdots l_n)$表示以下空间(未必唯一).

(1) 球面抠去一个开的小圆盘.

(2) 轮胎面抠去一个开的小圆盘.

(3) 射影平面抠去一个开的小圆盘.

(4) Klein瓶抠去一个开的小圆盘.

(5) Möbius带内部抠去一个开的小圆盘.

(6) 圆柱内部抠去一个开的小圆盘.

1.13.2. 指出以下$S(l_1\cdots l_n)$中那些是流形, 如果是流形和哪些标准的流形同胚.

(1) $S(x^3)$.

(2) $S(y^{-1}x^2y)$.

(3) $S(xyxy)$.

(4) $S(xyzxyz)$.

(5) $S(xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1})$.

(6) $S(xyzxy^{-1}z)$.

1.13.3. 两个可以带边的2维流形的一点并空间能不能与某个$S(l_1\cdots l_n)$同胚? 为什么?

1.13.4. 对于 $n>1$, 不交并空间 $R_n=\mathbb{R}^n_{0+}\amalg\mathbb{R}^n_{1+}\amalg\cdots\amalg\mathbb{R}^n_{n+}\amalg\mathbb{R}^n_{0-}\amalg\mathbb{R}^n_{1-}\amalg\cdots\amalg\mathbb{R}^n_{n-}$ 上的等价关系如下定义, 其中每个 $\mathbb{R}^n_{i\pm}$ 都是$\mathbb{R}^n$. 对于 $0\leqslant i<j\leqslant n$,

$$(y_1,\cdots,y_n)_{i\pm}\sim(z_1,\cdots,z_n)_{j\pm}\ \text{如果}\ y_jz_{i+1}=\ 1\ \text{并且}\ (y_1,\cdots,\widehat{y_j},\cdots,y_n)=y_j^{-1}(z_1,\cdots,\widehat{z_{i+1}},\cdots,z_n),$$

$$(y_1,\cdots,y_n)_{i\pm}\sim(z_1,\cdots,z_n)_{j\mp}\ \text{如果}\ y_jz_{i+1}=-1\ \text{并且}\ (y_1,\cdots,\widehat{y_j},\cdots,y_n)=y_j^{-1}(z_1,\cdots,\widehat{z_{i+1}},\cdots,z_n),$$

其中$\widehat{\ }$表示去掉该符号. 证明球面$S^n\cong R_n/\sim$.

1.13.5. 对于 $n > 1$, 不交并空间 $P_n = \mathbb{R}_0^n \amalg \mathbb{R}_1^n \amalg \cdots \amalg \mathbb{R}_n^n$ 上定义等价关系如下, 其中每个 $\mathbb{R}_i^n$都是$\mathbb{R}^n$. 对于 $0 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$(y_1, \cdots, y_n)_i \sim (z_1, \cdots, z_n)_j \text{ 如果 } y_j z_{i+1} = 1 \text{ 并且 } (y_1, \cdots, \widehat{y_j}, \cdots, y_n) = y_j^{-1}(z_1, \cdots, \widehat{z_{i+1}}, \cdots, z_n).$$

证明射影空间 $RP^n \cong P_n/\sim$.

1.13.6. 在不交并空间 $\mathbb{R}\amalg\mathbb{R}$ 上定义等价关系如下. $(x)_1 \sim (x)_2$ 如果 $x < 0$, $(x)_1 \sim (\frac{1}{x})_2$ 如果 $x > 0$. 证明商空间 $M = (\mathbb{R}\amalg\mathbb{R})/\sim$ 存在光滑图册, 但不是Hausdorff空间, 也不存在定向图册.

第二章　同伦论

2.1 映射的同伦

通过拓扑不变性的定义, 可以证明两个具有不同拓扑不变性质的空间不同胚. 但拓扑不变性太少, 能区分的空间也很少, 而代数结构有很多. 代数拓扑的主要工作就是把拓扑不变性推广为拓扑不变量. 具体地, 如果能够找到一种方法, 对任何一个拓扑空间 X 都能对应一个代数对象 $A(X)$, 比如 $A(X)$ 为一整数、群、环模, 等等, 并且同胚的空间 X 和 Y 满足 $A(X)$ 和 $A(Y)$ 同构, 那么这种代数对象 $A(X)$ 就称为拓扑空间 X 的(拓扑)代数不变量. 这种构造代数不变量的方法是代数拓扑的主要方法. 利用这种方法可以证明, 如果有两个空间 X 和 Y 满足 $A(X)$ 和 $A(Y)$ 不同构, 则它们一定不同胚. 证明两个代数对象 $A(X)$ 和 $A(Y)$ 不同构往往很容易, 因而这种用代数不变量证明两个拓扑空间不同胚的方法是迄今为止最有效的, 也在大多数情况下是唯一的方法. 目前发现的代数不变量绝大多数都是同伦代数不变量, 而且是关于空间偶或者带基点空间的不变量, 所以我们必须了解同伦的概念.

定义2.1.1 设 $f,g\colon X\to Y$ 为两个映射. 称 f 和 g 同伦, 记为 $f\simeq g$, 如果存在映射 $H\colon I\times X\to Y$ 满足 $H(0,x)=f(x)$, $H(1,x)=g(x)$ 对所有 $x\in X$. 映射 H 称为连接 f 到 g 的同伦映射, 在不引起误解的情况下简称同伦. 如果 f 和常值映射同伦, 则称 f 零伦, 记为 $f\simeq 0$. 如果不说明, 0 总表示常值映射. 我们用 0_y 表示由 X 到 Y 的常值映射 $0_y(x)=y$ 对所有 $x\in X$.

设 $f,g\colon (X,A)\to(Y,B)$ 为两个空间偶映射. 称 f 和 g (偶)同伦, 记为 $f\simeq g$, 如果存在空间偶的映射 $H\colon (I\times X, I\times A)\to(Y,B)$ 满足 $H(0,x)=f(x)$, $H(1,x)=g(x)$ 对所有 $x\in X$.

设 $f,g\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$为两个保基点映射. 称 f 和 g (保基点)同伦, 记为 $f\simeq g$, 如果存在空间偶的映射 $H\colon (I\times X, I\times x_0)\to(Y,y_0)$ 满足 $H(0,x)=f(x)$, $H(1,x)=g(x)$ 对所有 $x\in X$.

定义2.1.2 设 Y 为 $\mathbb{R}^n$ 的凸子集. 则对任何两个映射 $f,g\colon X\to Y$, $H(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x)$ 为连接 f 到 g 的线性同伦. 称这样的同伦 H 为线性同伦.

定理2.1.3 映射 (偶映射, 保基点映射) 的同伦关系为等价关系. 对于局部紧空间 X 和映射 $f,g\colon X\to Y$, f 和 g 同伦, 当且仅当 f,g 处在 Y^X 中的同一道路连通分支当中.

证 我们只证空间情形, 其它情况形式上完全一样.

自反性. 对于映射 f, 令 $H_f\colon I\times X\to X$ 为 $H_f(t,x)=f(x)$ 对所有 $t\in I$ 和 $x\in X$. 则 H_f 为连接 f 到 f 的同伦.

对称性. 假设 H 为连接 f 到 g 的同伦. 定义 $H^{-1}(t,x)=H(1-t,x)$ 对所有 $t\in I$ 和 $x\in X$. 则 H^{-1} 为连接 g 到 f 的同伦.

传递性. 假设 H 为连接 f 到 g 的同伦, G 为连接 g 到 h 的同伦. 定义 $K(t,x)=H(2t,x)$ 对所有 $t\in[0,\frac{1}{2}]$ 和 $x\in X$, $K(t,x)=G(2t-1,x)$ 对所有 $t\in[\frac{1}{2},1]$ 和 $x\in X$. 则 K 为连接 f 到 h 的同伦.

取定理1.11.5的(3)中的 $Z=I$ 可知, 对于映射 $f,g\colon X\to Y$, 存在连接 f 到 g 的 Y^X 中的道路 ω 当且仅当存在同伦 $H\colon I\times X\to Y$ 使得 $\omega(t)(x)=H(t,x)$ 对任何 $t\in I$ 和 $x\in X$. 所以 $[X;Y]$ 为 X^Y 的道路连通分支.

定理2.1.4 映射的同伦关系满足以下性质.

(1) 设 $f_1 \simeq f_2$, $g_1 \simeq g_2$, 其中 $f_k\colon X \to Y$, $g_k\colon Y \to Z$. 则 $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

(2) 设 $f_1 \simeq f_2$ 和 $g_1 \simeq g_2$. 则 $f_1 \amalg g_1 \simeq f_2 \amalg g_2$, $f_1 \times g_1 \simeq f_2 \times g_2$, $f_1 * g_1 \simeq f_2 * g_2$.

(3) 设 $f \simeq g$. 如果 Z Hausdorff, 则 $f^Z \simeq g^Z$; 如果 Z 局部紧, 则 $Z^f \simeq Z^g$.

(4) 设 $f, g\colon X \to Y$ 满足 $f \simeq g$, H 为连接 f 到 g 的同伦, $\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系, 满足如果 $x \sim y$, 则 $H(s,x) \approx H(s,y)$ 对所有 $s \in I$. 则 $\overline{f} \simeq \overline{g}$, 其中 $\overline{f}$, $\overline{g}$ 为满足以下交换图的导出映射.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \qquad & X & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ X/_\sim & \xrightarrow{\overline{f}} & Y/_\approx, & & X/_\sim & \xrightarrow{\overline{g}} & Y/_\approx. \end{array}$$

(5) 设 $f \simeq g$, 则 $\widetilde{S}(f) \simeq \widetilde{S}(g)$, 其中 $\widetilde{S}(h)\colon \widetilde{S}(X) \to \widetilde{S}(Y)$ 定义为 $\widetilde{S}(h)[s,x] = [s, h(x)]$.

偶映射的同伦关系满足以下性质.

(1) 设 $f_1 \simeq f_2$, $g_1 \simeq g_2$, 其中 $f_k\colon (X,A) \to (Y,B)$, $g_k\colon (Y,B) \to (Z,C)$. 则 $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

(2) 设 $f_1 \simeq f_2$ 和 $g_1 \simeq g_2$. 则 $f_1 \amalg g_1 \simeq f_2 \amalg g_2$, $f_1 \times g_1 \simeq f_2 \times g_2$, $f_1 * g_1 \simeq f_2 * g_2$.

(3) 设 $f \simeq g$. 如果 Z Hausdorff, 则 $f^{(Z,C)} \simeq g^{(Z,C)}$; 如果 Z 局部紧, 则 $(Z,C)^f \simeq (Z,C)^g$.

(4) 设 $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ 满足 $f \simeq g$, H 为连接 f 到 g 的偶同伦, $\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系, 满足如果 $x \sim y$, 则 $H(s,x) \approx H(s,y)$ 对所有 $s \in I$. 则 $\overline{f} \simeq \overline{g}$, 其中 $\overline{f}$, $\overline{g}$ 为满足以下交换图的导出映射.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \qquad & X & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ X/_\sim & \xrightarrow{\overline{f}} & Y/_\approx, & & X/_\sim & \xrightarrow{\overline{g}} & Y/_\approx. \end{array}$$

(5) 设 $f \simeq g$, 则 $\widetilde{S}(f) \simeq \widetilde{S}(g)$, 其中 $\widetilde{S}(h)\colon (\widetilde{S}(X), \widetilde{S}(A)) \to (\widetilde{S}(Y), \widetilde{S}(B))$ 定义为 $\widetilde{S}(h)[s,x] = [s, h(x)]$.

保基点映射的同伦关系满足以下性质.

(1) 设 $f_1 \simeq f_2$, $g_1 \simeq g_2$, 其中 $f_k\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$, $g_k\colon (Y,y_0) \to (Z,z_0)$. 则 $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

(2) 设 $f_1 \simeq f_2$ 和 $g_1 \simeq g_2$. 则 $f_1 \vee g_1 \simeq f_2 \vee g_2$, $f_1 \times g_1 \simeq f_2 \times g_2$, $f_1 \wedge g_1 \simeq f_2 \wedge g_2$.

(3) 设 $f \simeq g$. 如果 Z Hausdorff, 则 $f^{(Z,z_0)} \simeq g^{(Z,z_0)}$; 如果 Z 局部紧, 则 $(Z,z_0)^f \simeq (Z,z_0)^g$.

(4) 设 $f, g\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ 满足 $f \simeq g$, H 为连接 f 到 g 的保基点同伦, $\sim$ 和 $\approx$ 分别为 X 和 Y 上的等价关系, 满足如果 $x \sim y$, 则 $H(s,x) \approx H(s,y)$ 对所有 $s \in I$. 则 $\overline{f} \simeq \overline{g}$, 其中 $\overline{f}$, $\overline{g}$ 为满足以下交换图的导出映射.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \qquad & X & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ X/_\sim & \xrightarrow{\overline{f}} & Y/_\approx, & & X/_\sim & \xrightarrow{\overline{g}} & Y/_\approx. \end{array}$$

(5) 设 $f \simeq g$, 则 $S(f) \simeq S(g)$, $\Omega(f) \simeq \Omega(g)$, 其中 $S(h)\colon S(X) \to S(Y)$ 定义为 $S(h)(s \wedge x) = s \wedge h(x)$, $\Omega(h)\colon \Omega(X) \to \Omega(Y)$ 定义为 $\Omega(h)(\omega)(s) = h(\omega(s))$.

如果偶映射 $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ 满足 $f \simeq g$, 则导出的 $\overline{f}, \overline{g}\colon (X/A, *) \to (Y/B, *)$ 满足 $\overline{f} \simeq \overline{g}$.

证 只证明映射情形, 其它情况形式上完全一样.

记 H 为连接 f_1 到 f_2 的同伦, G 为连接 g_1 到 g_2 的同伦.

(1) 定义 $(GH)(t,x) = G(t, H(t,x))$ 对所有 $t \in I$ 和 $x \in X$. 则 GH 为连接 $g_1 f_1$ 到 $g_2 f_2$ 的同伦.

(2) 定义 $(H\amalg G)(t,x_1)=H(t,x_1)$, $(H\amalg G)(t,y_1)=G(t,y_1)$, 对所有 $t\in I$, $x_1\in X_1$ 和 $y_1\in Y_1$. 则 $H\amalg G$ 为连接 $f_1\amalg g_1$ 到 $f_2\amalg g_2$ 的同伦.

定义 $(H{\times}G)(t,x_1,y_1)=(H(t,x_1),G(t,y_1))$ 对所有 $t\in I$, $x_1\in X_1$ 和 $y_1\in Y_1$. 则 $H{\times}G$ 为连接 $f_1{\times}g_1$ 到 $f_2{\times}g_2$ 的同伦.

定义 $(H{*}G)(t,(1{-}s)x_1{+}sy_1)=(1{-}s)H(t,x_1){+}sG(t,y_1)$ 对所有 $s,t\in I$, $x_1\in X_1$ 和 $y_1\in Y_1$. 则 $H{*}G$ 为连接 $f_1{*}g_1$ 到 $f_2{*}g_2$ 的同伦.

(3) 对于连接 f 到 g 的同伦 H, 定义 $H^Z\colon I{\times}X^Z\to Y^Z$ 为 $H^Z(t,\theta)(z)=H(t,\theta(z))$ 对所有 $t\in I$, $z\in Z$, $\theta\in X^Z$. 只要 H^Z 连续, H^Z 就为连接 f^Z 到 g^Z 的同伦. 设 $(t,\theta)\in(H^Z)^{-1}(M(K,U))$, 即 $H(t,\theta(K))\subset U$. 由于 $\theta(K)$ 为紧集, 所以存在 t 的邻域 (a,b) 和 $\theta(K)$ 的邻域 V 使得 $H((a,b){\times}V)\subset U$. 这说明 (t,θ) 的邻域 $(a,b){\times}M(K,V)$ 满足 $H^Z((a,b){\times}M(K,V))\subset M(K,U)$. 所以 H^Z 连续.

对于同样的 H, 定义 $Z^H\colon I{\times}Z^Y\to Z^X$ 为 $Z^H(t,\theta)(x)=\theta(H(t,x))$ 对所有 $t\in I$, $x\in X$, $\theta\in Z^Y$. 只要 Z^H 连续, Z^H 就为连接 Z^f 到 Z^g 的同伦. 设 $(t,\theta)\in(Z^H)^{-1}(M(K,U))$, 即 $\theta(H(t,K))\subset U$. 由于 K 为紧集, 所以存在 t 的紧邻域 $[a,b]$ 使得 $H([a,b]{\times}K)\subset U$. 记 $K'=H([a,b]{\times}K)$. 则 (t,θ) 的邻域 $M(K',U)$ 满足 $Z^H((a,b){\times}M(K',U))\subset M(K,U)$. 所以 Z^H 连续.

(4) 由定理1.9.13, 我们有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
I{\times}X \arrow[r, "1_I{\times}H"] \arrow[d, "1_I{\times}q"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
I{\times}(X/_\sim) \arrow[r, "\overline{H}"] & Y/_\approx
\end{tikzcd}$$

显然 $\overline{H}$ 为连接 $\overline{f}$ 到 $\overline{g}$ 的同伦.

(5) $\widetilde{S}(f)$ 既可以由 $1_I{\times}h$ 关于等价关系和(4)得出同伦, 也可以由 $\widetilde{S}(h)=1_{S^0}{*}h$ 和(2)得出同伦.

定理2.1.5 对于拓扑空间 X 和 Y, 记所有由 X 到 Y 的映射构成的集合按照同伦关系得到的等价类的集合为 $[X;Y]$, 每个等价类称为一个同伦类, 记为 $[f]$ 的形式, 其中 $f\colon X\to Y$. 如果 X 为局部紧空间, 则 $[X;Y]$ 为拓扑空间 Y^X 的道路连通分支.

对于空间偶 (X,A) 和 (Y,B), 记所有由 (X,A) 到 (Y,B) 的偶映射集合按照同伦关系得到的等价类的集合为 $[X,A;Y,B]$, 每个等价类称为一个(偶)同伦类, 记为 $[f]$ 的形式, 其中 $f\colon(X,A)\to(Y,B)$. 如果 X 为局部紧空间, 则 $[X,A;Y,B]$ 为拓扑空间 $(Y,B)^{(X,A)}$ 的道路连通分支.

对于带基点空间 (X,x_0) 和 (Y,y_0), 记所有由 (X,x_0) 到 (Y,y_0) 的保基点映射集合按照同伦关系得到的等价类的集合为 $[X,x_0;Y,y_0]$, 每个等价类称为一个(保基点)同伦类, 记为 $[f]$ 的形式, 其中 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$. 如果 X 为局部紧空间, 则 $[X,x_0;Y,y_0]$ 为拓扑空间 $(Y,y_0)^{(X,x_0)}$ 的道路连通分支.

我们有以下映射同伦类集合的1-1对应.

$$[X_1\amalg X_2;Y]\cong[X_1,Y]{\times}[X_2,Y],$$

$$[X;Y_1{\times}Y_2]\cong[X;Y_1]{\times}[X;Y_2],$$

$$[X_1\amalg X_2,A_1\amalg A_2;Y,B]\cong[X_1,A_1;Y,B]{\times}[X_2,A_2;Y,B],$$

$$[X,A;Y_1{\times}Y_2,B_1{\times}B_2]\cong[X,A;Y_1,B_1]{\times}[X,A;Y_2,B_2],$$

$$[X_1\vee X_2,*;Y,y]\cong[X_1,x_1;Y,y]{\times}[X_2,x_2;Y,y],$$

$$[X,x;Y_1\times Y_2,(y_1,y_2)]\cong[X,x;Y_1,y_1]\times[X,x;Y_2,y_2].$$

证 映射扩张性和映射提升性显然保持同伦性, 即两个扩张映射同伦当且仅当它们在每个分量空间的限制映射同伦, 对偶地, 两个提升映射同伦当且仅当它们对每个分量空间的投射映射同伦.

注意, 以上定理对无穷个空间的不交并和乘积也成立.

定理2.1.6 对任何带基点空间 (X,x_0) 和 (Y,y_0), 我们有 $[S(X),*;Y,y_0]=[X,x_0;\Omega(Y),0]$.

证 如果 X 为Hausdorff空间, 则由定理1.11.6中的(3)就得到空间的同胚

$$(Y,y_0)^{(S^1\wedge X,*)}\cong((Y,y_0)^{(S^1,*)},0)^{(X,x_0)}$$

和它们的道路连通分支的1-1对应. 但实际上并不需要这个条件. 存在映射 $H\colon I\times S^1\times X\to Y$, 当且仅当存在映射 $\hat{H}\colon I\times X\to Y^{S^1}$. H 满足 $H(I\times(*\times X\cup S^1\times x_0))\subset y_0$, 当且仅当 $\hat{H}(I\times X)\subset(Y,y_0)^{(S^1,*)}$并且$\hat{H}(I\times x_0)=0$. 所以存在 $H\colon I\times(S^1\wedge X,*\wedge x_0)\to(Y,y_0)$, 当且仅当存在 $\hat{H}\colon I\times(X,x_0)\to(\Omega(Y),0)$. 这说明 $[SX,*;Y,y_0]$ 与 $[X,x_0;\Omega(Y),0]$ 有1-1对应.

定义2.1.7 设 $f,g\colon X\to Y$ 为两个映射, A 为 X 的子空间. 称 f 和 g 相对于 A 同伦, 记为 $f\simeq g\,\mathrm{rel}\,A$, 如果存在连接 f 到 g 的同伦 $H\colon I\times X\to Y$ 满足 $H(t,a)=f(a)=g(a)$ 对所有 $a\in A$ 和 $t\in[0,1]$. 映射 H 称为连接 f 到 g 的相对(于 A 的)同伦映射, 在不引起误解的情况下简称相对(于 A 的)同伦. 把所有相对同伦于 f 的映射集合称为 f 的相对同伦类.

相对同伦在实际当中非常有用, 比如, “弯曲”空间的同伦问题往往可以转化为“平直”空间的相对同伦问题, 如下例.

例2.1.8 对于带基点空间 $(S^1,1)$ (S^1 看成复平面的单位圆), 我们有以下映射.

上乘法映射 $\mu'\colon(S^1,1)\to(S^1\vee S^1,1\vee 1)$ 定义为 $\mu'(z)=z^2\vee 1$ 对 $\mathrm{im}z\geqslant 0$, $\mu'(z)=1\vee z^2$ 对 $\mathrm{im}z\leqslant 0$.

上对角映射 $\Delta'\colon(S^1\vee S^1,1\vee 1)\to(S^1,1)$ 定义为 $\Delta'(z\vee 1)=\Delta'(1\vee z)=z$ 对 $z\in S^1$.

逆映射 $\tau'\colon S^1\to S^1$ 定义为 $\tau'(z)=z^{-1}$ 对 $z\in S^1$.

如何证明以下保基点映射的同伦?

$$(1_{S^1}\vee\mu')\mu'\simeq(\mu'\vee 1_{S^1})\mu',$$

$$\Delta'(1_{S^1}\vee\tau')\mu'\simeq\Delta'(\tau'\vee 1_{S^1})\mu'\simeq 0_{S^1},$$

$$\Delta'(1_{S^1}\vee 0_{S^1})\mu'\simeq\Delta'(0_{S^1}\vee 1_{S^1})\mu'\simeq 1_{S^1}.$$

把 $(\vee_n S^1=S^1\vee\cdots\vee S^1,1\vee\cdots\vee 1)$ 等同于商空间 $(I/\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\},*)$, 记 $q_n\colon I\to\vee_n S^1$ 为商投射. 具体地, 对于 $t\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, $q_n(t)=1\vee\cdots\vee e^{2n\pi ti}\vee\cdots\vee 1$ (第 k 个分量为 $e^{2n\pi ti}$). 对于映射 $f,g\colon S^1\to\vee_n S^1$, 假如它们可以提升为 I 到 I^n 的映射 (并不是所有映射都可以提升的!), 即我们有以下商投射的交换图

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{f}} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_n}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & \vee_n S^1, \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{g}} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_n}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{g} & \vee_n S^1, \end{array}$$

则由定理2.1.4的(4), 我们由 $\widetilde{f} \simeq \widetilde{g}\ \mathrm{rel}\{0,1\}$ 就能推出 $f \simeq g$. 这就是把"弯曲"空间 S^1 到 $\vee_n S^1$ 的同伦问题 $f \simeq g$ 转化为"平直"空间 I 到 I 的相对同伦问题 $\widetilde{f} \simeq \widetilde{g}\ \mathrm{rel}\{0,1\}$. 而 $\widetilde{f} \simeq \widetilde{g}\ \mathrm{rel}\{0,1\}$ 当且仅当 $\widetilde{f}(i) = \widetilde{g}(i)$ 对 $i = 0,1$, 这是因为 I 为凸集, 连接 $\widetilde{f}$ 到 $\widetilde{g}$ 的线性同伦就是连接两者的相对同伦. 用这种平化的方法, 以上映射的同伦问题就很简单了.

我们有提升映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{f}_1} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_3}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{(1_{S^1}\vee\mu')\mu'} & S^1\vee S^1\vee S^1, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{f}_2} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_3}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{(\mu'\vee 1_{S^1})\mu'} & S^1\vee S^1\vee S^1, \end{array}$$

其中

$$\widetilde{f}_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{4}{3}t - \frac{1}{3} & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_2(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

显然 $\widetilde{f}_1(0) = \widetilde{f}_2(0) = 0$, $\widetilde{f}_1(1) = \widetilde{f}_2(1) = 1$. 所以 $(1_{S^1} \vee \mu')\mu' \simeq (\mu' \vee 1_{S^1})\mu'$.

我们有提升映射的交换图 (其中 $\widetilde{0}_i(s) = i$ 对所有 $s \in I$, $i = 0, 1$)

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{g}_1} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\Delta'(1_{S^1}\vee\tau')\mu'} & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{0}_i} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{0_{S^1}} & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{g}_2} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\Delta'(\tau'\vee 1_{S^1})\mu'} & S^1 \end{array}$$

其中

$$\widetilde{g}_1(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2-2t & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \qquad \widetilde{g}_2(t) = \begin{cases} 1-2t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t-1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

因为 $\widetilde{g}_1(0) = \widetilde{0}_0(0) = 0$, $\widetilde{g}_1(1) = \widetilde{0}_0(1) = 0$, 所以 $\widetilde{g}_1 \sim \widetilde{0}_0\ \mathrm{rel}\{0,1\}$. 因为 $\widetilde{g}_2(0) = \widetilde{0}_1(0) = 1$, $\widetilde{g}_2(1) = \widetilde{0}_1(1) = 1$, 所以 $\widetilde{g}_2 \sim \widetilde{0}_1\ \mathrm{rel}\{0,1\}$. 而 $\widetilde{0}_0$ 和 $\widetilde{0}_1$ 为常值映射 0_{S^1} 的不同提升映射, 所以 $\Delta'(1_{S^1}\vee\tau')\mu' \simeq 0_{S^1} \simeq \Delta'(\tau'\vee 1_{S^1})\mu'$.

我们有提升映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{h}_1} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\Delta'(1_{S^1}\vee 0)\mu'} & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{1_I} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{1_{S^1}} & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\widetilde{h}_2} & I \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & {\scriptstyle q_1}\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{\Delta'(0\vee 1_{S^1})\mu'} & S^1 \end{array}$$

其中

$$\widetilde{h}_1(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \qquad \widetilde{h}_2(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t-1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

由 $\widetilde{h}_1(0) = \widetilde{h}_2(0) = 1_I(0) = 0$ 和 $\widetilde{h}_1(1) = \widetilde{h}_2(1) = 1_I(1) = 1$ 得 $\Delta'(1_{S^1} \vee 0)\mu' \simeq \Delta'(0 \vee 1_{S^1})\mu' \simeq 1_{S^1}$.

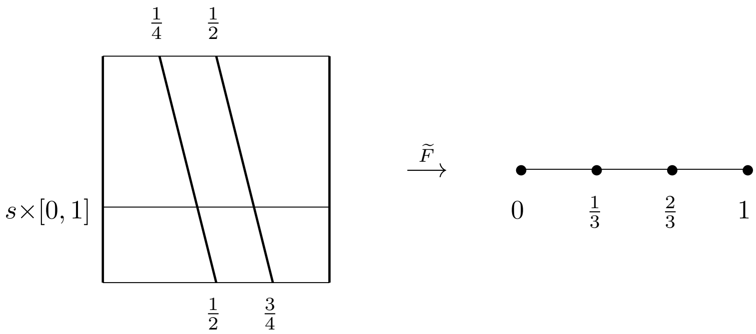
注意在上例中我们并没有写出线性同伦的表达式, 因为当必须写出同伦映射的表达式时, 往往不是采用以上方式定义的线性同伦. 比如, 上例中连接 $\widetilde{f}_1$ 到 $\widetilde{f}_2$ 的线性同伦 $\widetilde{E}(s,t) = (1-s)f_1(t) + sf_2(t)$ 如下

$$\widetilde{E}(s,t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}st & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{4}{3}t - \frac{2}{3}st + \frac{2}{3}s - \frac{1}{3} & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

而经常被采用的同伦却是以下定义的连接 $\widetilde{f}_1$ 到 $\widetilde{f}_2$ 的 $\widetilde{F}$.

$$\widetilde{F}(s,t)=\begin{cases}\frac{4t}{3(2-s)} & t\in[\ 0\ ,\frac{2-s}{4}]\\ \frac{4t+s-1}{3} & t\in[\frac{2-s}{4},\frac{3-s}{4}]\\ \frac{4t+3s-1}{3s+3} & t\in[\frac{3-s}{4},\ 1\ ]\end{cases}$$

这是因为当象空间没有线性结构时, 利用闭粘接定理把定义域空间分成若干闭块, 在每块上定义映射的方法适用范围更广, 也更直观, 是代数拓扑中标准的方法. 注意比较 $\widetilde{E}$ 和 $\widetilde{F}$ 的区别. $\widetilde{E}$ 限制在每条线 $s\times[0,1]$ 上为线性函数, 但 $\widetilde{E}^{-1}(\frac{1}{3})$ 和 $\widetilde{E}^{-1}(\frac{2}{3})$ 都不是 I^2 中的直线. 而 $\widetilde{F}$ 限制在每条线 $s\times[0,1]$ 上为分段线性函数, 但是 $\widetilde{F}^{-1}(\frac{1}{3})$ 和 $\widetilde{F}^{-1}(\frac{2}{3})$ 都为 I^2 中的直线. 见下图, 左边方框 I^2 中从左到右四条粗线分别为右边线 I 中从左到右四个黑点的原象集, 两条粗斜线间的每一横向线段都线性同胚地映到 $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ 上. 同伦 $\widetilde{F}$ 的构造方法的好处是由图形就很容易给出同伦映射的定义.



例2.1.9 对于任何带基点拓扑空间 (X,x_0) 和 $n\geqslant 1$, 我们有映射空间的同胚 (∂ 为拓扑流形的边界)

$$(X,x_0)^{(I^n,\,\partial(I^n))}\cong(X,x_0)^{(S^n,*)}$$

以对应 $f\to fq$ 为同胚映射, 其中 $q\colon(I^n,\partial(I^n))=I^n/\partial(I^n)\to(S^n,*)$ 为商投射. 由此同胚自然导出同伦类集合的1-1对应

$$[I^n,\partial(I^n);X,x_0]\cong[S^n,*;X,x_0].$$

这样我们就把"弯曲空间"$(S^n,*)$ 到 (X,x_0) 的保基点映射同伦类问题转化为"平直空间"I^n 到 X 的映射相对同伦类 (也恰巧是偶映射同伦类) 问题.

对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 定义空间 $(X,x_0)^{(I^n,\partial(I^n))}$ 上的加法$+_i$如下. 对于 $f,g\in(X,x_0)^{(I^n,\partial(I^n))}$,

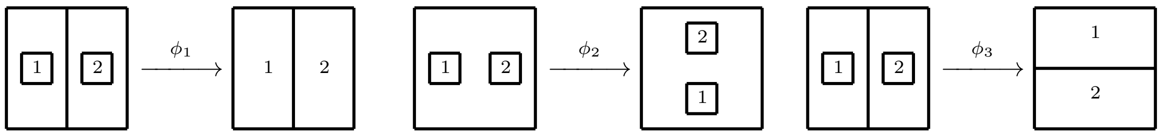
$$(f+_i g)(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=\begin{cases}f(x_1,\cdots,x_{i-1},\ \ 2x_i,\ \ x_{i+1},\cdots,x_n) & x_i\in[0,\frac{1}{2}],\\ g(x_1,\cdots,x_{i-1},2x_i-1,x_{i+1},\cdots,x_n) & x_i\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

显然如果 $f\simeq f'$, $g\simeq g'$, 则有 $f+_i f'\simeq g+_i g'$. 于是我们得到集合 $[I^n,\partial(I^n);X,x_0]$ 上的加法 $+_i$ 定义为 $[f]+_i[g]=[f+_i g]$. 下面我们说明当 $n\geqslant 2$ 时, 对于任何 $i\neq j$, 我们有

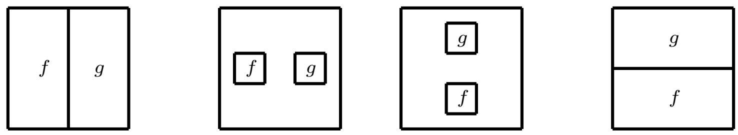
$$[f]+_i[g]=[g]+_i[f]=[f]+_j[g]=[g]+_j[f].$$

首先证明以下引理. 如果偶映射 $f,g\colon(I^n,\partial(I^n))\to(I^n,\partial(I^n))$ 满足 $f|_{\partial(I^n)}=g|_{\partial(I^n)}$, 则 $f\simeq g\,\mathrm{rel}\,\partial(I^n)$. 把 f,g 看成 I^n 的自映射, 则由于 I^n 为 $\mathbb{R}^n$ 的凸集, 所以 f 和 g由线性同伦 H连接, 而这个线性同伦 H由于在 $\partial(I^n)$ 上不动, 自然就是连接两个偶映射的相对线性同伦.

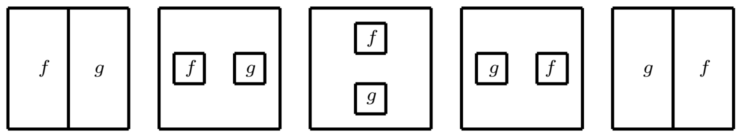
取以上引理中 $n=2$, 定义 $\phi_i\colon I^2\to I^2$ 为下图所示的映射.



其中 ϕ_1,ϕ_3 将左边小方框同胚映到右边标号相同的长方框上, 将左边长方框抠去小方框的区域压缩成右边的长方框的边界, ϕ_2 为保持边界不动, 通过内部的转动将左边的小方框转到右边标号相同的小方框. 则由引理, 所有 ϕ_i 都是相对同伦于恒等映射, 因此 $\overline{\phi}_i = \phi_i \times 1_{I^{n-2}}$ 也是相对同伦于恒等映射的. 而 $(f+_1 g)\overline{\phi}_1\overline{\phi}_2^{-1} = (f+_2 g)\overline{\phi}_3^{-1}$. 因此 $f+_1 g \simeq f+_2 g$, 由下图示意, 其中所有未标注区域上的点都映到基点.



同上, $f+_1 g$ 到 $g+_1 f$ 的同伦由下图示意.



所以 $f+_1 g \simeq f+_2 g \simeq g+_1 f$. 同理可证把 $1,2$换成任意$i \neq j$ 的情形.

下面证明以上定义的映射同伦类集合上的加法构成Abel群. 对于 $f,g,h\colon (I^n,\partial(I^n)) \to (X,x_0)$, 定义同伦 $H\colon I\times I^n \to X$ 如下.

$$H(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{cases} (\frac{4t}{3(2-x_1,)},x_2,\cdots,x_n) & t\in[\ \ 0\ \ ,\frac{2-x_1}{4}] \\ (\frac{4t+x_1-1}{3},x_2,\cdots,x_n) & t\in[\frac{2-x_1}{4},\frac{3-x_1}{4}] \\ (\frac{4t+3x_1-1}{3x_1+3},x_2,\cdots,x_n) & t\in[\frac{3-x_1}{4},\ \ 1\ \ ] \end{cases}$$

则 H 为连接 $(f+_1 g)+_1 h$ 到 $f+_1(g+_1 h)$ 的同伦. 所以 $([f]+_1[g])+_1[h] = [f]+_1([g]+_1[h])$. H 和上例中的 $\widetilde{F}$ 的关系是 $H = \widetilde{F}\times 1_{I^{n-1}}$. 在 X 没有线性结构的情况下, 上例中的同伦 $\widetilde{F}$ 可以推广为本例中的 H, 而 $\widetilde{E}$ 不可以推广到本例. 类似可得 $[f]+_1[f^{-1}] = [f^{-1}]+_1[f] = [0]$, $[f]+_1[0] = [0]+_1[f] = [f]$, 其中 $f^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f(1-x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

综上所述, 我们可以把 $[I^n,\partial(I^n);X,x_0]$ 的加法笼统地记为 $+$ 而不是 $+_i$, 同样把 $[S^n,*;X,x_0]$ 的加法也记为 $+$.

我们经常要用性质好的映射在同伦的意义下代替一个一般的映射, 所以需要以下的逼近定理. 由于证明复杂又涉及太多专业概念, 所以省略.

定理2.1.10 (单纯和光滑逼近定理) 如果 X 和 Y 有PL结构, 则对任何映射 $f\colon X\to Y$, 存在 X 和 Y 的单纯剖分 K 和 L 和单纯映射 $g\colon K\to L$ 使得 $f\simeq g$.

如果 X 和 Y 为微分流形, 则对任何映射 $f\colon X\to Y$, 存在光滑映射 $g\colon X\to Y$ 使得 $f\simeq g$.

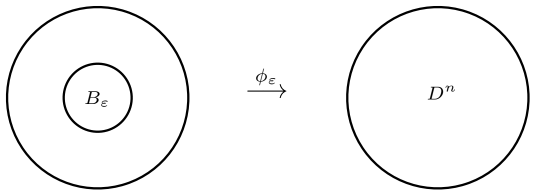
例2.1.11 对于 $m<n$, $[S^m;S^n]$ 和 $[S^m,*;S^n,*]$ 都只有一个同伦类, 就是常值映射代表的零类. 虽然可以有从 S^m 到 S^n 的满映射, 但是由逼近定理, 这些映射都同伦于一个单纯或者光滑映射. 而单纯映射和光滑映射都不存在 S^m 到 S^n 的满射. 假如 $f\colon S^m\to S^n$ 不是满映射, 任取 $y\notin f(S^m)$, 则 $f\sim 0_y$, 连接同伦为 $H(s,x) = \frac{(1-s)f(x)-sy}{\|(1-s)f(x)-sy\|}$. 等价地, f 可以看成 S^m 到 $S^n\backslash y\cong\mathbb{R}^n$ 上的映射, 而 $\mathbb{R}^n$ 为凸集, 所有映射都同

伦, 因此也都零伦, 所以 f 也零伦. 由于 S^n 道路连通, 所以其上的所有常值映射都同伦, 因此 $[S^m; S^n]$ 只有一类. 保基点情形也一样.

习题 2.1

2.1.1. 证明如果 $f, g\colon X \to S^n$ 满足 $f(x) \neq -g(x)$ 对所有 $x \in X$, 则 $f \simeq g$.

2.1.2. 对于 $0 < \varepsilon < 1$, 映射 $\phi_\varepsilon\colon D^n \to D^n$ 定义为 $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}x$ 如果 $\|x\| \leqslant \varepsilon$, $\phi_\varepsilon(x) = \frac{x}{\|x\|}$ 如果 $\|x\| \geqslant \varepsilon$. ϕ_ε 如下图将 $B_\varepsilon = \{x \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ 扩张为整个 D^n, 将其余部分压到 $\partial(D^n) = S^{n-1}$.

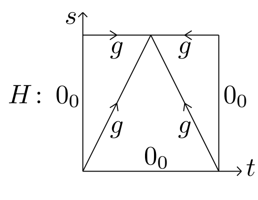


证明 $\phi_\varepsilon \simeq 1_{D^n}\ \mathrm{rel} S^{n-1}$.

2.1.3. 设 O 为 S^n 上的一个开集满足闭包 $\overline{O}$ 同胚于 D^n, 取 S^n 的基点 $* \notin \overline{O}$. 证明存在一个保基点同伦于恒等映射 1_{S^n} 的映射 $\phi_O\colon S^n \to S^n$, 满足 ϕ_O 限制在 O 上为到 $S^n \backslash *$ 的同胚映射, $\phi_O(S^n \backslash O) = *$.

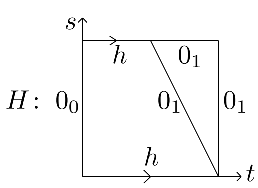
2.1.4. 设 O 和基点 $*$ 同上题. 证明对任何映射 $f\colon X \to S^n$, 存在映射 $f'\colon X \to S^n$ 满足 $f \simeq f'$, f' 限制在 $f^{-1}(O)$ 上为到 $S^n \backslash *$ 的满射, $f'(f^{-1}(S^n \backslash O)) = *$.

2.1.5. 设 $g\colon (I, 0) \to (I, 0)$ 为保基点映射. 分别写出连接 0_0 到 $g * g^{-1}$ 的线性同伦 G 和满足在下图所示的线段上如图定义的保基点同伦 H, 其中 0_x 表示到点 x 的常值映射.



2.1.6. 设 $u\colon (I, 0) \to (X, x_0)$ 为保基点道路. 写出连接 0_{x_0} 到 $u * u^{-1}$ 的的保基点同伦 H.

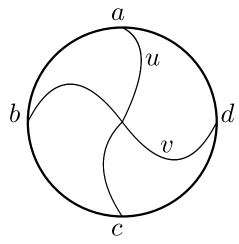
2.1.7. 设 $h\colon (I, 1) \to (I, 1)$ 为 I 上的由 0 到 1 的保基点道路, 即 $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. 分别写出连接 h 到 $h * 0_1$ 的线性同伦 G 和满足在以下图形所示的线段上按图所示定义的保基点同伦 H.



2.1.8. 设 $u\colon (I, 1) \to (X, x_1)$ 为保基点映射. 写出连接 u 到 $u * 0$ 的保基点同伦 H, 其中 $0(t) = x_1$ 对 $t \in I$.

2.1.9. 定义道路间的等价关系$\approx$如下, $u\approx v$, 如果存在满足$\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$的I的自同胚映射ϕ使得$u=v\phi$. 证明如果$u\approx v$, 则$u\simeq v\,\mathrm{rel}\{0,1\}$. 对于任何道路$u,v,w$, $(u*v)*w\approx u*(v*w)$, 但是对于非常值道路u, 我们有$u*u^{-1}\not\approx 0$, $u*0\not\approx u$.

2.1.10. 设a,b,c,d为圆周S^1上如下图所示四点, u,v分别为圆盘D^2内连接a,c和b,d的两条道路. 令映射$f\colon \partial(I^2)=(\{0,1\}\times I)\cup(I\times\{0,1\})\to S^1$为$f(s,t)=\frac{u(s)-v(t)}{\|u(s)-v(t)\|}$对$(s,t)\in\partial(I^2)$.



证明f同伦于一个同胚映射.

2.1.11. 对于$p,q\geqslant 0$, 令S^p和S^q分别为S^{p+q+1}的由所有后$q{+}1$个坐标为零的点构成的子空间和由所有前$p{+}1$个坐标为零的点构成的子空间. 设u和v分别为D^{p+1}和D^{q+1}到S^{p+q+1}的两个映射, 满足两个限制映射$u|_{\partial(D^{p+1})}$和$v|_{\partial(D^{q+1})}$分别为S^p和S^q到S^{p+q+1}的内射. 令

$$f\colon \partial(D^{p+1}\times D^{q+1})=(D^{p+1}\times\partial(D^{q+1}))\cup(\partial(D^{p+1})\times D^{q+1})\to S^{p+q+1}$$

为$f(x,y)=\frac{u(x)-v(y)}{\|u(x)-v(y)\|}$对$(x,y)\in\partial(D^{p+1}\times D^{q+1})$ (∂表示拓扑流形的边). 证明f同伦于一个同胚映射.

2.2 空间的伦型

有了映射的同伦关系后, 我们就自然有了空间的同伦等价关系, 这个等价关系比同胚要广得多.

定义2.2.1 拓扑空间X和Y称为同伦等价, 或者有相同伦型, 记作$X\simeq Y$, 如果存在映射$f\colon X\to Y$和$g\colon Y\to X$满足$gf\simeq 1_X$, $fg\simeq 1_Y$. 称f为由X到Y的一个同伦等价(映射), f和g互为同伦等价逆.

空间偶(X,A)和(Y,B)称为(偶)同伦等价, 或者有相同(偶)伦型, 记作$(X,A)\simeq(Y,B)$, 如果存在偶映射$f\colon(X,A)\to(Y,B)$和$g\colon(Y,B)\to(X,A)$满足$gf\simeq 1_{(X,A)}$, $fg\simeq 1_{(Y,B)}$. 称f为由(X,A)到(Y,B)的一个(偶)同伦等价(映射), f和g互为(偶)同伦等价逆.

带基点空间(X,x_0)和(Y,y_0)称为同伦等价, 或者有相同伦型, 记作$(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$, 如果存在保基点映射$f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$和$g\colon(Y,y_0)\to(X,x_0)$满足$gf\simeq 1_{(X,x_0)}$, $fg\simeq 1_{(Y,y_0)}$. 称f为由(X,x_0)到(Y,y_0)的一个同伦等价(映射), f和g互为同伦等价逆.

拓扑空间X称为可缩的, 如果它和独点空间有相同伦型. 带基点空间(X,x_0)称为可缩的, 如果它和带基点独点$(*,*)$空间有相同伦型.

定理2.2.2 如果拓扑空间$X_1\simeq X_2$, $Y_1\simeq Y_2$, 则

$$\widetilde{S}(X_1)\simeq\widetilde{S}(X_2),\ X_1\amalg Y_1\simeq X_2\amalg Y_2,\ X_1\times Y_1\simeq X_2\times Y_2,\ X_1*Y_1\simeq X_2*Y_2,\ Y_1^{X_1}\simeq Y_2^{X_2},$$

其中映射空间情形要求X_i为局部紧Hausdorff空间.

如果有空间偶同伦等价 $(X_1, A_1) \simeq (X_2, A_2)$, $(Y_1, B_1) \simeq (Y_2, B_2)$, 则

$$\begin{gathered}(X_1, A_1) \amalg (Y_1, B_1) \simeq (X_2, A_2) \amalg (Y_2, B_2),\\ (X_1, A_1) \times (Y_1, B_1) \simeq (X_2, A_2) \times (Y_2, B_2),\\ (Y_1, B_1)^{(X_1, A_1)} \simeq (Y_2, B_2)^{(X_2, A_2)},\end{gathered}$$

其中映射空间情形要求 X_i 为局部紧Hausdorff空间.

如果有带基点空间同伦等价 $(X_1, x_1) \simeq (X_2, x_2)$, $(Y_1, y_1) \simeq (Y_2, y_2)$, 则

$$\begin{gathered}(S(X_1), *) \simeq (S(X_2), *),\ (\Omega(X_1), 0) \simeq (\Omega(X_2), 0),\\ (X_1, x_1) \vee (Y_1, y_1) \simeq (X_2, x_2) \vee (Y_2, y_2),\\ (X_1, x_1) \wedge (Y_1, y_1) \simeq (X_2, x_2) \wedge (Y_2, y_2),\\ (X_1, x_1) \times (Y_1, y_1) \simeq (X_2, x_2) \times (Y_2, y_2),\\ (Y_1, y_1)^{(X_1, x_1)} \simeq (Y_2, y_2)^{(X_2, x_2)}.\end{gathered}$$

其中映射空间情形要求 X_i 为局部紧Hausdorff空间.

证 定理2.1.4的推论.

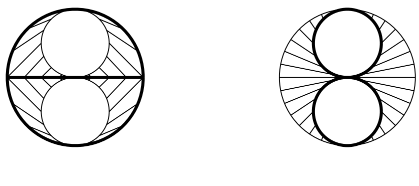
定义2.2.3 拓扑空间 X 的子空间 A 称为 X 的收缩核, 如果存在收缩核(映射) $r\colon X \to A$ 满足 $ri = 1_A$, 其中 $i\colon A \to X$ 为内射.

X 的收缩核 A 称为形变收缩核, 如果收缩核 r 满足 $ir \simeq 1_X$. 形变收缩核 A 显然与 X 同伦型. 称连接 1_X 到 ir 的同伦映射 H 为 A 相对 X 的形变收缩同伦(映射).

X 的形变收缩核 A 称为强形变收缩核, 如果收缩核 r 满足 $ir \simeq 1_X\ \mathrm{rel}A$. 称连接 1_X 到 ir 的相对于 A 的同伦映射 H 为 A 相对 X 的强形变收缩同伦(映射).

(强)形变收缩核经常用来证明两个空间的伦型相同. 显然如果 A, B 都是同一个空间 X 的(强)形变收缩核, 则我们有 $A \simeq B$. 而不以空间 X 为中介, 直接证明 $A \simeq B$ 往往很困难. 虽然强形变收缩核比形变收缩核条件更强, 但却更常用. 最常见的一种情况就是空间 X 上存在一个在 A 之外处处不为零的, 指向 A 的连续向量场, 等价地, 该场决定的指向 A 的积分曲线族铺满整个 $X \backslash A$. 在此情况下 A 就是 X 的强形变收缩核. 把 A 之外的任一点映到经过该点的积分曲线的终点, A 上的点映为自己的映射就是收缩核映射, 强形变收缩同伦 H 就可以按以下方式定义. 对于 $x \notin A$, $H(t, x) = x_t$, 其中 $H(I, x)$ 为过 x 的积分曲线, $x = x_0$ 为积分曲线的起点, x_1 为积分曲线的终点, 对于 $t \in (0, 1)$, x_0 到 x_t 段的积分曲线长度与 x_0 到 x_1 段的积分曲线长度之比为 t. 在此情况下只要标清楚积分曲线族, 就说明 A 为 X 的强形变收缩核. 当场 X 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 积分曲线族为覆盖 $X \backslash A$ 的直线族 (这样的场叫直线场) 时, 以上方式定义的强形变收缩同伦为线性同伦.

例2.2.4 希腊字母 $\theta \cong S^1 \cup D^1$ 和阿拉伯数字 $8 \cong S^1 \vee S^1$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间它们是不同胚的, 因为 θ 去掉任何一点后都道路连通, 而 8 去掉中心点后不道路连通. 下图显示两个子空间围成一个平面区域 X, 它们都为由 X 的直线场决定的强形变收缩核, 其中积分线指向粗线的方向, 因而 $S^1 \cup D^1 \simeq S^1 \vee S^1$. 同理, $S^n \cup D^n \simeq S^n \vee S^n$.



定理2.2.5 以下命题等价.

(1) 拓扑空间 X 可缩.

(2) X 的恒等映射零伦, 即 $1_X \simeq 0$, 其中 0 为任何一个 X 到自身的常值映射.

(3) X 上的任意一点都是空间的形变收缩核.

(4) 对任何映射 $f\colon X \to Y$, f 零伦.

(5) 对任何映射 $g\colon W \to X$, g 零伦.

(6) X (看成 $[1, X]$ 为 $\widetilde{C}(X)$ 的收缩核.

以下关于带基点空间的命题等价.

(1) 带基点空间 (X, x_0) 可缩.

(2) (X, x_0) 的恒等映射保基点零伦, 即 $1_X \simeq 0$.

(3) 基点 x_0 是空间 X 的强形变收缩核.

(4) 对任何保基点映射 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, f 保基点零伦.

(5) 对任何保基点映射 $g\colon (W, w_0) \to (X, x_0)$, g 保基点零伦.

(6) (X, x_0) (看成 $(1{\wedge}X, *)$) 为 $(C(X), *)$ 的收缩核 (收缩核映射保基点同伦于恒等映射).

证 只证非保基点情形, 保基点情形完全类似. 注意, 由 X 到独点空间 $*$ 的映射只有一个常值映射 0_*, 由独点空间 $*$ 到 X 的映射只有一类常值映射 0_x, $x \in X$.

(1)$\Longleftrightarrow$(2) 由于 $0_*0_x = 1_*$, 所以 X 可缩的充要条件是存在 $x_0 \in X$ 使得 $1_X \simeq 0_{x_0}0_* = 0_{x_0}$. 易证空间的同伦等价关系保持道路连通性. 所以只要存在一个 x_0 使$1_X \simeq 0_{x_0}$, 则 X 与独点空间 x_0 同伦型, 因而是道路连通的. 因此, 所有的常值映射都同伦, 即 $1_X \simeq 0_x$ 对所有 $x \in X$.

(2)$\Longleftrightarrow$(3) $0_*0_x = 1_*$ 和 $1_X \simeq 0_x$ 等价于 x 为形变收缩核.

(2)$\Longleftrightarrow$(4) 如果 $1_X \simeq 0_x$, 则对任何映射 $f\colon X \to Y$, $f = f1_X \simeq f0_x = 0_{f(x)}$. 反之, 如果对任何映射 $f\colon X \to Y$ 都有 $f \simeq 0$, 取 $Y = X$, $f = 1_X$, 就有 $1_X \simeq 0$.

(2)$\Longleftrightarrow$(5) 如果 $1_X \simeq 0_x$, 则对任何映射 $g\colon W \to X$, $g = 1_X g \simeq 0_x g = 0_x$. 反之, 如果对任何映射 $g\colon W \to X$ 都有 $g \simeq 0$, 取 $W = X$, $g = 1_X$, 就有 $1_X \simeq 0$.

(2)$\Longleftrightarrow$(6) 如果 $1_X \simeq 0$, $H\colon I{\times}X \to X$ 为连接 0 到 1_X 的同伦, 则由商投射基本定理, 存在 $r\colon \widetilde{C}X \to X$ 使得 $H = rq$, 其中 $q\colon I{\times}X \to \widetilde{C}X$ 为商映射, 显然 r 为收缩核映射. 反之, 如果 $r\colon \widetilde{C}X \to X$ 满足 $ri = 1_X$, 其中 $i\colon X \to \widetilde{C}X$ 为把 X 映到 $[1, X]$ 的内射, 则 rq 为连接 0 到 1_X 的同伦.

例2.2.6 线段 I 本身就可以看成是一条积分线, 当把积分线的箭头指向 0 时, 0 就是 I 的强形变收缩核, 强形变收缩同伦为 $H(s, t) = (1{-}s)t$ 对所有 $(s, t) \in I{\times}I$, H 为线性同伦.

对于拓扑空间 X, 锥空间 $\widetilde{C}X$可缩, 顶点 $[0, X]$ 为空间的强形变收缩核, 强形变收缩同伦为 $H(s, [t, x]) = [(1{-}s)t, x]$ 对所有 $s \in I$ 和 $[t, x] \in \widetilde{C}(X)$.

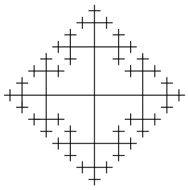
对于带基点空间 (X, x_0), 锥空间 $(C(X), *)$ 可缩, 基点 $0{\wedge}X$ 为空间的强形变收缩核, 强形变收缩同伦为 $H(s, t{\wedge}x) = (1{-}s)t{\wedge}x$ 对所有 $s \in I$ 和 $t{\wedge}x \in C(X)$. 对偶地, 道路空间 $(P(X), 0)$ 可缩, 基点 0 为空间的强形变收缩核, 强形变收缩同伦为 $H(s, \omega)(t) = \omega((1{-}s)t)$ 对所有 $s \in I$ 和 $\omega \in P(X)$.

例2.2.7 分型树 T_n 如下定义. 令 $\mathbb{R}$ 的子集 L 和 $\mathbb{R}^n$ 的子集 B_n 如下.

$$L = \{\pm(\frac{1}{2^{2s_1}} + \frac{1}{2^{2s_1+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{2s_n}} + \frac{1}{2^{2s_n+1}}) \mid 0 \leqslant s_1 < \cdots < s_n \text{ 为整数}\}.$$

$$B_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid 每个\, x_i \in L\}.$$

B_n 中的点称为 T_n 的结点, 两结点 u, v 称为相邻的, 如果 $\|u - v\| = \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{2s+1}}$ 对某个$s \geqslant 0$. 则 T_n 作为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 由所有 B_n 中连接相邻点的线段的并构成. T_2 如下图所示 (无穷分叉下去).



将 T_n 中的每一条线段看成积分线, 指向离中心点近的方向, 则中心点就是 T_n 的强形变收缩核. 所以分型树 T_n 可缩,

以下的定义和定理及其证明在带基点空间的范围内都符合Eckmann-Hilton对偶法则. 具体地, 所有映射的箭头都反向, 把锥空间对偶于道路空间, 把同纬空间对偶于回路空间, 把不交并空间换成乘积空间, 把商空间换成子空间. 所有结论都是在同伦的意义上成立. 为了更好地体现对偶关系, 我们重复给出映射锥空间的定义, 其中锥空间和道路空间同定义1.11.7.

定义2.2.8 映射 $f\colon X \to Y$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_f$ 定义为商空间

$$\widetilde{C}_f = (\widetilde{C}(X) \amalg Y)/{\sim}, \quad 其中\ [1, x] \sim f(x)\ 对所有\ x \in X.$$

为了简化符号, 我们总是用同样的符号表示 $\widetilde{C}(X) \amalg Y$ 和 $\widetilde{C}_f$ 中的元素. 具体地, $[1, x]$ 既表示$\widetilde{C}(X)$ 的元素也表示 $\widetilde{C}_f$ 中的元素 $[[1, x]]$, y 既表示 Y 中的元素也表示 $\widetilde{C}_f$ 中的元素 $[y]$. 只不过在空间 $\widetilde{C}_f$ 中, 我们有 $[1, x] = f(x)$.

保基点映射 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 的映射锥空间为带基点空间 $(C_f, *)$, 其中 C_f 定义为商空间

$$C_f = (C(X) \vee Y)/{\sim}, \quad 其中\ (1 \wedge x) \vee y_0 \sim x_0 \vee f(x)\ 对所有\ x \in X,$$

C_f 的基点为 $x_0 \vee y_0$ 所在的等价类. 同上原因, 我们总是用同样的符号表示 $C(X) \vee Y$ 和 C_f 中的元素. 对偶地, f 的映射纤维空间为带基点空间 $(P_f, *)$, 其中 P_f 定义为子空间

$$P_f = \{(x, \omega) \in X \times P(Y) \mid f(x) = \omega(1)\},$$

P_f 的基点 $*$ 为 $(x_0, 0)$, 其中 0 为保基点常值映射.

注意, 以上定义中 $\widetilde{C}_f$ 明显有一个对偶定义. 令 $\widetilde{P}(X)$ 为所有 X 上的起点任意, 终点也任意的道路构成的道路空间, 则可以定义

$$\widetilde{P}_f = \{(x, \omega) \in X \times \widetilde{P}(Y) \mid f(x) = \omega(1)\}.$$

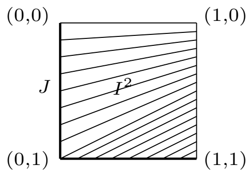
那么为什么不定义这个对偶空间呢? 这正是Eckman-Hilton对偶在大多数情况下只能定义在带基点空间的原因. 显然 $\widetilde{P}_f \simeq X$, 在伦型上 $\widetilde{P}_f$ 体现不出和 f 有关, 所以这个定义没有实际意义. 以后我们会看到, 当把以上定义中的 P_f 看成不带基点的空间的时候, 反而在某些情况下可以看成 $\widetilde{C}_f$ 的对偶空间.

定理2.2.9 设 $f, g\colon X \to Y$ 为映射. 如果 $f \simeq g$, 则 $\widetilde{C}_f \simeq \widetilde{C}_g$.

设 $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 为保基点映射. 如果 $f \simeq g$, 则 $(C_f, *) \simeq (C_g, *)$, $(P_f, *) \simeq (P_g, *)$.

证 设 H 为连接 f 到 g 的同伦, 我们要证明 $\widetilde{C}_f$ 和 $\widetilde{C}_g$ 都为 $\widetilde{C}_H$ 的强形变收缩核.

记 I^2 的子空间 $J=0\times I\cup I\times 1$. 见下图, 粗黑线代表 J. 注意, 为了使以后的证明更直观, 坐标点不是采用通常的 $(0,0)$ 点在左下方的方式. 则 J 为 I^2 的强形变收缩核. 任取 κ 为 J 相对 I^2 的强形变收缩同伦, 满足条件 $\kappa(I\times 0\times I)\subset 0\times I$. 比如, 可以取 κ 由图中指向粗线 J 的直线场决定.

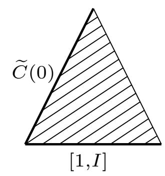


$$\kappa(\lambda,s,t)=\begin{cases}(1-\lambda)(\frac{2t}{2-s},0)+\lambda(s,t), & \text{如果 } t\leqslant 1-\frac{s}{2},\\ (1-\lambda)(\frac{2t+s-2}{t},1)+\lambda(s,t), & \text{如果 } t\geqslant 1-\frac{s}{2}.\end{cases}$$

注意, κ 的具体表达式无关紧要, 因为 κ 并不唯一, 关键是 κ 满足的条件 $\kappa(I\times 0\times I)=0\times I$. 由这个条件和商投射基本定理可知, 存在同伦映射 $\widetilde{\kappa}$ 满足以下的商映射交换图.

$$\begin{array}{ccc} I\times I^2 & \xrightarrow{\kappa} & I^2 \\ {\scriptstyle 1_I\times q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow \\ I\times\widetilde{C}(I) & \xrightarrow{\widetilde{\kappa}} & \widetilde{C}(I)\end{array}$$

其中 $q\colon I^2\to I^2/(0\times I)=\widetilde{C}(I)$ 为商映射. 则 $\widetilde{\kappa}$ 为 $\widetilde{C}(0)$ 相对于 $\widetilde{C}(I)$ 的强形变收缩同伦. 当 κ 取上图中直线场确定的同伦时, $\widetilde{\kappa}$ 如下图示意的直线场决定.



具体地, 设 $\kappa(\lambda,s,t)=(\kappa_1(\lambda,s,t),\kappa_2(\lambda,s,t))$, 则 $\widetilde{\kappa}(\lambda,[s,t])=[\kappa_1(\lambda,s,t),\kappa_2(\lambda,s,t)]$.

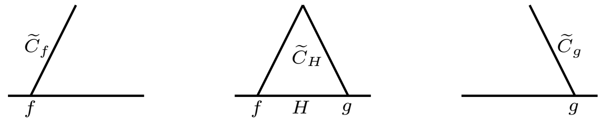
取定理中的 X 为独点空间 $*$, $Y=I$, 取 f,g 为 $f(*)=0$ 和 $g(*)=1$, $H(s,*)=s$. 则上图中的 $[1,I]$ 就是 Y, 锥中的点 $[s,t]$ 就是 $[s,(t,*)]$, $\widetilde{\kappa}$ 就定义了 $\widetilde{C}_f$ 相对 $\widetilde{C}_H$ 的强形变收缩同伦. 具体表达式为,

$$\widetilde{\kappa}(\lambda,[s,(t,*)])=[\kappa_1(\lambda,s,t),(\kappa_2(\lambda,s,t),*)].$$

把上图中底边 $[1,I]$ 看成 Y, 锥中的点 $[s,t]$ 看成空间 $[s,(t,X)]$, 就得到一般的仍记作 $\widetilde{\kappa}$ 的 $\widetilde{C}_f$ 相对 $\widetilde{C}_H$ 的强形变收缩核同伦. 具体表达式为,

$$\widetilde{\kappa}(\lambda,[s,(t,x)])=[\kappa_1(\lambda,s,t),(\kappa_2(\lambda,s,t),x)],\ \widetilde{\kappa}(\lambda,y)=y,\ \text{对所有 } \lambda,s,t\in I,\ x\in X,\ y\in Y.$$

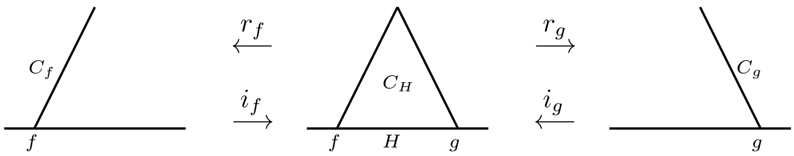
同理可证, $\widetilde{C}_g$ 也为 $\widetilde{C}_H$ 的强变收缩核. 所以 $\widetilde{C}_f\simeq\widetilde{C}_g$. 三个空间的关系可以由下图形象地表示, 其中三角形和斜线中的每点表示空间 X, 横线表示空间 Y.



如果 H 为连接 f 到 g 的保基点同伦, 则我们得到保基点映射 $\bar{H}\colon((I\times X)/(I\times x_0),*)\to(Y,y_0)$. 类似得到 C_f 相对 $C_{\bar{H}}$ 的强形变收缩同伦为

$$\widetilde{\kappa}(\lambda,(s\wedge[t,x])\vee y_0)=\big(\kappa_1(\lambda,s,t)\wedge[\kappa_2(\lambda,s,t),x]\big)\vee y_0,\ \widetilde{\kappa}(\lambda,x_0\vee y)=x_0\vee y,\ \text{对所有 } \lambda,s,t\in I,\ x\in X,\ y\in Y.$$

为了能够把带基点情形的证明对偶到映射纤维空间, 我们必须更详细地写出同伦表达式. 下图中 r_- 表示强形变收缩核映射, 其中 r_f 就是以上的 $\widetilde{\kappa}(1,-)$, i_- 表示内射.



则由上图得到两个同伦等价映射 $H_f = r_g\, i_f$ 和 $H_g = r_f\, i_g$. 实际上, H_g 和 H_g 的构造完全可以不从上图考虑而直接给出.

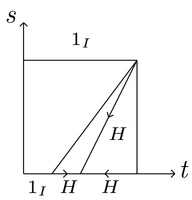
$$H_f((t\wedge x)\vee y_0) = \begin{cases} (2t\wedge x)\vee y_0 & t\in[0,\frac{1}{2}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(2-2t,x) & t\in[\frac{1}{2},1],\ x\in X, \end{cases} \qquad H_f(x_0\vee y) = x_0\vee y,\ y\in Y,$$

$$H_g((t\wedge x)\vee y_0) = \begin{cases} (2t\wedge x)\vee y_0 & t\in[0,\frac{1}{2}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(2t-1,x) & t\in[\frac{1}{2},1],\ x\in X, \end{cases} \qquad H_g(x_0\vee y) = x_0\vee y,\ y\in Y,$$

则 $H_gH_f\colon C_f\to C_f$ 为

$$(H_gH_f)((t\wedge x)\vee y_0) = \begin{cases} (4t\wedge x)\vee y_0 & t\in[0,\frac{1}{4}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(4t-1,x) & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(2-2t,x) & t\in[\frac{1}{2},1],\ x\in X, \end{cases} \qquad (H_gH_f)(x_0\vee y) = x_0\vee y,\ y\in Y.$$

于是由下图可得连接 H_gH_f 和 1_{C_f} 的同伦 G 为



$$G(s,(t\wedge x)\vee y_0) = \begin{cases} (\frac{4t}{3s+1}\wedge x)\vee y_0 & t\in[\ 0\ ,\frac{3s+1}{4}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(4t-3s-1,x) & t\in[\frac{3s+1}{4},\frac{s+1}{2}],\ x\in X, \\ x_0\vee H(2-2t,x) & t\in[\frac{s+1}{2},\ \ 1\ \ ],\ x\in X, \end{cases} \qquad G(s,x_0\vee y) = x_0\vee y,\ y\in Y.$$

同理可证, H_fH_g 和 1_{C_g} 同伦. 所以 C_f 和 C_g 同伦等价.

对偶地, 令 $H'_f\colon P_f\to P_g$, $H'_g\colon P_g\to P_f$ 如下. 对任何 $(x,\omega)\in P_f$,

$$H'_f(x,\omega) = (x,h'_f(\omega)), \qquad h'_f(\omega)(t) = \begin{cases} \omega(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}], \\ H(2-2t,x) & t\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

$$H'_g(x,\omega) = (x,h'_g(\omega)), \qquad h'_g(\omega)(t) = \begin{cases} \omega(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}], \\ H(2t-1,x) & t\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

则 $H'_gH'_f$ 定义为对任何 $(x,\omega)\in P_f$,

$$(H'_gH'_f)(x,\omega) = (x,\theta'(\omega)), \qquad \theta'(\omega)(t) = \begin{cases} \omega(4t) & t\in[0,\frac{1}{4}], \\ H(4t-1,x) & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}], \\ H(2-2t,x) & t\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

于是连接 $H'_g H'_f$ 和 1_{P_f} 的同伦 $G'\colon I\times P_f\to P_f$ 定义为对任何 $(x,\omega)\in P_f$,

$$G'(s,x,\omega)=(x,\omega_s),\qquad \omega_s(t)=\begin{cases}\omega(\frac{4t}{3s+1}) & t\in[\ 0\ ,\frac{3s+1}{4}],\\ H(4t-3s-1,x) & t\in[\frac{3s+1}{4},\frac{s+1}{2}],\\ H(2-2t,x) & t\in[\frac{s+1}{2},\ \ 1\ \ ].\end{cases}$$

同理可证, $H'_f H'_g$ 和 1_{P_g} 同伦. 所以 P_f 和 P_g 同伦等价.

定理2.2.10 设 $f\colon X\to Y$ 为映射, 记 $\widetilde{i}_f\colon Y\to\widetilde{C}_f$ 为内射. 则对任何映射 $\theta\colon Y\to Z$, 映射 θf 零伦当且仅当 θ 可以扩张到 $\widetilde{C}_f$ 上, 即存在 $\overline{\theta}\colon\widetilde{C}_f\to Z$ 使得 $\theta=\overline{\theta}\,\widetilde{i}_f$.

设 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为保基点映射, 记 $i_f\colon(Y,y_0)\to(C_f,*)$ 为内射. 则对任何保基点映射 $\theta\colon(Y,y_0)\to(Z,z_0)$, 保基点映射 θf 零伦当且仅当 θ 可以扩张到 C_f 上, 即存在保基点映射 $\overline{\theta}\colon(C_f,*)\to(Z,z_0)$ 使得 $\theta=\overline{\theta}\,i_f$. 对偶地, 记 $p_f\colon(P_f,*)\to(X,x_0)$ 为投射 $p_f(x,\omega)=x$. 则对任何保基点映射 $\alpha\colon(W,w_0)\to(X,x_0)$, 保基点映射 $f\alpha$ 零伦当且仅当 α 可以提升到 P_f 上, 即存在保基点映射 $\widetilde{\alpha}\colon(W,w_0)\to(P_f,*)$ 使得 $\alpha=p_f\,\widetilde{\alpha}$.

以上对偶如下图所示.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "\theta"] & C_f \arrow[dl, "\overline{\theta}"] \\ & Z & \end{tikzcd}\qquad\qquad \begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "0"] & \\ P_f \arrow[r, "p_f"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

证 如果 $\theta f\simeq 0$, $H\colon I\times X\to Z$ 为连接 0 到 θf 的同伦, 则定义 $\overline{\theta}\colon\widetilde{C}_f\to Z$ 如下.

$$\overline{\theta}([t,x])=H(t,x),\ \text{对}\ [t,x]\in\widetilde{C}(X),\qquad \overline{\theta}(y)=\theta(y),\ \text{对}\ y\in Y.$$

显然 $\theta=\overline{\theta}\,\widetilde{i}_f$. 反之, 如果 $\overline{\theta}$ 为 θ 的扩张, 则我们有 $\theta f=\overline{\theta}\,\widetilde{i}_f f$. 而显然 $\widetilde{i}_f f\simeq 0$. 所以 $\theta f\simeq 0$.

以上映射都替换为保基点映射, $[t,x]$ 替换为 $t\wedge x$, 就得到带基点情形的证明. 对偶地, 如果 $f\alpha\simeq 0$, $H\colon I\times W\to Y$ 为连接 0_{x_0} 到 $f\alpha$ 的保基点同伦, 则定义保基点映射 $\widetilde{\alpha}\colon(W,w_0)\to(P_f,*)$ 如下. $\widetilde{\alpha}(w)=(\alpha(w),\hat{H}(w))$, 其中 $\hat{H}(w)(t)=H(t,w)$. 显然 $\alpha=p_f\,\widetilde{\alpha}$. 反之, 如果 $\widetilde{\alpha}$ 为 α 的提升, 则我们有 $f\alpha=fp_f\widetilde{\alpha}$. 显然 $fp_f\simeq 0$. 所以 $f\alpha\simeq 0$.

以上定理是代数拓扑非常重要的一个定理, 其重要性体现在以下两个方面. 第一, 映射锥情形的证明从几何形象上考虑比较容易想象, 映射纤维情形的证明直接从几何形象考虑较难, 而从映射锥情形的证明做对偶就可以推出. 这是现代数学中经常出现的现象, 对偶的两方面往往表现出截然相反的特性, 一个形象, 另一个就抽象; 一个简单, 另一个就复杂. 而两者在逻辑关系上却是机械的对偶. 对偶就像一面镜子, 使我们从容易理解的现象中通过对偶这面镜子看到了非常不容易理解的对偶现象. 第二, 以上定理体现的映射扩张和提升性质与代数中的恰当性重合, 因而构成代数拓扑的中心定理之一. 所以以上定理一般都叙述为以下等价的定理2.2.12.

定义2.2.11 一个带基点的集合之间的保基点对应 (将基点映到基点的对应) 的序列

$$(A,a_0)\xrightarrow{\ f\ }(B,b_0)\xrightarrow{\ g\ }(C,c_0)$$

称为在 (B,b_0) 处恰当 (也称正和) 的, 如果 $g(b)=c_0$ 当且仅当存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$, 即 $g^{-1}(c_0)=f(A)$. 特别地, 当 A,B,C 都是群时, 基点总是取群的单位元, 则以上序列在 B 处恰当等价于 $\ker g=\mathrm{im}f$. 一个长

的带基点的集合之间的保基点对应的序列 (基点省略)

$$S_m \to S_{m+1} \to S_{m+2} \to \cdots \to S_{n-2} \to S_{n-1} \to S_n$$

称为恰当的, 如果序列在每一个 S_i, $m < i < n$, 处恰当 (m, n 可以是无穷).

定理2.2.12 设 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 为保基点映射. 则对任何带基点空间 (W, w_0) 和 (Z, z_0), 我们有以下保基点同伦类集合的恰当序列

$$[C_f, *; Z, z_0] \xrightarrow{(i_f)^*} [Y, y_0; Z, z_0] \xrightarrow{f^*} [X, x_0; Z, z_0],$$

$$[W, w_0; P_f, *] \xrightarrow{(p_f)_*} [W, w_0; X, x_0] \xrightarrow{f_*} [W, w_0; Y, y_0],$$

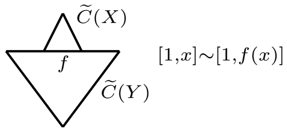
其中所有集合的基点为保基点常值映射所在的等价类, 对于映射 h 和同伦类$[u]$, $h_*[u] = [hu]$, $h^*[u] = [uh]$.

以上结论我们之所以不叙述非保基点情形是因为在不指定基点的情况下, $[X; Y]$一般都没有群结构, 因而即使恰当也没有什么实际意义. 虽然恰当性是在任意带基点的集合上定义, 但是绝大多数情况下都是针对Abel群的, 极少数情况下也讨论非交换群的恰当性.

定理2.2.13 设 $f\colon X \to Y$ 为映射, $\widetilde{i}_f\colon Y \to \widetilde{C}_f$ 为内射, 则$\widetilde{i}_f$ 的映射锥空间与 X 的同纬空间有相同伦型, 即 $\widetilde{C}_{\widetilde{i}_f} \simeq \widetilde{S}(X)$. 商投射 $q\colon \widetilde{C}_{\widetilde{i}_f} \to \widetilde{C}_{\widetilde{i}_f}/\widetilde{C}(Y) \cong \widetilde{S}(X)$ 为同伦等价映射.

设 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 为保基点映射, $i_f\colon (Y, y_0) \to (C_f, *)$ 为内射, 则 i_f 的映射锥空间与 (X, x_0) 的同纬空间有相同伦型, 即 $(C_{i_f}, *) \simeq (S(X), *)$. 商投射 $q\colon (C_{i_f}, *) \to (C_{i_f}/C(Y), *) \cong (S(X), *)$ 为同伦等价映射. 对偶地, 记 $p_f\colon (P_f, *) \to (X, x_0)$ 为投射 $p_f(x, \omega) = x$, 则 p_f 的映射纤维空间与 (Y, y_0) 的回路空间有相同伦型, 即 $(P_{p_f}, *) \simeq (\Omega(Y), 0)$. 内射 $j\colon (\Omega(Y), 0) \to (P_{p_f}, *)$, $j(\omega) = (x_0, 0, \omega)$, 为同伦等价映射.

证 令$\widetilde{j}\colon X \to \widetilde{C}(Y)$ 为$\widetilde{j}(x) = [1, f(x)]$, 则 $\widetilde{C}_{\widetilde{j}} = \widetilde{C}_{\widetilde{i}_f}$, 都为空间 $\big(\widetilde{C}(X) \amalg \widetilde{C}(Y)\big)/\sim$, 其中 $[1, x] \sim [1, f(x)]$ 对所有 $x \in X$, 如下图示意.



而 $\widetilde{C}(Y)$ 为可缩空间, 所以$\widetilde{j} \simeq 0$, 其中 $0\colon X \to \widetilde{C}(Y)$ 为任一常值映射. 由定理2.2.9,

$$\widetilde{C}_{\widetilde{i}_f} = \widetilde{C}_{\widetilde{j}} \simeq \widetilde{C}_0 = \widetilde{S}X \vee \widetilde{C}(Y) \simeq \widetilde{S}X.$$

类似定理2.2.9中的 H_f 和 H_g 的构造, 不难证明 q 为同伦等价映射, 其同伦等价逆 $q'\colon \widetilde{S}(X) \to \widetilde{C}_{\widetilde{i}_f}$ 可定义为$q'([t, x]) = [2t, x]$, 对 $t \in [0, \frac{1}{2}]$; $q'([t, x]) = [2-2t, f(x)]$, 对 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

把以上所有的映射替换成保基点映射就得到带基点情形的证明. 特别地, q 的同伦逆 $q'\colon S(X) \to C_{i_f}$ 可定义为$q'(t \wedge x) = 2t \wedge x$, 对 $t \in [0, \frac{1}{2}]$; $q'(t \wedge x) = (2-2t) \wedge f(x)$, 对 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. 对偶地, 令 $r\colon (P_{1_X}, 0) \to (Y, y_0)$ 为 $r(x, \tau) = f(x)$ 对所有的 $(x, \tau) \in P_{1_X} \subset X \times P(X)$. 则 $P_{p_f} = P_r$, 两者都为 $X \times P(X) \times P(Y)$ 的子空间, 由所有满足 $f(x) = \omega(1)$, $x = \tau(1)$ 的 $(x, \tau, \omega) \in X \times P(X) \times P(Y)$ 构成. 而 $(P_{1_X}, 0)$ 可缩, 连接恒等到零映射的同伦为 $H(t, (x, \tau)) = (f(\tau(1-t)), \tau_t)$, 其中 $\tau_t(s) = \tau(s(1-t))$. 所以有保基点同伦 $r \simeq 0$. 所以由定理2.2.9, $(P_r, 0) \simeq (P_0, 0) = (P_{1_X} \times \Omega(Y), (*, 0)) \simeq (\Omega(Y), 0)$. 因而 $(P_{p_f}, 0) \simeq (\Omega(Y), 0)$. j 的同伦逆映

射 $j'\colon (P_{p_f},*) \to (\Omega(Y),0)$ 可定义为 $j'(x,\tau,\omega)=\omega'$, 其中 $\omega'(t)=\omega(2t)$, 对 $t\in[0,\frac{1}{2}]$; $\omega'(t)=f(\tau(2-2t))$, 对 $t\in[\frac{1}{2},1]$.

定理2.2.14 设 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为保基点映射. 为了节省文字空间, 以下定理和证明的叙述中所有的保基点映射同伦类集合 $[A,a_0;B,b_0]$ 都简记为 $[A;B]_*$, $S^n(f)$简记为 $\hat{f}^n$, $\Omega^n(f)$ 简记为 $\tilde{f}^n$.

对任何带基点空间 (Z,z_0), 我们有带基点集合的长恰当序列

$$\cdots\longrightarrow[S^{n+1}(X);Z]_*\xrightarrow{(\hat{q}^n)^*}[S^n(C_f);Z]_*\xrightarrow{(\hat{i}^n)^*}[S^n(Y);Z]_*\xrightarrow{(\hat{f}^n)^*}[S^n(X);Z]_*\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow[S(X);Z]_*\xrightarrow{q^*}[C_f;Z]_*\xrightarrow{i^*}[Y;Z]_*\xrightarrow{f^*}[X;Z]_*,$$

其中 $i\colon Y\to C_f$ 为内射, $q\colon (C_f,*)\to(C_f/Y\cong S(X),*)$ 为商投射.

对偶地, 对任何带基点空间 (W,w_0), 我们有带基点集合的长恰当序列

$$\cdots\longrightarrow[W,\Omega^{n+1}(Y)]_*\xrightarrow{(\tilde{j}^n)_*}[W;\Omega^n(P_f)]_*\xrightarrow{(\tilde{p}^n)_*}[W;\Omega^n(X)]_*\xrightarrow{(\tilde{f}^n)_*}[W;\Omega^n(Y)]_*\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow[W;\Omega^n(Y)]_*\xrightarrow{j_*}[W;P_f]_*\xrightarrow{p_*}[W;X]_*\xrightarrow{f_*}[W;Y]_*,$$

其中 $p\colon P_f\to X$ 为投射 $p(x,\omega)=x$, $j\colon\Omega(Y)\to P_f$ 为内射 $j(\omega)=(x_0,\omega)$.

证 由定理2.2.12, 我们有长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{(i^4)^*}[C_f^3;Z]_*\xrightarrow{(i^3)^*}[C_f^2;Z]_*\xrightarrow{(i^2)^*}[C_f;Z]_*\xrightarrow{i^*}[Y;Z]_*\xrightarrow{f^*}[X;Z]_*.$$

其中每个 C_f^n 为 i^{n-1} 的映射纤维空间. 而由定理2.2.13, $C_f^{3n-1}\simeq S^n(X)$, $C_f^{3n}\simeq S^n(Y)$, $C_f^{3n+1}\simeq S^n(C_f)$. 由于我们讨论的是同伦类, 所以 $[W;U]_*$ 中的 U 可以换成同伦等价的空间 U'. 将 C_f^k 用相应的同纬空间替换就得到定理的长恰当序列.

对偶情形由相同定理的对偶结论推出.

由下节知识可知对任何带基点空间 (U,u_0) 和 (V,v_0), 集合 $[S(U);V]_*$ 和 $[U;\Omega(V)]_*$ 都是群. 当 $n>1$ 时, 集合 $[S^n(U);V]_*$ 和 $[U;\Omega^n(V)]_*$ 都是Abel群.

如果序列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 恰当, 且 A,B,C 都是群, 则导出一个短恰当序列 $0\to\mathrm{im}f\to C\to\ker g\to 0$. 这个短恰当序列不管是非交换群还是Abel群总蕴含作为集合, C 和乘积集合 $(\mathrm{im}f)\times(\ker g)$ 有1-1对应. 但是如果 B,C不是群, 就没有这个结论了. 这就是非群的恰当序列没有实际意义的原因. 我们最常用的恰当序列的结论是以下所有集合都是群的情形. 如果有群 $A\xrightarrow{f}B\to 0$ 的恰当序列, 则 f 为满同态. 如果有群 $0\to A\xrightarrow{f}B$ 的恰当序列, 则 f 为单同态. 如果有群 $0\to A\xrightarrow{f}B\to 0$ 的恰当序列, 则 f 为群同构.

习题 2.2

2.2.1. 证明Hausdorff空间的收缩核为闭子空间.

2.2.2. 设 X 为 $\mathbb{R}^2$ 的由连接 $(0,0)$ 和 $(1,\frac{1}{n})$ 的线段 $(n=1,2,\cdots)$ 和连接 $(0,0)$ 和$(1,0)$ 线段构成的子空间. 证明 X可缩, 但带基点空间 $(X,(1,0))$ 不是可缩的.

2.2.3. 证明 $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子空间都可缩. 由此证明 $\mathbb{R}^n$ 本身和所有对角线大于 0 的上三角矩阵空间 $T(n)$ 都可缩, n 阶正交矩阵空间 $O(n)$ 为 n 阶可逆矩阵空间 $GL(n)$ 的强形变收缩核.

2.2.4. 设 A_i 为 X_i 的强形变收缩核, $i=1,2$. 证明 $A_1{\times}A_2$ 为 $X_1{\times}X_2$ 的强形变收缩核. 由此证明

$$\mathbb{R}^{m+n}\setminus\big((\mathbb{R}^m{\times}0)\cup(0{\times}\mathbb{R}^n)\big)\simeq S^{m-1}{\times}S^{n-1},\quad (S^m{\times}S^n)\setminus(S^m{\vee}S^n)\simeq *,$$

$$\mathbb{R}^{m+n}\setminus\big((\mathbb{R}^m{\times}S^{n-1})\cup(S^{m-1}{\times}\mathbb{R}^n)\big)\simeq *\amalg S^{m-1}\amalg S^{n-1}\amalg(S^{m-1}{\times}S^{n-1}),$$

其中 $*$ 表示独点空间, $\mathbb{R}^m{\times}0$ 表示后 n 个坐标为 0, $0{\times}\mathbb{R}^n$ 表示前 m 个坐标为 0.

2.2.5. 写出 Y 作为 $\widetilde{C}_f\backslash[0,X]$ 的强形变收缩核的强形变收缩同伦 H. 由此证明 $(S^m{\times}S^n)\backslash*\simeq S^m{\vee}S^n$, 其中 $*$ 为 $S^m{\times}S^n$ 上任一点.

2.2.6. 写出 Y 作为 $(X{*}Y)\backslash X$ 的强形变收缩核的强形变收缩同伦 H. 由此证明

$$S^m\setminus S^n\simeq S^{m-n-1}\quad(n<m).$$

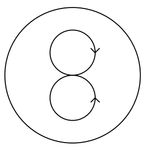
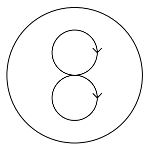
2.2.7 写出 $X{\times}Y$ 作为 $(X{*}Y)\backslash(X\amalg Y)$ 的强形变收缩核的强形变收缩同伦 H. 由此证明

$$S^{m+n+1}\backslash\big((S^m{\times}0)\amalg(0{\times}S^n)\big)\simeq S^m{\times}S^n,$$

其中 $S^m{\times}0$ 表示后 $n{+}1$ 个坐标为 0, $0{\times}S^n$ 表示前 $m{+}1$ 个坐标为 0.

2.2.8 证明 $(S^m)^*{\wedge}S^n\simeq S^{m+n}{\vee}S^n$, $S^m{\wedge}(S^n)^*\simeq S^{m+n}{\vee}S^m$, 其中 $(-)^*$ 为一点紧化空间.

2.2.9. 设 X_1 和 X_2 如下图所示, 为球面 S^2 先扣去以上边的圆环为边界的开圆盘 (下边圆盘不扣掉!), 然后再将上下两个圆环按所示方向粘合起来所得到的商空间.

X_1 　　X_2 

证明 $X_1\simeq X_2\simeq S^2$.

2.2.10. 设 S^n 上等价关系 $\sim$ 为 $x\sim -x$ 对所有 $x\in S^{n-1}$. 证明 $S^n/{\sim}\simeq RP^n{\vee}S^n$.

2.2.11. 求以下空间 X 的标准伦型, 即每个连通分支为独点空间或者若干球面的一点并的标准空间.

(1) 球面 S^2 抠去 k 个点.

(2) s 个射影平面的连通和 $S(x_1^2\cdots x_s^2)$ 抠去 k 个点.

(3) s 个轮胎面的连通和 $S(x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_sy_sx_s^{-1}y_s^{-1})$ 抠去 k 个点.

(4) $\mathbb{R}^2$ 抠去 k 个点.

(5) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 个点.

(6) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 条平行的直线.

(7) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 条相交于一点的直线.

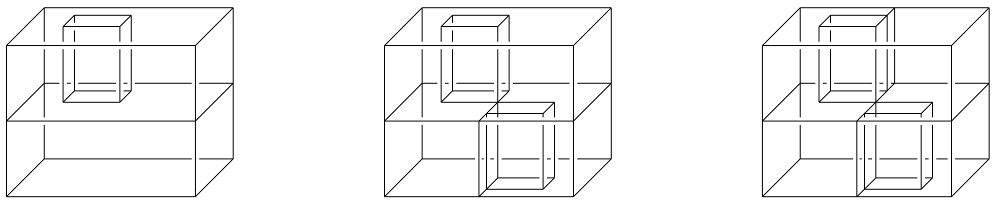
(8) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 个不打结、也互不相交、互不缠绕的圆 S^1.

(9) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 个不打结、也互不缠绕但相交于一点的圆 S^1.

(10) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 个球心在一条直线上, 相邻球心距离为 4, 半径为 1 的球面 S^2.

(11) $\mathbb{R}^3$ 抠去 k 个球心在一条直线上, 相邻球心距离为 2, 半径为 1 的球面 S^2.

2.2.12.下图三个 $\mathbb{R}^3$ 的子空间由 2 维面拼成, 图中除了横的小方块为空的, 其余所有的面都是实的. 试证明由左至右三个空间分别与 $S^2 \vee S^1$, S^1 和独点空间同伦型. 说明它们的补空间的标准伦型.



2.3 H群和H上群

对于带基点空间 (X, x_0) 和 (Y, y_0), 什么时候映射空间 $(Y, y_0)^{(X,x_0)}$ 能够成为一个群呢? 显然 Y 本身为群时, 该集合成为一个群. 具体地, 对于 $f, g \in (Y, y_0)^{(X,x_0)}$, 定义乘积映射 fg 为 $(fg)(x) = f(x)g(x)$ 对所有 $x \in X$; f 的逆映射 f^{-1} 为 $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$ 对所有 $x \in X$; 单位映射为映到群的单位元的常值映射 0. 这种定义自然使 $(Y, y_0)^{(X,x_0)}$ 为群. 注意这个定义是完全不依赖拓扑结构的, 要使群结构导出同伦类的群结构, 就必须把群的概念推广到拓扑群.

定义2.3.1 拓扑空间 G 称为拓扑群, 如果它的代数运算都是连续的, 即存在乘法映射 $\mu\colon G\times G \to G$ 和逆映射 $\tau\colon G \to G$ 满足以下三条性质. 以下公式中, Δ_G 为对角映射 $\Delta_G(x) = (x, x)$, 1_G 为恒等映射 $1_G(x) = x$, 0_G 为常值映射 $0_G(x) = 1$.

(1) (乘法结合性) $\mu(1_G \times \mu) = \mu(\mu \times 1_G)$, 等价于 $x(yz) = (xy)z$ 对任何$x, y, z \in G$, 等价于以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "1_G\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times 1_G"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G.
\end{tikzcd}$$

(2) (单位存在性) $\mu(1_G \times 0_G)\Delta_G = \mu(0_G \times 1_G)\Delta_G = 1_G$, 等价于 $x1 = 1x = x$ 对任何$x \in G$, 等价于以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[d, "1_G\times 0_G"'] & G \arrow[l, "\Delta_G"'] \arrow[r, "\Delta_G"] \arrow[d, "1_G"] & G\times G \arrow[d, "0_G\times 1_G"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G & G\times G. \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

(3) (逆元存在性) $\mu(1_G \times \tau)\Delta_G = \mu(\tau \times 1_G)\Delta_G = 0_G$, 等价于 $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ 对任何$x \in G$, 等价于以

下映射的交换图

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xleftarrow{\Delta_G} & G & \xrightarrow{\Delta_G} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G\times\tau} & & \downarrow{\scriptstyle 0_G} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\times 1_G} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G\times G. \end{array}$$

有了以上从映射角度对群的刻画后, G^X 上自然就有以下定义的群结构. 对任何 $f,g\colon X\to G$, 定义它们的乘积映射 fg 为映射 $\mu(f\times g)\Delta_G$; f 的逆映射 f^{-1} 为映射 τf; 单位映射为把所有点映到单位元的常值映射. 这种定义与从运算角度给出的定义完全一致. 但这个从映射角度给出的定义却有非常简单的推广, 那就是把等式变成同伦式. 这种推广就把拓扑群推广到 H 群, 同时自然使映射同伦类集合 $[X,x_0;G,*]$ 成为群.

定义2.3.2 带基点拓扑空间 $(G,*)$ 称为 H 群, 如果存在保基点乘法映射 $\mu\colon (G\times G,(*,*))\to(G,*)$ 和逆映射 $\tau\colon (G,*)\to(G,*)$ 满足以下保基点同伦式. 以下公式中, Δ_G 为对角映射 $\Delta_G(x)=(x,x)$, 1_G 为恒等映射 $1_G(x)=x$, 0_G 为常值映射 $0_G(x)=*$.

(1) (乘法同伦结合性) $\mu(1_G\times\mu)\simeq\mu(\mu\times 1_G)$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{1_G\times\mu} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle \mu\times 1_G} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G. \end{array}$$

(2) (单位同伦存在性) $\mu(1_G\times 0_G)\Delta_G\simeq\mu(0_G\times 1_G)\Delta_G\simeq 1_G$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xleftarrow{\Delta_G} & G & \xrightarrow{\Delta_G} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G\times 0_G} & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \downarrow{\scriptstyle 0_G\times 1_G} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G\times G. \end{array}$$

(3) (逆元同伦存在性) $\mu(1_G\times\tau)\Delta_G\simeq\mu(\tau\times 1_G)\Delta_G\simeq 0_G$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xleftarrow{\Delta_G} & G & \xrightarrow{\Delta_G} & G\times G \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G\times\tau} & & \downarrow{\scriptstyle 0_G} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\times 1_G} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G\times G. \end{array}$$

定理2.3.3 设 $(G,*)$ 为 H 群. 则对任何带基点空间 (X,x_0), G 的 H 群结构导出 $[X,x_0;G,*]$ 的群结构定义如下. 对于保基点映射 f,g, 定义映射的乘积为 $f\,g=\mu(f\times g)\Delta_X$, 定义 $[X,x_0;G,*]$ 的乘法为 $[f][g]=[f\,g]$, $[f]$ 的逆元为 $[\tau f]$, $[X,x_0;G,*]$ 的单位元为 $[0_X]$, 其中 0_X 为把 X 的所有点都映到 G 的基点 $*$ 的常值映射.

证 我们有

$$\begin{aligned} & (f\,g)\,h \\ = \;& \mu((\mu(f\times g)\Delta_X)\times h)\Delta_X \\ = \;& \mu(\mu\times 1_G)(f\times g\times h)(\Delta_X\times 1_X)\Delta_X \\ \simeq \;& \mu(1_G\times\mu)(f\times g\times h)(1_X\times\Delta_X)\Delta_X \\ = \;& \mu(f\times(\mu(g\times h)\Delta_X))\Delta_X \\ = \;& f\,(g\,h) \end{aligned}$$

这说明 $([f][g])[h]=[f]([g][h])$, 即 $[X,x_0;G,*]$ 的乘法满足结合律.

$$f(0_X)=\mu(f\times 0_X)\Delta_X=\mu(1_G\times 0_G)(f\times f)\Delta_X=(\mu(1_G\times 0_G)\Delta_G)f\simeq 1_Gf=f,$$
$$(0_X)f=\mu(0_X\times f)\Delta_X=\mu(0_G\times 1_G)(f\times f)\Delta_X=(\mu(0_G\times 1_G)\Delta_G)f\simeq 1_Gf=f.$$

这说明 $[f][0_X]=[0_X][f]=[f]$, 即 $[0_X]$ 为 $[X,x_0;G,*]$ 的单位元.

$$f(\tau f)=\mu(f\times\tau f)\Delta_X=\mu(1_G\times\tau)(f\times f)\Delta_X=(\mu(1_G\times\tau)\Delta_G)f\simeq 0_Gf=0_X,$$
$$(\tau f)f=\mu(\tau f\times f)\Delta_X=\mu(\tau\times 1_G)(f\times f)\Delta_X=(\mu(\tau\times 1_G)\Delta_G)f\simeq 0_Gf=0_X.$$

这说明 $[\tau f][f]=[f][\tau f]=[0_X]$, 即 $[\tau f]$ 为 $[f]$ 的逆元. 所以 $[X,x_0;G,*]$ 为群.

注意, 当把以上证明中的同伦号变成等号时, 就是当 $(G,1)$ 为群时, $(G,1)^{(X,x_0)}$ 为群的从映射角度描述的证明. 与拓扑群不同的是, 拓扑群的乘法,单位元和逆映射都是唯一的, 而一旦把等号变成同伦号以后, H群的乘法, 基点和逆映射都不是唯一的, 都是在同伦的意义上唯一的.

有了H群的定义, 我们就有其对偶定义, H上群 (也称 H'群). 对于H群 $(G,*)$, $[X,x_0;G,*]$ 的群结构来自 G 的乘法导出的乘法

$$[X,x_0;G,*]\times[X,x_0;G,*]\cong[X,x_0;G\times G,(*,*)]\xrightarrow{\ \mu_*\ }[X,x_0;G,*].$$

对偶地, 如果存在上乘法$\mu'\colon(G',*)\to(G'\vee G',*)$, 则导出乘法

$$[G',*;Y,y_0]\times[G',*;Y,y_0]\cong[G'\vee G',*;Y,y_0]\xrightarrow{\ (\mu')^*\ }[G',*;Y,y_0].$$

定义2.3.4 带基点空间 $(G',*)$ 称为H上群, 如果存在保基点上乘法映射 $\mu'\colon(G',*)\to(G'\vee G',*)$ 和逆映射 $\tau'\colon(G',*)\to(G',*)$ 满足以下保基点同伦式. 以下公式中, $\Delta'_{G'}$ 为上对角映射 $\Delta'_{G'}(*\vee x)=\Delta'_{G'}(x\vee *)=x$, $1_{G'}$ 为恒等映射 $1_{G'}(x)=x$, $0_{G'}$ 为常值映射 $0_{G'}(x)=*$.

(1) (上乘法同伦结合性) $(1_{G'}\vee\mu')\mu'\simeq(\mu'\vee 1_{G'})\mu'$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\mu'"'] & G'\vee G' \arrow[d, "1_{G'}\vee\mu'"] \\ G'\vee G' \arrow[r, "\mu'\vee 1_{G'}"] & G'\vee G'\vee G'. \end{tikzcd}$$

(2) (单位同伦存在性) $\Delta'_{G'}(1_{G'}\vee 0_{G'})\mu'\simeq\Delta'_{G'}(0_{G'}\vee 1_{G'})\mu'\simeq 1_{G'}$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{tikzcd} G'\vee G' \arrow[d, "1_{G'}\vee 0_{G'}"'] & G' \arrow[l, "\mu'"'] \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "1_{G'}"] & G'\vee G' \arrow[d, "0_{G'}\vee 1_{G'}"] \\ G'\vee G' \arrow[r, "\Delta'_{G'}"] & G' & G'\vee G'. \arrow[l, "\Delta'_{G'}"'] \end{tikzcd}$$

(3) (逆元同伦存在性) $\Delta'_{G'}(1_{G'}\vee\tau')\mu'\simeq\Delta'_{G'}(\tau'\vee 1_{G'})\mu'\simeq 0_{G'}$, 等价于以下映射的同伦交换图

$$\begin{tikzcd} G'\vee G' \arrow[d, "1_{G'}\vee\tau'"'] & G' \arrow[l, "\mu'"'] \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "0_{G'}"] & G'\vee G' \arrow[d, "\tau'\vee 1_{G'}"] \\ G'\vee G' \arrow[r, "\Delta'_{G'}"] & G' & G'\vee G'. \arrow[l, "\Delta'_{G'}"'] \end{tikzcd}$$

定理2.3.5 如果 $(G', *)$ 为H上群, 则对任何带基点空间 (Y, y_0), G' 的H上群结构导出 $[G', *; Y, y_0]$ 的群结构如下定义. 对于保基点映射 f, g, 定义映射的乘法为 $f\,g = \Delta'_Y(f \vee g)\mu'$, 定义 $[G', *; Y, y_0]$ 的乘法为 $[f][g] = [f\,g]$, $[f]$ 的逆元为 $[f\tau']$, $[G', *; Y, y_0]$ 的单位元为 $[0]$, 其中 0 为把 G' 映到基点 y_0 的常值映射.

证 我们有

$$
\begin{aligned}
& (f\,g)\,h \\
= \;& \Delta'_Y((\Delta'_Y(f{\vee}g)\mu'){\vee}h)\mu' \\
= \;& \Delta'_Y(\Delta'_Y{\vee}1_G)(f{\vee}g{\vee}h)(\mu'{\vee}1_X)\mu' \\
\simeq \;& \Delta'_Y(1_G{\vee}\Delta'_Y)(f{\vee}g{\vee}h)(1_X{\vee}\mu')\mu' \\
= \;& \Delta'_Y(f{\vee}(\Delta'_Y(g{\vee}h)\mu'))\mu' \\
= \;& f\,(g\,h)
\end{aligned}
$$

这说明 $([f][g])[h] = [f]([g][h])$, 即 $[G', *; Y, y_0]$ 的乘法满足结合律.

$$
\begin{aligned}
f(0_Y) &= \Delta'_Y(f{\vee}0_Y)\mu' = \Delta'_Y(f{\vee}f)(1_{G'}{\vee}0_{G'})\mu' = f(\Delta'_{G'}(1_{G'}{\vee}0_{G'})\mu') \simeq f1_G = f \\
(0_Y)f &= \Delta'_Y(0_Y{\vee}f)\mu' = \Delta'_Y(f{\vee}f)(0_{G'}{\vee}1_{G'})\mu' = f(\Delta'_{G'}(0_{G'}{\vee}1_{G'})\mu') \simeq f1_G = f
\end{aligned}
$$

这说明 $[f][0_Y] = [0_Y][f] = [f]$, 即 $[G', *; Y, y_0]$存在单位元$[0_Y]$.

$$
\begin{aligned}
f(f\tau') &= \Delta'_Y(f{\vee}f\tau')\mu' = \Delta'_Y(f{\vee}f)(1_{G'}{\vee}\tau')\mu' = f(\Delta'_{G'}(1_{G'}{\vee}\tau')\mu') \simeq f0_G = 0_Y \\
(f\tau')f &= \Delta'_Y(f\tau'{\vee}f)\mu' = \Delta'_Y(f{\vee}f)(\tau'{\vee}1_{G'})\mu' = f(\Delta'_{G'}(\tau'{\vee}1_{G'})\mu') \simeq f0_G = 0_Y
\end{aligned}
$$

这说明 $[f\tau'][f] = [f][f\tau'] = [0_Y]$, 即 $[f]$ 的逆元为 $[f\tau']$. 所以 $[G', *; Y, y_0]$ 为群.

注意比较一下定义2.3.2和定义2.3.4, 形式上完全对偶. 同样, 定理2.3.3和定理2.3.5的证明也完全对偶. 如果把上面证明中的同伦号变等号, 我们就得到拓扑群的对偶概念：拓扑上群. 有趣的是, 这个概念是存在的, 但除了独点集之外, 多点集合的上乘法是不可能满足上结合性的, 所以拓扑上群的概念是没有意义的. 而在同伦的意义上, H上群却存在, 比如球面S^n, 并且非常重要. 这说明建立在同伦基础上的对偶比建立在集合论基础上的对偶要广!

例2.3.6 $(S^1, *)$ (基点任意) 为H上群, 其上乘法和逆映射满足H上群的条件已经在例2.1.8中验证.

定理2.3.7 设 $(G', *)$ 为H上群, 其上乘法和逆映射分别为 μ' 和 τ'.

对任何带基点空间 (X, x_0), 压缩积空间 $(G'{\wedge}X, *)$ 为H上群, 映射空间 $((X, x_0)^{(G', *)}, 0)$ 为H群. 特别地, 对任何带基点空间 (X, x_0), 同纬空间 $(S(X), *)$ 为H上群, 回路空间 $(\Omega(X), 0)$ 为H群.

对任何带基点拓扑空间 (X, x_0) 和 (Y, y_0), 我们有群同构

$$[S(X), *; Y, y_0] \cong [X, x_0; \Omega(Y), 0],$$

其中等号左边的群结构由 $(S(X), *)$ 的上H群结构导出, 等号右边的群结构由 $(\Omega(X), 0)$ 的H群结构导出.

证 取 $G'\wedge X$ 的上乘法映射为

$$G'\wedge X \xrightarrow{\mu'\wedge 1_X} (G'\vee G')\wedge X \cong (G'\wedge X)\vee(G'\wedge X).$$

取 $G'\wedge X$ 的逆映射为

$$G'\wedge X \xrightarrow{\tau'\wedge 1_X} G'\wedge X.$$

不难由定义证明以上映射使 $(G'\wedge X,*)$ 为上H群.

取 $(X,x_0)^{(G',*)}$ 的乘法映射为

$$(X,x_0)^{(G',*)}\times(X,x_0)^{(G',*)} \cong (X,x_0)^{(G'\vee G',*)} \xrightarrow{(1_{(X,x_0)})^{\mu'}} (X,x_0)^{(G',*)}.$$

取 $(X,x_0)^{(G',*)}$ 的逆映射为

$$(X,x_0)^{(G',*)} \xrightarrow{(1_{(X,x_0)})^{\tau'}} (X,x_0)^{(G',*)}.$$

不难由定义证明以上映射使 $((X,x_0)^{(G',*)},0)$ 为上H群.

我们有 $(Y,y_0)^{(S(X),*)}$ 到 $(\Omega(Y),0)^{(X,x_0)}$ 的1-1对应为 $f \to \hat{f}$, 其中 $\hat{f}(x)(t) = f(t\wedge x)$. 不难由定义验证 $\widehat{f\,g} = \hat{f}\,\hat{g}$, 其中左边和右边的乘法分别由$H$上群和$H$群结构导出. 所以两个群是同构的.

定理2.3.8 设 $(G',*)$ 为H上群, $(G,*)$ 为H群. 则 $[G',*;G,*]$ 上有两种乘法结构, 一种是由 $(G',*)$ 的H上群结构导出的群结构, 另一种是由 $(G,*)$ 的H群结构导出的群结构. 这两种群结构相同, 并且为Abel群. 所以对于任何带基点空间 (X,x_0) 和 (Y,y_0), 我们有$[S(X),*;\Omega(Y),0]$ 为Abel群.

证 对任何 $f,g\colon G'\to G$, 分别记两种乘法为

$$f{\cdot}g = \Delta'_G(f\vee g)\mu',\ [f]{\cdot}[g]=[f{\cdot}g],\ f{\circ}g=\mu(f\times g)\Delta_{G'},\ [f]{\circ}[g]=[f{\circ}g].$$

记 $j\colon G'\vee G'\to G'\times G'$ 为内射, $p_i\colon G'\times G'\to G'$ 为投射 $p_i(x_1,x_2)=x_i$, $i=1,2$. 由于

$$p_1j\mu' = \Delta'_{G'}(1_{G'}\vee 0_{G'})\mu' \simeq 1_{G'} = p_1\Delta_{G'},$$

$$p_2j\mu' = \Delta'_{G'}(0_{G'}\vee 1_{G'})\mu' \simeq 1_{G'} = p_2\Delta_{G'},$$

所以由映射同伦类的提升性可知, $j\mu'\simeq\Delta_{G'}$. 同样由

$$p_2Tj\mu' = \Delta'_{G'}(1_{G'}\vee 0_{G'})\mu' \simeq 1_{G'} = p_2\Delta_{G'},$$

$$p_1Tj\mu' = \Delta'_{G'}(0_{G'}\vee 1_{G'})\mu' \simeq 1_{G'} = p_1\Delta_{G'}$$

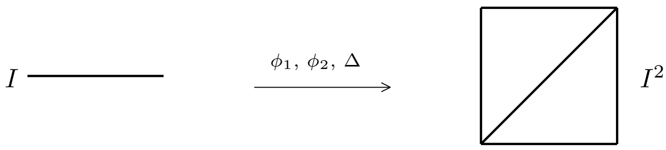
得 $Tj\mu'\simeq\Delta_{G'}$. 这说明 $j\mu'\simeq Tj\mu'\simeq\Delta_{G'}$. 所以

$$f{\cdot}g = \Delta'_G(f\vee g)\mu' = \mu(f\times g)j\mu' \simeq \mu(f\times g)\Delta_{G'} = f{\circ}g.$$

$$g{\cdot}f = \Delta'_G(g\vee f)\mu' = \mu(g\times f)j\mu' \simeq \mu(g\times f)\Delta_{G'} = g{\circ}f.$$

因此由 $\mu(f\times g)j\mu' \simeq \mu(f\times g)Tj\mu' = \mu(g\times f)j\mu'$ 可知 $[f]{\cdot}[g]=[g]{\cdot}[f]$.

当取 $(G',*)=(S^1,*)$ 时, 把 S^1 到 $S^1\times S^1$ 的平化为 $(I,\partial(I))$ 到 $(I^2,\partial(I^2))$ 的映射, 则以上的三个映射 $j\mu'$, $j\mu'T$ 和 $\Delta_{G'}$ 分别平化为 $\phi_1,\phi_2,\Delta\colon I\to I^2$ 定义如下, $\phi_1(t)=(2t,0)$ 对 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$, $\phi_1(t)=(1,2t-1)$ 对 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$; $\phi_2(t)=(0,2t)$ 对 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$, $\phi_2(t)=(2t-1,1)$ 对 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$; $\Delta(t)=(t,t)$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$. 如下图所示



其中 $\mathrm{im}\phi_1$ 为下横边和右竖边构成的折线, $\mathrm{im}\phi_2$ 为上横边和左竖线构成的折线, $\mathrm{im}\Delta$ 为对角线. 这三个映射不通过以上抽象的角度而由 I^2 的线性结构可知相对线性同伦.

定理2.3.9 设 $(U,*)$ 和 $(V,*)$ 都为H上群, 则对带基点空间 (Z,z_0), 映射同伦类集合 $[U\wedge V,*;Z,z_0]$ 有两种群结构, 分别由 $(U,*)$ 和 $(V,*)$ 的H上群结构导出. 这两种群结构相同并且为Abel群. 因此, 对 $n\geqslant 2$ 和任何带基点空间 (X,X_0) 和 (Y,Y_0), 我们有Abel群同构

$$[S^n(X),*\,;\,Y,y_0]\cong[S^{n-1}(X),*\,;\,\Omega(Y),0]\cong\cdots\cong[X,x_0\,;\,\Omega^n(Y),0].$$

证 分别记 U 和 V 的上乘法为 μ'_U 和 μ'_V, 为了区别分量空间, 我们把一点并空间 $X\vee X$ 记做 $X_1\vee X_2$, 其中每个 $X_i=X$. 于是我们有以下映射

$$\mu'_U\wedge\mu'_V\colon U\wedge V\to(U_1\vee U_2)\wedge(V_1\vee V_2)=(U_1\wedge V_1)\vee(U_1\wedge V_2)\vee(U_2\wedge V_1)\vee(U_2\wedge V_2).$$

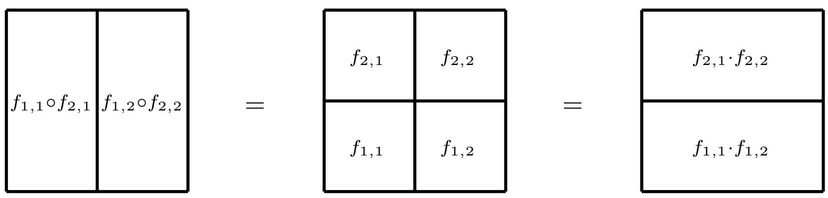
$\mu'_U\wedge 1_V$ 和 $1_U\wedge\mu'_V$ 为 $U\wedge V$ 上的两个不同的上乘法. 对于 $f,g\colon U\wedge V\to Z$, 分别记两种乘法为

$$f\cdot g=\Delta'_Z(f\vee g)(1_U\wedge\mu'_V),\ [f]\cdot[g]=[f\cdot g],\ f\circ g=\Delta'_Z(f\vee g)(\mu'_U\wedge 1_V),\ [f]\circ[g]=[f\circ g].$$

对任何四个映射 $f_{i,j}\colon U_i\wedge V_j\to Z$,

$$\begin{aligned}
&(f_{1,1}\cdot f_{1,2})\circ(f_{2,1}\cdot f_{2,2})\\
&=\Delta'_Z((f_{1,1}f_{2,1})\vee(f_{1,2}f_{2,2}))(\mu'_U\wedge 1_V)\\
&=\Delta'_Z(\Delta'_Z\vee\Delta'_Z)(f_{1,1}\vee f_{1,2}\vee f_{2,1}\vee f_{2,2})(\mu'_U\wedge\mu'_V)\\
&=\Delta'_Z((f_{1,1}\circ f_{2,1})\vee(f_{1,2}\circ f_{2,2}))(1_U\wedge\mu'_V)\\
&=(f_{1,1}\circ f_{2,1})\cdot(f_{1,2}\circ f_{2,2})
\end{aligned}$$

当取 $U=V=S^1=I/(0,1)$ 时, 该等式如下图示意,



这说明对任何 $f,g,h,k\colon U\wedge V\to Z$, $(f\cdot g)\circ(h\cdot k)=(f\circ h)\cdot(g\circ k)$ (等号而不是同伦号!). 因而对同伦类也有等式

$$([f]\cdot[g])\circ([h]\cdot[k])=([f]\circ[h])\cdot([g]\circ[k]).$$

取 $g=h=0$ 得, $[f]\circ[k]=[f]\cdot[k]$, 再取 $f=k=0$ 得, $[g]\circ[h]=[h]\cdot[g]$.

既然H群是群的概念在带基点空间的推广, 群作用的概念也可以推广. 为了方便, 以后定义中所有群作用都是左作用的, 所有的模都是左模. 所有定义都有相应的右作用和右模的概念, 就不赘述了.

定义2.3.10 设 $(G,*)$ 为H群, $\mu_G\colon (G{\times}G,(*,*))\to(G,*)$ 为 G 的乘法映射. 称 (Y,y_0) 为 $(G,*)$ 的H群模, 如果存在保基点模映射 (模乘法) $\mu_Y\colon (G{\times}Y,(*,y_0))\to(Y,y_0)$ 满足以下保基点同伦式.

(1) (乘法同伦结合性) $\mu_Y(1_G\times\mu_Y)\simeq\mu_Y(\mu_G\times 1_Y)$,

(2) (单位同伦存在性) $\mu_Y\,\varepsilon_Y\simeq 1_Y$, 其中 $\varepsilon_Y(y)=(*,y)$ 对任何 $y\in Y$.

对偶地, 设 $(G',*)$ 为H上群, $\mu'_{G'}\colon (G',*)\to(G'{\vee}G',*{\vee}*)$ 为 G' 的上乘法映射. 称 (X,x_0) 为 $(G',*)$ 的H上群模, 如果存在保基点上模映射 (上模乘法) $\mu'_X\colon (X,x_0)\to(G'\vee X,*{\vee}x_0)$ 满足以下保基点同伦式.

(1) (上乘法同伦结合性) $(1_{G'}\vee\mu'_X)\mu'_X\simeq(\mu'_{G'}\vee 1_X)\mu'_X$,

(2) (上单位同伦存在性) $\varepsilon'_X\mu'_X\simeq 1_X$, 其中 $\varepsilon'_X(g{\vee}x_0)=x_0$, $\varepsilon'_X(*{\vee}x)=x$ 对任何 $g\in G'$ 和 $x\in X$.

定理2.3.11 设 $(G,*)$ 为H群, (Y,y_0) 为 $(G,*)$ 的H群模, 模乘法为 μ_Y. 则对任何带基点拓扑空间 (X,x_0), 群 $[X,x_0;G,*]$以如下方式作用在集合 $[X,x_0;Y,y_0]$ 上. 对于 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 和 $u\colon (X,x_0)\to(G,*)$, 定义 $u\,f=\mu_Y(u\times f)\Delta_X$, $[u]\,[f]=[u\,f]$.

对偶地, 设 $(G',*)$ 为H上群, (X,x_0) 为 $(G',*)$ 的H上群模, 上模乘法为 μ'_X. 则对任何带基点拓扑空间 (Y,y_0), 群 $[G',*;Y,y_0]$以如下方式作用在集合 $[X,x_0;Y,y_0]$ 上. 对于 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 和 $u\colon (G',*)\to(Y,y_0)$, 定义 $u\,f=\Delta'_Y(u\vee f)\mu'_X$, $[u]\,[f]=[u\,f]$.

证 我们有

$$\begin{aligned}
&(u\,v)\,f\\
=\;&\mu_Y((\mu_G(u\times v)\Delta_X)\times f)\Delta_X\\
=\;&\mu_Y(\mu_G\times 1_Y)(u\times v\times f)(\Delta_X\times 1_Y)\Delta_X\\
\simeq\;&\mu_Y(1_G\times\mu_Y)(u\times v\times f)(1_Y\times\Delta_X)\Delta_X\\
=\;&\mu_Y(u\times(\mu_Y(v\times f)\Delta_X))\Delta_X\\
=\;&u\,(v\,f)
\end{aligned}$$

这说明 $([u]\,[v])\,[f]=[u]\,([v]\,[f])$, 群作用满足结合律.

$$0_Y\,f=\mu_Y(0_Y\times f)\Delta_X=\mu_Y\,\varepsilon_Y\,f\simeq 1_Y f=f$$

这说明 $[0_Y]\,[f]=[f]$. 所以以上作用为群作用.

对偶地结论完全对偶证明.

例2.3.12 带基点空间的锥空间 $(C(X),*)$ 为同纬空间 $(S(X),*)$ 的H上群模, 道路空间 $(P(X),0)$ 为回路空间 $(\Omega(X),0)$ 的H群模空间. 具体作用 μ' 和 μ 如下定义.

$$\text{对 } [x,t]\in\widetilde{C}(X),\quad \mu'([t,x])=\begin{cases}[2t,x]{\vee}* & 0\leqslant t\leqslant\frac12,\\ *{\vee}[2t{-}1,x] & \frac12\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\text{对 } \omega\in\Omega(X),\,\pi\in P(X),\quad \mu(\omega,\pi)(t)=(\omega{*}\pi)(t)=\begin{cases}\omega(2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac12,\\ \pi(2t{-}1) & \frac12\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

以上结构可以推广到映射锥和映射纤维空间上. 具体地, 保基点映射的映射锥空间 $(C_f,*)$ 为同纬空间 $(S(X),*)$ 的H上群模, 映射纤维空间 $(P_f,0)$ 为回路空间 $(\Omega(Y),0)$ 的H群模空间. 具体作用 μ'_f 和 μ_f 如下定义. μ'_f 限制在 $C(X)$ 上为 μ', 限制在 Y 上为恒等映射. $\mu_f(\omega,x,\pi)=(x,\omega{*}\pi)$ 对 $\omega\in\Omega(Y)$, $(x,\pi)\in P_f$.

由以上的上群模结构可知, 对任何带基点空间 (Z,z_0), $[C_f;Z]_*$ 上面有群 $[S(X);Z]_*$ 作用 ($[-]_*$ 为保基点同伦类). 那么这个群作用能够使我们对集合 $[C_f,Z]_*$ 有更进一步的认识么? 比如说, 由定理2.2.14我们有下面的恰当序列.

$$\cdots \longrightarrow [S(Y);Z] \xrightarrow{S(f)^*} [S(X);Z] \xrightarrow{q^*} [C_f;Z] \xrightarrow{i^*} [Y;Z] \xrightarrow{f^*} [X;Z],$$

如果右面的3个集合都是群, 那么不管是交换群还是非交换群, 集合 $[C_f;Z]_*$ 总有与 $\mathrm{im}q^* \times \ker i^*$ 的1-1对应. 那么在右面三个都不是群的情况下, 是不是有类似的1-1对应呢? 我们自然想到以下结论, $[C_f;Z]_*$ 关于 $[S(X);Z]$ 的作用满足任何一点的迷向子群都同胚于 $\mathrm{im}q^*$. 如果该结论成立, 那么 $[C_f;Z]_*$ 就和 $\mathrm{im}q^*\times\ker i^*$ 有1-1对应了. 实际上, 我们只知道 $[C_f;Z]_*$ 中零类的迷向子群同构于 $\mathrm{im}q^*$, 其它类的迷向子群无法确定. 所以当同伦类集合不是群时, 即使有群作用我们也得不出什么有用的结论.

2.4 同伦群的定义和基本性质

同伦群 $\pi_n(X,x_0)$ 是拓扑空间最重要的代数不变量之一, 它的特点是定义非常简单, 或者说很容易表面上理解, 但是代数结构非常难计算. 几何构造越简单的空间, 比如球面或者胞腔有限的CW复形, 其同伦群越复杂, 我们知道的越少. 而同伦群性质好的空间, 比如Eilenberg-Maclane空间, 又只是在理论上存在, 很难找到这类空间在实际问题当中的直接作用.

定义2.4.1 拓扑空间 X 的以 x_0 为基点的 n 阶同伦群 $(n>0)$ 定义为保基点映射同伦类集合

$$\pi_n(X,x_0)\cong[S^n,*;X,x_0].$$

特别地, $\pi_1(X,x_0)$ 称为 X 的以 x_0 为基点的基本群.

如果 A 为带基点空间 (X,x_0) 的含基点的子空间, 则空间偶 (X,A) 以 x_0 为基点的 n 阶 $(n\geqslant 2)$ 同伦群定义为

$$\pi_n(X,A,x_0)=[D^n,S^{n-1},*;X,A,x_0],$$

其中同伦类取保持基点不动的空间偶同伦, 乘法结构由 S^{n-1} 的上乘法 μ 的锥映射

$$C(\mu)\colon (D^n,S^{n-1},*)\to(D^n\vee D^n,S^{n-1}\vee S^{n-1},*),\quad C(\mu)(s\wedge x)=s\wedge\mu(x) \text{ 对任何 } s\in[0,1],\ x\in S^{n-1}$$

决定, 即对任何 $f,g\colon (D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,*)$, $[f][g]=[\Delta'_X(f\vee g)C(\mu)]$.

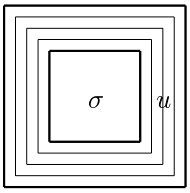
以下我们尽量避免从H(上)群模的角度描述同伦群的基本性质, 这是因为从这个角度抽象地看同伦群的基本性质并不比从几何图形具体地看带来更好的结果. 比如, $S^n=S^1\wedge\cdots\wedge S^1$, 则 S^1 的上乘法自然使 S^n 成为 S^1 上群模, 从而导出 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_n(X,x_0)$ 上的群作用. 但是从这个角度我们无法知道这个群作用是否满足分配律. 从上H群模作用的角度我们还很容易得到 $\pi_n(X,x_0)$ 在 $\pi_{n+k}(X,x_0)$ 上的作用, 但是当 $n>1$ 时, 这个作用是平凡的.

定义2.4.2 我们总是用例2.1.9中平化的 $[I^n,\partial(I^n);X,x_0]$ 中的加法和同伦类来代替 $\pi_n(X,x_0)$ 的加法和同伦类, 所以当 $n>1$ 时, $\pi_n(X,x_0)$ 为Abel群. 基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 一般地不是交换群.

基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_n(X,x_0)$ 上有群作用定义如下. 对于 $u\colon (I,\{0,1\}) \to (X,x_0)$ 和 $\sigma\colon (I^n,\partial(I^n)) \to (X,x_0)$, 令 $u{\cdot}\sigma\colon (I^n,\partial(I^n)) \to (X,x_0)$ 为

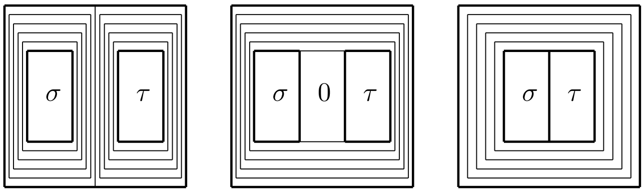
$$(u{\cdot}\sigma)(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} \sigma(2x_1-\frac{1}{2},\cdots,2x_n-\frac{1}{2}) & \text{如果 } \max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|\} \leqslant \frac{1}{2}, \\ u(2t-1) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|\} \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$u{\cdot}\sigma$ 的原象如下图示意,



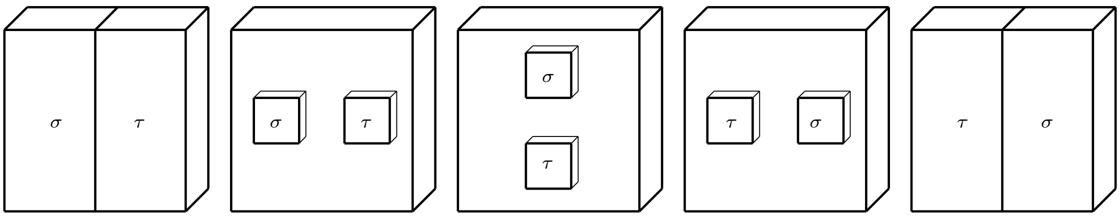
其中中间的方块中的字母 σ 表示将方块膨胀为整个 I^n 然后复合 σ 映到 X 中, 旁边的字母 u 表示每个细线方框中的所有点为都映到 $\mathrm{im}u$ 中的同一点. 同伦类的作用就是 $[u]{\cdot}[\sigma]=[u{\cdot}\sigma]$.

当 $n=1$ 时, $[u]{\cdot}[\sigma]=[u{*}\sigma{*}u^{-1}]=[u][\sigma][u]^{-1}$, 所以 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_1(X,x_0)$ 上的作用就是群的内自同构. 当 $n>1$ 时, 下图示意了 $(u{\cdot}\sigma){+}(u{\cdot}\tau)$ 和 $u{\cdot}(\sigma{+}\tau)$ 的同伦, 其中每个细线方框中的所有点为都映到 $\mathrm{im}u$ 中的同一点.



所以 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_n(X,x_0)$ 上的群作用满足分配律 $[u]{\cdot}([f]{+}[g])=[u]{\cdot}[f]{+}[u]{\cdot}[g]$.

我们总是用平化的 $[I^n,I^{n-1},J^n;X,A,x_0]$ 中的加法和同伦类来代替 $\pi_n(X,A,x_0)$ 的加法和同伦类, 其中 J_n 为 $I^n\backslash I^{n-1}$ 的闭包, 而 $[I^n,I^{n-1},J^n;X,A,x_0]$ 的加法就是例2.1.9中的 $+_i$, 只不过要求 $i<n$. 下图示意了当 $n=3$ 时, $\pi_3(X,A,x_0)$ 的加法的交换性,

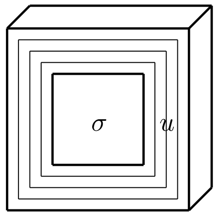


其中面朝我们的是底面 I^{n-1}. 所以当 $n>2$ 时, $\pi_n(X,A,x_0)$ 为Abel群. $\pi_2(X,A,x_0)$ 一般地不是交换群.

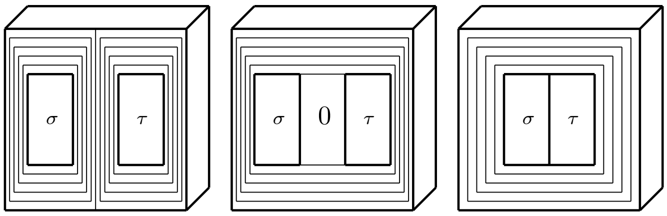
基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_n(X,A,x_0)$ 上有群作用定义如下. 对于 $u\colon (I,\{0,1\}) \to (X,x_0)$ 和 $\sigma\colon (I^n,I^{n-1},J^n) \to (X,A,x_0)$, 令 $u{\cdot}\sigma\colon (I^n,I^{n-1},J^n) \to (X,A,x_0)$ 为

$$(u{\cdot}\sigma)(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} \sigma(2x_1-\frac{1}{2},\cdots,2x_{n-1}-\frac{1}{2},2x_n) & \text{如果 } \max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|,|2x_n|\} \leqslant \frac{1}{2}, \\ u(2t-1) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|,|2x_n|\} \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$u{\cdot}\sigma$ 的原象如下图示意,



其中面朝我们的底面是 I^{n-1}. 下图示意了 $(u{\cdot}\sigma)+(u{\cdot}\tau)$ 和 $u{\cdot}(\sigma+\tau)$ 的同伦, 其中面朝我们的还是 I^{n-1}.



所以 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $\pi_n(X,A,x_0)$ 上的群作用满足分配律 $[u]{\cdot}([\sigma]+[\tau])=[u]{\cdot}[\sigma]+[u]{\cdot}[\tau]$. 这里的 $+$ 号也表示当 $n=2$ 时的非交换乘法.

在代数学中, 群 G 作用在Abel群 A 上是线性的, 即满足分配律 $g(a+b)=ga+gb$ 对所有 $g\in G$ 和 $a,b\in A$, 说明 A 为群环 $\mathbb{Z}(G)$-模. 这里群环 $\mathbb{Z}(G)$ 为由 G 生成的自由Abel群, 其上的元素形如 $\Sigma_i\, m_i g_i$, 其中 m_i 为整数, $g_i\in G$. 群环的乘法定义为 $(\Sigma_i\, m_i g_i)(\Sigma_j\, n_j h_j)=\Sigma_{i,j}\,(m_i n_j)(g_i h_j)$. 群环 $\mathbb{Z}(G)$-模又称为 G 群模.

定理2.4.3 设 u 为连接 x_1 到 x_2 的一条道路. 记 $[x_1,u,x_2]$ 为所有以 x_1 为起点, 以 x_2 为终点的与 u 相对 $\{0,1\}$ 同伦的道路构成的道路相对同伦类. 我们有导出的群同构

$$[x_1,u,x_2]_\pi\colon \pi_n(X,x_2)\to\pi_n(X,x_1)$$

定义为 $[x_1,u,x_2]_\pi[\sigma]=[u{\cdot}\sigma]$, 其中 $u{\cdot}\sigma$ 的定义形同定义2.4.2, 如下

$$(u{\cdot}\sigma)(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\sigma(2x_1-\frac{1}{2},\cdots,2x_n-\frac{1}{2}) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|\}\leqslant\frac{1}{2},\\ u(2t-1) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|\}\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

特别地, 当 $x_1=x_2$ 时, $[x_1,u,x_2]_\pi[\sigma]$ 就是定义2.4.2中的群作用 $[u]{\cdot}[\sigma]$.

群同构 $[x_1,u,x_2]_\pi$ 满足以下性质.

(1) 常值映射导出恒等同构, 即 $[x_0,0,x_0]_\pi=1_{\pi_n(X,x_0)}$.

(2) 连接道路类导出的同构为导出同构的复合, 即 $([x_1,u{*}v,x_3])_\pi=[x_1,u,x_2]_\pi[x_2,v,x_3]_\pi$.

我们还有导出的群同构

$$[x_1,u,x_2]_\pi\colon \pi_n(X,A,x_2)\to\pi_n(X,A,x_1)$$

定义为 $[x_1,u,x_2]_\pi[\sigma]=[u{\cdot}\sigma]$, 其中 $u{\cdot}\sigma$ 的定义形同定义2.4.2, 如下

$$(u{\cdot}\sigma)(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\sigma(2x_1-\frac{1}{2},\cdots,2x_{n-1}-\frac{1}{2},2x_n) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|,|2x_n|\}\leqslant\frac{1}{2},\\ u(2t-1) & \text{如果 } t=\max\{|2x_1-1|,\cdots,|2x_n-1|,|2x_n|\}\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

特别地, 当 $x_1=x_2$ 时, $[x_1,u,x_2]_\pi[\sigma]$ 就是定义2.4.2中的作用 $[u]{\cdot}[\sigma]$.

(1) 常值映射导出恒等同构, 即 $[x_0,0,x_0]_\pi=1_{\pi_n(X,A,x_0)}$.

(2) 连接道路类导出的同构为导出同构的复合, 即 $([x_1,u{*}v,x_3])_\pi=[x_1,u,x_2]_\pi[x_2,v,x_3]_\pi$.

证 定义2.4.2中的图所示意的回路u的结果对本定理一般的u也成立.

定理2.4.4 设$f\colon X\to Y$为映射, 则f导出群同态$f_*\colon \pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,f(x_0))$如下定义. 对于任何保基点映射$u\colon (S^n,*)\to(X,x_0)$, 定义$f_*([u])=[fu]$. 导出的群同态满足以下性质.

(1) 常值映射导出零同态, 即$(0)_*([u])=[0]$对任何$[u]\in\pi_n(X,x_0)$.

(2) 恒等映射导出恒等同态, 即$(1_X)_*=1_{\pi_n(X,x_0)}$.

(3) 映射的复合导出同态的复合, 即$(fg)_*=f_*g_*$.

(4) f_*为群模同态, 即对$[u]\in\pi_1(X,x_0)$和$[\sigma]\in\pi_n(X,x_0)$, $f_*([u]\cdot[\sigma])=f_*([u])\cdot f_*([\sigma])$.

(5) 同伦的映射导出本质相同的同态, 即如果存在连接f到g的同伦$H\colon I\times X\to Y$, 记连接$f(x_0)$到$g(x_0)$的道路ω为$\omega(t)=H(t,x_0)$, 则$[f(x_0),\omega,g(x_0)]_\pi(g_*)=f_*$.

类似地, 设$f\colon (X,A)\to(Y,B)$为映射偶, 则f导出群同态$f_*\colon \pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Y,B,f(x_0))$如下定义. 对于任何保基点映射偶$u\colon (D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,x_0)$, 定义$f_*([u])=[fu]$. 则导出的群同态满足以下性质.

(1) 常值映射导出零同态, 即$(0)_*([u])=[0]$对任何$[u]\in\pi_n(X,A,x_0)$.

(2) 恒等映射导出恒等同态, 即$(1_X)_*=1_{\pi_n(X,A,x_0)}$.

(3) 映射的复合导出同态的复合, 即$(fg)_*=f_*g_*$.

(4) f_*为群模同态, 即对$[u]\in\pi_1(X,A,x_0)$和$[\sigma]\in\pi_n(X,A,x_0)$, $f_*([u]\cdot[\sigma])=f_*([u])\cdot f_*([\sigma])$.

(5) 同伦的映射导出本质相同的同态, 即如果存在连接f到g的同伦$H\colon I\times X\to Y$, 记连接$f(x_0)$到$g(x_0)$的道路ω为$\omega(t)=H(t,x_0)$, 则$[f(x_0),\omega,g(x_0)]_\pi(g_*)=f_*$.

证 (1), (2), (3), (4)直接验证. 现证(5). 只需证$n>1$的情形. 设$\sigma\colon (I^n,\partial(I^n))\to(X,x_0)$为偶映射, 则连接$f\sigma$到$[f(x_0),\omega,g(x_0)]_\pi(g\sigma)$的同伦$\widetilde{H}$由如下定义.

$$\widetilde{H}(s,u)=\begin{cases}\omega(2-2t) & \text{如果 } \frac{2-s}{2}\leqslant t=\max\{|2u_1-1|,\cdots,|2u_n-1|\}\leqslant 1,\\[2ex] H(s,\sigma(\frac{2}{2-s}u)) & \text{如果 } 0\leqslant t=\max\{|2u_1-1|,\cdots,|2u_n-1|\}\leqslant \frac{2-s}{2},\end{cases}$$

其中$u=(u_1,\cdots,u_n)\in I^n$.

空间偶情形类似.

定理2.4.5 如果$X\simeq Y$, 则对任何$n\geqslant 1$, $x_0\in X$和同伦等价映射f, 我们有群同构$\pi_n(X,x_0)\cong\pi_n(Y,f(x_0))$. 特别地, 当$n>1$时, 为$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,f(x_0))$群模同构.

如果$(X,A)\simeq(Y,B)$, 则对任何$n\geqslant 2$, $x_0\in X$和同伦等价映射f, 我们有群同构$\pi_n(X,A,x_0)\cong\pi_n(Y,B,f(x_0))$. 特别地, 当$n>2$时, 为$\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,f(x_0))$群模同构.

证 假设g为f的同伦等价逆, 由$gf\simeq 1_X$和定理2.3.18可知存在道路ω使得

$$[x_0,\omega,gf(x_0)]_\pi(gf)_*=1_{\pi_n(X,x_0)},$$

这说明$(gf)_*$为同构, 所以f_*为单射. 同样$(fg)_*$也为同构, $g_*\colon \pi_n(Y,f(x_0))\to\pi_n(X,gf(x_0))\cong\pi_n(X,x_0)$也为单射. 所以$f_*\colon \pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,f(x_0))$为同构.

空间偶情形类似.

定理2.4.6 $\pi_n(X\times Y,(x_0,y_0))=\pi_n(X,x_0)\times\pi_n(Y,y_0)$.

证 定理2.1.5的推论.

定理2.4.7 对于H群 $(G,*)$, $\pi_n(G,*)$ 上有两种乘法, 一种由 S^n 的H上群结构导出, 一种由 G 的H群结构导出. 则这两种乘法导出相同的同伦群结构并且 $\pi_n(G,*)$ 为Abel群对所有 $n=1,2,\cdots$.

证 定理2.3.8的推论.

定理2.4.8 对于保基点映射 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$, 我们有以下同伦群的长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_{n+1}(P_f,*)\xrightarrow{p_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{f_*}\pi_n(Y,y_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(P_f,*)\xrightarrow{p_*}\cdots$$

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_2(P_f,*)\xrightarrow{p_*}\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{f_*}\pi_1(Y,y_0),$$

其中 j_*,f_* 都为 $\pi_1(X,x_0)$ 群模同态, 而 $\pi_n(P_f)$ 的 $\pi_1(X,x_0)$ 群模作用如下定义. 设 $u\colon (I,\{0,1\})\to(X,x_0)$ 为道路, 则存在道路 $\widetilde{u}\colon (I,\{0,1\})\to(P_f,*)$ 为 $\widetilde{u}(t)=(u(t),fu_t)\in P_f$, $u_t(s)=u(st)$. 于是可以定义 $\widetilde{u}\cdot\sigma$ 如定义2.4.2. 所以同伦类的作用为 $[u]\cdot[\sigma]=[\widetilde{u}\cdot\sigma]$. 以上序列是自然的, 即由映射的同伦交换图

$$\begin{array}{ccc}(X,x_0) & \xrightarrow{f} & (Y,y_0)\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow\\ (U,u_0) & \xrightarrow{g} & (V,v_0)\end{array}$$

得到恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{n+1}(P_f,*) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "r_*"'] & \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_n(Y,y_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_n(P_f,*) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "r_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{n+1}(P_g,*) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(U,u_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(V,v_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(P_g,*) \arrow[r, "p_*"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

其中 $r(x,\tau)=(p(x),q\tau)$ 对 $(x,\tau)\in P_f$.

证 取定理2.2.14中的关于映射纤维的长恰当序列中的 W 取为 S^1, 再将 $[W,\Omega^n(-)]$ 用同构的 $[S^n(W);(-)]$ 就得到本定理的长恰当序列.

定理2.4.9 对于带基点空间偶 (X,A,x_0), 我们有以下同伦群的长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_{n+1}(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial_*}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial_*}\cdots$$

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_2(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial_*}\pi_1(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_1(X,x_0),$$

其中 $\partial_*([f])=[f|_{S^{n-1}}]$, j_*,i_* 都为 $\pi_1(A,x_0)$ 群模同态. 以上序列是自然的, 即由保基点偶映射 $f\colon (X,A,x_0)\to(Y,B,y_0)$ 就得到恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{n+1}(X,A,x_0) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(X,A,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "j_*"] & \pi_{n+1}(Y,B,y_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(B,y_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(Y,y_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(Y,B,y_0) \arrow[r, "p_*"] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

证 可以由定义直接验证, 但比较麻烦. 取定理2.4.4中的 f 为内射 $i\colon A\to X$ 就得到了以下的恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_{n+1}(P_i,*)\xrightarrow{p_*}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(P_i,*)\xrightarrow{p_*}\cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \pi_1(P_i,*) \xrightarrow{p_*} \pi_1(A,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X,x_0),$$

我们只需证明 $\pi_{n+1}(X,A,x_0)\cong\pi_n(P_i,*)$ 对所有 $n\geqslant 1$即可.

对于 $f\colon S^n\to P_i$, $f(u)=(g_1(u),g_2(u))$, 其中 $g_1\colon S^n\to A$, $g_2\colon S^n\to P(X)$. 由于 $g_2(u)(0)=x_0$ 对所有 $u\in S^n$, g_2导出 $\hat{g}_2\colon (C(S^n),*)\to(X,x_0)$ 为 $\hat{g}_2(s\wedge u)=g_2(u)(s)$ 对所有 $s\wedge u\in C(S^n)$. 而 $g_2(u)(1)=g_1(u)$ 对所有 $u\in S^n$ 蕴含 $\hat{g}_2|_{1\wedge S^n}=g_1$. 所以 $\hat{g}_2\colon (CS^n\cong D^{n+1},S^n,*)\to(X,A,*)$ 为保基点空间偶映射. 显然以上构造可逆, 所以对应$\phi(f)=\hat{g}_2$ 为 $(P_i,*)^{(S^n,*)}$ 到 $(X,A,x_0)^{(D^{n+1},S^n,*)}$ 的1-1对应. 而 $\phi(\Delta'_X(f\vee f')\mu)=\Delta'_X(\phi(f)\vee\phi(f'))C\mu$ 蕴含该对应导出 $\pi_n(P_i,*)$ 到 $\pi_{n+1}(X,A,x_0)$ 的群同构.

定理2.4.10 如果对于道路连通的空间 X, $\pi_1(X,x_0)$ 为交换群, 则非保基点同伦类集合 $[S^1;X]$ 也有群结构如下定义. 对任何回路$\sigma,\tau\colon S^1\to X$, 记 $x_1=\sigma(*)$, $x_2=\tau(*)$, 其中 $*$ 为 S^1 的基点. 任取 X 上两条以 x_0 为起点, 分别以 x_1 和 x_2 为终点的道路道路 u 和 v. 则定义 σ 和 τ 作为非保基点映射的和为 $u*\sigma*u^{-1}*v*\tau*v^{-1}$. 按照这个加法 $[S^1;X]$ 构成群并且 $[S^1;X]\cong\pi_1(X,x_0)$.

如果对于道路连通的空间 X 和 $n>1$, $\pi_1(X,x_0)=0$ (称为单连通), 则非保基点同伦类集合 $[S^n;X]$ 也有群结构如下定义. 对任何映射 $\sigma,\tau\colon S^n\to X$, 记 $x_1=\sigma(*)$, $x_2=\tau(*)$, 其中 $*$ 为 S^n 的基点. 任取 X 上两条以 x_0 为起点, 分别以 x_1 和 x_2 为终点的道路道路 u 和 v. 则定义 σ 和 τ 作为非保基点映射的和为 $u\cdot\sigma+v\cdot\tau$, 其中保基点映射 $u\cdot\sigma$ 和 $v\cdot\tau$ 如定义2.4.2. 按照这个加法 $[S^n;X]$ 构成群并且 $[S^n;X]\cong\pi_n(X,x_0)$.

证 显然 $u*\sigma*u^{-1}$ 的非保基点同伦类不依赖于 u 的选取, 所以加法合理. 由于 $\pi_1(X,x_0)$ 为交换群, 所以即使 u 为回路, 我们也有保基点同伦 $u*\sigma*u^{-1}\simeq u$. 这说明群同构 $[S^1;X]\cong\pi_1(X,x_0)$ 也与 u 的选取无关.

当 $n>1$ 时, 完全类似.

2.5 映射度

$\pi_n(S^n,*)$ 是最早知道的同伦群. 由于球面满足定理2.4.10的条件, 所以 $\pi_n(S^n,*)\cong[S^n;S^n]$. 非保基点同伦类 $[S^n;S^n]$ 可由映射度刻画, 而映射度早在被同伦论定义以前就已经在数学中的许多方面出现了.

定理2.5.1 对于 $n\geqslant 0$, 所有 S^n 的自同胚映射按照同伦关系分为两类, 换句话说, 所有 S^n 的自同胚映射在 $[S^n;S^n]$ 中只包含两类. 一类与恒等映射同伦, 记为1, 令另一类记为 -1, 包含以下自同胚映射

$$\phi_i(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n+1})=(x_1,\cdots,-x_i,\cdots,x_{n+1}),$$

$$\phi_{i,j}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_{n+1})=(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_{n+1}).$$

按照$[S^n;S^n]$ 的加法, 我们有 $1+(-1)=(-1)+1=0$, 其中 0 为常值映射所在的同伦类.

证 以下证明中, 总是把可逆矩阵A 看成线性空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换, 把 $\mathbb{R}^n$ 中的向量看成列向量矩阵, 所以线性变换A就是对应$x\to Ax$. 则可逆线性变换A可以扩张为一点紧化空间 $(\mathbb{R}^n)^*$ 的自同胚映射 A^*, 定义为 $A^*(x)=Ax$ 如果 $x\in\mathbb{R}^n$, $A^*(*)=*$. 不区分$(\mathbb{R}^n)^*$ 和 S^n. 先证明一个引理. 如果 $|A|>0$, 则 $[A^*]=1$; 如果 $|A|<0$, 则 $[A^*]=-1$.

假设含参变量矩阵$H(t)=(h_{i,j}(t))$ 为 $GL(n)$ 中连接 A 到 B 的道路, 即 $H(0)=A$, $H(1)=B$. 则含参变量的自同胚$H^*(t)=(H(t))^*$ 为连接 A^* 到 B^* 的保基点同伦. 而可逆矩阵空间 $GL(n)$ 有两个道路连通分

支. 由此可知, 如果 $|A|>0$, 则 $A^*\simeq 1_{(\mathbb{R}^n)^*}$; 如果 $|A|<0$, 则 A^* 同伦于任一个$l_i^*,l_{i,j}^*$, 其中$\mathbb{R}^n$ 的线性变换$l_i,l_{i,j}$ 定义为

$$l_i(x_1\cdots,x_i,\cdots,x_n)^T=(x_1,\cdots,-x_i,\cdots,x_n)^T,$$

$$l_{i,j}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)^T=(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)^T.$$

不难直接构造$(\mathbb{R}^n)^*$与S^n 的同胚将无穷远点映为南极点使得 $l_i^*=\phi_i$, $l_{i,j}^*\simeq\phi_{i,j}$, 其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$. 而 $\phi_i\sim\phi_{n+1}$ 和 $\phi_{i,j}\simeq\phi_{i,n+1}$可以由复合旋转映射得到. 引理得证.

设 $f\colon(\mathbb{R}^n)^*\to(\mathbb{R}^n)^*$ 为自同胚映射. 我们可以假设 $f(0)=0$, $f(*)=*$, 否则通过复合S^n 的同痕映于恒等映射的映射得到. 由于我们讨论的是映射的同伦类, 所以由逼近定理我们可以假设 f 为光滑映射, 即 f在 0点附近有表达式$f(x_1,\cdots,x_n)=(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n(x_1,\cdots,x_n))$, 其中 y_i 为光滑函数. 记矩阵A 为0点的Jacobi 矩阵$(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$, 则对任何 $x\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$A^*x=\lim_{r\to\infty}\hat{f}_r(x),\quad \hat{f}_r(x)=rf(\tfrac{1}{r}x),\quad \hat{f}_r(*)=*.$$

显然只要$r>0$, 则 $\hat{f}_r\simeq f$. 所以 $\lim_{r\to\infty}\hat{f}_r\simeq f$, 即 $A^*\simeq f$. 所以 $[f]=\pm1$.

当 $n=1$时, ϕ_2就是例2.1.8中的 τ', 所以 $1+\phi_2\simeq\phi_2+1\simeq 0$已经在2.1.8中证明了. 不难证明由 $f+g\sim h$可推出 $\widetilde{S}(f)+\widetilde{S}(g)\simeq\widetilde{S}(h)$. 由此可知$1+\phi_2\sim\phi_2+1\simeq 0$ 对所有 n 都成立. 所以 $1+(-1)=(-1)+1=0$.

定义2.5.2 设 $f\colon M\to S^n$ 为n维定向微分紧流形 M(可带边, $n>0$)到标准S^n 的光滑映射. 由微分拓扑的知识可知一定存在 f 的非退化点 y, 即 $f^{-1}(y)$ 为有限个点非退化点 $x_1,\cdots,x_m$, 其中非退化点的定义如下. 设 $f(x)=y$, $(\mathbb{R}^n,\phi)$ 为满足 $\phi(0)=x$ 的参照系, $(\mathbb{R}^n,\psi)$ 为满足 $\psi(0)=y$ 的参照系. 称 x 为非退化点, 如果 $\psi^{-1}f\phi_k$在 0点的Jacobi矩阵可逆. 定义 f在 x_k点的符号为 $s_f(x_k)$ 如下. 令 $(\mathbb{R}^n,\psi)$ 为满足 $\psi(0)=y$ 的定向参照系, $(\mathbb{R}^n,\phi_k)$ 为满足 $\phi_k(0)=x_k$ 的定向参照系. 如果 $\psi^{-1}f\phi_k$在 0点的Jacobi行列式大于 0, 则定义 $s_f(x_k)=1$. 否则定义 $s_f(x_k)=-1$. 定义 f在非退化点 y 的度数为 $\deg_f(y)=\Sigma_{k=1}^m s_f(x_k)$.

设 K 为n维定向单纯紧流形(可带边, $n>0$), L 为 S^n 的一个标准定向剖分, $f\colon K\to L$ 为单纯映射. 对于 L 的任一n-单形 $\tau=\{y_0,\cdots,y_n\}$, 记 τ 的重心点 $\frac{1}{n}(y_0+\cdots+y_n)$ 为 y, 则 $f^{-1}(y)$只能为有限个点 $x_1,\cdots,x_m$, 分别为 K 的单形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 的重心点. 定义 f在单形 σ_k 的符号为 $s_f(\sigma_k)$ 如下. 设 $\sigma_k=\{v_0,\cdots,v_n\}$, $f(v_k)=y_k$. 如果形式单形 $\{v_0,\cdots,v_n\}$ 和 $\{y_0,\cdots,y_n\}$ 定向相同, 则定义 $s_f(\sigma_k)=1$. 否则定义 $s_f(\sigma_k)=-1$. 定义 f在单形 τ 的度数为 $\deg_f(\tau)=\Sigma_{k=1}^m s_f(\sigma_k)$.

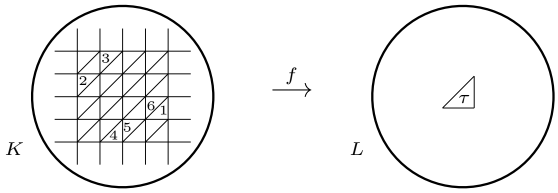
定理2.5.3 对于任何 n维定向微分或者单纯流形 M(可带边, $n>0$), 我们有集合的1-1对应

$$[M;S^n]\cong\mathbb{Z}.$$

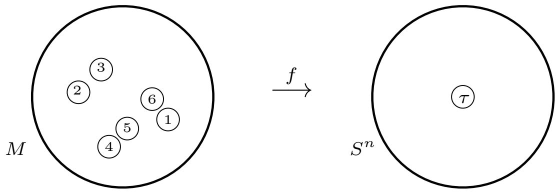
具体地, 对于光滑映射 f, 任取一个f 的非退化点 y, 对于单纯映射 f, 任取 S^n 的剖分上的一个n-单形 τ, 则集合的对应$[f]\to\deg_f(y)$ 和 $[f]\to\deg_f(\tau)$不依赖于 y 和 τ 的选取, 为由 $[M;S^n]$ 到 $\mathbb{Z}$ 的1-1对应. 由此可以定义 f 的映射度为 $\deg(f)=\deg_f(y)$或者$\deg(f)=\deg_f(\tau)$.

证 首先证明 $M=S^n$ 的情形.

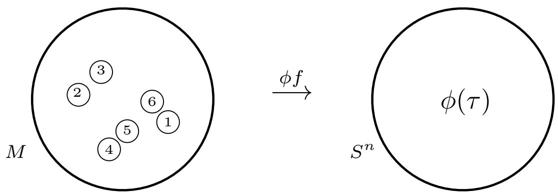
单纯情形. 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_m$ 为所有满足 f 限制在其上为到 τ 的同胚的 n-单形. σ_k以及单纯映射 f 的关系如下图左半部分的图形示意. 为了作图方便, 我们把 σ_k简记为 k, 取 $m=6$.



光滑情形. 如果$f(x)=y$并且x点非退化, 则存在y的邻域O和x的邻域U, 使得f限制在U上为到O的同胚映射. 由此可知, 如果y为横截点, $f^{-1}(y)=\{x_1,\cdots,x_m\}$, 则存在$y$的同胚于$D^n$的小圆盘$\tau$和$x_i$的同胚于$D^n$的小圆盘$\sigma_i$, 满足$\sigma_i\cap\sigma_j=\emptyset$对$i\neq j$, 并且$f$限制在每个$\sigma_i$上为到$\tau$的同胚映射. 如下图示意.



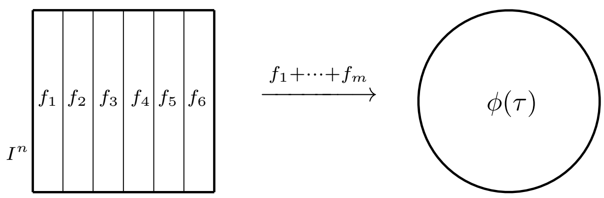
显然通过用单形内部更小的一个单形取代单形, 再不区分单形和圆盘, 我们可以将单纯情形当作以上光滑的情形. 类似习题2.1.2中ϕ_ε的构造, 我们有S^n的一个同伦于恒等映射映射ϕ, 它满足将所有τ以外的点, 包括τ的边界, 点都压缩为基点, ϕ限制在τ的内部为到$S^n\backslash *$的同胚映射. 则复合映射ϕf如下图所示,



其中ϕf将所有σ_k之外的点, 包括σ_k的边界, 都映到基点. ϕf限制在每个σ_k的内部都是到$S^n\backslash *$上的同胚映射. 记ϕ_k为ϕf在σ_k的限制映射, $q_k\colon \sigma_k\to\sigma_k/\partial(\sigma_k)$为商映射. 不区分$\sigma_k/\partial(\sigma_k)$和$S^n$. 则我们得到$f_k$满足以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_k & \xrightarrow{\phi_k} & S^n \\
{\scriptstyle q_k}\downarrow & & \| \\
S^n & \xrightarrow{f_k} & S^n
\end{array}$$

则ϕf显然(见例2.1.9)同伦于如下图示意的保基点映射$f_1+\cdots+f_m$.



其中把$f_1+\cdots+f_m$看作$(I^n,\partial(I^n))$到$(S^n,*)$的映射. 显然$[f_k]=1$如果保持定向, 否则$[f_k]=-1$. 这说明$\deg(f)=\deg_f(y)$的定义不依赖于y的选取, 即如果$\deg(f)=\deg(g)$, 则$[f]=[g]$.

如果$\deg(f)\neq\deg(g)$, 则通过计算一些简单的代数不变量, 比如导出的同调群同态等, 就可以很容易证明$f\not\simeq g$了.

$[M;S^n]$上没有加法. 任取一个D^n到$M\backslash\partial(M)$的嵌入i. 记$f\colon(S^{n-1},*)\to(M\setminus(i(D^n\backslash S^{n-1})),x_0)$为$i$在$S^{n-1}$上的限制映射. 则显然$(M,x_0)\cong(C_f,x_0)$. 由例2.3.12可知$(M,x_0)$为$(S^n,*)$上群模. 所以$\pi_n(M,x_0)$为$\pi_n(S^n,*)$群模. 以上$M=S^n$的证明自然可以推广为$M$的情形, 说明$\pi_n(M,x_0)$作为群模与$\pi_n(S^n,*)$同构.

定理2.5.4 对于保基点映射 $f,g\colon (S^n,*)\to(S^n,*)$, 按照$\pi_n(S^n,*)$的加法, 我们有

$$\deg(f+g)=\deg(f)+\deg(g),\quad \deg(S(f))=\deg(f).$$

对于非保基点映射 $f,g\colon S^n\to S^n$, 我们有

$$\deg(fg)=\deg(f)\deg(g),\quad \deg(\widetilde{S}(f))=\deg(f).$$

所以对应$[f]\to\deg(f)$导出 $[S^n;S^n]$到整数环$\mathbb{Z}$的环同构, 其中 $[S^n;S^n]$ 的乘法定义为$[f][g]=[fg]$, 加法如定理2.3.22.

证 不难由定义直接验证.

令人意外的是我们非常熟悉的积分竟然可以计算光滑映射的映射度. 由于严格的证明需要微分几何的外微分式的积分的概念和Stokes公式, 所以下例中定义和结果都是直观地解释的.

设M和N为光滑n维可定向闭流形, 其上各有测度都记为μ(由黎曼微分结构决定). 对于光滑映射$f\colon M\to N$和任何点$x\in M$, f在x点的导数$f'(x)$定义为极限

$$f'(x)=\lim_{\lambda(O)\to x}\frac{\mu(f(O))}{\mu(O)},$$

这里$\lambda(O)$为x的邻域O的直径, 就是O上任两点间距离的上确界, $\mu(f(O))$为有向测度. 具体地, 设黎曼参照系$(\mathbb{R}^n,\phi,G)$和$(\mathbb{R}^n,\psi,H)$满足$\phi(0)=x$, $\psi(0)=f(x)$, $(\psi^{-1}f\phi)(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$, 则$f'(x)$就是$\psi^{-1}f\phi$在$0$点的Jacobi行列式, 即

$$f'(x)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_n}\end{vmatrix}.$$

这里需要注意的是矩阵$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$是依赖于黎曼参照系的选取的, 但它的行列式却不依赖于参照系的选取.

由Stokes公式可以证明导函数的积分$\int_M f'd\mu$为同伦不变量, 即如果$f\simeq g$, 则$\int_M f'd\mu=\int_M g'd\mu$. 对任何光滑映射$f\colon M\to S^n$, $\int_M f'd\mu=\deg(f)\int_{S^n}d\mu$.

特别地, 取$M=S^1$, 其中S^1看作复平面上的单位圆. 则任一映射$f\colon S^1\to S^1$都唯一对应一个提升函数$\theta\colon I\to\mathbb{R}$满足$f(e^{2\pi ti})=e^{2\pi\theta(t)i}$, $\theta(0)=0$. 由于$e^{2\pi\theta(1)i}=e^{2\pi i}=1$, 所以存在整数$n$使得$\theta(1)=n$. 由定义, $2\pi\theta'(t)$为f在点$e^{2\pi ti}$处的导数. 于是$\int_{S^1}f'd\mu=2\pi\int_0^1\theta'(t)dt=2\pi n$. 这说明$\deg(f)=(\int_{S^1}f'd\mu)/(\int_{S^1}d\mu)=\frac{2\pi n}{2\pi}=n$. 特别地, 取$f(z)=z^n$, 则$\deg(f)=n$.

例2.5.5 设复函数f在0点附近解析并且无零点, 即存在$d>0$, 使得对任何$|z|<d$, $z\neq 0$, f在z点可微并且$f(z)\neq 0$. 则f在0点的缠绕数

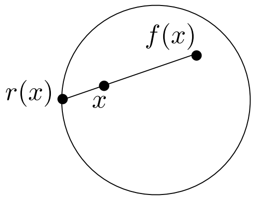
$$l(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

就为一映射度$\deg(f_\varepsilon)$, 其中对于$0<\varepsilon<d$, $f_\varepsilon\colon S^1\to S^1$定义为$f_\varepsilon(z)=\frac{f(\varepsilon z)}{|f(\varepsilon z)|}$.

由复分析知识可知存在$n\in\mathbb{Z}$使得$f=z^ng$, 其中g为0点附近非退化解析函数, 即$g=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$并且$a_0\neq 0$. 由定理2.3.8可知由复数乘法导出的$\pi_1(S^1,*)$的乘法与通常的基本群的加法一致, 所以$\deg(f_\varepsilon)=\deg((z^n)_\varepsilon)+\deg(g_\varepsilon)$. 而$\lim_{\varepsilon\to 0}g_\varepsilon=0$, 其中$0$代表$S^1$到$\frac{a_0}{\|a_0\|}$的常值映射. 所以$\deg(g_\varepsilon)=\deg(0)=0$. 由定义$(z^n)_\varepsilon=z^n$. 所以$\deg(f_\varepsilon)=\deg(z^n)=n$. 而由定义$n=l(f)$.

定理2.5.6 (Brower不动点定理) D^n到自身的映射一定有不动点.

证 假设存在映射 $f\colon D^n \to D^n$ 满足 $f(x) \neq x$ 对所有 $x \in D^n$, 则存在映射 $r\colon D^n \to S^{n-1} = \partial D^n$ 定义为 $r(x)$ 为由 $f(x)$指向x 的有向射线与S^{n-1} 的唯一交点. 如下图示意.



显然 r 满足 $r(x) = x$ 对所有 $x \in S^{n-1}$, 即 r 限制在 S^{n-1} 上为恒等映射. 这说明 S^{n-1} 为 D^n 的收缩核, 即 $ri = 1_{S^{n-1}}$, 其中 $i\colon S^{n-1} \to D^n$ 为内射. 这不可能, 因为由于 D^n可缩, 所以 $i \simeq 0$, 进而 $1_x = ri \simeq 0$. 而 1_x 和 0映射的映射度不同.

定理2.5.7 (代数学基本定理) 阶数大于 0 的复系数多项式一定有根.

证 假设存在多项式$f(x) = a_0{+}a_1z{+}\cdots{+}a_nz^n$ $(n > 0)$满足 $f(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$. 则由此得到一族映射 $g_t\colon S^1 \to S^1$ 定义为(S^1 看成复平面上的单位圆)

$$g_t(z) = \frac{f(tz)}{\|f(tz)\|}, \quad g_t(e^{2\pi is}) = \frac{a_0{+}a_1te^{2\pi is}{+}\cdots{+}a_nt^ne^{2\pi ins}}{\|a_0{+}a_1te^{2\pi is}{+}\cdots{+}a_nt^ne^{2\pi ins}\|}.$$

由于存在连接 g_0 到 g_1 的同伦 $H(u,s) = g_u(s)$, 所以 $g_0 \simeq g_1$. 记 $g_{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} g_t$. 由于存在连接 $g_{+\infty}$ 到 g_1 的同伦 $G(u,s) = g_{\frac{1}{u}}(s)$, 所以 $g_1 \simeq g_{+\infty}$. 所以 $g_0 \sim g_{+\infty}$. g_0 为常值映射, 映射度为0, 而 $g_{+\infty}$ 为幂映射 $z \to z^n$在单位圆上的限制, 映射度为 n. 这两类不是同一类. 矛盾!

球面的不交并$\vee_\alpha S^n_\alpha$ 的映射度与群的直(积)和群有关, 而直和(积)群就是集合的对应扩张性和对应提升性在群上的平行概念. 具体定义如下.

对于群族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在同构意义上唯一的直和群 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 和内射同态族$\{i_\alpha\colon G_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下同态的扩张性. 对任何同态族$\{f_\alpha\colon G_\alpha \to G\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的扩张同态$f\colon \oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha \to G$ 满足$fi_\alpha = f_\alpha$ 对每个α. 对偶地, 存在同构意义上唯一的直积群 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 和投射同态族$\{p_\alpha\colon \Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \to G_\alpha$ 满足以下同态的提升性. 对任何同态族$\{f_\alpha\colon G \to G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 都存在唯一的提升同态$f\colon G \to \Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 满足$p_\alpha f = f_\alpha$ 对每个α.

对于直积群 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$, 不管$G_\alpha$是交换群还是非交换群, 其符号和定义都是一样的, 也就是说$\Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$作为集合就是集合族$\{G_\alpha\}$ 的直积集合, 群乘法定义为$(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}(h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (g_\alpha h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

只有对于Abel群族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 直和群还是用符号$\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 表示. 作为集合, $\oplus_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$并不是集合族$\{G_\alpha\}$ 的直和集合, 而是直积群 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 的子群, 由所有满足 $(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的分量元集合 $\{g_\alpha\}$ 中只有有限个不是 0 的元素构成. 所以只有 $g_{\alpha_1}, \cdots, g_{\alpha_n}$ 非零的直积群里的元素$(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$在直和群里就写成 $g_{\alpha_1}{+}\cdots{+}g_{\alpha_n}$.

对于非交换群族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 直和群用符号$*_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 表示. 作为集合, $*_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$既不是集合族$\{G_\alpha\}$ 的直和集合, 也不是直积集合 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 的子集. $*_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 的一般元素形式如下$g_1{*}\cdots{*}g_m$, 其中每个g_i属于某个G_α. $*_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 的乘法满足以下关系

$$(g_1{*}\cdots{*}g_m)(h_1{*}\cdots{*}h_n) = \begin{cases} g_1{*}\cdots{*}g_m{*}h_1{*}\cdots{*}h_n & g_m \in G_\alpha,\ h_1 \in G_\beta,\ \alpha \neq \beta, \\ g_1{*}\cdots{*}g_{m-1}{*}(g_mh_1){*}h_2{*}\cdots{*}h_n & g_m, h_1 \in G_\alpha. \end{cases}$$

例2.5.8 记任意个S^1 的一点并空间为$\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha$, 其中每个$S^1_\alpha\cong S^1$. 对于$\beta\in\Lambda$, 记$i_\beta\colon S^1\to\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha$ 为到分量空间 S^1_β 的内射, 显然i_β也可以看成$(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha,*)$上的一个保基点回路. 则我们有引理: 任何映射$f\colon(S^1,*)\to(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha,*)$一定保基点同伦于某个连接回路

$$i_{\beta_1}^{\pm1}*\cdots*i_{\beta_n}^{\pm1},\quad \beta_i\in\Lambda,$$

其中i_β^{-1}为i_β的逆回路, 允许$\beta_i=\beta_j$对$i\neq j$. 证明方法完全类似定理2.5.3. 由单纯逼近定理, 我们可以假设f为一单纯映射. 在每一个S^1_α的剖分上取定一个1-单形σ_α. 记K^1为S^1的剖分中所有1-单形的集合. 首先定义对应$s_f\colon K^1\to\{0,i_\alpha^\pm\}_{\alpha\in\Lambda}$ (0代表常值映射)如下. 如果f把K^1的单形τ同向地同胚映到σ_α, 就定义$s_f(\tau)=i_\alpha$; 如果f把K^1的单形τ反向地同胚映到σ_α, 就定义$s_f(\tau)=i_\alpha^{-1}$; 否则就定义$s_f(\tau)=0$. 假设K^1从基点出发按照逆时针方向的1-单形为$\tau_1,\cdots,\tau_k$. 令ϕ为$\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha$到自身的同伦于恒等映射的映射, 满足限制在每个$S^1_\alpha$上将$\sigma_\alpha$的边缘和所有$S^1_\alpha\backslash\sigma_\alpha$的点都映到基点, 将$\sigma_\alpha$的内部同胚地映到$S^1_\alpha\backslash*$. 则$\phi f\simeq s_f(\tau_1)*\cdots*s_f(\tau_k)$. 省略$s_f(\tau_i)$中的0, 就得到以上形如$i_{\beta_1}^{\pm1}*\cdots*i_{\beta_n}^{\pm1}$ 的道路. 所以引理成立. 而引理说明$\pi_1(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha,*)$为直和群$*_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(S^1_\alpha,*)$的某个商群. 再由以后的泛覆盖空间的构造可知这两个群是同构的, 即$\pi_1(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha,*)\cong *_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(S^1_\alpha,*)\cong *_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z}_\alpha$, 其中每个$\mathbb{Z}_\alpha\cong\mathbb{Z}$. 而群$*_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z}_\alpha$又称为由下标集$\Lambda$生成的自由群, 记为$F(\Lambda)$.

例2.5.9 对于$n\geqslant 2$, 记任意个S^n 的一点并空间为$\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha$, 其中每个$S^n_\alpha\cong S^n$. 对于$\beta\in\Lambda$, 记$i_\beta\colon S^n\to\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha$为到分量空间$S^n_\beta$的内射, 显然$i_\beta$也可以看成保基点映射. 则我们有引理: 任何映射$f\colon(S^n,*)\to(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha,*)$一定保基点同伦于以下保基点映射

$$c_1i_{\beta_1}+\cdots+c_ni_{\beta_n},\quad \beta_i\in\Lambda,\quad c_i\in\mathbb{Z}.$$

证明方法也类似定理2.5.3. 由单纯逼近定理, 我们可以假设f为一单纯映射. 在每一个S^n_α的剖分上取定一个n-单形σ_α. 记K^n为S^n的剖分中所有n-单形的集合. 首先定义对应$s_f\colon K^n\to\{0,\pm i_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (0代表常值映射, $-i_\alpha$为i_α的逆)如下. 如果f把K^n的单形τ同向地同胚映到σ_α, 就定义$s_f(\tau)=i_\alpha$; 如果f把K^n的单形τ反向地同胚映到σ_α, 就定义$s_f(\tau)=i_\alpha^{-1}$; 否则就定义$s_f(\tau)=0$. 令ϕ为$\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha$到自身的同伦于恒等映射的映射, 满足限制在每个$S^n_\alpha$上将$\sigma_\alpha$的边缘和所有$S^n_\alpha\backslash\sigma_\alpha$的点都映到基点, 将$\sigma_\alpha$的内部同胚地映到$S^n_\alpha\backslash*$. 则$\phi f\simeq +_{\tau\in K^n}s_f(\tau)$. 省略$s_f(\tau_i)$中的0, 就得到以上形如$c_1i_{\beta_1}+\cdots+c_ni_{\beta_n}$的道路. 所以引理成立. 而引理说明$\pi_1(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha,*)$为直和群$\oplus_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(S^n_\alpha,*)$的某个商群. 由以后的同伦群的基本性质可知, $\pi_n(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha,*)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}\pi_n(S^n_\alpha,*)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z}_\alpha$. 而群$\oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z}_\alpha$又称为由下标集$\Lambda$生成的自由Abel群, 记为$\mathbb{Z}(\Lambda)$.

定以2.5.10 CW复形X的一个n-胞腔e^n_α关于$(n-1)$-胞腔e^{n-1}_β $(n>0)$ 的粘合度$[e^n_\alpha;e^{n-1}_\beta]$为如下定义的整数. 首先对所有的胞腔先取定特征映射. 当$n=1$时, 如果e^1_α有两个边点u,v, 由e^1_α的定向, 假设u为起点, v为终点, 则定义$[e^1_\alpha;u]=1$, $[e^1_\alpha;v]=-1$; 如果e^1_α只有一个边点u, 则定义$[e^1_\alpha;u]=0$. 当$n>1$时, 我们由e^n_α的粘合映射ψ^n_α得到如下映射f_α.

$$f_\alpha\colon S^{n-1}\xrightarrow{\psi^n_\alpha}X^{n-1}\xrightarrow{q_{n-1}}X^{n-1}/X^{n-2},$$

其中 q_{n-1} 为商映射. 由 e_β^{n-1} 的特征映射 ϕ_β^{n-1} 得到满足以下交换图的映射 i_β.

$$\begin{tikzcd} D^{n-1} \arrow[r, "\phi_\beta^{n-1}"] \arrow[d, "q"'] & X^{n-1} \arrow[d, "q_{n-1}"'] \\ D^{n-1}/S^{n-2} \arrow[r, "i_\beta"] & X^{n-1}/X^{n-2} \end{tikzcd}$$

其中 q 为商映射. i_β显然为嵌入. 于是我们得到 $g_\beta\colon X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-1}$ 满足 g_β 限制在分量球面S_β^{n-1} 上为 i_β^{-1}, g_β 限制在其它分量球面上为到基点的常值映射. 定义 $[e_\alpha^n; e_\beta^{n-1}] = \deg(g_\beta f_\alpha)$.

换个说法, 由于 $\pi_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, x_0) = \oplus_{\beta\in\Lambda_{n-1}}\mathbb{Z}_\beta$, 其中 Λ_{n-1} 为 $(n-1)$-胞腔的下标集, 所以映射 f_α就代表$\pi_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, x_0)$ 中的同伦类$[f_\alpha]$. 则粘合度满足公式

$$[f_\alpha] = \Sigma_{\beta\in\Lambda_{n-1}}[e_\alpha^n; e_\beta^{n-1}][i_\beta],$$

其中只有有限个粘合度$[e_\alpha^n; e_\beta^{n-1}]$非零, i_β 为 S^{n-1} 到 $\vee_{\beta\in\Lambda_{n-1}}S_\beta^{n-1}$ 的分量空间 S_β^{n-1} 的内射, $[i_\beta]$是 $\oplus_{\beta\in\Lambda_{n-1}}\mathbb{Z}_\beta$ 中 $\mathbb{Z}_\beta$ 的生成元. 当 $n = 1$时, 最多有两个$[e_\alpha^1; e_\beta^0]$ 非零并且为± 1; 当 $n = 2$时, 等式右边取 $\pi_1(X^1/X^0, x_0) = *_{\beta\in\Lambda_1}\mathbb{Z}_\beta$ 的交换化群 $\oplus_{\beta\in\Lambda_1}\mathbb{Z}_\beta$.

例2.5.11 对于单纯复形 K来说, 由于特征映射和粘合映射都是同胚映射, 其粘合度非常容易确定. 具体地, 对于 n-单形 σ 和 $(n-1)$-单形 τ, 如果 τ不是 σ 的面, 则 $[\sigma;\tau] = 0$, 如果 τ是 σ 的面, 则 $[\sigma;\tau] = \pm 1$. 具体为1还是 -1, 由单形 σ 和 τ 的定向决定. 而单纯复形有一种统一的定向. 在 K 的顶点集上任意给定一个全序$<$. 规定所有的顺向的形式单形为正向单形, 即形式单形 $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ 为正向, 如果 $x_1 < \cdots < x_{n+1}$. 在这个统一的定向下, 任何顺向单形 $\sigma = \{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ 的特征映射 ϕ_σ 都是标准n-单形 Δ^n 到 σ 的同胚映射, 将ε_i映到 x_i. 记 $\sigma_i = \{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}\}$, $i = 1, \cdots, n+1$. 则 $\partial(\sigma) = \cup_{i=1}^{n+1}\sigma_i$, 其中 ∂代表所有真面的并构成的子复形. 同样, 记 $\partial^2(\sigma) = \cup_{i=1}^{n+1}\partial(\sigma_i)$. 则 $\partial(\sigma)/\partial^2(\sigma) \cong S_1^{n-1}\vee\cdots\vee S_{n+1}^{n-1}$, 其中 $S_i^{n-1} = \sigma_i/\partial(\sigma_i) \cong S^{n-1}$. 记 $q\colon \partial(\sigma) \to \partial(\sigma)/\partial^2(\sigma)$ 为商投射. ϕ_i 为满足以下关于特征映射的商投射的交换图

$$\begin{tikzcd} \Delta^{n-1} \arrow[r, "\phi_{\sigma_k}"] \arrow[d, "q"] & \sigma_i \arrow[d, "q"] \\ \Delta^{n-1}/\partial(\Delta^{n-1}) \arrow[r, "\phi_i"] & \sigma_i/\partial(\sigma_i) \end{tikzcd}$$

的同胚映射. 由定义, 粘合度$[\sigma;\sigma_i]$ 为以下映射

$$\partial(\sigma) \xrightarrow{q} \partial(\sigma)/\partial^2(\sigma) \xrightarrow{q_i} \sigma_i/\partial(\sigma_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \Delta^{n-1}/\partial(\Delta^{n-1})$$

的映射度, 其中 q_i 为把 $\vee_k S_k^{n-1}$ 的第 i 个分量空间恒等地映到 S_i^{n-1}, 将其它分量空间全映到基点的映射. 注意到上式两端的空间并不是同一个空间, 因此我们必须人为取定一个同胚映射 $\phi\colon \Delta^{n-1}/\partial(\Delta^{n-1}) \to \partial(\sigma)$, 则粘合度$[\sigma;\sigma_i]$ 为以下映射

$$\Delta^{n-1}/\partial(\Delta^{n-1}) \xrightarrow{\phi} \partial(\sigma) \xrightarrow{q} \partial(\sigma)/\partial^2(\sigma) \xrightarrow{q_i} \sigma_i/\partial(\sigma_i) \xrightarrow{\phi_i} \Delta^{n-1}/\partial(\Delta^{n-1})$$

的映射度. 假如我们取的 ϕ 使得 $[\sigma;\sigma_{n+1}] = -1$, 则由习题2.5.4的(10)的结论不难得出 $[\sigma;\sigma_i] = (-1)^{n-i}$. 这个结果由于与$\sigma$ 的维数n 有关, 显然不好. 所以我们总是取 ϕ 使得 $[\sigma;\sigma_1] = -1$. 则我们有 $[\sigma;\sigma_i] = (-1)^i$, 即

$$[\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}; \{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}\}] = (-1)^i, \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

注意, 虽然这个公式虽然是在给顶点一个全序的条件下得出的, 但是一旦公式得出又与全序的选取无关, 也就是说我们把上述公式中的顺向单形推广为任意形式单形仍成立, 且与全序的选取无关.

定理2.5.12 CW复形 X 的胞腔e_α^n关于 e_β^{n-1} 的粘合度可以由以下方法得到. 由单纯逼近定理, 我们可以假设 e_α^n 的粘合映射 ψ_α^n 和骨架的商映射 $q_{n-1}\colon X^{n-1}\to X^{n-1}/X^{n-2}$ 的复合映射

$$f_\alpha = q_{n-1}\psi_\alpha^n : S^{n-1} \to \vee_{\gamma\in\Lambda_{n-1}} S_\gamma^{n-1}$$

为一单纯映射. 在右边一点并空间的分量空间 S_β^{n-1} 的剖分上取定一个$(n-1)$-单形 σ_β. 记 K^{n-1} 为左边定义域空间 S^{n-1} 的剖分中所有 $(n-1)$-单形的集合. 首先定义对应$s_{\alpha,\beta}\colon K^{n-1}\to\{0,\pm1\}$ 如下. 如果 f把 K^{n-1} 中的单形 τ 同向地同胚映到 σ_β, 就定义 $s_{\alpha,\beta}(\tau)=1$; 如果 f把 K^{n-1} 中的单形 τ反向地同胚映到 σ_β, 就定义 $s_{\alpha,\beta}(\tau)=-1$; 否则就定义 $s_{\alpha,\beta}(\tau)=0$. 则 $[e_\alpha^n;e_\beta^{n-1}]=\Sigma_{\tau\in K^{n-1}}\, s_{\alpha,\beta}(\tau)$,

证 取例2.5.9和例2.5.10中的 f 为 f_α, 自然得出结论.

定理2.5.13 设 $e_\alpha^m, e_\beta^{m-1}$ 为CW复形 X 为的胞腔, 设 e_ξ^n, e_η^{n-1} 为CW复形 Y 为的胞腔. 则在 $X\times Y$ 和 $X*Y$ 中, 我们有粘合度公式

$$[e_\alpha^m\times e_\xi^n; e_\beta^{m-1}\times e_\xi^n] = [e_\alpha^m * e_\xi^n; e_\beta^{m-1} * e_\xi^n] = [e_\alpha^m; e_\beta^{m-1}],$$
$$(-1)^m[e_\alpha^m\times e_\xi^n; e_\alpha^m\times e_\eta^{n-1}] = (-1)^{m+1}[e_\alpha^m * e_\xi^n; e_\alpha^m * e_\eta^{n-1}] = [e_\xi^n; e_\eta^{n-1}].$$

证 设 e_α^m 的粘合映射 ψ_α^m 和骨架的商映射 $q_{m-1}\colon X^{m-1}\to X^{m-1}/X^{m-2}$ 的复合映射

$$f_\alpha = q_{m-1}\psi_\alpha^m : S^{m-1} \to \vee_{\gamma\in\Lambda_{m-1}} S_\gamma^{m-1}$$

为一单纯映射. 在每一个S_γ^{m-1} 的剖分上取定一个$(m-1)$-单形 σ_γ. 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 为左边的 S^{m-1} 的剖分中所有满足 f_α 限制在其上为到某个σ_γ(γ不固定!)的同胚映射的单形. 令 ϕ 为 $\vee_{\gamma\in\Lambda_{m-1}}S_\gamma^{m-1}$到自身的同伦于恒等映射的映射, 满足限制在每个$S_\gamma^{m-1}$ 上将σ_γ 的边缘和所有 $S_\gamma^{m-1}\backslash\sigma_\gamma$ 的点都映到基点, 将σ_γ 的内部同胚地映到 $S_\gamma^{m-1}\backslash *$. 则 $\phi f_\alpha \simeq \pm i_{\gamma_1}\pm\cdots\pm i_{\gamma_k}$, 其中 i_γ 表示S^{m-1} 到 $\vee_{\gamma\in\Lambda_{m-1}}S_\gamma^{m-1}$ 的分量空间S_γ^{m-1} 的内射, 而 f_α 限制在 σ_i 上为到 σ_{γ_i} 的同胚映射, i_{γ_i} 的符号由定向决定.

同理, 设 e_ξ^n 的粘合映射 ψ_ξ^n 和骨架的商映射 $q_{n-1}\colon Y^{n-1}\to Y^{n-1}/Y^{n-2}$ 的复合映射

$$g_\xi = q_{n-1}\psi_\xi^m : S^{m-1} \to \vee_{\delta\in\Gamma_{n-1}} S_\delta^{n-1}$$

为一单纯映射. 在每一个S_δ^{n-1} 的剖分上取定一个$(n-1)$-单形 τ_δ. 设 $\delta_1,\cdots,\delta_l$ 为左边的 S^{n-1} 的剖分中所有满足 g_ξ 限制在其上为到某个τ_δ(δ不固定!)的同胚映射的单形. 令 ψ 为 $\vee_{\delta\in\Gamma_{n-1}}S_\delta^{n-1}$到自身的同伦于恒等映射的映射, 满足限制在每个$S_\delta^{n-1}$ 上将τ_δ 的边缘和所有 $S_\delta^{n-1}\backslash\tau_\delta$ 的点都映到基点, 将τ_δ 的内部同胚地映到 $S_\delta^{n-1}\backslash *$. 则 $\psi g_\xi \simeq \pm i_{\delta_1}\pm\cdots\pm i_{\delta_l}$, 其中 i_δ 表示S^{n-1} 到 $\vee_{\delta\in\Gamma_{n-1}}S_\delta^{n-1}$ 的分量空间S_δ^{n-1} 的内射, 而 g_ξ 限制在 τ_i 上为到 τ_{δ_i} 的同胚映射, i_{δ_i} 的符号由定向决定.

由上, 我们有乘积胞腔$e_\alpha^m\times e_\xi^n$ 的粘合映射 $\psi_\alpha^m\boxtimes\psi_\xi^n$ 和 $X\times Y$ 的骨架的商映射$q_{m+n-1}\colon (X\times Y)^{m+n-1}\to (X\times Y)^{m+n-1}/(X\times Y)^{m+n-2}$ 的复合映射

$$F_{\alpha,\xi} = q_{m+n-1}(\psi_\alpha^m\boxtimes\psi_\beta^n) : S^{m+n-1} \to (\vee_{\delta\in\Gamma_{n-1}} S_{\alpha,\delta}^{m+n-1})\vee(\vee_{\gamma\in\Lambda_{m-1}} S_{\gamma,\xi}^{m+n-1}) = V.$$

$f_{\alpha,\xi}$并不是单纯映射, 因为$X\times Y$没有自然的单纯结构. 在 e_α^m 的内部取一个同胚于标准m-单形的闭子空间 σ, 则 $q_{m+n-1}(\sigma\times\tau_i)=\sigma\times\tau_{\delta_i}$. 在 e_ξ^n 的内部取一个同胚于标准n-单形的闭子空间 τ, 则 $q_{m+n-1}(\sigma_i\times\tau)=$

$\sigma_{\gamma_i}\times\tau$. 注意, 每个$\sigma\times\tau_\delta$和$\sigma_\gamma\times\tau$的内部都同胚于实心球$D^{m+n-1}$的内部. 令$\Phi$为$F_{\alpha,\xi}$的值域空间$V$到自身的同伦于恒等映射的映射, 满足限制在每个$\sigma\times\tau_\delta$上都将$\sigma\times\tau_\delta$的边缘和所有$S^{m+n-1}_{\alpha,\delta}\backslash(\sigma\times\tau_\delta)$的点都映到基点, 将$\sigma\times\tau_\delta$的内部同胚地映到$S^{m+n-1}_{\alpha,\delta}\backslash *$. Φ限制在$\sigma_\gamma\times\tau$上也类似. 则$\Phi F_{\alpha,\xi}\simeq\pm j_{\delta_1}\pm\cdots\pm j_{\delta_l}\pm j_{\gamma_1}\pm\cdots\pm j_{\gamma_k}$, 其中

$$j_{\delta_s}(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n})=(x_1,\cdots,x_m,i_{\delta_s}(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})),$$

$$j_{\gamma_s}(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n})=(i_{\gamma_s}(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{m+n}).$$

所以$j_{\gamma_s}=\widetilde{S}^m(i_\gamma)$. 因此$[e^m_\alpha\times e^n_\xi;e^{m-1}_\beta\times e^n_\xi]=[e^m_\alpha;e^{m-1}_\beta]$. 记$T\colon X\times Y\to Y\times X$为$T(x,y)=(y,x)$. 则$T$导出定向的关系为$T(e^m_\alpha\times e^n_\xi)=(-1)^{mn}e^n_\xi\times e^m_\alpha$. 于是$[e^m_\alpha\times e^n_\xi;e^m_\alpha\times e^{n-1}_\eta]=[(-1)^{mn}e^n_\xi\times e^m_\alpha;(-1)^{mn-m}e^{n-1}_\eta\times e^m_\alpha]=(-1)^m[e^n_\xi;e^{n-1}_\eta]$.

$X*Y$的情形只需将以上证明中的$\times$换成$*$就得到结果.

例2.5.14 取S^1最简单的胞腔结构, 只有一个0-胞腔$*$和一个1胞腔e. 记$(S^1)^{\times n}=S^1\times\cdots\times S^1$ (n重乘积). 由于S^1的胞腔结构满足$[e,*]=0$, 即所有的粘合度都是0, 由以上定理可知$(S^1)^{\times n}$的所有粘合度也都是0.

以上例子说明粘合度不能决定粘合映射, 具体地, 如果一个胞腔e^n_α满足对所有的$(n-1)$-胞腔的粘合度都为0, 则e^n_α的粘合映射ψ^n_α未必零伦. 上例中的$(S^1)^{\times n}$ $(n>1)$就是一个例子. 这个CW复形只有一个n胞腔$e^{\times n}=e\times\cdots\times e$, 它满足对所有$(n-1)$-胞腔的粘合度都是0, 但是它的粘合映射$\psi_n$却不零伦, 因为如果零伦, 我们自然就得到$(S^1)^{\times n}\simeq S^n\vee X^{n-1}$, 其中$X^{n-1}$为$(S^1)^{\times n}$的$(n-1)$- 维骨架, 而通过计算上同调环等简单的同伦不变量就可知这不可能. 当$n>2$时, 胞腔$e^{\times n}$对所有$(n-1)$-胞腔的粘合度都为0蕴含它的粘合映射ψ_n同伦于一个把S^{n-1}映到维数低于$n-1$维骨架之中的映射.

习题 2.4

2.5.1 如果映射$f\colon S^n\to S^n$满足存在一点$y\in S^n$, 使得$f^{-1}(y)$只有一点x, 那么是不是有$\deg(f)=\pm1$?

2.5.2. 如果方阵$A_{n\times n}$的行列式为0, 证明把A看做$\mathbb{R}^n$的线性变换不能扩张为$(\mathbb{R}^n)^*$的自映射.

2.5.3. 用u^n表示四元数的乘法对应$u\to u^n$在单位球面S^3的限制映射. 求$\deg(u^n)$.

2.5.4. 求下列球面到自身的映射的映射度.

(1) 恒等映射1_{S^n}.

(2) 对径映射$r(x)=-x$对任何$x\in S^n$.

(3) $f_\sigma\colon S^n\to S^n$定义为$f_\sigma(x_1,\cdots,x_{n+1})=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n+1)})$, 其中$\sigma$为$(1,\cdots,n{+}1)$ 的置换.

(4) z^n作为复函数在单位圆S^1上的限制映射.

(5) $f\colon S^{2n-1}\to S^{2n-1}$定义为$f(z_1,\cdots,z_n)=(z_1^{k_1},\cdots,z_n^{k_n})_0$, 其中$(-)_0$表示向量的单位化, S^{2n-1}为复空间$\mathbb{C}^n$的单位球, k_i为整数.

(6) 对于$n{+}1$阶正交矩阵O, $f_O(x)=Ox$对任何$x\in S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

(7) 对于$n{+}1$阶可逆矩阵A, $f_A(x)=\frac{Ax}{\|Ax\|}$对任何$x\in S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

(8) 对于n阶酉矩阵U, $f_U(z)=Uz$对任何$z\in S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n$.

(9) 对于n阶复可逆矩阵B, $f_B(z)=\frac{Bz}{\|Bz\|}$对任何$z\in S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n$.

(10) 设σ为$(1,\cdots,n{+}1)$的一个置换, $\Delta^n=\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}$为一$n$-单形. 用同样的符号$\sigma$记$\Delta^n$到自身的单纯映射$\sigma(x_i)=x_{\sigma(i)}$. 定义$\sigma_*$和$\hat\sigma$分别为满足以下映射交换图的$S^n$和$S^{n-1}$到自身的映射,

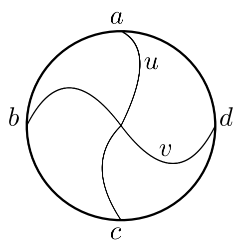
$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & \Delta^n \\
{}^{q}\downarrow & & {}^{q}\downarrow \\
\Delta^n/\partial(\Delta^n) & \xrightarrow{\sigma_*} & \Delta^n/\partial(\Delta^n) \\
\| & & \| \\
S^n & \xrightarrow{\sigma_*} & S^n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{\hat\sigma} & S^{n-1} \\
\| & & \| \\
\partial(\Delta^n) & \xrightarrow{\hat\sigma} & \partial(\Delta^n) \\
{}^{i}\downarrow & & {}^{i}\downarrow \\
\Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & \Delta^n
\end{array}$$

其中$\partial(\Delta^n)$为所有Δ^n的真面并成的子集, 由于$\partial(\Delta^n)$与S^{n-1}同胚, 所以不区分两者, q为商映射, i为内射.

2.5.5. 求实和复射影空间按照例1.12.10中的胞腔结构任两个胞腔间的粘合度.

2.5.6. 求习题1.12.9的$T(S^1)$的胞腔结构中任两个胞腔间的粘合度.

2.5.7. 设a,b,c,d为圆周S^1上如下图所示四点, u,v分别为圆盘D^2内连接a,c和b,d的两条道路. 证明一定存在$s,t\in I$, 使得$u(s)=v(t)$.



2.5.8. 对于$p,q\geqslant 0$, 令S^p和S^q分别为S^{p+q+1}的由所有后$q{+}1$个坐标为零的点构成的子空间和由所有前$p{+}1$个坐标为零的点构成的子空间. 设u和v分别为D^{p+1}和D^{q+1}到S^{p+q+1}的两个映射, 满足两个限制映射$u|_{\partial(D^{p+1})}$和$v|_{\partial(D^{q+1})}$分别为S^p和S^q到S^{p+q+1}的内射. 证明存在$x\in D^{p+1}$和$y\in D^{q+1}$, 使得$u(x)=v(y)$.

2.6 同伦提升性和同伦扩张性

纤维映射和上纤维映射是代数拓扑中非常重要的概念, 其基本性质、定理以及相关证明大部分都是对偶的.

定义2.6.1 称映射$i\colon A\to U$关于拓扑空间Γ满足同伦扩张性, 如果对任何同伦$\Phi\colon I{\times}A\to\Gamma$, 只要$\Phi$的初始映射$\phi(-)=\Phi(0,-)$可以扩张为映射$\overline{\phi}\colon U\to\Gamma$, 即$\phi=\overline{\phi}i$, 则$\Phi$就可以扩张为同伦$\overline{\Phi}\colon I{\times}U\to A$,

即 $\Phi=\overline{\Phi}(1_I\times i)$. 如下图所示, 由左边初始映射的扩张图得到右边同伦映射的扩张图.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ U \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times U \arrow[ur, "\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

如果映射 $i\colon A\to U$关于所有拓扑空间都满足同伦扩张性, 则称映射 i 为上纤维映射.

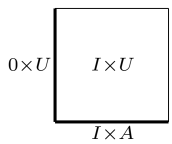
把以上映射(同伦)都换成保基点映射(同伦), 就得到保基点上纤维映射的概念.

拓扑空间 X 的子空间 A 称为非退化的, 如果内射 $i\colon A\to X$ 为上纤维映射.

定理2.6.2 上纤维映射 $i\colon A\to U$ 为嵌入, 所以总是把 A 看成 U 的子空间, i 看成内射. 对于这样的上纤维映射, $(0\times U)\cup(I\times A)$ 为 $I\times U$ 的强形变收缩核.

证 取定义2.6.1中的 Γ 为 i 的映射柱空间 $((I\times A)\amalg U)/\!\sim$, 其中 $(0,a)\sim i(a)$ 对所有 $a\in A$. 记 Γ 中的点为 $[s,a]$ 对 $s\in I$ 和 $a\in A$, $[u]$ 对 $u\in U$. 则我们有 $[0,a]=[i(a)]$ 对所有 $a\in A$. 取初始同伦 $\Phi\colon I\times A\to\Gamma$ 为内射 $\Phi(s,a)=[s,a]$. 显然初始映射 $\phi(a)=[0,a]=[i(a)]$ 有扩张映射 $\overline{\phi}(u)=[u]$. 所以存在扩张同伦 $\overline{\Phi}\colon I\times U\to\Gamma$. 则 $\overline{\Phi}(1,i(a))=\Phi(1,a)=(1,a)$ 对所有 $a\in A$. 这说明 i 为单射. 因而 $\overline{\Phi}$ 限制在 $1\times i(A)\cong i(A)$ 上为 i 的逆映射. 所以 i 为嵌入.

把 A 看成 U 的子空间, U 看成 $I\times U$ 的子空间 $0\times U$, 则以上证明中的 Γ就是 $I\times U$ 的子空间 $0\times U\cup I\times A$, 扩张同伦 $\overline{\Phi}\colon I\times U\to\Gamma$就是 $I\times U$ 压缩到 Γ 的收缩核映射. 我们用一条竖线代表U, 用其端点0代表A, 则下图展示了粗线代表的 Γ 为方块代表的 $I\times U$ 的收缩核.



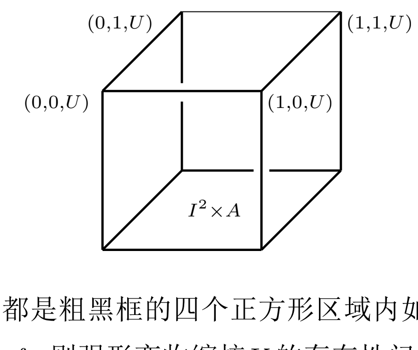
但是这里并没有直线场存在, 所以必须从其它角度建立起强形变收缩核. 假设存在一个由 $\overline{\Phi}$ 到 $1_{I\times U}$ 的强形变收缩同伦 K, 则如下图所示, K必须满足以下限制条件.

(1) K 限制在左竖方框$1\times I\times U$ 上为 $\overline{\Phi}$, 即 $K(0,t,u)=\overline{\Phi}(t,u)$ 对所有 $t\in I$ 和 $u\in U$.

(2) K 限制在右竖方框$0\times I\times U$ 上为恒等映射, 即 $K(1,t,u)=(t,u)$ 对所有 $t\in I$ 和$u\in U$.

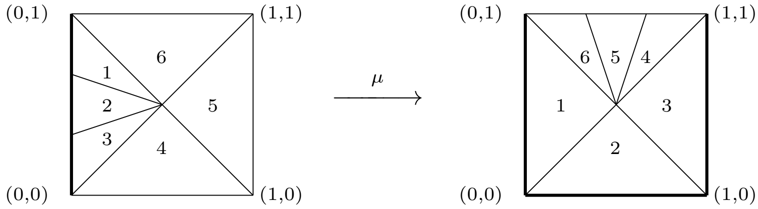
(3) K 限制在前竖方框$I\times 0\times U$ 上为恒等映射, 即 $K(s,0,u)=(s,u)$ 对所有 $t\in I$ 和$u\in U$,

(4) K 限制在 $I^2\times A$ 上为恒等内射, 即 $K(s,t,a)=(t,a)$ 对所有 $(s,t)\in I^2$ 和 $a\in A$.

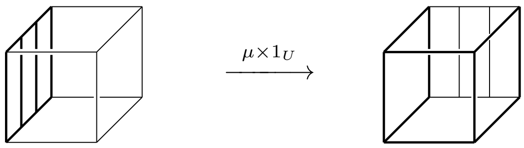


也就是说K必须满足在上图中由四条边都是粗黑框的四个正方形区域内如要求所定义. 记这个区域上如上述四条要求所定义的到 $I\times U$ 的映射为 f. 则强形变收缩核K 的存在性问题, 变为映射 f是否存在扩张映射 K 的问题. 这个问题可以由 $i\colon A\to U$ 为上纤维映射推出.

令 $J=0\times I\cup 1\times I\cup I\times 0$, 映射 $\mu\colon I^2\to I^2$ 为将$0\times I$映到 J 的如下图所示自同胚, 其中左边方块的粗线为 $0\times I$, 右边方块的粗折线为 J, 同胚映射 μ 将左边六个三角形区域按照标号映到右边的六个三角形区域.



则 $\mu\times 1_U$ 将$0\times I\times U$映为 $V=J\times U$, 如下图所示.



由 $i\colon A\to U$ 为上纤维映射不难证明 $1_I\times i\colon I\times A\to I\times U$仍为上纤维映射. 从这个上纤维映射的角度看, 映射 $f(\mu\times 1_U)$ 定义在 $0\times(I\times U)$ 上, $f(\mu\times 1_U)$ 限制在 $0\times(I\times A)$ 上有初始同伦$H\colon I\times(I\times A)\to I\times U$ 定义为 $H(s,t,a)$ $=(t,i(a))$ 对所有 $(s,t)\in I^2$ 和 $a\in A$. 所以 $f(\mu\times 1_U)$存在扩张同伦 $K'\colon I\times(I\times U)\to I\times U$. 则 $K'(\mu^{-1}\times 1_U)$就为之前假设的强形变收缩同伦 K.

以上概念和定理有完整的对偶.

定义2.6.3 称映射 $p\colon E\to B$关于拓扑空间 Γ 满足同伦提升性, 如果对任何同伦 $\Phi\colon I\times\Gamma\to B$, 只要初始映射 $\phi(-)=\phi(0,-)$可以提升为映射 $\widetilde{\phi}\colon\Gamma\to E$, 即 $\phi=p\widetilde{\phi}$, 则 Φ就可以提升为同伦 $\widetilde{\Phi}\colon I\times\Gamma\to E$, 即 $\Phi=p\widetilde{\Phi}$. 如下图所示, 由左边初始映射的提升图得到右边同伦映射的提升图.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ \Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I\times\Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi"'] & B \end{tikzcd}$$

如果映射 $p\colon E\to B$关于所有拓扑空间都满足同伦提升性并且B是道路连通的, 则称映射 p 为纤维映射.

把以上映射和同伦都换成保基点映射和保基点同伦, 就得到保基点纤维映射的概念.

E 称为纤维映射的全空间, B 称为纤维映射的底空间, B 上任何一点 b 的原像空间 $F_b=p^{-1}(b)$ 称为纤维映射在 b点的纤维.

注意, 纤维映射在底空间上点 b 的纤维的概念没有对偶的上纤维概念! 另外, 如果 $p\colon E\to B$ 为纤维映射, 则对任何不交并空间 $B\amalg C$, p仍可看成 E 到 $B\amalg C$ 的映射, 该映射对所有拓扑空间仍满足映射提升性. 但显然 C是多余的. 所以纤维映射要求底空间道路连通.

定理2.6.4 纤维映射 $p\colon E\to B$ 为满射. 任何两点的纤维同伦型.

证 对于 $b\in p(E)$ 和任何 $b'\in B$, 由于 B道路连通, 存在连接 b 到 b' 的道路 u. 任取一点 $e\in E$ 满足 $p(e)=b$. 则 b 和 b'可视为独点空间到 B 的映射, u 为连接两映射的同伦, e可视为 b在 E 上提升映射. 于是由同伦提升性, u可提升到 E 上的道路 $\widetilde{u}$. 则 $p(\widetilde{u}(1))=b'$. 所以 p 为满射.

设 b_1, b_2 为底空间 B 上的两点, 要想证明 F_{b_1} 和 F_{b_2} 同伦型, 就要找到一个由 F_{b_1} 到 F_{b_2} 的同伦等价映射. 由同伦提升性, 由连接两点的一条道路就能得到一个由 F_{b_1} 到 F_{b_2} 的映射. 具体地, 设 u 为 B 上的一条连接 b_1 到 b_2 的道路. 取定义2.6.3中的 $\Gamma = F_{b_1}$, 初始同伦 $\Phi_u\colon I\times F_{b_1} \to B$ 为 $\Phi_u(t,e) = u(t)$ 对所有 $t\in I$ 和 $e\in F_{b_1}$. 则 Φ_u 的初始映射(常值映射)显然有提升映射 i_{b_1}, 其中 $i_{b_1}\colon F_{b_1} \to E$ 为内射. 于是存在提升同伦 $\widetilde{\Phi}_u\colon I\times F_{b_1} \to E$. 显然限制映射 $\widetilde{\Phi}_u|_{1\times F_{b_1}}$ 为由 F_{b_1} 到 F_{b_2} 的映射, 记为 (F_{b_1}, u, F_{b_2}). 那么该映射是同伦等价映射么? 答案是肯定的, 但其证明却需要对所有这类映射做一个一般性的考察才能得到. 具体地, 记 (F_{b_1}, u, F_{b_2})所在的 $[F_{b_1}; F_{b_2}]$ 中的映射同伦类为 $[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$. 则所有映射同伦类$[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$ 满足以下性质.

(1) 同伦类$[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$不依赖于同伦提升$\widetilde{\Phi}_u$ 的选取.

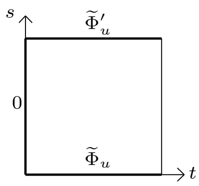
(2) 同伦类$[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$不依赖于 u 的选取, 即如果 $u \simeq u' \operatorname{rel}\{0,1\}$, 则 $[F_{b_1}, u, F_{b_2}] = [F_{b_1}, u', F_{b_2}]$.

(3) 如果 $u(1) = v(0) = b_2$, 则 $[F_{b_2}, v, F_{b_3}][F_{b_1}, u, F_{b_2}] = [F_{b_1}, u{*}v, F_{b_3}]$.

(4) 每个映射 (F_{b_1}, u, F_{b_2}) 都为一同伦等价映射.

下面我们证明以上性质, 其中 J 和 μ 如定理2.6.2的证明中所定义.

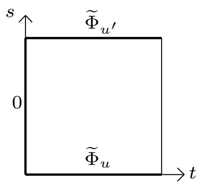
(1) 设 $\widetilde{\Phi}_u$ 和 $\widetilde{\Phi}'_u$ 为 $[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$ 的定义中同一初始同伦 Φ_u 的两个不同提升同伦, 记 $H_u\colon I^2\times F_{b_1} \to B$ 为恒等同伦 $H(s,t,e) = u(t)$. 令 $f\colon J\times F_{b_1} \to E$ 如下图所示, 图中每点代表F_{b_1}.



$$f(s,t,e) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}_u(t,e) & \text{如果 } s=0, \\ \widetilde{\Phi}'_u(t,e) & \text{如果 } s=1, \\ e & \text{如果 } t=0. \end{cases}$$

则 $f(\mu\times 1_{F_{b_1}})$ 定义在 $0\times(I\times F_{b_1})$ 上, 为初始同伦 $H_u(\mu\times 1_{F_{b_1}})\colon I\times(I\times F_{b_1}) \to B$ 的初始映射的提升映射. 所以 $f(\mu\times 1_{F_{b_1}})$ 有提升同伦 $K'\colon I\times(I\times F_{b_1}) \to E$. 则 $K = K'(\mu^{-1}\times 1_{F_{b_1}})$ 满足 $K|_{1\times I\times F_{b_1}}$ 就是连接两个不同的 (F_{b_1}, u, F_{b_2}) 的同伦.

(2) 设 $\widetilde{\Phi}_u$ 和 $\widetilde{\Phi}_{u'}$ 分别为 $[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$ 和 $[F_{b_1}, u', F_{b_2}]$ 的定义中初始同伦 Φ_u 和 $\Phi_{u'}$ 的提升同伦, 记 $H_{u,u'}\colon I^2\times F_{b_1} \to B$ 为连接 u 到 u' 的相对同伦. 令 $f\colon J\times F_{b_1} \to E$ 如下图所示, 图中每点代表F_{b_1}.



$$f(s,t,e) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}_u(t,e) & \text{如果 } s=0, \\ \widetilde{\Phi}_{u'}(t,e) & \text{如果 } s=1, \\ e & \text{如果 } t=0. \end{cases}$$

则 $f(\mu\times 1_{F_{b_1}})$ 定义在 $0\times(I\times F_{b_1})$ 上, 为初始同伦 $H_{u,u'}(\mu\times 1_{F_{b_1}})\colon I\times(I\times F_{b_1}) \to B$ 的初始映射的提升映射. 所以 $f(\mu\times 1_{F_{b_1}})$ 有提升同伦 $K'\colon I\times(I\times F_{b_1}) \to E$. 则 $K = K'(\mu^{-1}\times 1_{F_{b_1}})$ 满足 $K|_{1\times I\times F_{b_1}}$ 就是连接 (F_{b_1}, u, F_{b_2})到 (F_{b_1}, u', F_{b_2}) 的同伦.

(3) 设 $\widetilde{\Phi}_u\colon I\times F_{b_1} \to E$ 和 $\widetilde{\Phi}_v\colon I\times F_{b_2} \to E$ 分别为 $[F_{b_1}, u, F_{b_2}]$ 和 $[F_{b_2}, v, F_{b_3}]$ 的定义中初始同伦 Φ_u 和 Φ_v 的提升同伦. 定义 $\widetilde{K}\colon I\times F_{b_1} \to E$ 如下.

$$\widetilde{K}(t,e) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}_u(2t,e) & t\in[0,\frac{1}{2}], \\ \widetilde{\Phi}_v(2t-1, \widetilde{\Phi}_u(1,e)) & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

显然 $\widetilde{K}$ 为 Φ_{u*v} 的提升同伦. 所以由 $\widetilde{K}(1,-) = \widetilde{\Phi}_v(1,-)\widetilde{\Phi}_u(1,-)$就可知(3) 成立.

(4) 由(3), $[F_{b_2}, u^{-1}, F_{b_1}][F_{b_1}, u, F_{b_2}] = [F_{b_1}, u{*}u^{-1}, F_{b_1}]$, 其中 $u^{-1}(t) = u(1-t)$. 由于 $0 \sim u{*}u^{-1}$, 因此由(2)可知$[F_{b_2}, u^{-1}, F_{b_1}][F_{b_1}, u, F_{b_2}] = [F_{b_1}, 0, F_{b_1}] = [1_{F_{b_1}}]$. 同理, $[F_{b_1}, u, F_{b_2}][F_{b_2}, u^{-1}, F_{b_1}] = [1_{F_{b_2}}]$.

定理2.6.2和定理2.6.4的后半部分的证明都用到了相同的同胚映射 μ, 而两者的对偶性体现在以后的定理2.6.8中.

例2.6.5 由乘积空间到分量空间的投射 $p\colon X{\times}Y \to Y$ 为纤维映射. 假设存在初始映射的交换图,

$$\begin{tikzcd}
& X{\times}Y \arrow[d, "p"] \\
\Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & Y
\end{tikzcd}$$

则存在 ψ 满足 $\widetilde{\phi}(z) = (\psi(z), \phi(z))$ 对任何 $z \in \Gamma$. 则对于满足 $H(0,z) = \phi(z)$ 的初始同伦 $H\colon I{\times}\Gamma \to Y$, 我们定义同伦 $\widetilde{H}\colon I{\times}\Gamma \to X{\times}Y$ 为 $\widetilde{H}(t,z) = (\psi(z), H(t,z))$ 对所有 $t \in I$ 和 $z \in \Gamma$. 显然 $\widetilde{H}$ 为满足 $p\widetilde{H} = H$ 的提升同伦. 称乘积空间的投射中的初始同伦 H按照以上方式定义的提升同伦 $\widetilde{H}$ 为垂直提升.

定理2.6.6 对任何拓扑空间 X, 内射 $i\colon X \to I{\times}X$, $i(x) = (1,x)$, 为上纤维映射. 对偶地, 映射 $p\colon X^I \to X$, $p(\omega) = \omega(1)$, 为纤维映射.

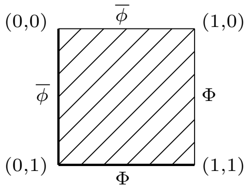
对任何拓扑空间 X, 内射 $i\colon X \to \widetilde{C}(X)$, $i(x) = [1,x]$, 为上纤维映射. 对偶地, 映射 $p\colon P(X) \to X$ (X 的基点任意指定), $p(\omega) = \omega(1)$, 为纤维映射.

对任何带基点拓扑空间 (X, x_0), 内射 $i\colon (X,x_0) \to (C(X),*)$, $i(x) = 1{\wedge}x$, 为保基点上纤维映射. 对偶地, 映射 $p\colon (P(X),0) \to (X,x_0)$, $p(\omega) = \omega(1)$, 为保基点纤维映射.

证 先证内射 $i_0\colon 1 \to I$ 为上纤维映射. 对于初始同伦 $\Phi\colon I{\times}1 \to \Gamma$ 和初始映射的扩张图

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_0"'] & \Gamma \\
I \arrow[ur, "\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

其中 $\phi(1) = \Phi(0,1) = \overline{\phi}(1)$, 自然有如下图所示的指向粗线的直线场决定的扩张同伦 $\overline{\Phi}\colon I{\times}I \to \Gamma$.



$$\overline{\Phi}(s,t) = \begin{cases} \overline{\phi}(s{+}t), & s{+}t \leqslant 1, \\ \Phi(s{+}t{-}1, 1), & s{+}t \geqslant 1. \end{cases}$$

将上图中的点视作X, 就可知$i = i_0{\times}1_X$ 为上纤维映射. 具体地, 对于初始同伦 $\Phi\colon I{\times}1{\times}X \to \Gamma$ 和初始映射的扩张图

$$\begin{tikzcd}
1{\times}X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\
I{\times}X \arrow[ur, "\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

其中 $\phi(1,x) = \Phi(0,1,x) = \overline{\phi}(1,x)$ 对所有 $x \in X$, 可以定义扩张同伦为

$$\overline{\Phi}(s,t,x) = \begin{cases} \overline{\phi}(s{+}t, x), & s{+}t \leqslant 1, \\ \Phi(s{+}t{-}1, x), & s{+}t \geqslant 1. \end{cases}$$

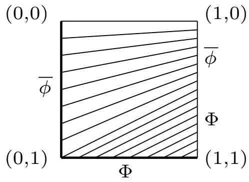
对偶地, $p\colon X^I \to X$ 为纤维映射, 因为对于初始同伦 $\Phi\colon I{\times}\Gamma \to X$ 和初始映射的提升图

$$\begin{tikzcd} & X^I \arrow[d, "p"] \\ \Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd}$$

其中 $\phi(w) = \Phi(0,w) = \widetilde{\phi}(w)(1)$ 对所有 $w \in \Gamma$, 可以定义提升同伦为

$$\widetilde{\Phi}(s,w)(t) = \begin{cases} \widetilde{\phi}(w)(s{+}t), & s{+}t \leqslant 1, \\ \Phi(s{+}t{-}1, w), & s{+}t \geqslant 1. \end{cases}$$

但以上方法无法推广到 $i\colon X \to \widetilde{C}(X)$, $i(x) = [1,x]$ 的情形上来. 因为要推广就必须将以上 I^2 中的点 (s,t) 看成 $I{\times}\widetilde{C}(X)$ 的子空间 $(s,[t,X])$. 而 $(s,[0,X])$ 为一点. 这就要求扩张同伦映射 $\overline{\Phi}$ 保持 $\overline{\Phi}(s,0) \subset I{\times}0$ 对所有 $s \in I$. 为此, 我们只需将 I^2 压缩到 $0{\times}I \cup I{\times}1$ 的收缩核映射如下图所示, 其中直线场变为等高线.



具体地, 对于初始同伦 $\Phi\colon I{\times}[1,X] \to Y$ 和初始映射的扩张图

$$\begin{tikzcd} {[1,X]} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ \widetilde{C}(X) \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $\phi([1,x]) = \Phi(0,[1,x]) = \overline{\phi}([1,x])$, 定义扩张同伦 $\overline{\Phi}$ 如下

$$\overline{\Phi}(s,[t,x]) = \begin{cases} \overline{\phi}([\frac{2t}{2-s}, x]), & t \leqslant 1{-}\frac{s}{2}, \\ \Phi(\frac{2t+s-2}{t}, [1,x]), & t \geqslant 1{-}\frac{s}{2}. \end{cases}$$

对偶地, $p\colon P(X) \to X$ 为纤维映射, 因为对于初始同伦 $\Phi\colon I{\times}\Gamma \to X$ 和初始映射的提升图

$$\begin{tikzcd} & P(X) \arrow[d, "p"] \\ \Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd}$$

其中 $\phi(w) = \Phi(0,w) = \widetilde{\phi}(w)(1)$ 对所有 $w \in \Gamma$, 定义提升同伦 $\widetilde{\Phi}$ 为

$$\widetilde{\Phi}(s,w)(t) = \begin{cases} \widetilde{\phi}(w)(\frac{2t}{2-s}), & t \leqslant 1{-}\frac{s}{2}, \\ \Phi(\frac{2t+s-2}{t}, w), & t \geqslant 1{-}\frac{s}{2}. \end{cases}$$

将以上公式中的 $[-,x]$ 替换成 $-\wedge x$ 就得到保基点情形的证明.

定义2.6.7 设 $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$ 为两个映射. 则称以下映射交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle i_B}\downarrow \\ C & \xrightarrow{i_C} & B \cup_A C \end{array}$$

为 f 和 g 的推出, 其中 $B\cup_A C$ 为不交并空间的商空间

$$B\cup_A C=(B\amalg C)/\sim,\qquad f(a)\sim g(a) \text{ 对所有 } a\in A.$$

记 $B\cup_A C$ 中的点为 $[b]$ 对 $b\in B$ 和 $[c]$ 对 $c\in C$. 则我们有 $[f(a)]=[g(a)]$ 对所有 $a\in A$. 映射 i_B 和 i_C 定义为 $i_B(b)=[b]$, $i_C(c)=[c]$, 分别称为 f 和 g 的推出映射. $B\cup_A C$ 称为 f 和 g 的推出空间.

对偶地, 设 $f\colon X\to Z$, $g\colon Y\to Z$ 为两个映射. 则称以下映射交换图

$$\begin{array}{ccc} X\times_Z Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

为 f 和 g 的拉回, 其中 $X\times_Z Y$ 为乘积空间的子空间

$$X\times_Z Y=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x)=g(y)\}.$$

p_X 和 p_X 为用同样符号表示的 $X\times Y$ 到分量空间的投射的限制映射, 分别称为 f 和 g 的拉回映射. $X\times_Z Y$ 称为 f 和 g 的拉回空间.

如果要求所有的映射为保基点映射, 就得到的保基点映射的推出和拉回的定义.

定理2.6.8 设 $i\colon A\to U$ 为上纤维映射, 则对任何映射 $f\colon A\to\Sigma$, 推出

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Sigma \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i_\Sigma}\downarrow \\ U & \xrightarrow{i_U} & U\cup_A\Sigma \end{array}$$

的推出映射 i_Σ 仍为上纤维映射, 称为 f 导出的上纤维映射. 由于所有空间和映射都依赖于映射 f, 所以我们把以上上纤维映射得到的推出记为下图.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Sigma \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i_f}\downarrow \\ U & \xrightarrow{\overline{f}} & U\cup_f\Sigma \end{array}$$

对偶地,设 $p\colon E\to B$ 为纤维映射, 则对任何映射 $f\colon\Sigma\to B$, 拉回

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\times_B E & \xrightarrow{p_E} & E \\ {\scriptstyle p_\Sigma}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

的拉回映射 p_Σ 仍为纤维映射, 称为由 f 导出的纤维映射. 由于所有空间和映射都依赖于映射 f, 所以我们把以上纤维映射得到的拉回记为下图.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\times_f E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ {\scriptstyle p_f}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

以上结论对保基点情形同样成立.

证 只证非保基点情形. 要求所有映射都为保基点, 就得到保基点情形的证明.

假设我们有初始同伦 $\Phi\colon I\times\Sigma\to\Gamma$ 和初始映射的扩张图

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_f"'] & \Gamma \\
U\cup_f\Sigma \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $\phi(x)=\Phi(0,x)=\overline{\phi}(x)$ 对所有 $x\in\Sigma$. 由以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \Sigma \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_f"'] & \Gamma \\
U \arrow[r, "\overline{f}"] & U\cup_f\Sigma \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

和 i 关于 Γ 的同伦扩张性, 对于初始同伦 $\Phi(1_I\times f)$ 和初始映射 $\phi\,f$ 的扩张映射 $\overline{\phi}\,\overline{f}$, 存在扩张同伦 Φ' 满足以下映射交换图

$$\begin{tikzcd}
I\times A \arrow[r, "1_I\times f"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & I\times\Sigma \arrow[r, "\Phi"] & \Gamma \\
I\times U \arrow[urr, "\overline{\Phi}'"'] & &
\end{tikzcd}$$

即 $\Phi'(s,i(a))=\Phi(s,f(a))$ 对所有 $(s,a)\in I\times A$. 该等式蕴含对角不交并映射

$$\Phi'\hat{\amalg}\Phi\colon (I\times U)\ \amalg\ (I\times\Sigma)\xrightarrow{\Phi'\amalg\Phi}\Gamma\amalg\Gamma\xrightarrow{\Delta'}\Gamma$$

关于 $\sim$ 导出的映射 $\overline{\Phi}\colon I\times(U\cup_f\Sigma)\to\Gamma$ 为 Φ 的扩张映射.

对偶地, 假设存在初始同伦 $\Phi\colon I\times\Gamma\to\Sigma$ 和初始映射的提升图

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\times_f E \arrow[d, "p_f"] \\
\Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & \Sigma
\end{tikzcd}$$

其中 $\phi(w)=\Phi(0,w)=p_f(\widetilde{\phi}(w))$ 对所有 $w\in\Gamma$. 由以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\times_f E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p_f"] & E \arrow[d, "p"] \\
\Gamma \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"] & \Sigma \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

和p关于 Γ 的同伦提升性, 对于初始同伦 $f\Phi$ 和初始映射 $f\phi$ 的提升映射 $\widetilde{f}\,\widetilde{\phi}$, 存在提升同伦 Φ' 满足以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[d, "p"] \\
I\times\Gamma \arrow[urr, "\Phi'"] \arrow[r, "\Phi"] & \Sigma \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

即 $p(\Phi'(s,w))=f(\Phi(s,w))$ 对所有 $s\in I$ 和 $w\in\Gamma$. 该等式说明对角乘积映射

$$(\Phi\hat{\times}\Phi')(s,x)=(\Phi(s,x),\Phi'(s,x))$$

恰好落在子空间$\Sigma\times_f E$上, 因而就是Φ的提升映射$\widetilde{\Phi}\colon I\times\Gamma\to\Sigma\times_f E$.

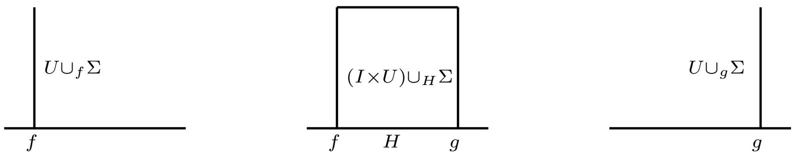
定理2.6.9 设$i\colon A\to U$为上纤维映射, $i_f\colon\Sigma\to U\cup_f\Sigma$ 和$i_g\colon\Sigma\to U\cup_g\Sigma$ 分别为映射$f,g\colon A\to\Sigma$ 导出的上纤维映射. 如果$f\simeq g$, 则$U\cup_f\Sigma\simeq U\cup_g\Sigma$.

设$p\colon E\to B$为纤维映射, $p_f\colon\Sigma\times_f E\to\Sigma$ 和$p_g\colon\Sigma\times_g E\to\Sigma$ 分别为映射$f,g\colon\Sigma\to B$ 导出的纤维映射. 如果$f\simeq g$, 则$\Sigma\times_f E\simeq\Sigma\times_g E$.

以上结论对保基点的情形同样成立.

证 只证非保基点情形. 要求以下证明中所有映射都保基点, 就得到保基点情形的证明.

设H为连接f到g的同伦, $i_H\colon\Sigma\to\Sigma\cup_H(I\cup U)$为$H$导出的上纤维映射. $U\cup_f\Sigma$, $U\cup_g\Sigma$, $(I\times U)\cup_H\Sigma$三个空间的关系由下图表示, 其中每条竖线表示$t\times U$, 长的下横线表示Σ, 竖线的下端点表示A粘在Σ中的位置.



把定理2.6.2后半部分的证明中所讨论的空间都并上空间Σ就可以得到$U\cup_f\Sigma$为$(I\times U)\cup_H\Sigma$的强形变收缩核. 具体地, 记$q\colon(I\times U)\amalg\Sigma\to(I\times U)\cup_H\Sigma$为商映射, K如定理2.6.2的证明中所定义. 由商投射基本定理得到以下的商映射交换图.

$$\begin{array}{ccccc} I\times((I\times U)\amalg\Sigma) & \xrightarrow{K\amalg p} & (I\times U)\amalg\Sigma & & \\ {\scriptstyle 1_I\times q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & (p(s,w)=w) \\ I\times((I\times U)\cup_H\Sigma) & \xrightarrow{\overline{K}} & (I\times U)\cup_H\Sigma & & \end{array}$$

则$\overline{K}$为$U\cup_f\Sigma$相对$(I\times U)\cup_H\Sigma$的强形变收缩同伦. 同理可证$U\cup_g\Sigma$也为$(I\times U)\cup_H\Sigma$的强形变收缩核.

对偶地, 取Σ为独点空间, 则底空间上任一点b可以看成由Σ到B的映射f, 点b的纤维F_b就是导出的纤维映射的全空间$\Sigma\times_f E$, 底空间上的任一条道路u就为$I\times\Sigma$到B的同伦. 则定理2.6.4中后半部分的证明就是本定理的特例. 反之, 所以把定理2.6.4后半部分的证明中点b_i理解为映射, 把F_{b_i}理解为导出纤维映射的全空间, 把道路u理解为同伦, 就机械地得到以下的概念.

设$b_1,b_2\colon\Sigma\to B$为两个映射, $u\colon I\times\Sigma\to B$为连接$b_1$到$b_2$ 的同伦. 记b_k导出的纤维映射的全空间为$F_{b_k}=\Sigma\times_{b_k}E$. 取定义2.6.3中的$\Gamma=F_{b_1}$, 初始同伦$\Phi_u\colon I\times F_{b_1}\to B$为$\Phi_u(t,w,e)=u(t,w)$对所有$t\in I$和$(w,e)\in F_{b_1}$. 则$\Phi_u$ 的初始映射显然有提升映射i_{b_1}, 其中$i_{b_1}\colon F_{b_1}\to E$定义为$i_{b_1}(w,e)=e$对所有$(w,e)\in F_{b_1}$. 于是存在提升同伦$\widetilde{\Phi}_u\colon I\times F_{b_1}\to E$. 显然限制映射$\widetilde{\Phi}_u|_{1\times F_{b_1}}$为由$F_{b_1}$到$F_{b_2}$的映射. 记$(F_{b_1},u,F_{b_2})$所在的$[F_{b_1};F_{b_2}]$中的映射同伦类为$[F_{b_1},u,F_{b_2}]$. 则所有映射同伦类$[F_{b_1},u,F_{b_2}]$满足以下性质.

(1) 同伦类$[F_{b_1},u,F_{b_2}]$不依赖于同伦提升$\widetilde{\Phi}_u$的选取.

(2) 同伦类$[F_{b_1},u,F_{b_2}]$不依赖于u的选取, 即如果$u\simeq u'\operatorname{rel}\{0,1\}\times\Sigma$, 则$[F_{b_1},u,F_{b_2}]=[F_{b_1},u',F_{b_2}]$.

(3) 如果$u(1,w)=v(0,w)=b_2(w)$, 则$[F_{b_2},v,F_{b_3}][F_{b_1},u,F_{b_2}]=[F_{b_1},u*v,F_{b_3}]$.

(4) 每个映射(F_{b_1},u,F_{b_2})都为一同伦等价映射.

有了以上的概念, 本定理的证明在形式上和定理2.6.2的证明完全一样.

例2.6.10 对于 $f\colon X\to Y$ 为映射, 由推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {}^{i}\downarrow & & {}^{\widetilde{i}_f}\downarrow \\ \widetilde{C}(X) & \xrightarrow{\overline{f}} & \widetilde{C}_f \end{array}$$

可知内射 $\widetilde{i}_f\colon Y\to\widetilde{C}_f$ 为上纤维映射. 所以如果 $f\simeq g$, 则 $\widetilde{C}_f\simeq\widetilde{C}_g$.

对偶地, 由拉回

$$\begin{array}{ccc} P_f & \xrightarrow{\widetilde{f}} & P(Y) \\ {}^{p_f}\downarrow & & {}^{p}\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

可知映射 $p_f\colon P_f\to X$ 为纤维映射. 所以如果 $f\simeq g$, 则 $P_f\simeq P_g$.

同理, 对于保基点映射 $f\colon(X,x_0)\to(Y,y_0)$, 由推出

$$\begin{array}{ccc} (X,x_0) & \xrightarrow{f} & (Y,y_0) \\ {}^{i}\downarrow & & {}^{i_f}\downarrow \\ (C(X),*) & \xrightarrow{\overline{f}} & (C_f,*) \end{array}$$

可知内射 $i_f\colon(Y,y_0)\to(C_f,*)$ 为保基点上纤维映射. 所以如果 $f\simeq g$, 则 $(C_f,*)\simeq(C_g,*)$.

对偶地, 由拉回

$$\begin{array}{ccc} (P_f,(x_0,0)) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & (P(Y),0) \\ {}^{p_f}\downarrow & & {}^{p}\downarrow \\ (X,x_0) & \xrightarrow{f} & (Y,y_0) \end{array}$$

可知映射 $p_f\colon(P_f,0)\to(X,x_0)$ 为保基点纤维映射. 所以如果 $f\simeq g$, 则 $(P_f,*)\simeq(P_g,*)$.

定理2.6.11 上纤维映射 $i\colon A\to U$ 的映射锥空间 $\widetilde{C}_i$与U/A 同伦型. 如果 A可缩, 则 $U\simeq U/A$.

对偶地, 纤维映射 $p\colon E\to B$ 的映射纤维空间 P_p与任何一点的纤维F_b 同伦型. 如果 B可缩, 则 $E\simeq F_b$.

保基点上纤维映射 $i\colon(A,a)\to(U,u)$ 的映射锥空间 $(C_i,*)$与$(U/A,*)$ 同伦型. 如果 A保基点可缩, 则 $(U,u)\simeq(U/A,*)$.

对偶地, 保基点纤维映射 $p\colon(E,e)\to(B,b)$ 的映射纤维空间 $(P_p,(e,0))$与任何一点的纤维(F_b,e) 同伦型. 如果 B保基点可缩, 则 $(E,e)\simeq(F_b,e)$.

证 只证保基点情形. 定义 $\lambda,0\colon(A,a)\to(C(A),*)$ 分别为 $\lambda(u)=1\wedge u$, $0(u)=0\wedge u=*$ 对任何 $u\in A$. 则由于以下两个推出

$$\begin{array}{ccc} (A,a) & \xrightarrow{\lambda} & (C(A),*) \\ i\downarrow & & i_\lambda\downarrow \\ (U,u) & \xrightarrow{\overline{\lambda}} & (U\cup_\lambda C(A),*) \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} (A,a) & \xrightarrow{0} & (C(A),*) \\ i\downarrow & & i_0\downarrow \\ (U,u) & \xrightarrow{\overline{0}} & (U\cup_0 C(A),*) \end{array}$$

满足 $\lambda\simeq 0$, 所以 $C_i=(U\cup_\lambda C(A),*)\simeq(U\cup_0 C(A),*)=(C(A)\vee(U/A),*)\simeq(U/A,*)$.

如果 A可缩, 则由于以下两个推出

$$\begin{array}{ccc} (A,a) & \xrightarrow{1_A} & (A,a) \\ i\downarrow & & i\downarrow \\ (U,u) & \xrightarrow{1_A} & (U,u) \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} (A,a) & \xrightarrow{0} & (A,a) \\ i\downarrow & & i_0\downarrow \\ (U,u) & \xrightarrow{\overline{0}} & (U\cup_0 A,*) \end{array}$$

满足 $1_A\simeq 0$, 所以 $(U,u)\simeq(U\cup_0 A,*)=((U/A)\vee A,*\vee a)\simeq(U/A,*)$.

对偶地, 定义 $\lambda,0\colon(P(B),0)\to(B,b)$ 分别为$\lambda(\omega)=\omega(1)$, $0(\omega)=\omega(0)=b$, 对所有 $\omega\in P(B)$. 则由于以下两个拉回

$$\begin{array}{cccccccc}(P(B)\times_\lambda E,(0,e)) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} & (E,e) & \qquad & (P(B)\times_0 E,(0,e)) & \xrightarrow{\widetilde{0}} & (E,e)\\ p_\lambda\downarrow & & p\downarrow & & p_0\downarrow & & p\downarrow\\ (P(B),0) & \xrightarrow{\lambda} & (B,b) & & (P(B),0) & \xrightarrow{0} & (B,b)\end{array}$$

满足 $\lambda\simeq 0$, 所以 $(P_p,0)=(P(B)\times_\lambda E,(0,e))\simeq(P(B)\times_0 E,(0,e))=(P(B)\times F_b,(0,e))\simeq(F_b,e)$.

如果 B可缩, 则由于以下两个拉回

$$\begin{array}{cccccccc}(E,e) & \xrightarrow{1_E} & (E,e) & \qquad & (B\times_0 E,(e,0)) & \xrightarrow{\widetilde{0}} & (E,e)\\ p\downarrow & & p\downarrow & & p_0\downarrow & & p\downarrow\\ (B,b) & \xrightarrow{1_B} & (B,b) & & (B,b) & \xrightarrow{0} & (B,b)\end{array}$$

满足 $1_B\simeq 0$, 所以 $(E,e)\simeq(B\times_0 E,*)\cong(B\times F_b,(b,b))\simeq(F_b,b)$.

定理2.6.12 为了节省空间, 我们把所有的保基点映射同伦类集合 $[A,a_0;B,b_0]$简记为 $[A;B]$.

设 $i\colon(A,a)\to(U,u)$ 为保基点上纤维映射, $q\colon(U,u)\to(U/A,*)$ 为商映射. 则对任何带基点空间 (Z,z_0), 我们有集合的长恰当序列

$$\cdots\to[A;\Omega^{n+1}(Z)]\xrightarrow{\partial^*}[U/A;\Omega^n(Z)]\xrightarrow{q^*}[U;\Omega^n(Z)]\xrightarrow{i^*}[A;\Omega^n(Z)]\xrightarrow{\partial^*}[U/A;\Omega^{n-1}(Z)]\to\cdots$$

$$\cdots\to[A;\Omega(Z)]\xrightarrow{\partial^*}[U/A;Z]\xrightarrow{q^*}[U;Z]\xrightarrow{i^*}[A;Z],$$

其中 ∂^* 如下定义. 任取复合映射 $f\colon U/A\to C_i\to C_i/U\cong S(A)$, 其中前者为同伦等价映射, 后者为商映射. 则我们有导出的对应$f^*\colon[S(A);\Omega^n(Z)]\to[U/A;\Omega^n(Z)]$. 而存在群同构$\phi\colon[A;\Omega^{n+1}(Z)]\to[S(A);\Omega^n(Z)]$, 则 $\partial^*=f^*\phi$.

对偶地, 设 $p\colon(E,e)\to(B,b)$ 为保基点纤维映射, $j\colon(F,e)=(p^{-1}(b),e)\to(E,e)$ 为内射. 则对任何带基点空间 (W,w_0), 我们有集合的长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+1}(W),B]\xrightarrow{\partial_*}[S^n(W);F]\xrightarrow{j_*}[S^n(W);E]\xrightarrow{p_*}[S^n(W);B]\xrightarrow{\partial_*}[S^{n-1}(W),F]\to\cdots$$

$$\cdots\to[S(W);B]\xrightarrow{\partial_*}[W;F]\xrightarrow{j_*}[W;E]\xrightarrow{p_*}[W;B],$$

其中 ∂_* 如下定义. 任取复合映射 $f\colon\Omega(B)\to P_p\to F$, 其中前者为内射, 后者为同伦等价映射. 则我们有导出的对应$f_*\colon[S^n(W);\Omega(B)]\to[S^n(W);F]$. 而存在群同构$\psi\colon[S^{n+1}(W);B]\to[S^n(W);\Omega(B)]$, 则 $\partial_*=f_*\psi$.

证 定理2.3.15的特例, 取定理中的 f 为上纤维映射 i, 则 $(C_i,*)\simeq(U/A,*)$; 取定理中的 f 为纤维映射 p, 则 $(P_p,*)\simeq(F,e)$. 再互换$[S^n(-);(-)]$ 和 $[(-);\Omega^n(-)]$就得到本定理的结论.

定理2.6.13 设 K 为 S^n 的非退化真子空间, 则

$$(S^n\backslash K)^*\simeq S^n\vee\widetilde{S}(K),$$

其中 $\widetilde{S}(K)$ 的基点为 $[1,K]$.

设K和L分别为$\mathbb{R}^n$的非退化紧子空间和无界闭子空间, 并且L^*是$(\mathbb{R}^n)^*$的非退化子空间. 则

$$(\mathbb{R}^n\backslash K)^* \simeq S^n \vee \widetilde{S}(K) \vee S^1, \qquad (\mathbb{R}^n\backslash L)^* \simeq S^n \vee \widetilde{S}(L^*).$$

证 设K为S^n的非退化紧子空间, 由定理1.9.5, $(S^n\backslash K)^* \cong S^n/K$. 定理2.6.11, $S^n/K \simeq \widetilde{C}_i$. 而$i$不满, 于是$i \simeq 0$. 所以$S^n/K \simeq \widetilde{C}_0 = S^n \vee \widetilde{S}(K)$.

令$\phi\colon (\mathbb{R}^n)^* \to S^n$为同胚, 将无穷远点映到$S^n$上的点$*$. 设$K$为$\mathbb{R}^n$的非退化紧子空间, 由定理1.9.5, $(\mathbb{R}^n\backslash K)^* \cong S^n/(\phi(K)\amalg *)$. 由上结论, $S^n/(\phi(K)\amalg *) \simeq S^n \vee \widetilde{S}(\phi(K)\amalg *)$. 而$\widetilde{S}(\phi(K)\amalg *) = \widetilde{S}(K\amalg *) = \widetilde{C}_f$, 其中$f\colon \{0,1\} \to \widetilde{S}(K)$为将$0,1$分别映到$\widetilde{S}(K)$的两个顶点$[0,K]$和$[1,K]$的内射. 显然$f \simeq 0$. 所以$\widetilde{S}(K\amalg *) \simeq \widetilde{C}_0 = \widetilde{S}(K) \vee S^1$. 同理, 对于满足定理条件的$L$, $\phi(L\cup *) = \phi(L)^*$为$S^n$的非退化紧子集. 由上结论定理自然成立.

需要指出的是, 球面S^n或者$\mathbb{R}^n$的常见的(具有明确规则几何形象的, 比如闭子流形)子空间都是非退化的, 反而是退化的子空间需要专门构造.

例2.6.14 对于$0 \leqslant m < n$, $(\mathbb{R}^n\backslash \mathbb{R}^m)^* \cong (S^n\backslash S^m)^* \cong S^n/S^m \simeq S^n \vee S^{m+1}$, $(\mathbb{R}^n\backslash S^m)^* \simeq S^n \vee S^{m+1} \vee S^1$, 其中这里的$\mathbb{R}^n$的子空间$\mathbb{R}^m$和$S^m$可以是任意的非退化嵌入子空间.

习题 2.5

2.6.1. 设$i\colon A \to U$为映射, i的映射柱空间定义为$M_i = ((I\times A)\amalg U)/\!\sim$, 其中$(0,a) \sim i(a)$对所有$a \in A$. 记$M_i$中的点为$[s,a]$对$(s,a) \in I\times A$, $[u]$对$u \in U$. 则$[0,i(a)] = [i(a)]$对所有$a \in A$. 于是我们有内射$j\colon I\times A \to M_i$定义为$j(s,a) = [s,a]$. 证明$i$为上纤维映射, 当且仅当存在泛同伦$\Phi\colon I\times U \to M_i$使得下图可交换.

$$\begin{tikzcd}
I\times A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & M_i \\
I\times U \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

等价地, A为U的非退化子空间, 即内射$i\colon A \to U$为上纤维映射, 当且仅当$(I\times A)\cup(0\times U)$为$I\times U$的收缩核, 当且仅当$(I\times A)\cup(0\times U)$为$I\times U$的强形变收缩核.

2.6.2. 设$f\colon X \to Y$为(上)纤维映射, 证明对任何拓扑空间Z, $1_Z\times f\colon Z\times X \to Z\times Y$仍为(上)纤维映射. 证明保基点情形也成立.

2.6.3. 证明(上)纤维映射的复合映射仍为(上)纤维映射, 保基点(上)纤维映射的复合映射仍为(上)纤维映射.

2.6.4. 证明(上)纤维映射的乘积映射仍为(上)纤维映射, 保基点(上)纤维映射的乘积映射(不是压缩积!)仍为(上)纤维映射.

2.6.5. 空间偶(X,A)称为NDR偶(邻域强形变收缩核偶, 因为A为邻域$\lambda^{-1}([0,1))$的强形变收缩核), 如果存在映射$\lambda\colon X \to I$和$H\colon I\times X \to X$满足以下条件.

(1) $\lambda^{-1}(0)=A$.

(2) $H(0,x)=x$ 对所有 $x\in X$.

(3) $H(t,a)=a$ 对所有 $a\in A$.

(4) $H(1,x)\in A$ 对所有 $\lambda(x)<1$.

证明对于Hausdorff空间 X, 空间偶 (X,A) 为NDR偶, 当且仅当 A 为 X 的非退化子空间.

2.6.6. 设 A_i 为Hausdorff空间 X_i 的非退化子空间, $i=1,2$, 证明 $A_1{\times}A_2$ 和 $(A_1{\times}X_2)\cup(X_1{\times}A_2)$ 都为 $X_1{\times}X_2$ 的非退化子空间.

2.6.7. 设 H_i,λ_i 为使 (X_i,A_i) 成为NDR偶的同伦和映射, $B_i=\lambda_i^{-1}(1)$, $i=1,2$. 证明 $(A_1{\times}X_2)\cup(X_1{\times}A_2)$ 为 $(X_1{\times}X_2)\backslash(B_1{\times}B_2)$ 的强形变收缩核. 如果 B_i 的子空间 C_i 满足余空间 $X_i\backslash B_i$ 为 $X_i\backslash C_i$ 的强形变收缩核, 则 $(A_1{\times}X_2)\cup(X_1{\times}A_2)$ 为 $(X_1{\times}X_2)\backslash(C_1{\times}C_2)$ 的强形变收缩核. 由此证明 $(S^m{\times}S^n)\backslash(*,*)\simeq S^m{\vee}S^n$.

2.6.8. 设 Y 为Hausdorff空间 W 的子空间满足 $(W/Y,*)\cong(\widetilde{S}(X),*)$, 其中 X 为紧Hausdorff空间, $\widetilde{S}(X)$ 的基点为 $[1,X]$. 记 $q\colon W\to W/Y$ 为商映射. 如果 Y 为 $W\backslash w$ 的强形变收缩核, 其中 w 同胚映到 $\widetilde{S}(X)$ 的顶点 $[0,X]$, 则存在 $f\colon X\to Y$ 使得 $W\cong\widetilde{C}_f$. 由此证明 $S^m{\times}S^n\cong\widetilde{C}_{\psi_{m,n}}$.

2.6.9. 证明对于 $n>m$, $\mathbb{R}^n\backslash S^m\simeq S^{n-1}{\vee}S^{n-m-1}$.

2.6.10. 假设 A 为 U 的非退化子空间, $\sim$ 为 A 上的等价关系, 自然也是 U 上的等价关系. 证明商空间 $A/{\sim}$ 仍为 $X/{\sim}$ 的非退化子空间.

2.6.11. 证明如果Hausdorff空间 X 的基点非退化, 则 $\widetilde{S}(X)\simeq S(X)$; 如果Hausdorff空间 X,Y 上都存在非退化点, 则 $\widetilde{S}(X\amalg Y)\simeq S(X){\vee}S(Y){\vee}S^1$.

2.6.12. 证明如果 x 为 X 的非退化点, 则对任何道路连通空间 Y, 空间 $(X\vee Y,x{\vee}y)$ 的伦型不依赖于基点 y 的选取.

2.6.13. 求以下空间的一点紧化空间的标准伦型, 即每个连通分支为若干已知空间的一点并空间.

(1) 局部紧Hausdorff空间 X 抠去 $k>1$ 个非退化点(X 的一点紧化空间的无穷远点非退化).

(2) n维闭流形 M 抠去一个同胚于 S^{n-1} 的子空间 N, 其中 N 为 M 的一个同胚于 D^n 的子空间 D 的边界.

(3) n维闭流形 M 抠去 $k>1$ 个同胚于 S^{n-1} 的子空间 $N_1,\cdots,N_k$, 其中每个 N_i 为 M 的一个同胚于 D^n 的子空间 D_k 的边界, $N_1,\cdots,N_k$ 彼此互不相交.

(4) $\mathbb{R}^3$抠去k条平行的直线.

(5) $\mathbb{R}^3$抠去k条相交于一点的直线.

(6) $\mathbb{R}^3$抠去k个互不相交的嵌入圆S^1.

(7) $\mathbb{R}^3$抠去k个只相交于一点的嵌入圆S^1.

(8) $\mathbb{R}^3$抠去k个球心在一条直线上, 相邻球心距离为4, 半径为1的球面S^2.

(9) $\mathbb{R}^3$抠去k个球心在一条直线上, 相邻球心距离为2, 直径为1的球面S^2.

2.6.14. 证明以下空间和它的一点紧化空间的伦型等式.

(1) $(S^m{\times}S^n)\backslash(*,*)\simeq S^m{\vee}S^n$, $\big((S^m{\times}S^n)\backslash(*,*)\big)^*\simeq S^m{\times}S^n$.

(2) $(S^m{\times}S^n)\backslash(S^m{\times}*)\simeq S^n$, $\big((S^m{\times}S^n)\backslash(S^m{\times}*)\big)^*\simeq S^{m+n-1}{\vee}S^n$ ($\simeq S^0$ 如果 $m=n=0$).

(3) $S^{m+n+1}\backslash S^n\simeq S^m$, $\big(S^{m+n+1}\backslash S^n\big)^*\simeq S^{m+n+1}{\vee}S^{n+1}$.

(4) $\mathbb{R}^{m+n+1}\setminus\mathbb{R}^n\simeq S^m$, $\big(\mathbb{R}^{m+n+1}\setminus\mathbb{R}^n\big)^*\simeq S^{m+n+1}{\vee}S^{n+1}$.

(5) $\mathbb{R}^{m+n+1}\setminus S^n\simeq S^{m+n}{\vee}S^m$, $\big(\mathbb{R}^{m+n+1}\setminus S^n\big)^*\simeq S^{m+n+1}{\vee}S^{n+1}{\vee}S^1$.

(6) $S^{m+n+1}\backslash(S^m\amalg i(S^n))\simeq S^m{\times}S^n$, $S^{m+n+1}\backslash(i_1(S^m)\amalg i_2(S^n))\simeq S^{m+n}{\vee}S^m{\vee}S^n$,

$\big(S^{m+n+1}\backslash(S^m\amalg i(S^n))\big)^*\simeq S^{m+n+1}{\vee}S^{m+1}{\vee}S^{n+1}{\vee}S^1\simeq\big(S^{m+n+1}\backslash(i_1(S^m)\amalg i_2(S^n))\big)^*$,

其中 i 把 S^n 嵌入到 S^{m+n+1} 中由前$m{+}1$ 个坐标为 0 的点构成的子空间, i_1 把 S^m 嵌入到 S^{m+n+1} 中由前$n{+}1$ 个坐标为 0, 最后一个坐标为 $\frac{1}{2}$ 的点构成的子空间, i_2 把 S^n 嵌入到 S^{m+n+1} 中由前$m{+}1$ 个坐标为 0, 最后一个坐标为 $-\frac{1}{2}$ 的点构成的子空间.

2.7 CW复形的基本性质

由于CW的胞腔个数可以是无穷, 所以我们必须承认以下的Zorn引理. 由于在实际应用当中我们的偏序集总是取以集合为元素的集族, 所以下述公理中的集合总是用花写字母$\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$等表示.

若偏序集 $\mathscr{S}$ (满足自反性和传递性, $x<y$ 意为 $x\leqslant y$ 但 $x\neq y$) 满足任何一个全序子集 $\mathscr{T}$ ($\mathscr{T}$ 中任两个不同的元都有严格的大小关系)都有上界 b ($t\leqslant b$对所有 $t\in\mathscr{T}$), 则 $\mathscr{S}$ 一定有极大元 m (不存在 $n\in\mathscr{S}$ 使得 $m<n$).

我们只需要$\mathscr{S}$ 和偏序$\leqslant$为以下特殊情形的Zorn引理. 设 X^n 为某个(相对)CW复形的 n维框架, 记 $\mathscr{B}$ 为由 X^n 的所有包含$n{-}1$维框架 X^{n-1} 的子复形构成的集合. 我们总是取 $\mathscr{S}$ 为由所有定义在某个$U\in\mathscr{B}$上的满足性质P 的数学对象f_U构成的集合. 注意, 对于同一个 $U\in\mathscr{B}$, 可以有不同的定义在U 上, 满足性质P 的数学对象, 也就是说一般总有 $f_U,g_U,h_U,\cdots\in\mathscr{S}$但 $f_U,g_U,h_U,\cdots$ 是互不相同的数学对象. $\mathscr{S}$ 的偏序总是与子复形之间的扩张关系一致, 即偏序$\leqslant$满足以下性质.

(1) *如果 $f_U\leqslant g_V$, 则 U 为 V 的子复形并且 $f_U=g_V$ 当且仅当 $U=V$.*

因此, 当两个$\mathscr{S}$ 中的对象满足偏序关系$f_U\leqslant g_V$时, 称 f_U 为 g_V 的一个限制对象, 称 g_V 为 f_U 的一个扩张对象. 当两个$\mathscr{S}$ 中的对象满足严格大小关系$f_U<g_V$时, 称 f_U 为 g_V 的一个真限制对象, 称 g_V 为 f_U 的一个真扩张对象. 设 $\mathscr{T}$ 为 $\mathscr{S}$ 的一个全序子集. 则对于任何 $f_U\in\mathscr{T}$, 如果 $g_V\in\mathscr{T}$ 且 $g_V\neq f_U$, 则 $V\neq U$. 因此我们可以同样的符号f 和不同的下标集来表示$\mathscr{T}$ 中的元素, 也就是说可以令 $\mathscr{T}=\{f_U\}_{U\in\Lambda}$. 我们所讨论的性质$P$总是满足以下扩张不变性.

(2) *对于 $\mathscr{S}$ 的任何一个全序子集 $\mathscr{T}=\{f_U\}_{U\in\Lambda}$, 存在 $\mathscr{S}$ 的唯一的扩张对象f_V, 其中 $V=\cup_{U\in\Lambda}U$, 满足 f_V在每一个U 上的限制对象为 f_U.*

这说明 f_V 为 $\mathscr{T}$ 的一个上界. 于是由Zorn引理, $\mathscr{S}$存在极大元. 一般情况下, $\mathscr{S}$ 的极大元f_U并不唯一而且它的下标集U 可以是 W^n 的真子复形. 如果我们能够证明以下结论.

(3) *对于 $f_U\in\mathscr{S}$, 其中 U 为 W^n 的真子复形, 任取 e^n_α 为不在U 中的一个n-胞腔, 令 $V=U{\cup}e^n_\alpha$, 则存在 $g_V\in\mathscr{S}$并且g_V 为 f_U 的一个扩张对象.*

那么我们就能够得到以下结论.

(4) *$\mathscr{S}$ 的极大元一定形如 h_{W^n}.*

以上结论成立是因为假设 $\mathscr{S}$ 的一个极大元 f_U 满足 U 为 W^n 的真子复形, 则(3)中的 g_V 的存在性与 f_U 为 $\mathscr{S}$ 的极大元矛盾!

由于我们经常需要以上的证明, 为了节省文字空间, 我们总是将以上证明中性质(1)和(2)的叙述省略, 把结论(3)和(4)连在一起说.

定理2.7.1 设 (X, A) 为相对CW复形, 则内射 $i\colon A \to X$ 为上纤维映射.

证 假设我们有以下左边初始映射交换图和右边待定的同伦的交换图(虚箭头待定),

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ X \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times X \arrow[ur, dotted, "\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

我们归纳地将 $\overline{\Phi}$ 定义到骨架 X^n 上. 对于 $n=0$ 和 X 的不在 A 中的顶点 x, 定义 $\overline{\Phi}_0(t,x) = \overline{\phi}(x)$ 对所有 $t \in I$. 由于 X^0 为 A 和一个离散空间的不交并, 所以 $\overline{\Phi}_0$ 显然满足以下同伦的交换图.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ X^0 \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times X^0 \arrow[ur, "\overline{\Phi}_0"'] & \end{tikzcd}$$

假设对于 $n \geqslant 1$, 我们有以下初始映射和同伦的交换图.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ X^{n-1} \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times X^{n-1} \arrow[ur, "\overline{\Phi}_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

现证明以上交换图可以扩张到 X^n 上. 记 $\mathscr{B}$ 为由 X^n 的所有包含 $n-1$ 维框架 X^{n-1} 的子复形构成的集合. 定义 $\mathscr{S}$ 的一般元素 f_U 既代表以下的两个交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ U \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times U \arrow[ur, "f_U"'] & \end{tikzcd}$$

又代表右边交换图中的映射 f_U, 其中交换图中的 U 要求属于 $\mathscr{B}$, 映射 f_U 要求为 $\overline{\Phi}_{n-1}$ 的扩张映射. $\mathscr{S}$ 的偏序关系定义为 $f_U \leqslant g_V$, 如果 U 为 V 的子复形并且映射 f_U 为 g_V 的限制映射. 对于 $f_U \in \mathscr{S}$, 其中 U 为 X^n 的真子复形, 任取一个不属于 U 的胞腔 e^n_α, 记 $V = U \cup e^n_\alpha$. 则内射 $i_\alpha\colon U \to V$ 为上纤维映射, 因为 V 为粘合映射 ψ^n_α 的映射锥空间. 于是复合内射(为了简单仍记为 i) $i\colon A \to U \to V$ 仍为上纤维映射. 所以我们有以下同伦的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ V \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times V \arrow[ur, "g_V"'] & \end{tikzcd}$$

这说明 $g_V \in \mathscr{S}$. 所以 $\mathscr{S}$ 存在极大元形如 h_{X^n}, 记 h_{X^n} 为 $\overline{\Phi}_n$, 即下图左边的初始映射的交换图可以得到右

边的同伦交换图.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ X^n \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times X^n \arrow[ur, "\overline{\Phi}_n"'] & \end{tikzcd}$$

归纳完成. 于是我们由以下左边初始映射的交换图, 就得到右边的同伦映射的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma \\ X \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\times A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "1_I\times i"'] & \Gamma \\ I\times X \arrow[ur, "\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

满足 $\overline{\Phi}$ 限制在 $I\times X_n$ 上为 Φ_n. 由弱拓扑性可知 Φ 连续.

定理2.7.2 为了节省空间, 我们把所有的保基点映射同伦类集合 $[A,a_0;B,b_0]$ 简记为 $[A;B]$.

设 (X,A) 为相对CW复形, $i\colon (A,x_0)\to(X,x_0)$ 为保基点内射, $q\colon (X,x_0)\to(X/A,*)$ 为商映射. 则对任何带基点空间 (Z,z_0), 我们有集合的长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} [X/A;\Omega^n(Z)] \xrightarrow{q^*} [X;\Omega^n(Z)] \xrightarrow{i^*} [A;\Omega^n(Z)] \xrightarrow{\partial^*} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} [X/A;\Omega(Z)] \xrightarrow{q^*} [X;\Omega(Z)] \xrightarrow{i^*} [A;\Omega(Z)] \xrightarrow{\partial^*} [X/A;Z] \xrightarrow{q^*} [X;Z] \xrightarrow{i^*} [A;Z],$$

其中 ∂^* 如下定义. 任取复合映射 $f\colon X/A\to C_i\to C_i/X\cong S(A)$, 其中前者为同伦等价映射, 后者为商映射. 则我们有导出的对应 $f^*\colon [S(A);\Omega^n(Z)]\to[X/A;\Omega^n(Z)]$. 而存群同构 $\phi\colon [A;\Omega^{n+1}(Z)]\to[S(A);\Omega^n(Z)]$, 则 $\partial^*=f^*\phi$.

证 取定理2.6.12的 (U,A) 为本定理的 (X,A).

当取以上定理中的 Z 为特殊的Eilenberg-Maclane空间的时候, 定理中的恰当序列等价地可以得到约化上同调群的恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^{n-1}(A;G) \xrightarrow{\partial^*} \widetilde{H}^n(X/A;G) \xrightarrow{q^*} \widetilde{H}^n(X;G) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^n(A;G) \xrightarrow{\partial^*} \widetilde{H}^{n+1}(X/A;G) \xrightarrow{q^*} \cdots,$$

该序列等价于另一种形式的上同调序列

$$\cdots \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A;G) \xrightarrow{\partial^*} H^n(X,A;G) \xrightarrow{q^*} H^n(X;G) \xrightarrow{i^*} H^n(A;G) \xrightarrow{\partial^*} H^{n+1}(X,A;G) \xrightarrow{q^*} \cdots,$$

而Poncaré首先定义并发现的则是对偶的有限单纯复形的同调群恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{q_*} H_{n+1}(X,A;G) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A;G) \xrightarrow{i_*} H_n(X;G) \xrightarrow{q_*} H_n(X,A;G) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A;G) \xrightarrow{i_*} \cdots,$$

从而确立了代数拓扑学的产生.

定义2.7.3 拓扑空间 X 称为 n $(n>0)$ 连通的, 如果 X 是道路连通的并且

$$\pi_k(X,x_0)=0 \text{ 对 } k=1,\cdots,n,$$

其中 n 可以是 ∞. 特别地, 1 连通又称为单连通, 道路连通也称为0 连通.

空间偶 (X,A) 称为0 连通的, 如果 X 的每一个道路连通分支与 A 的交都非空. 对于 $n>0$, 空间偶 (X,A) 称为 n 连通的, 如果 (X,A) 是 0 连通的并且

$$\pi_k(X,A,x_0)=0 \text{ 对 } k=1,\cdots,n \text{ 和所有 } x_0\in A,$$

其中 n 可以是 ∞. 等价地, 由定理2.3.17中的恰当序列可知, (X,A) 为 n 连通的, 当且仅当内射导出的同伦群同态 $i_*\colon \pi_k(A,x_0)\to\pi_k(X,x_0)$ 为同构对 $k=1,\cdots,n{-}1$ 和所有 $x_0\in A$; 为满同态对 $k=n$ 和所有 $x_0\in A$.

映射 $f\colon X\to Y$ 称为0 等价的, 如果 Y 的每一个道路连通分支与 $f(X)$ 的交都非空. 映射 $f\colon X\to Y$ 称为 n $(n>0)$ 等价的, 如果 f 是 0 等价的并且 f 导出的同伦群同态

$$f_*\colon \pi_k(X,x_0)\to\pi_k(Y,f(x_0))$$

为同构对 $k=1,\cdots,n{-}1$ 和所有 $x_0\in X$; 为满同态对 $k=n$ 和所有 $x_0\in X$. 以上定义中 n 可以是 ∞. ∞ 等价映射又称为弱同伦等价映射.

定理2.7.4 设 $f\colon X\to Y$ 为一 n 等价映射, 其中 $n>0$ 可以为无穷. 则以下结论成立.

(1) 对于 $0<r\leqslant n$ 和满足 $fh=g|_{S^{r-1}}$ 的两个映射 $h\colon S^{r-1}\to X$ 和 $g\colon D^r\to Y$, 存在 h 的扩张映射 $h'\colon D^r\to X$ 满足 $fh'\simeq g\,\mathrm{rel}S^{r-1}$ (是相对同伦, 不是等号!). 换句话说, 由下图左边限制映射 $g|_{S^{r-1}}$ 的提升映射 h能够得到右边映射 g 的相对 S^{r-1} 同伦的提升映射 h'.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ S^{r-1} \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g|_{S^{r-1}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ D^{r} \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(2) 对任何维数不超过n的相对CW复形 (W,A), $g\colon W\to Y$ 和满足 $fh=g|_A$ 的映射 $h\colon A\to X$, 存在 h 的相对 A 同伦的扩张映射 $h'\colon W\to X$ 满足 $fh'\simeq g\,\mathrm{rel}A$. 换句话说, 由下图左边限制映射 $g|_A$ 的提升映射 h能够得到右边映射 g 的相对 A 同伦的提升映射 h'.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g|_{A}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ W \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(3) 对任何维数小于 n 的CW复形 W, $f_*\colon [W;X]\to[W;Y]$ 为双射; 对于 n维CW复形 W, $f_*\colon [W;X]\to[W;Y]$ 为满射.

(4) (Whitehead) 如果 $n=\infty$, 即 f 为弱同伦等价映射, 则对任何CW复形 W, f 导出的同伦类对应 $f_*\colon [W;X]\to[W;Y]$ 为双射. 如果以上的 X 和 Y 还都是CW复形, 则 f 就是同伦等价映射. 换个说法, CW复形间的映射为弱同伦等价映射, 当且仅当它为同伦等价映射.

以上结论对保基点映射也成立.

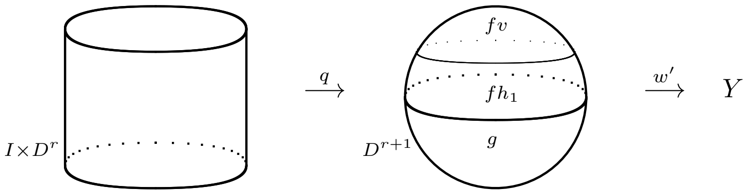
证 只证非保基点情形.

(1) 我们可以假设 X 和 Y 都是道路连通的, 这样对于任何拓扑空间 W, $[W;X]$ 和 $[W;Y]$ 中有唯一的零类, 即任一常值映射所在的同伦类. 由于 $f_*\colon [S^{r-1};X]\to[S^{r-1};Y]$ 为同构, 而 $[g|_{S^{r-1}}]\in[S^{r-1};Y]$ 显然因为有扩张映射 g而代表零类, 因此 $[h]\in[S^{r-1};X]$ 也代表零类, 因而 h 有扩张映射 $h_1\colon D^r\to X$. 把 D^r 分别看成上下半球面$S^r_\pm$, 则我们有映射 $u\colon S^r\to Y$ 满足 u 限制在 S^r_+ 上为 fh_1, 限制在 S^r_- 上为 g. 由于 $f_*\colon [S^r;X]\to$

$[S^r;Y]$ 为满射, 所以存在 $v\colon S^r\to X$ 满足 $f_*[v]$ 为 $[u]$ 的逆类, 即 $[fv]+[u]$ 为零类. 定义 $h'\colon D^r=\widetilde{C}(S^{r-1})\to X$ 为

$$h'([t,x])=\begin{cases} v([2t,x]) & t\in[0,\frac{1}{2}],\,x\in S^{r-1},\\ h_1([2t-1,x]) & t\in[\frac{1}{2},1],\,x\in S^{r-1},\end{cases}$$

这里我们把 v 的定义域 S^r 看成 $\widetilde{C}(S^{r-1})$, 所以 $h'(\frac{1}{2},x)=v([1,x])=v([1,0])$ 对所有 $x\in S^{r-1}$. 则我们有映射 $w\colon S^r\to Y$ 满足 w 限制在 S^r_+ 上为 fh', 限制在 S^r_- 上为 g. 显然 $[S^r;Y]$ 中的同伦类$[w]=[fh']+[g]=[fv]+[u]$ 为零类. 所以 w可以扩张到$w'\colon D^{r+1}\to Y$ 上. 把 D^{r+1} 看成 $(I\times D^r)/\sim$, 其中 $(t,x)\sim(t',x)$ 对所有 $t\in[0,1]$ 和 $x\in S^{r-1}$. 记 $q\colon I\times D^r\to D^{r+1}$ 为商映射, 则 $H=w'q$就是连接 fh' 到 g 的相对同伦, 如下图所示.



其中 $H(0,-)=fh'(-)$, $H(1,-)=g(-)$, $H(t,x)=g(x)=(fh)(x)$ 对所有 $x\in S^{r-1}$.

(2) 为了节省空间, 以下证明中省略所有的相对于 A 的字样. 我们对 (W,A) 的骨架 W^r 做归纳证明存在 $h\colon W\to X$ 使得 $fh\simeq g$. 不妨假设 $n=\infty$. 首先将h扩张为 $h_0\colon W^0\to X$. 对于 $w\in W^0\backslash A$, 定义 $h_0(w)$ 为满足 $f(h_0(w))$与$g(w)$在同一个道路连通分支的任一点, 则显然 $fh_0\simeq g|_{W_0}$. 而 W^0 为 W 的非退化子空间, 所以连接 $g|_{W^0}$ 到 fh_0 的同伦映射可以扩张为同伦映射 $H_1\colon I\times W\to Y$ 使得 $g(-)=H_1(0,-)$, $g_1(-)=H_1(1,-)$ 满足 $g_1|_{W_0}=fh_0$. 假设对 $r>0$, 满足 $fh_{r-1}\simeq g_{r-1}|_{W^{r-1}}$ 的 $h_{r-1}\colon W^{r-1}\to X$ 和 $g_{r-1}\colon W\to Y$ 已经定义, 并且存在连接 g_{r-1} 到 g_r 的同伦映射 $H_r\colon I\times W\to Y$ 使得 $g_r|_{W^{r-1}}=fh_{r-1}$. 记 $\mathscr{B}$ 为由 W^r 的所有包含$r-1$维框架 W^{r-1} 的子复形构成的集合. 定义 $\mathscr{S}$ 的一般元素h_U, 其中 $U\in\mathscr{B}$, $h_U\colon U\to X$ 为 h_{r-1} 的扩张映射, 满足 $fh_U\simeq g_{r-1}|_U$. 对于 $h_U\in\mathscr{S}$, 其中 U 为 W^r 的真子复形, 由(1)不难证明任取不属于 U 的 r-胞腔e^r_α, 记 $V=U\cup e^r_\alpha$, 则 h_U可以扩张到为的映射 $h_V\colon V\to X$ 满足 $fh_V\simeq g_{r-1}|_V$. 所以 $\mathscr{S}$存在极大元$h_{W^r}\colon W^r\to X$, 满足 $fh_{W^r}\simeq g_{r-1}|_{W^r}$. 记 h_{W^r} 为 h_r. 由于 W^r 为 W 的非退化子空间, 所以连接 $g_{r-1}|_{W^r}$ 到 fh_r 的同伦可以扩张为同伦 $H_{r+1}\colon I\times W\to Y$ 使得 $g_r(-)=H_{r+1}(0,-)$, $g_{r+1}(-)=H_{r+1}(1,-)$ 满足 $g_{r+1}|_{W^r}=fh_r$. 归纳完成. 所以存在 $h\colon W\to X$ 满足 h 限制在 W^r 上为 h_r并且$fh_r=g_{r+1}|_{W^r}$, 而且还存在连接 g_r 到 g_{r+1} 的同伦 H_r. 定义 $H\colon I\times W\to Y$ 如下表示意.

	W^0	$W^1\backslash W^0$	$W^2\backslash W^1$	$W^3\backslash W^2$	$\cdots$
$[0,\frac{1}{2}]$	H_1	H_1	H_1	H_1	$\cdots$
$[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$	fh_0	H_2	H_2	H_2	$\cdots$
$[\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$	fh_0	fh_1	H_3	H_3	$\cdots$
$[\frac{3}{4},\frac{4}{5}]$	fh_0	fh_1	fh_2	H_4	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

即

$$H(t,w)=\begin{cases} H_{r+1}((r+1)(r+2)(t-\frac{r}{r+1}),w) & w\in W^r\backslash W^{r-1},\ t\in[\frac{r}{r+1},\frac{r+1}{r+2}],\\ fh_r(w) & w\in W^r\backslash W^{r-1},\ t\in[\frac{r+1}{r+2},1].\end{cases}$$

则 H 为连接 g 到 fh 的相对同伦.

(3) 当取(2)中的 $A=\emptyset$时, 我们有 $f_*\colon [W,X]\to[W,Y]$ 为满射. 下面证明当 W 的维数小于 n时, f_* 为单射. 假设对于映射 $h_1,h_2\colon W\to X$, 我们有 $fh_1\simeq fh_2$, H 为连接 fh_1 到 fh_2 的同伦. 取(2)中的相对CW复形 (W,A) 为CW复形偶 $(I\times W,\{0,1\}\times W)$, 取(2)中的 h 限制在 $0\times W$ 上为 h_1, 限制在 $1\times W$ 上为 h_2, 取(2)中的 g 为为连接同伦 H. 则存在 $h\colon W\to I\times X$ 满足相对同伦 $fh\simeq g$. 显然 h 为连接 h_1 到 h_2 的同伦, 即 $h_1\simeq h_2$. 所以 f_* 为单射.

(4) 对于弱同伦等价映射 $f\colon X\to Y$, 利用(3)对骨架做归纳不难得出以下结论, 对任何CW复形 W, $f_*\colon [W;X]\to[W;Y]$ 为双射. 特别地, 取 $W=Y$, 则对于 $[1_Y]\in[W;Y]$, 存在 $g\colon W{=}Y\to X$ 满足 $f_*[g]=[1_Y]$, 即 $fg\simeq 1_Y$. 而 $f_*[gf]=[fgf]=[f]=f_*[1_X]$. 由于 f_* 为双射, 所以 $gf\simeq 1_X$. 这说明 f 为同伦等价映射.

注意, 如果两个CW复形各阶同伦群只是从纯代数角度上看是同构的, 这个代数的同构不是由映射导出的, 那么两个CW复形不一定同伦型.

定义2.7.5 一个1维CW复形又称为一个图. 图的边(1-胞腔)有两类, 一类边 e 的边界 $\dot{e}$ 为一个顶点 v, 则 e作为子空间同胚于 S^1, 称 v 为 e 的边点; 另一类 e 的边界 $\dot{e}$ 为两个顶点 u,v, 则 e作为子空间同胚于 I, 称 u,v 为 e 的边点. 称同为某个边的边点的两个顶点为相邻的顶点.

一个可缩的图称为一个树.

定理2.7.6 我们有以下连通性和伦型关系的结论.

(1) 任何0连通的, 即道路连通的CW复形都与一个只有一个顶点(0胞腔)的CW复形同伦型. 特别地, 任何图 G 都与若干 S^1 的一点并空间 $\vee_{\alpha\in\Lambda}S^1_\alpha$ ($S^1_\alpha\cong S^1$) 同伦型, 下标集 Λ 的势称为图 G 的秩, 记为 $r(G)$. 特别地, 树的秩为0, 空集个 S^1 的一点并空间为独点空间.

(2) 对于 $n\geqslant 1$, 任何一个 n连通的CW复形都与一个只有一个顶点, 其余胞腔的最小维数为 $n{+}1$ 的CW复形同伦型. 特别地, n连通的 $n{+}1$维CW复形 X 与若干 S^{n+1} 的一点并空间 $\vee_{\alpha\in\Lambda}S^{n+1}_\alpha$ ($S^{n+1}_\alpha\cong S^{n+1}$) 同伦型, 下标集 Λ 的势称为 X 的秩, 记为 $r(X)$. 特别地, 空集个 S^n 的一点并空间定义为独点空间.

(3) 任何0连通的相对CW复形 (X,A) 都与一个没有0胞腔的相对CW复形 (Y,A) 相对同伦型, 即 X 和 Y 相对于 A 同伦等价.

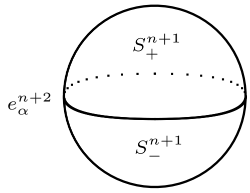
(4) 对于 $n\geqslant 1$, 任何一个 n连通的CW复形 (X,A) 都有一个胞腔的最小维数为 $n{+}1$ 的相对CW复形 (Y,A) 相对同伦型, 即 X 和 Y 相对于 A 同伦等价.

证 (1) 我们首先证明以下结论: 道路连通的CW复形 X存在子复形 T 为最大树, 即 T 为树并且 T 的顶点集就是 X 的顶点集. 记 X 的顶点集为 S, 记 $\mathscr{B}$ 为 S 的所有子集构成的集合. 取 $\mathscr{S}$ 为所有以 $\mathscr{B}$ 中的某个元素 U 为顶点集并且为 X 的子复形的树 T_U 构成的集合, $\mathscr{S}$ 的偏序关系定义为树的包含关系, 即两个树满足 $A\leqslant B$ 如果 A 为 B 的子复形. 对于 $T_U\in\mathscr{S}$, 其中 U 为 S 的真子集, 由 X 的道路连通性可知存在 X 的顶点 u 和 v 满足以下性质. $v\notin U$ 中, $u\in U$, y,z 相邻, 记连接 u,v 的边为 e. 显然 e不是 T_U 的边. 令 T_V 为 T_U加上顶点 z 和边 e构成的 X 的子复形, $V=U\cup z$. 由于 T_U 为树, 所以 $T_V\simeq T_V/T_U$ 与 T_V 同伦型. 而 T_V/T_U与 I 同胚是可缩的, 所以 T_V仍然为树, 即 $T_V\in\mathscr{S}$. 所以 $\mathscr{S}$存在最大元形如 T_S, 而 T_S就是 X 的一个最大树.

任取 X 的一个最大树 T. 由于 T可缩, 所以 $X\simeq X/T$. 而 X/T只有一个顶点.

(2) 我们对 n作归纳. (1)为 $n=0$时的命题. 假设定理对 $1\leqslant k\leqslant n$成立. 设 X 为 $(n{+}1)$连通的CW复形, 则 X也是 n连通的. 由归纳假设, 我们可以假设 X只有一个顶点, 其余胞腔维数最小为 n, 也就是说 X 的 n维

骨架 $X^n=\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha$, 其中每个$S^n_\alpha\cong S^n$. 记 $i^n_\alpha\colon S^n\to X^n$ 为到 S^n_α 的内射, 则 $Y=X^n\cup_{i^n_\alpha}\{D^{n+1}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}=\vee_{\alpha\in\Lambda}C(S^n_\alpha)$ 为可缩CW复形. 由于 $\pi_n(X,*)=0$, 所以 i^n_α在 X 中零伦, 因此存在 i^n_α 的扩张映射 $f_\alpha\colon S^{n+1}_+\to X$. 记 $g_\alpha\colon S^{n+1}_-\to D^{n+1}_\alpha(\subset Y)$ 为同胚映射. 则我们得到一个映射 $\psi^{n+1}_\alpha\colon S^{n+1}\to X\cup Y$ 满足在上下半球面上的限制分别为 f_α 和 g_α. 令 $Z=(X\cup Y)\cup_{\psi^{n+1}_\alpha}\{D^{n+2}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 下面证明 X 为 Z 的强形变收缩核. 记 e^{n+2}_α 为 D^{n+2}_α 对应的 Z 的胞腔. 把 D^{n+2}_α 看成商空间 $(I\times D^{n+1}_\alpha)/\sim$, 其中 $(t,x)\sim(t',x)$ 都所有 $t\in[0,1]$ 和 $x\in S^n$, 则 $I\times D^{n+1}_\alpha$ 的子空间 $0\times D^{n+1}_\alpha$仍为商空间 $(I\times D^{n+1}_\alpha)/\sim$ 的子空间, 所以我们可以把该子空间可以视为 f_α 的定义域空间 S^{n+1}_+. 同样, $I\times D^{n+1}_\alpha$ 的子空间 $1\times D^{n+1}_\alpha$仍为商空间 $(I\times D^{n+1}_\alpha)/\sim$ 的子空间, 所以我们可以把该子空间可以视为 g_α 的定义域空间 S^{n+1}_-. 由 $0\times D^{n+1}_\alpha$ 为 $I\times D^{n+1}_\alpha$ 的强形变收缩核, 再加上S^{n+1}_- 在 Z 中并不是任何胞腔的真面, 就可以看出每个S^{n+1}_+ 为 e^{n+2}_α 的强形变收缩核, 如下图所示.



其中 S^{n+1}_+以 f_α 的方式粘合到 X 上, $S^{n+1}_-\cong D^{n+1}_\alpha$不是任何胞腔的真面. 由CW复形的弱拓扑性, 这些强形变收缩核同伦可以粘和成 Z 到 X 的强形变收缩同伦. 所以 X 为 Z 的强形变收缩核. 由于 Y 为 Z 的可缩子复形, 并且内射为上纤维映射, 所以 $X\simeq Z\simeq Z/Y$. 而 Z/Y没有 n-胞腔, 满足定理条件.

相对CW复形的情形(3),(4)的证明完全类似.

0维CW复形就是离散空间. 由上定理, 道路连通的1维CW复形与若干S^1 的一点并空间同伦型. 而道路连通的2维CW复形的伦型也有与群表示对应的典型构造.

定义2.7.7 群 G 的一个组合表示$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ 如下定义. S 为字母集(不允许含形如 x^{-1} 的字母!), 每个r_α 都是由 S 中的字母写成的约化字(允许出现形如 x^{-1} 的字母, 但不允许出现形如 $Axx^{-1}B$ 或$Ax^{-1}xB$ 的字). 对于 $\alpha\neq\beta$, 允许 $r_\alpha=r_\beta$, 也允许 r_α是空字1. 我们有群同构

$$G\cong F(S)/N(\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),$$

其中 $F(S)$ 为 S生成的自由群, $N(-)$ 表示由 $(-)$ 中的元生成的 $F(S)$ 的正规子群. 称 S 为生成元集, $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为零关系集. 我们不区分群 G 和 $F(S)/N(\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 把后者写成 $F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. 群 G 称为有限生成的, 如果 G存在生成元集有限的表示, 即 $G\cong F(x_1,\cdots,x_n;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中 $S=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为有限集. 群 G 称为有限表示的, 如果 G存在生成元集和零关系集都有限的表示, 即 $G\cong F(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_s)$, 其中 $\{r_1,\cdots,r_s\}$ 为有限零关系集.

对于 $F(S)$ 中的任何一个字r(可以是非约化字), 我们有回路 $\psi(r)\colon S^1\to\vee_{s\in S}S^1_s$ (每个$S^1_s\cong S^1$) 定义如下. 如果 $r_\alpha=s_1^{\pm1}\cdots s_n^{\pm1}$, 其中 $s_k\in S$, 允许$s_i=s_j$ 对 $i\neq j$, 则 ψ_α 为连接回路 $i^{\pm1}_{s_1}*\cdots*i^{\pm1}_{s_n}$, 其中 i_{s_k} 为 S^1 到 $S^1_{s_k}$ 的分量空间 $S^1_{s_k}$ 内射回路, i_s^{-1} 为 i_s 的逆回路. 特别地, 如果 $r_\alpha=1$, 则规定ψ_α 为到基点的常值映射. 称 $\psi(r)$ 为字r 对应的回路.

对于组合表示 $(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 对应一个2维CW复形 $T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ (以下简写为T) 如下定义.

(1) T 的0维骨架只有一个顶点 $*$.

(2) T 的1胞腔集合与S 有1-1对应, 我们用 e^1_s 表示对应于 $s\in S$ 的1-胞腔. 由于T只有一个顶点, 所以 T 的1维骨架为$\vee_{s\in S}S^1_s$, 其中每个$S^1_s\cong S^1$, 基点为 $*$. S^1_s就是1-胞腔e^1_s.

(3) T 的2-胞腔集和与Λ有1-1对应, 我们用 e_α^2 表示对应于α的2-胞腔. e_α^2 的粘合映射取为$\psi_\alpha^2=\psi(r_\alpha)$. 等价地,

$$T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})=(\vee_{s\in S}S_s^1)\cup_{\psi_\alpha^2}\{D_\alpha^2\}_{\alpha\in\Lambda}=\big((\amalg_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha^2)\amalg(\vee_{s\in S}S_s^1)\big)/\sim,$$

其中每个$D_\alpha^2\cong D^2$, $(x)_\alpha\sim\psi_\alpha^2(x)$对所有$x\in S_\alpha^1\subset D_\alpha^2$ 和$\alpha\in\Lambda$. 换个说法, $T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$就是粘合映射族$\{\psi(r_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$的映射锥空间.

注意, 一般群的组合表示写成$(S;T)$的形式, 其中T为$F(S)$中的约化字的集合. 但是这种方式是不允许T中出现重复的约化字的, 因而无法对应更广的CW复形$T(S,\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. 所以我们对群表示也采取目前的定义方式, 而不采取通常的$(S;T)$的方式. 以下的Abel群的情形也类似. 另外, $T(S,\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$中的$r_\alpha$要求是约化字是为了叙述对应的代数结论简单, 完全可以不要求.

定义2.7.8 Abel群A的一个组合表示$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$如下定义. S为集合, 每个r_α都是S中的有限个元的整系数线性组合, 即$r_\alpha=n_1s_1+\cdots n_ts_t$, $n_i\in\mathbb{Z}\backslash 0$, $s_1,\cdots,s_t$为S中不同的元素. 对于$\alpha\neq\beta$, 允许$r_\alpha=r_\beta$, 也允许$r_\alpha=0$. 我们有群同构

$$A\cong\mathbb{Z}(S)/(\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),$$

其中$\mathbb{Z}(S)$为由S生成的自由Abel群, $(-)$表示由$(-)$中的元生成的$\mathbb{Z}(S)$的子群. 称S为生成元集, $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为零关系集. 我们不区分群$A$和$\mathbb{Z}(S)/(\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 把后者写成$\mathbb{Z}(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Abel群$A$称为有限生成的, 如果$A$存在生成元集有限的表示, 即$A\cong\mathbb{Z}(x_1,\cdots,x_n;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其中$S=\{x_1,\cdots,x_n\}$为有限集. Abel群$A$称为有限表示的, 如果$A$存在生成元集和零关系集都有限的表示, 即$A\cong\mathbb{Z}(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_s)$, 其中$\{r_1,\cdots,r_s\}$为有限零关系集.

对于$\mathbb{Z}(S)$中的任何一个元素r, 我们有球映射$\psi_n(r)\colon S^n\to\vee_{s\in S}S_s^n$ (每个$S_s^n\cong S^n$) 定义如下. 如果$r_\alpha=n_1s_1+\cdots+n_ts_t$, 其中$n_i\in\mathbb{Z}\backslash 0$, $s_i\in S$, $s_i\neq s_j$对$i\neq j$, 则$\psi_n(r)$为保基点映射$n_1i_{s_1}+\cdots+n_ti_{s_t}$, 其中$i_{s_k}$为$S^n$ 到$\vee_{s\in S}S_s^n$的分量空间$S_{s_k}^n$ 的内射, 如果$n_k>0$, 则$n_ki_{s_k}$为n_k个i_{s_k}的和映射, 如果$n_k<0$, 则$n_ki_{s_k}$为$-n_k$个$i_{s_k}^{-1}$的和映射. 特别地, 如果$r=0$, 则规定$\psi_n(r)$为到基点的常值映射. 称$\psi_n(r)$为字r对应的球映射.

对于Abel群的组合表示$(S,\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$和$n\geqslant 2$, 对应一个$n+1$维CW复形$T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ (以下简写为T) 如下定义.

(1) T的0维骨架只有一个顶点$*$.

(2) T的n-胞腔集合与S有1-1对应, 我们用e_s^n表示对应于$s\in S$的n-胞腔. 由于T只有一个顶点, 所以T的n维骨架为$\vee_{s\in S}S_s^n$, 其中每个$S_s^n\cong S^n$, 基点为$*$. S_s^n就是n-胞腔e_s^n.

(3) T 的$(n+1)$-胞腔集合与Λ 有1-1对应, 我们用e_α^{n+1} 表示对应于α 的$(n+1)$-胞腔. e_α^{n+1}的粘合映射取为$\psi_\alpha^{n+1}=\psi_n(r_\alpha)$. 等价地,

$$T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})=(\vee_{s\in S}S_s^n)\cup_{\psi_\alpha^{n+1}}\{D_\alpha^{n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}=\big((\amalg_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha^{n+1})\amalg(\vee_{s\in S}S_s^n)\big)/\sim,$$

其中每个$D_\alpha^{n+1}\cong D^{n+1}$, $(x)_\alpha\sim\psi_\alpha^{n+1}(x)$对所有$x\in S_\alpha^n\subset D_\alpha^{n+1}$ 和$\alpha\in\Lambda$. 换个说法, $T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$就是粘合映射族$\{\psi_n(r_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$的映射锥空间.

定理2.7.9 对于$n\geqslant 1$, 每个$n-1$连通的$n+1$维CW复形W都与某个$T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$有相同的伦型, 其中$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$为该CW复形的$n$阶同伦群$\pi_n(W,w_0)$的一个表示, $T_1(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ 就是$T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$.

证 只证$n=1$的情形, $n\geqslant 2$的情形的证明完全类似. 由定理2.7.6, 我们有等价命题：只有一个顶点的2维CW复形一定与某个$T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$同伦型.

设W为一个只有一个顶点的CW复形, 其1维骨架为$\vee_{s\in S}S^1_s$, 其中每个$S^1_s\cong S^1$. 设W的2维骨架集合为$\{e^2_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, e^2_α的粘合映射为ψ'_α. 由例2.5.10可知$\psi'_\alpha\colon S^1\to\vee_{s\in S}S^1_s$一定同伦于某个字$r_\alpha$对应回路$\psi(r_\alpha)$. 由映射锥空间$C_f$的伦型只依赖于$f$的同伦类就可知CW复形的伦型也只依赖于粘合映射的同伦类. 所以$W\simeq T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$.

由以后的覆盖映射的性质可知$\pi_1(T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),*)$确实为群$F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. 由以后的高阶同伦群的性质可知$\pi_n(T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),*)$确实为Abel群$\mathbb{Z}(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$.

定理2.7.10 任何CW复形都与某个单纯复形同伦型.

证 首先证明对于CW复形X, 存在以下映射的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
X^0 & \subset & X^1 & \subset & X^2 & \subset\cdots \\
{\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & \\
K^0 & \subset & K^1 & \subset & K^2 & \subset\cdots
\end{array}$$

其中X^n为X的n维骨架, K^n为n维单纯复形, f_n为同伦等价映射.

我们对n作归纳. 当$n=0$时, X^0为离散空间, 自然是一个0为单纯复形K^0, f_0就取恒等映射. 假设对于$n>0$, f_{n-1}存在. 则$X^n=X^{n-1}\cup_{\psi^n_\alpha}\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 构造$K^n=K^{n-1}\cup_{\mu^n_\alpha}\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$, 其中每个$\mu^n_\alpha$都是将$S^{n-1}$剖分后的一个单纯映射满足$\mu^n_\alpha\simeq f_{n-1}\psi^n_\alpha$. 由单纯逼近定理$\mu^n_\alpha$是存在的. 显然对于每个$e^n_\alpha$, f_{n-1}可以扩张为同伦等价映射$f_\alpha\colon X^{n-1}\cup e^n_\alpha\to K^{n-1}\cup f^n_\alpha$, 其中$f^n_\alpha$为以$\mu^n_\alpha$为粘合映射的胞腔. 由Zorn引理可以证明$f_\alpha$可以扩张为同伦等价映射$f_n\colon X^n\to K^n$. 而单纯映射的映射锥空间$K^{n-1}\cup f^n_\alpha$显然可以剖分为单纯复形, 所以$K^n$也可以在每个$n$-胞腔上剖分成为单纯复形. 归纳完成.

由上证明存在$f\colon X\to K=\cup_{n=1}^\infty K^n$满足$f$限制在每个$X^n$上都是$f_n$. f显然是同伦等价映射, 因为任何一个满足限制在每个K^n上都是f_n的同伦逆的映射g, g为f的同伦逆.

定义2.7.11 称CW复形间的映射$f\colon X\to Y$为胞腔映射, 如果骨架满足$f(X^n)\subset Y^n$对所有n.

定理2.7.12 两个CW复形间的任何映射都同伦于某个胞腔映射.

证 设$f\colon X\to Y$为CW复形间的映射, 我们对X的骨架作归纳构造同伦于f的胞腔映射f'. 对于任何$x\in X^0$, 任取一条道路$\omega_x\colon I\to Y$满足$\omega_x(0)=f(x)$, $\omega_x(1)\in Y^0$. 则我们得到初始同伦$H_1\colon X^0\to Y$为$H(t,x)=\omega_x(t)$对$x\in X^0$. 由于从X^0到X的内射为上纤维映射, 于是初始同伦H_1可以扩张到$\overline{H}_1\colon I\times X\to Y$上, 满足$f_1(-)=\overline{H}_1(1,-)$限制在$X^0$上是胞腔映射. 假设对于$0\leqslant k<n$, 存在同伦$\overline{H}_k\colon I\times X\to Y$和$f_k(-)=\overline{H}_k(1,-)$满足$f_k$限制在$X^{k-1}$上为胞腔映射. 对于每一个$n$-胞腔$e^n_\alpha$, 如果$f_n(e^n_\alpha)\subset Y^n$, 则定义$\overline{H}_{n+1}$限制在$I\times e^n_\alpha$上为恒等同伦. 如果$f_n(e^n_\alpha)$交于$k>n$的$k$-胞腔$e^k_\beta$的内部, 则用单纯逼近的方法可以证明存在$g_\alpha\colon e^n_\alpha\to Y$使得$f_n|_{e^n_\alpha}\simeq g_\alpha\,\mathrm{rel}\,\dot{e}^n_\alpha$并且$g_\alpha(e^n_\alpha)$不是到$e^k_\beta$的满射. 而$e^k_\beta$的边界$\dot{e}^k_\beta$为$e^k_\beta$扣去内部任一点的强形变收缩核, 所以$g_\alpha$又相对$\dot{e}^n_\alpha$同伦于$h_\alpha\colon e^n_\alpha\to Y$满足$h_\alpha(e^n_\alpha)$与$e^k_\beta$的内部不相交. 由于$f(e^n_\alpha)$只能与有限个胞腔的内部交不空, 所以反复进行以上过程就可以得到映射$f_\alpha\colon e^n_\alpha\to Y^n\subset Y$满足$f|_{e^n_\alpha}\simeq f_\alpha\,\mathrm{rel}\,\dot{e}^n_\alpha$. 则定义$\overline{H}_{n+1}$限制在$I\times e^n_\alpha$上为连接$f|_{e^n_\alpha}$到$p_\alpha$的同伦. 这样我们就得到了同伦$\overline{H}_{n+1}$和映射$f_{n+1}(-)=H(1,-)$使得$f_{n+1}$限制在$X^n$上为胞腔映射. 归纳完成. 由同伦列$\{\overline{H}_n\colon I\times X\to Y\}$利用定理2.7.4中类似的方法就可

以构造出连接 f 和胞腔映射 f' 的同伦 H, 其中 f' 限制在 X^{n-1} 上为 f_n.

定理2.7.13 设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 为道路连通的CW复形, 则每个连接空间 $X_1*\cdots*X_n$ 都为 $(n-1)$连通空间. 特别地, CW复形 $X=\cup_{n=1}^{\infty}(X_1*\cdots*X_n)$ 可缩.

证 我们可以假设 X_1 和 X_2 都只有一个顶点, 分别为 u 和 v. 则 X_1*v 和 $u*X_2$ 为 X_1*X_2 的两个可缩子复形. 记 $Y=(X_1*v)\cup(u*X_2)$. 而 $(X_1*v)\cap(u*X_2)$ 为同胚于 I 的 $u*v$. 所以 $Y/(u*v)\simeq Y$. 而

$$(Y/(u*v),*)=\big((X_1*v)/(u*v),*\big)\vee\big((u*X_2)/(u*v),*\big).$$

所以 $Y/(u*v)$可缩. 于是 Y 可缩. 所以 $X_1*X_2\simeq(X_1*X_2)/Y$. 而 $(X_1*X_2)/Y$ 只有一个顶点, 其余所有胞腔维数都大于 1. 所以 X_1*X_2单连通. 归纳地, 假设 $X_1*\cdots*X_n$与一个只有一个顶点, 其余胞腔维数都大于 $n-1$ 的CW复形同伦型, 则同上讨论类似, 可以证明 $(X_1*\cdots*X_n)*X_{n+1}$与一个只有一个顶点, 其余胞腔维数都大于 n 的CW复形同伦型.

现证$\pi_n(X,x_0)=0$ 对所有 n, 因而 X 可缩. 设 $f\colon S^n\to X$ 为一映射, 则由于 S^n 为紧集, 所以 $f(S^n)$只能与X 的有限个胞腔的内部交不空, 即存在 k, 使得 $f(S^n)\subset X_1*\cdots*X_k$. 不妨假设 $k>n+1$, 则 f在 $X_1*\cdots*X_k$ 中零伦, 因而在 X 中也零伦. 由 X 的所有阶同伦群平凡得独点空间到 X 的基点的内射为弱同伦等价映射, 所以独点空间与X 同伦型, 即 X可缩.

例2.7.14 $S^n=S^0*\cdots*S^0$ ($n+1$重), 所以 $S^\infty=\cup_{n=0}^{\infty}S^n$ 为可缩空间, 这里作为连接空间的 $S^n\subset S^{n+1}$ 和通常的最后一个坐标为 0 的嵌入是一致的.

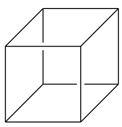
习题 2.6

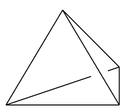
2.7.1 证明对于道路连通的CW复形 (X,x_0) 和 $n\geqslant 1$, $(S^n(X),*)$ 为n连通的CW复形.

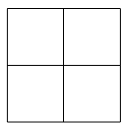
2.7.2 证明如果CW复形 X 的子复形 T 为包含所有 X 的顶点的树, 则 X不存在真包含T 的子复形为树.

2.7.3 二维平面$\mathbb{R}^2$ 上有一个有限图 Γ 将平面分成 r 个区域, 即 $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$ 有 r 个道路连通分支, 那么图 Γ 的秩是多少？二维球面S^2 上有一个有限图 Γ 将流形分成 r 个区域, 那么图 Γ 的秩是多少？任一闭2维流形上有一个有限图 Γ 将流形分成 r 个区域, 那么图 Γ 的秩确定么？

2.7.4 求下列图的秩.

(1) 

(2) 

(3) 

2.7.5. 设字$l_1\cdots l_m$由字母$x_1,\cdots,x_n$写成, 即对每个x_i 都存在 l_j 使得 $x_i^{\pm1}=l_j$. 证明存在整数k 使得

$$T(x_1,\cdots,x_n;l_1\cdots l_m)\simeq S(l_1\cdots l_m)\vee(\vee_k S^1),$$

其中当 $k=0$时同伦等价号为等号, $\vee_k S^1$ 表示k 个S^1 的一点并空间, $T(x_1,\cdots,x_n;l_1\cdots l_m)$ 中的字$l_1\cdots l_m$要约化, 即要去掉$x_ix_i^{-1}$或者$x_i^{-1}x_i$ 的字样.

2.7.6 证明以下群表示的变换不改变拓扑空间$T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$的同胚类.

(1) 将表示中所有字母x_k换成新字母y.

(2) 将所有字$r_1,\cdots,r_m$中的字母x_k和x_k^{-1}互换.

(3) 将某个$r_k=l_1l_2\cdots l_n$换成$l_2\cdots l_nl_1$.

2.7.7. 证明以下空间的同伦等价.

(1) $T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\simeq T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,rr_ir^{-1},\cdots,r_m)$, 其中$r$为任一字.

(2) $T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\simeq T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_irr_j^{\pm1}r^{-1},\cdots,r_j,\cdots,r_m)$, 其中$r$为任一字.

(3) $T(x_1,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_m)\simeq T(x_1,\cdots,x_n,y;r_1,r_2,\cdots,r_m,ry)$, 其中$r$为任一字.

(4) $T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m,r)\simeq T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\vee S^2$, 其中$r$为自由群$F(x_1,\cdots,x_n)$中由零关系字$r_1,\cdots,r_m$生成的正规子群中的字(可以是空字1).

2.7.8. 已知$F(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$和$F(y_1,\cdots,y_s;q_1,\cdots,q_t)$为同一群的不同的有限表示, 证明存在$k,l$使得 $T(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\vee(\vee_k S^2)\simeq T(y_1,\cdots,y_s;q_1,\cdots,q_t)\vee(\vee_l S^2)$.

2.7.9 证明以下Abel群表示的变换不改变拓扑空间$T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$的同胚类.

(1) 将表示中所有字母x_k换成新字母y.

(2) 将所有字$r_1,\cdots,r_m$中的字母x_k的组合系数n_k换成$-n_k$.

2.7.10. 证明以下空间的同伦等价.

(1) $T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\simeq T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_i\pm r_j,\cdots,r_j,\cdots,r_m)$.

(2) $T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\simeq T_n(x_1,\cdots,x_n,y;r_1,\cdots,r_m,y\pm r)$, 其中$r$为$x_1,\cdots,x_n$的任一整系数线性组合.

(3) $T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m,r)\simeq T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)\vee S^n$, 其中$r$为$r_1,\cdots,r_m$的任一整系数线性组合(可以是0).

2.7.11. 对于Abel群的有限表示$(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$, 如果$r_i=\Sigma_{j=1}^n n_{i,j}x_j$, $i=1,\cdots,m$, 则群表示的表示矩阵定义为$m\times n$阶整数矩阵$A=(n_{i,j})$, 把空间$T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$也记为$T_n(A)$. 证明以下把矩阵$A$变为矩阵$B$的矩阵变换不改变伦型, 即$T_n(A)\simeq T_n(B)$.

(1) 把矩阵A的某行或者某列乘以-1得到矩阵B.

(2) 把矩阵A的某两行或者某两列交换位置得到矩阵B.

(3) 把矩阵A的某行(不允许做类似的列变换)乘以±1再加到另一行得到矩阵B.

(4) B为分块矩阵$\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&A\end{pmatrix}$, 其中$\alpha$为任意整系数行向量(可以是0向量).

2.7.12. 如果矩阵A可以经过有限步上题中的4类变换或者其逆变换变为矩阵B, 就称A和B行变换等价, 记为$A\sim B$. 证明下列行变换等价, 其中m,n互素, $n-km=m_1$满足$|m_1|<|m|$.

$$\begin{pmatrix}m&a\\n&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}m_1&b-ka\\m&a\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}m&n\\a&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}m_1&m\\b-ka&a\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}m&lm\\0&b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}m&0\\0&b\end{pmatrix}.$$

由此证明任何矩阵A都行变换等价于以下形状的矩阵分块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_s \end{pmatrix}$$

其中每个d_i为>1的正数.

2.7.13. 对于$k \neq 0$, 称$M^n(k) = T_n(x;kx) = T_n(x;-kx) = M^n(-k)$为Moore空间, 其中$n$可以为1. 证明如果$p,q$互素, 则对于$n \geqslant 2$, 我们有$M^n(p) \vee M^n(q) \simeq M^n(pq)$.

2.7.14. 设Abel群的有限表示$(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$的表示矩阵为$A$. 证明存在唯一一组正整数$p_k^{k_1},\cdots,p_s^{k_s}$ (允许出现重复, p_i为素数, $k_i>0$) 和$k,l \geqslant 0$, 使得

$$T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_m) \simeq (\vee_k S^n) \vee M^n(p_1^{k_1}) \vee \cdots \vee M^n(p_s^{k_s}) \vee (\vee_l S^{n+1}).$$

右边的一点并空间称为$T_n(x_1,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_m)$的标准伦型, 其中$m-l$为表示矩阵$A$的秩(当成实数矩阵).

2.8 纤维丛的基本性质

所谓纤维丛, 就是局部为乘积空间的投射的映射. 表面上看纤维丛和流形似乎没有什么关系, 但其实流形的性质的研究绝大多数都是建立在纤维丛的基础之上的.

定义2.8.1 映射$p\colon E \to B$称为纤维为F的纤维丛, 如果p是局部平凡的, 即局部乘积空间到分量空间的投射. 具体地, 存在B的开覆盖$\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$满足$p$对每一个$\alpha \in \Lambda$, 都有以下映射的交换图,

$$\begin{tikzcd} F \times O_\alpha \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[d, "p"] \\ & O_\alpha \end{tikzcd}$$

其中p_α为投射$p_\alpha(f,o) = o$对$f \in F$和$o \in O_\alpha$, ϕ_α为同胚. 称以上交换图为p在$p^{-1}(O_\alpha)$上的平凡化. 称E为纤维丛的全空间, 称B为纤维丛的底空间, 称F为纤维丛的纤维. 称B的能平凡化(满足以上映射交换图)的开子集O为一个允许集, 称B的任何一个由允许集构成的开覆盖为允许覆盖. 如果一个开集是允许的, 显然它的所有开子集都是允许的. 记$\mathscr{O}(p)$为B的所有允许集构成的集族, 显然$\mathscr{O}(p)$为B的拓扑基. 在不引起误解的情况下, 常把丛$p\colon E \to B$简记为p.

两个纤维为F的纤维丛$p_i\colon E_i \to B_i$, $i=1,2$, 之间的丛同态为以下映射的交换图,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\bar{r}"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "r"] & B_2 \end{tikzcd}$$

满足 $\overline{r}$ 限制在每一个纤维 $p_1^{-1}(b_1)\,(b_1 \in B_1)$ 上都是到 $p_2^{-1}(r(b_1))$ 的同胚映射. 称映射 r 为丛同态的底映射, 称映射 $\overline{r}$ 为丛同态或者 r 的提升映射. 以上丛同态记为 $\overline{r}\colon (E_1,p_1,B_1) \to (E_2,p_2,B_2)$, 在不引起误解的情况下, 常简记为 $\overline{r}\colon p_1 \to p_2$, 或者用干脆用提升映射 $\overline{r}$ 代表丛同态. 两个纤维为 F 的纤维丛称为同构的, 如果存在两个丛同态

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"'] \\ B_1 \arrow[r, "r"] & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{和} \quad \begin{tikzcd} E_2 \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "p_2"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"'] \\ B_2 \arrow[r, "q"] & B_1 \end{tikzcd}$$

满足 $\overline{q}\,\overline{r} = 1_{E_1}$, $\overline{r}\,\overline{q} = 1_{E_2}$ (自然导出 $qr = 1_{B_1}$, $rq = 1_{B_2}$). 满足以上条件的两个丛同态 $\overline{r}$ 和 $\overline{q}$ 互为逆, 都称为丛同构(映射).

乘积空间到分量空间的投射 $p_B\colon F{\times}B \to B$ 称为平凡丛. 一个丛 $p\colon E \to B$ 称为可平凡化的, 如果它同构于平凡丛, 即存在 p 的平凡化

$$\begin{tikzcd} F{\times}B \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

其中 p' 为投射, ϕ 为同胚.

类似流形, 纤维丛的性质从底空间的允许覆盖的角度描述比较容易理解. 所以我们有以下定义.

定义2.8.2 设 $p\colon E \to B$ 为纤维为 F 的纤维丛. 对于 $O_\alpha \in \mathscr{O}(p)$ 和平凡化

$$\begin{tikzcd} F{\times}O_\alpha \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[d, "p"] \\ & O_\alpha, \end{tikzcd}$$

称 $(p^{-1}(O_\alpha), \phi_\alpha^{-1})$ 为一个局部丛坐标, 称 $(F{\times}O_\alpha, \phi_\alpha)$ 为一个丛参照系.

对于两个丛参照系 $(F{\times}O_\alpha, \phi_\alpha)$ 和 $(F{\times}O_\beta, \phi_\beta)$, 则由以下交换图

$$\begin{tikzcd} F{\times}(O_\alpha{\cap}O_\beta) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & p^{-1}(O_\alpha{\cap}O_\beta) \arrow[r, "\phi_\beta^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & F{\times}(O_\alpha{\cap}O_\beta) \arrow[dl, "p_\beta"] \\ & O_\alpha{\cap}O_\beta & \end{tikzcd}$$

可知映射 $t_{\alpha,\beta}\colon O_\alpha{\cap}O_\beta \to \mathrm{Aut}(F)$ ($\mathrm{Aut}(F)$ 为 F 的所有自同胚映射构成的拓扑群) 满足 $(\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha)(f,o) = (t_{\alpha,\beta}(o)(f), o)$ 对所有 $f \in F$ 和 $o \in O_\alpha{\cap}O_\beta$. 称 $t_{\alpha,\beta}$ 为 p 的一个转移函数. 特别地, 如果 $O_\alpha{\cap}O_\beta = \emptyset$, 则 $t_{\alpha,\beta}$ 自然就定义为空集到 F 的空映射. 称所有转移函数构成的集族为 p 的转移函数族, 记为 $\mathscr{T}(p)$.

对于纤维丛 $p\colon E \to B$ 和映射 $r\colon X \to B$, 如果 r 可以提升为 $\widetilde{r}\colon X \to E$, 即 $p\,\widetilde{r} = r$, 等价于以下交换图

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{r}"] \arrow[r, "r"] & B, \end{tikzcd}$$

则对于从参照系 (O_α, ϕ_α) 和任何满足 $r(U_\alpha) \subset O_\alpha$ 的 X 的开集 U_α, 则由以下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & F\times O_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\
U_\alpha \arrow[ur, "\widetilde{r}"] \arrow[r, "r"] & O_\alpha &
\end{tikzcd}$$

可知存在映射 $r_\alpha \colon U_\alpha \to F$ 满足 $(\phi_\alpha^{-1}\overline{r})(x) = (r_\alpha(x), r(x))$ 对所有 $x \in U_\alpha$. 称 r_α 为 r 的一个提升函数. 称所有提升函数构成的集族为 r 的提升函数族, 记为 $\mathscr{L}(r)$.

设 $\overline{r} \colon (E_1, p_1, B_1) \to (E_2, p_2, B_2)$ 为丛同态. 对满足 $r(U_\alpha) \subset V_\alpha$ 的 p_2 的丛参照系(V_α, ψ_α) 和 p_1 的丛参照系 (U_α, ϕ_α), 由以下交换图

$$\begin{tikzcd}
F\times U_\alpha \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & p_1^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, "p_1"] & p_2^{-1}(V_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha^{-1}"] \arrow[d, "p_2"] & F\times V_\alpha \\
 & U_\alpha \arrow[r, "r"] & V_\alpha \arrow[ur, "p_\alpha^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

可知存在映射 $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathrm{Aut}(F)$ 满足 $(\psi_\alpha^{-1}\,\overline{r}\,\phi_\alpha)(f, o) = (\varphi_\alpha(o)(f), r(o))$ 对所有 $f \in F$ 和 $o \in U_\alpha$. 称 φ_α 为 $\overline{r}$ 的一个提升转移函数. 称所有提升转移函数构成的集族为 $\overline{r}$ 的提升转移函数族, 记为 $\mathscr{L}(\overline{r})$.

注意, 转移函数和提升转移函数都是到 $\mathrm{Aut}(F)$ 的映射, 而提升函数是到 F 的映射.

定理2.8.3 我们把以下三个类似的命题和为一个定理. 以下命题中, 转移函数的逆和乘积由 $\mathrm{Aut}(F)$ 的群结构定义为 $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ 对所有 x 的函数. 而转移函数 t 和提升函数 r 的乘积 tr 为复合 $(tr)(x) = t(r(x))$ 对所有 x.

(1) 设 $p \colon E \to B$ 为纤维为 F 的纤维丛. 则转移函数族 $\mathscr{T}(p)$ 满足以下性质.

i) 对于任何 $O_\alpha, O_\beta \in \mathscr{T}(p)$, 我们有 $t_{\beta,\alpha} = t_{\alpha,\beta}^{-1}$.

ii) 对于任何 $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma \in \mathscr{T}(p)$, 我们有 $t_{\beta,\gamma}t_{\alpha,\beta} = t_{\alpha,\gamma}$.

反之, 如果对于 B 的开覆盖 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在映射族 $\{t_{\alpha,\beta} \colon O_\alpha\cap O_\beta \to \mathrm{Aut}(F)\}$ 满足以上两条性质, 则可以将以上开覆盖和函数族扩大为满足以上性质的唯一的最大集族 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{T}$, 定义拓扑空间

$$E \cong \left(\amalg_{O_\alpha\in\mathscr{O}} \,(F\times O_\alpha)\right)/\sim, \quad (t_{\alpha,\beta}(o)(f), o)_\beta \sim (f, o)_\alpha \text{ 对所有 } (f, o) \in F\times(O_\alpha\cap O_\beta),\ t_{\alpha,\beta} \in \mathscr{T}$$

和映射 $p \colon E \to B$ 为 $p([(f, o)_\alpha]) = o$. 则 p 为纤维映射, 以 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{T}$ 分别允许族和转移函数族.

(2) 设对于纤维丛 $p \colon E \to B$ 和映射 $r \colon X \to B$, r 可以提升为 $\widetilde{r} \colon X \to E$, 即 $p\widetilde{r} = r$. 则提升函数族 $\mathscr{L}(r)$ 和转移函数 $\mathscr{T}(p)$ 满足以下性质.

i) 对任何满足 $r(U_\alpha)\subset O_\alpha\in\mathscr{O}(p)$, $r(U_\beta)\subset O_\beta\in\mathscr{O}(p)$ 的 U_α, U_β 上的提升函数 r_α, r_β, 我们有 $t_{\alpha,\beta}r_\alpha = r_\beta$.

反之, 对于满足每个 $r(U_\alpha)\subset O_\alpha\in\mathscr{O}(p)$ 的 X 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 如果存在映射族 $\{r_\alpha \colon U_\alpha \to F\}$ 关于转移函数族 $\{t_{\alpha,\beta}\}$ 满足以上条件, 则 r 可以提升为 $\widetilde{r} \colon X \to E$ 以 $\{r_\alpha\}$ 扩张成的满足以上性质的最大函数族为提升函数族.

(3) 设 $\overline{r} \colon (E_1, p_1, B_1) \to (E_2, B_2, p_2)$ 为丛同态, 则提升函数族 $\mathscr{L}(\overline{r})$ 和提升转移函数族 $\mathscr{T}(p)$ 满足以下性质, 其中丛 p_1 和 p_2 的转移函数分别记为 $s_{\alpha,\beta}$ 和 $t_{\alpha,\beta}$.

i) 对于任何满足 $r(U_\alpha)\subset V_\alpha$, $r(U_\beta)\subset V_\beta$ 的允许开集, 我们有 $t_{\alpha,\beta}\varphi_\alpha = \varphi_\beta s_{\alpha,\beta}$.

反之, 对于满足每个 $r(U_\alpha)\subset V_\alpha$ 的 B_1 的允许覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和 B_2 的允许覆盖$\{V_\alpha\}$, 如果存在映射族$\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to \mathrm{Aut}(F)\}$ 关于转移函数族 $\{s_{\alpha,\beta}\}$ 和 $\{t_{\alpha,\beta}\}$ 满足以上性质, 则存在丛同态 $\overline{r}\colon p_1\to p_2$ 以 $\{\varphi_\alpha\}$ 扩张成的满足以上性质的最大函数族为提升转移函数族.

证 由定义自然成立.

以上定理是非常典型的一类命题, 它只是提供了一个看问题的角度, 因而产生了一套解释这个角度的语言. 下图概括了从这个角度看纤维丛的信息.

纤维丛 $E\xrightarrow{p}B$ $\Leftrightarrow$ 转移函数族 $\mathscr{T}(p)=\{t_{\alpha,\beta}\}$

提升映射
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{r}"] \arrow[r, "r"'] & B \end{tikzcd}$$
$\Leftrightarrow$ 提升函数族 $\mathscr{L}(r)=\{r_\alpha\}$

丛同态
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "r"] & B_2 \end{tikzcd}$$
$\Leftrightarrow$ 提升转移函数族 $\mathscr{L}(\overline{r})=\{\varphi_\alpha\}$

而有些问题只要用这个角度的语言叙述下来, 就自然解决了. 这是许多有关纤维丛定理的证明特点. 另外, 上述三个命题中的后一部分中的开覆盖是任意的, 可以是个有限开覆盖, 而在这种情况下, 命题的后一部分就成为可操作的步骤, 而不仅仅是一个理论叙述了.

定理2.8.4 设 $p\colon E\to B$ 为纤维为 F 的纤维丛, $H\colon I\times X\to B$ 为同伦映射, 满足初始映射 $r(-)=H(0,-)$ 存在提升映射 $\widetilde{r}\colon X\to E$, 即 $p\widetilde{r}=r$. 如果分别存在 X 和 B 的允许覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足对每个 α 都有 $H(I\times U_\alpha)\subset O_\alpha$, 则存在提升同伦 $\widetilde{H}\colon I\times X\to E$, 即 $p\widetilde{H}=H$ 并且 $\widetilde{r}(-)=\widetilde{H}(0,-)$.

设 $\overline{r}\colon(E_1,p_1,B_1)\to(E_2,p_2,B_2)$ 为纤维为 F 的丛同态, 并且我们有底映射 r 的的初始同伦 $H\colon I\times B_1\to B_2$, 即 $r(-)=H(0,-)$. 如果存在 B_1 和 B_2 的允许覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足对每个 α, 都有 $H(I\times U_\alpha)\subset V_\alpha$, 则存在提升丛同态 $\overline{H}\colon(I\times E_1,1_I\times p_1,I\times B_1)\to(E_2,p_2,B_2)$ 满足底映射为H.

证 只证第一个命题, 后一个命题证明完全类似.

命题的条件蕴含平凡丛 $p_{_B}\colon F\times B\to B$ 的垂直提升(例2.6.5)可以自然地推广到定理中来. 具体地, 由于下图中的 p_α 为平凡丛,
$$\begin{tikzcd} F\times O_\alpha \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "p_\alpha"] & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[d, "p"] \\ I\times U_\alpha \arrow[u, "V_\alpha"] \arrow[r, "H"] & O_\alpha \end{tikzcd}$$
所以 $H|_{I\times U_\alpha}$ 存在垂直提升 V_α 定义为 $V_\alpha(t,x)=(r_\alpha(x),H(t,x))$, 其中 $\{r_\alpha\}$ 为初始映射 r 的提升函数. 令 $\widetilde{H}_\alpha=\phi_\alpha V_\alpha$, 则 $\widetilde{H}_\alpha$ 满足以下交换图.
$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[d, "p"] \\ I\times U_\alpha \arrow[ur, "\widetilde{H}_\alpha"] \arrow[r, "H"] & O_\alpha \end{tikzcd}$$

所以图中左边初始映射的交换图可以扩张成右边的同伦的交换图,

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & F\times O_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ U_\alpha \arrow[ur, "\widetilde{r}"] \arrow[r, "r"] & O_\alpha & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & p^{-1}(O_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & F\times O_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ I\times U_\alpha \arrow[ur, "\widetilde{H}_\alpha"] \arrow[r, "H"] & O_\alpha & \end{tikzcd}$$

考虑以上两个交换图对应的提升函数. 左边初始映射的交换图得到的 r 的提升函数为 r_α, 右边扩张同伦的交换图得到的 H 的提升函数 $\overline{r}_\alpha$ 满足 $\overline{r}_\alpha(t,x) = r_\alpha(x)$ 对所有 $t \in I$ 和 $x \in U_\alpha$. 由定理2.8.3中(2)的前半部分可知, 转移函数族 $\{r_\alpha\}$ 满足 $t_{\alpha,\beta}r_\alpha = r_\beta$ 对所有 α,β, 因而转移函数族 $\{\overline{r}_\alpha\}$ 满足 $t_{\alpha,\beta}\overline{r}_\alpha = \overline{r}_\beta$ 对所有 α,β. 由(2)的后半部分可知, $\{\widetilde{H}_\alpha\}$ 可以粘合为 $\widetilde{H}$ 为H 提升.

以上定理中同伦的条件对于CW复形是多余的. 具体地, 如果以上定理中的 B 和 B_1 为CW复形, 则定理对覆盖的要求满足, 我们就得到以下定理.

定理2.8.5 纤维丛为弱纤维映射, 其中弱纤维映射为对任何CW复形满足同伦提升性的映射.

设丛同态 $\overline{r}\colon (E_1,p_1,B_1) \to (E_2,p_2,B_2)$ 中的 B_1 为CW复形. 如果 $\overline{r}$ 的底映射 r 有扩张同伦 H, 即 $r(-) = H(0,-)$, 则 $\overline{r}$ 就有扩张同态 $\overline{H}\colon (I\times E_1, 1_I\times p_1, I\times B_1) \to (E_2,p_2,B_2)$ 以 H 为底映射.

证 首先证明纤维丛 $p\colon E \to B$ 对任何紧度量空间 X 满足映射提升性. 对于初始映射 $r\colon X \to B$ 和满足 $r(-) = H(0,-)$ 的初始同伦 H, 由Lebesgue引理, 存在 X 的有限个点 $x_1,\cdots,x_m$, 整数 $\varepsilon_0 > 0$ 和区间 I 的划分 $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$, 满足球形邻域族 $B(x_1,\varepsilon_0),\cdots,B(x_m,\varepsilon_0)$ 为 X 的开覆盖, 并且对每个 $[t_{i-1},t_i]\times B(x_k,\varepsilon_0)$, 都存在 B 的允许开集 $O_{i,k}$ 使得 $H([t_{i-1},t_i]\times B(x_k,\varepsilon_0)) \subset O_{i,k}$. 用区间 $[t_{i-1},t_i]$ 代替定理2.8.4中的 I, 取 $\{U_\alpha\}$ 为 $\{B(x_k,\varepsilon_0)\}$, 取 $\{O_\alpha\}$ 为 $\{O_{i,k}\}$ (可以假设 $\{O_{i,k}\}$ 为 B 的开覆盖, 否则任意扩充成为允许开覆盖, 对应新加的开集的 U_β 取空集), 则 H 归纳地在每个区间 $[0,t_i]\times X$ 上都可提升, 因而在 $I\times X$ 上也可以提升.

对于CW复形 X, 我们对骨架 X^n 作归纳再利用以上结论就可以证明 H 同样可以提升. 首先对于0维骨架 X^0 来说, 由于每个顶点为紧度量空间, 所以 H 可以在每个顶点上提升, 而0 维骨架又是离散空间, 所以 H在每个顶点上提升后自然就得到在0维骨架 X^0 的提升. 假设对于 $n > 1$, H 在 $V = (I\times W)\cup(0\times X)$ 上的限制映射 $H|_V\colon V \to B$ 有提升映射 $\overline{H}_V\colon V \to E$ 满足 $p\,\overline{H}_V = H|_V$, 其中 W 为 X^{n-1} 粘上若干 n-胞腔构成的子复形. 由 D^n 为度量紧空间可知, 对于任何同伦 $K\colon I\times D^n \to B$, 只要 K 在初始映射 $u(-) = K(0,-)$ 上有提升映射 $\widetilde{u}$, 即 $p\widetilde{u} = u$, 则 K 就有提升提升映射 $\widetilde{K}\colon I\times D^n \to E$, 即 $p\widetilde{K} = K$. 换个说法, 对于空间偶 $(I\times D^n, 0\times D^n)$, 只要同伦 K 在 $0\times D^n$ 上的限制映射 u 有提升映射 $\widetilde{u}$, 则 $\widetilde{u}$ 就可以扩张为 K 的提升映射 $\widetilde{K}$. 而由空间偶的同胚 $(I\times D^n, 0\times D^n) \cong (I\times D^n, (I\times\partial(D^n))\cup(0\times D^n))$ 就有以下的结论. 对于同伦 $K\colon I\times D^n \to B$, 只要 K 在子空间 $(I\times\partial(D^n))\cup(0\times D^n))$ 上的限制映射 u 有提升映射 $\widetilde{u}$, 则 $\widetilde{u}$ 就可以扩张为 K 的提升映射 $\widetilde{K}$. 由此显然可以得到以下结论. 对于同伦 $K\colon I\times e^n \to B$, 只要 K 在子空间 $(I\times\dot{e}^n_\alpha)\cup(0\times e^n_\alpha)$ 上的限制映射 u 有提升映射 $\widetilde{u}$, 则 $\widetilde{u}$ 就可以扩张为 K 的提升映射 $\widetilde{K}$. 由此不难得出以下结论. 对于归纳假设的同伦 H, 限制映射 $H|_V$ 的提升映射 $\overline{H}_V$ 可以扩张为 $\overline{H}_1\colon (I\times(W\cup e^n_\alpha))\cup(0\times X) \to E$ 为 $H|_{(I\times(W\cup e^n_\alpha)\cup(0\times X)}$ 的提升映射. 由Zorn 引理可知 H 在 $(I\times X^n)\cup(0\times X)$ 上有提升映射. 归纳完成. 于是 H 可以提升为 $\overline{H}$.

从同态的情形完全类似.

定理2.8.6 为了节省空间, 我们把所有的保基点映射同伦类集合 $[A,a_0;B,b_0]$ 简记为 $[A;B]$.

设 $p\colon (E,e) \to (B,b)$ 为纤维为 F 的纤维丛(基点任取), $j\colon (F,e) = (p^{-1}(b),e) \to (E,e)$ 为内射. 则对任

何带基点CW复形 (W, w_0), 我们有以下集合的长恰当序列

$$\cdots \to [S^{n+1}(W); B] \xrightarrow{\partial_*} [S^n(W); F] \xrightarrow{j_*} [S^n(W); E] \xrightarrow{p_*} [S^n(W); B] \xrightarrow{\partial_*} [S^{n-1}(W); F] \to \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} [S(W); F] \xrightarrow{j_*} [S(W); E] \xrightarrow{p_*} [S(W); B] \xrightarrow{\partial_*} [W; F] \xrightarrow{j_*} [W; E] \xrightarrow{p_*} [W; B].$$

其中 ,∂_* 如定理2.6.12中所定义. 特别地, 我们取 $W = S^1$ 就得到以下同伦群的恰当序列

$$\cdots \to \pi_{n+1}(B, b) \to \pi_n(F, e) \to \pi_n(E, e) \to \pi_n(B, b) \to \pi_{n-1}(F, e) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_2(B, b) \to \pi_1(F, e) \to \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b).$$

证 定理2.6.12的推论.

定理2.8.7 设 $p\colon E \to B$ 为纤维为 F 的纤维丛, $f\colon X \to B$ 为映射. 则在以下映射的拉回中,

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\overline{f}} & E \\ {\scriptstyle p_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

映射 $p_f\colon E_f \to X$ 仍然是纤维为 F 的纤维丛, 称为由 f 诱导的丛, 以上交换图自然为丛同态, 其中

$$E_f = \{(e, x) \in E \times X \mid f(x) = p(e)\}, \quad p_f(e, x) = x, \quad \overline{f}(e, x) = e.$$

设 $\overline{r}\colon (E_1, p_1, B_1) \to (E_2, p_2, B_2)$ 为丛同态. 如果 F 和 B_1 都为CW复形, 则起始纤维丛 $p_1\colon E_1 \to B_1$ 与底映射 $r\colon B_1 \to B_2$ 诱导的丛 $p_r\colon E_r \to B_1$ 同构.

证 p_f 的允许族满足 $\mathscr{O}_{p_f} = f^{-1}(\mathscr{O}_p) = \{f^{-1}(O_\alpha) \mid O_\alpha \in \mathscr{O}_p\}$, p_f 的转移函数族 $\mathscr{T}_{p_f} = \{t'_{\alpha,\beta}\}$ 和 f 的转移函数族 $\mathscr{T}_p = \{t_{\alpha,\beta}\}$ 满足 $t'_{\alpha,\beta}(x) = t_{\alpha,\beta}(f(x))$ 对所有 $x \in f^{-1}(O_\alpha) \cap f^{-1}(O_\beta)$. 丛同态 $\overline{f}$ 的提升转移函数族满足每个 φ_α 都是到 $\mathrm{Aut}(F)$ 的单位元, 即恒等映射的常值映射. 不难验证以上定义的函数族满足定理2.8.3的条件, 因而 p_f 为纤维丛, $\overline{f}$ 为丛同态.

对于特殊的平凡丛 $p_B\colon F \times B \to B$ 和映射 $f\colon X \to B$, 诱导丛 $p_f\colon E_f \to X$ 如下定义. 全空间 $E_f = \{(u, b, x) \in F \times B \times X \mid f(x) = b\}$, $p_f(u, b, x) = x$, $\overline{f}(u, b, x) = (u, b)$. 我们显然有丛同构

$$\begin{array}{ccc} F \times X & \xrightarrow{\overline{r}} & E_f \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_f} \\ X & \xrightarrow{1_X} & X, \end{array}$$

其中 $\overline{r}(u, x) = (u, f(x), x)$. 对于一般的丛, 以上结果在局部成立, 自然就在整体成立. 具体地, 对于定理中的丛, 定义丛同态 $\overline{\phi}\colon (E_1, p_1, B_1) \to (E_r, p_r, B_1))$ 为 $\overline{\phi}(e_1) = (\overline{r}(e_1), p_1(e_1))$, 底映射 ϕ 自然为恒等映射. 由于 $\overline{\phi}$ 为CW复形到自身的连续的1-1对应, 所以为同胚映射, 自然也是丛同构.

定理2.8.8 设 $p\colon E \to B$ 为纤维为 F 的纤维丛, $f, g\colon X \to B$ 为两个同伦的映射, 即 $f \simeq g$. 如果 X 为CW复形, 则两个诱导丛 $p_f\colon E_f \to B$ 和 $p_g\colon E_g \to B$ 同构.

证 设H为连接f到g的同伦, 即$f(-)=H(0,-)$, $g(-)=H(1,-)$. 则我们有以下的导出丛

$$\begin{tikzcd} E_f \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "p_f"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_H \arrow[r, "\overline{H}"] \arrow[d, "p_H"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I\times X \arrow[r, "H"] & B. \end{tikzcd}$$

取定理2.8.5第二个结论中的丛同态$\overline{r}$为上图中右边的交换图, 取定理中的初始同伦H为如上定义的符号相同的H, 则存在丛同态$\overline{H}\colon (I\times E_f, 1_I\times p_f, I\times X)\to(E,p,B)$以$H$为底映射. 由定理2.8.7可知, 存在丛同构$\overline{\phi}\colon (I\times E_f, 1_I\times p_f, I\times X)\to(E_H,p_H,I\times X)$, 因为两个丛的底映射都是$H$. 而丛同构$\overline{\phi}$限制在$1\times E_f$上就是从纤维丛$p_f\colon E_f\to X$到$p_g\colon E_g\to X$的丛同构.

例2.8.9 设$p\colon E\to B$为纤维为F的纤维丛. 如果B可缩, 则p可平凡化. 因为由B可缩得$1_B\simeq 0$. 由以上定理, 这两个映射诱导的丛同构. 而1_B诱导的丛就是丛$p\colon E\to B$自身, 常值映射0诱导的丛$p_0\colon E_0\to B$同构于平凡丛$p_B\colon F\times B\to B$. 所以p可平凡化.

当考虑纤维丛的分类问题时, 纤维F反而不是问题的核心. 这是因为如果不作任何要求, 即使纤维F是性质非常好的空间, 比如线性空间$\mathbb{R}^n$, 但是$\mathrm{Aut}(F)$却太复杂, 导致以F为纤维的纤维丛的分类问题并没有办法解决. 所以我们只能加条件, 考虑纤维转移函数都是到一个既是拓扑群又是CW复形的G的函数的纤维丛的分类, 这样的G即可以看成纤维F, 又可以看成$\mathrm{Aut}(F)$, 又是CW复形, 因而这类丛可以分类.

定义2.8.10 在本节以下所有的定理和定义中, G既是一个拓扑群又是一个CW复形, 而且G连续地左作用在纤维F上, 也就是说对于每个$g\in G$, 对应$f\to gf$为F的一个自同胚, 所以G自然是$\mathrm{Aut}(F)$的一个子群.

一个纤维为F的纤维丛$p\colon E\to B$称为一个G丛, 如果p的所有转移函数都是到$G\subset\mathrm{Aut}(F)$的映射. 两个G丛的丛同态为以下交换图,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "r"] & B_2 \end{tikzcd}$$

满足$\overline{r}$的所有提升转移函数都是到$G\subset\mathrm{Aut}(F)$的映射.

两个纤维为F的G丛称为同构的, 如果存在两个丛同态

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "r"] & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{和} \quad \begin{tikzcd} E_2 \arrow[r, "\overline{q}"] \arrow[d, "p_2"'] & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_2 \arrow[r, "q"] & B_1 \end{tikzcd}$$

满足$\overline{q}\,\overline{r}=1_{E_1}$, $\overline{r}\,\overline{q}=1_{E_2}$, $qr=1_{B_1}$, $rq=1_{B_2}$. 满足以上条件的两个丛同态互为逆, 称为丛同构.

一个纤维为线性空间$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)的某个经典Lie群G (比如$GL(n)$, $O(n)$等) 丛称为(复)向量丛.

一个纤维为G的G丛称为G主丛.

定理2.8.11 纤维为F的G丛的同构类和G主丛的同构类是1-1对应的. 具体定义如下.

纤维为F的G丛$p\colon E\to B$的全空间E上有G左作用满足以下性质. G的左作用导出E上的等价关系$\sim$定义为$x\sim y$如果存在$g\in G$使得$y=gx$. E上有另一等价关系$\approx$定义为$x\approx y$如果$p(x)=p(y)$. 则

两个等价关系为同一等价关系. 所以 $B = E/_{\approx} = E/_{\sim}$, 等价地, p 与 E 到 $E/_{\sim}$ 的商映射就是 p 自身. 特别地, 取 $F = G$, 则 G 主丛的全空间上也有 G 的左作用满足以上性质.

对于纤维为 F 的 G 丛 $p\colon E_F \to B$, 定义 $G{\times}E_F$ 上的等价关系 $\sim$ 如下. $(g,e) \sim (hg, he)$ 对所有的 $g, h \in G$ 和 $e \in E_F$. 则由 $G{\times}E_F$ 到商空间 $(G{\times}E_F)/\sim$ 的商投射就是一个 G 主丛. 反之, 对于 G 主丛 $p\colon E_G \to B$, 定义 $F{\times}E_G$ 上的等价关系 $\sim$ 如下. $(f,e) \sim (gf, ge)$ 对所有的 $g \in G$, $f \in F$ 和 $e \in E_G$. 则由 $F{\times}E_G$ 到商空间 $(F{\times}E_G)/\sim$ 的商投射就是一个纤维为 F 的 G 丛.

证 对于纤维为 F 的 G 丛 $p\colon E \to B$ 和 $O_\alpha \in \mathscr{O}(p)$, 由 G 在 F 的左作用自然导出 G 在 $F{\times}O_\alpha$ 上的左作用 $g(f,o) = (fg, o)$ 对所有 $g \in G$, $f \in F$ 和 $o \in O_\alpha$. 这个左作用自然导出 G 在 $E = (\amalg_{O_\alpha\in\mathscr{O}(p)}(F{\times}O_\alpha))/_{\sim}$ 上的左作用满足定理的性质.

定理2.8.3对 G 丛和 G 主丛都成立, 只是(提升)转移函数都是到 G 的映射. 由定理2.8.3, 同一个允许族 $\mathscr{O}$ 和转移函数族 $\mathscr{T}$ 对应以下左右两个纤维丛的构造.

$$
\begin{array}{ccc}
E_F = \big(\amalg_{O_\alpha\in\mathscr{O}} F{\times}O_\alpha\big)/_{\sim} & \qquad & E_G = \big(\amalg_{\alpha\in\mathscr{O}} G{\times}O_\alpha\big)/_{\sim} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p_F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_G} \\
B = \big(\amalg_{O_\alpha\in\mathscr{O}} O_\alpha\big)/_{\sim} & & B = \big(\amalg_{O_\alpha\in\mathscr{O}} O_\alpha\big)/_{\sim}
\end{array}
$$

其中全空间的等价关系为 $(t_{\alpha,\beta}(o)(f), o)_\beta \sim (f, o)_\alpha$, $(t_{\alpha,\beta}(o)(g), o)_\beta \sim (g, o)_\alpha$ 对所有 $f \in F$, $g \in G$, $o \in O_\alpha{\cap}O_\beta$. 类似地, 同样的纤维转移函数族$\{\varphi_\alpha\}$也对应着两个丛同态. 这说明两类丛是1-1对应的, 同构的丛也对应同构的丛, 所以丛的同构类也是1-1对应的.

从的分类问题与纤维转移的构造和截面的存在性紧密相连. 以下是相关定义.

定义2.8.12 设 $p_i\colon E_i \to B_i$ 为 G 主丛, $i = 1, 2$. 则以 B_1 为底空间, 以 E_2 为纤维的纤维丛

$$p_1{\rtimes}p_2\colon E_1{\times}_G E_2 \to B_1$$

如下定义. 令 $E_1{\times}E_2$ 上的等价关系 $\sim$ 为 $(e_1, e_2) \sim (ge_1, ge_2)$ 对所有 $e_i \in E_i$ 和 $g \in G$, 则 $p_1{\rtimes}p_2$ 的全空间为商空间 $E_1{\times}_G E_2 = (E_1{\times}E_2)/{\sim}$, 满足 $(p_1{\rtimes}p_2)([e_1, e_2]) = p_1(e_1)$ 对 $[e_1, e_2] \in E_1{\times}_G E_2$.

设 $p\colon E \to B$ 为纤维为 F 的纤维丛. 则 p 的一个截面为映射 $\lambda\colon B \to E$, 满足 $p\lambda = 1_B$.

定理2.8.13 设 $p_i\colon E_i \to B_i$ 为 G 主丛, $i = 1, 2$. 则存在丛同态 $\overline{r}\colon (E_1, p_1, B_1) \to (E_2, p_2, B_2)$ 的充要条件是存在 $p_1{\rtimes}p_2$ 的截面 $\lambda\colon B_1 \to E_1{\times}_G E_2$.

证 对于丛同态 $\overline{r}$, 定义截面 λ 为 $\lambda(b_1) = (e_1, \overline{r}(e_1))$ 对任何 $b_1 \in B_1$ 和 $e_1 \in p_1^{-1}(b_1)$. 显然 λ 的定义不依赖于 e_1 的选取. 对于 $E_1{\times}_G E_2$ 中的开集 $[O_1{\times}O_2]$, 其中 O_i 为 E_i 的开集, 显然 $\lambda^{-1}([O_1{\times}O_2]) = p_1(O_1)$ 为 B_1 的开集. 这说明 λ 为映射.

反之, 对于截面 λ, 定义丛同态 $\overline{r}$ 如下. 对于 $e_1 \in E_1$, 记 $p_1(e_1) = b_1$, 则存在 e_2 使得 $\lambda(b_1) = [e_1, e_2]$. 定义 $\overline{r}(e_1) = e_2$. 对于 E_2 的开集 O_2, $\overline{r}^{-1}(O_2) = \lambda^{-1}(p_2(O_2))$ 为 B_1 的开集. 所以 $\overline{r}$ 为映射. 显然 $\overline{r}$ 为丛同态并且按照以上定义, $\overline{r}$ 对应的截面就是 λ.

以上所有的概念都有保基点的推广概念, 即指定底空间的一点 b_0 为基点, 指定全空间中的 $p^{-1}(b_0)$ 中的任意点 e_0 为全空间的基点, 所有的映射都要求是保基点映射, 就得到了推广的概念. 不再赘述.

定理2.8.14 设$p\colon E\to B$为G主丛, 并且E为n连通空间. 则对任何维数不超过n的CW复形X, 映射同伦类$[X;B]$与X上的所有G主丛的同构类集合(丛同构的底映射必须是恒等映射1_X)之间有1-1对应定义如下. 对$f\colon X\to B$, f诱导出的G主丛$p_f\colon E_f\to X$为X上的G主丛, 该丛的同构类不依赖于f的同伦类的选取, 则以上的1-1对应为$[f]\to[p_f]$, 其中$[f]$表示映射同伦类, $[p_f]$表示丛同构类.

以上结论有保基点情形的推广. 设$p\colon(E,e)\to(B,b)$为保基点G主丛, 并且E为n连通空间. 则对任何维数不超过n的带基点CW复形(X,x_0), 映射同伦类$[X,x_0;B,b]$与X上的所有保基点G主丛的同构类集合之间有1-1对应定义为$[f]\to[p_f]$.

证 只证非保基点情形. 记对应$[f]\to[p_f]$为ϕ.

首先证明ϕ为满射. 设$p_0\colon E_0\to X$为一X上的G主丛, 如果存在丛同态$\bar r\colon(E_0,p_0,X)\to(E,p,B)$, 则$\phi([r])=[p_0]$, 其中$r$为$\bar r$的底映射, 因此$\phi$为满射. 由定理2.8.13, $\bar r$存在, 当且仅当存在$p_0\rtimes p$的一个截面$\lambda\colon X\to E_0\times_G E$. 而$p_0\rtimes p$的纤维为$n$连通的$E$, 由定理2.8.6关于纤维丛$p_0\rtimes p$的同伦群的长恰当序列可知$p_0\rtimes p\colon E_0\times_G E\to X$为$n{+}1$等价映射. 于是由定理2.7.4, 对于维数不超过n的CW复形X, 映射同伦类的对应$(p_0\rtimes p)_*\colon[X;E_0\times_G E]\to[X;X]$为满射. 所以存在映射$\lambda\colon X\to E_0\times_G E$满足$\lambda p\simeq 1_X$. 而纤维丛为弱纤维映射, 所以连接$\lambda p$到$1_X$的同伦可以提升到$E_0\times_G E$上. 这说明我们可以假设$\lambda p=1_X$, 也就是说$\lambda$就是$p_0\rtimes p$的截面. 由定理2.8.13, 从同态$\bar r$存在.

下面证明ϕ为单射. 对于G主丛$p_0\colon E_0\to X$, 如果存在两个$p_0\times p$的截面$\lambda_i\colon X\to E_0\times_G E$, 导出丛同态$\bar r_i\colon(E_{f_i},p_i,X)\to(E,p,B)$使得$p_0$和$p_i$同构, $i=1,2$. 于是我们有截面$\lambda'\colon\{0,1\}\times X\to E_0\times_G E$满足限制在$i\times X$上为$\lambda_i$. 而相对CW复形$(I\times X,\{0,1\}\times X)$的维数不超过$n{+}1$, 于是由定理2.7.4, λ'可以(同样由于纤维映射为弱纤维映射, 同伦提升可以)提升为$\lambda\colon I\times X\to E_0\times_G E$. 而截面$\lambda$对应的丛同态的底映射就是连接$f_1$到$f_2$的同伦. 由$f_1\simeq f_2$得$[p_{f_1}]=[p_{f_2}]$. 这说明$\phi$为单射.

定义2.8.15 G主丛$p\colon E(G)\to B(G)$称为泛(万有, 万能)主丛, 如果$B(G)$是CW复形, $E(G)$可缩. 称泛主丛的底空间$B(G)$为G的分类空间.

定理2.8.16 (Milnor) 泛主丛$p\colon E(G)\to B(G)$存在.

证 定义$G_n=G*\cdots*G$(n重连接空间). 定义G在G_n上的左作用为

$$g(t_1g_1+\cdots+t_ng_n)=t_1(gg_1)+\cdots+t_n(gg_n).$$

于是得到G主丛$p_n\colon G_n\to G_n/\!\sim$为商映射, 其中$x\sim gx$对所有$x\in G_n$和$g\in G$. 显然$G_{n-1}$为$G_n$的子空间, $G_{n-1}/\!\sim$也为$G_n/\!\sim$的子空间. 定义$E(G)=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$, $B(G)=\cup_{n=1}^{\infty}(G_n/\!\sim)$, 自然有$p\colon E(G)\to B(G)$, 其中取无穷并空间的拓扑为弱拓扑. 而由定理2.7.13, $E(G)$可缩. 所以p为泛覆盖映射.

定理2.8.17 (G主丛分类定理) 设$p\colon E(G)\to B(G)$为泛主丛. 则对于任何CW复形X, X上的所有G主丛的同构类(丛同构的底映射必须是恒等映射)与映射同伦类$[X;B(G)]$有1-1对应. 同样, 则对于任何带基点CW复形(X,x_0), (X,x_0)上的所有G带基点G主丛的保基点同构类(丛同构的底映射必须是恒等映射)与保基点映射同伦类$[X,x_0;B(G),g_0]$有1-1对应. 由此可知G的分类空间的$B(G)$的伦型是唯一的.

证 定理2.8.14的推论.

例2.8.18 光滑流形M的切丛为纤维是$\mathbb{R}^n$的$GL(n)$丛. 而黎曼流形的切丛中的纤维转移函数要求保持

黎曼度量不变, 因而是纤维为$\mathbb{R}^n$的$O(n)$丛. 从这两个不同的角度看切丛有区别么? 由于$O(n)$为$GL(n)$的强形变收缩核, 所以两个拓扑群有相同的伦型, 其分类空间也有相同的伦型. 这说明把切丛看成是$GL(n)$丛还是$O(n)$丛在丛同构的意义上看是一样的. 这也是任何光滑流形都有黎曼流形结构的拓扑原因.

定义2.8.19 对于映射$f\colon X\to G$, 其中X为CW复形, G主丛$\widehat{p}_f\colon \widetilde{S}_f(X)\to\widetilde{S}(X)$如下定义. 全空间

$$\widetilde{S}_f(X)=\big((G{\times}\widetilde{C}_+(X))\amalg(G{\times}\widetilde{C}_-(X))\big)/_\sim,$$

其中$\widetilde{C}_+(X)=\widetilde{C}_-(X)=\widetilde{C}(X)$, 等价关系为$(g,[1,x])_+\sim(f(x)g,[1,x])_-$对所有$x\in X$和$g\in G$, 这里我们用$(-)_+,(-)_-$来区分不交并空间中的两个不同的分量空间中的元素. 为了简化符号, 仍用$(-)_+,(-)_-$表示$\widetilde{S}_f(X)$中的元素, 而不用等价类$[(-)_+],[(-)_-]$的形式表示, 这样在$\widetilde{S}_f(X)$中, 我们就有等式$(g,[1,x])_+=(f(x)g,[1,x])_-$. 定义$\widehat{p}_f((g,[t,x])_+)=[\frac{1}{2}t,x]$, $\widehat{p}_f((g,[t,x])_-)=[1-\frac{1}{2}t,x]$.

对于保基点映射$f\colon(X,x_0)\to(G,u)$, 其中u为G的单位元, (X,x_0)为带基点CW复形, 保基点G主丛$\widehat{p}_f$: $(S_f(X),*)\to(S(X),*)$如下定义.

$$S_f(X)=\big((G{\times}C_+(X))\amalg(G{\times}C_-(X))\big)/_\sim,$$

其中$C_+(X)=C_-(X)=C(X)$, 等价关系为$(g,1\wedge x)_+\sim(f(x)g,1\wedge x)_-$对所有$x\in X$和$g\in G$. 同上一样用正负号区分上下两个子锥空间中的点并且$S_f(X)$中的元不写成等价类形式. 定义$\widehat{p}_f((g,t\wedge x)_+)=\frac{1}{2}t\wedge x$, $\widehat{p}_f((g,t\wedge x)_-)=(1-\frac{1}{2}t)\wedge x$.

注意以上定义和以下的证明中, 不涉及到允许覆盖和纤维转移函数族的概念. 其实是有从允许覆盖角度的等价证明的, 只是我们采用了文字相对简洁的一个. CW复形上的纤维丛还有一种从胞腔粘合角度的描述, 这个角度对于表示理论的证明是无法回避的. 而我们以下的证明就是从胞腔粘合的角度叙述的. 我们指出胞腔粘合角度和允许覆盖的角度定义的丛的关系. 对于$f\colon X\to G$和$\widetilde{S}(X)$, 定义$S_+=\widetilde{S}(X)\backslash[1,X]$, $S_-=\widetilde{S}(X)\backslash[0,X]$, 则$\{S_+,S_-\}$为$\widetilde{S}(X)$的开覆盖且$S_+\cap S_-\cong(0,1)\times X$. 定义$S_+\cap S_-$上的纤维转移函数$t$为$t([s,x])=f(x)$对$s\in(0,1)$和$x\in X$. 则开覆盖$\{S_+,S_-\}$和纤维转移函数$t$就是可以扩充为$\hat{p}_f$的允许覆盖和转移函数族.

定理2.8.20 设X为CW复形. 则$\widetilde{S}(X)$上的所有G主丛同构类(丛同构的底映射一定为恒等映射)与映射同伦类$[X;G]$有1-1对应.

设(X,x_0)为带基点CW复形. 则$(S(X),*)$上的所有带基点G主丛同构类(丛同构的底映射一定为恒等映射)与保基点映射同伦类$[X,x_0;G,u]$有1-1对应.

证 只证非保基点情形.

如果$f\simeq g$, 则$g^{-1}f\simeq 0$, 记H为连接0到$g^{-1}f$的同伦, 即$H(0,x)=u$ (u单位元), $H(1,x)=g(x)^{-1}f(x)$对所有$x\in X$. 则定义丛同构$\overline{r}\colon\widehat{p}_f\to\widehat{p}_g$如下. $\overline{r}(g,[t,x])_+=(H(t,x)g,[t,x])_+$, $\overline{r}(g,[t,x])_-=(g,[t,x])_-$对所有$x{\in}X$和$g{\in}G$. 这说明$f$到$\hat{p}_f$的对应导出由$[f]$到$[p]$的同构类的对应. 记这个对应为$\phi$.

设$p\colon E\to\widetilde{S}(X)$为$G$主丛. 记$\widetilde{S}_+(X)=\{[t,x]\in\widetilde{S}(X)\mid t\leqslant\frac{1}{2}\}$, $\widetilde{S}_-(X)=\{[t,x]\in\widetilde{S}(X)\mid t\geqslant\frac{1}{2}\}$. 由

于CW复形 $\widetilde{S}_\pm(X)$ 可缩, 所以由例2.8.9, 存在平凡丛到 p 限制在 $\widetilde{S}_\pm(X)$ 上的丛同构 $\overline{\phi}_\pm$ 满足以下交换图,

$$\begin{CD}
G\times\widetilde{S}_+(X) @>{\overline{\phi}_+}>> E @<{\overline{\phi}_-}<< G\times\widetilde{S}_-(X)\\
@V{p_+}VV @V{p}VV @V{p_-}VV\\
\widetilde{S}_+(X) @>{\phi_+}>> \widetilde{S}(X) @<{\phi_-}<< \widetilde{S}_-(X)
\end{CD}$$

其中 $\phi_\pm$ 为内射, $p_\pm$ 为投射. 于是存在 f 满足 $(\phi_-^{-1}\phi_+)(g,[\frac{1}{2},x]) = (f(g)g,[\frac{1}{2},x])$ 对所有 $x\in X$ 和 $g\in G$. 把 $\widetilde{S}_\pm(X)$ 看成 $\widetilde{C}_\pm(X)$, 则 E 就是 $\widetilde{S}_f(X)$, p 就是 $\widehat{p}_f$. 这说明对应 ϕ 为满射.

设 $\overline{r}\colon \widehat{p}_f\to\widehat{p}_g$ 为 $\widetilde{S}(X)$ 上的丛同构, 则 $\overline{r}$ 限制在 $\widetilde{C}_\pm(X)$ 上都是平凡丛之间的丛同构, 所以存在映射 $H_\pm\colon \widetilde{C}_\pm(X)\to G$ 满足 $\overline{r}(g,[t,x])_\pm = (H_\pm([t,x])g,[t,x])_\pm$. 由 $(g,[1,x])_+ = (f(x)g,[1,x])_-$ 可知 $f(x)H_+(1,x) = g(x)H_-(1,x)$. 等价地, $g(x)^{-1}f(x) = H^-(1,x)H_+(1,x)$. 而 $H^-(1,-)H_+(1,-)\simeq H^-(0,-)H_+(0,-)=0$. 所以 $g^{-1}f\simeq 0$, 即 $f\simeq g$. 这说明 ϕ 为单射.

定理2.8.21 分类空间 $B(G)$ 的回路空间 $\Omega(B(G))$ 与 G 弱同伦等价.

证 对任何带基点CW复形 (W,w_0), 我们有集合间的两个1-1对应的复合

$$\phi\colon [W,w_0;G,u]\to[S(X),*;B(G),g_0]\to[W,w_0;\Omega B(G),0]$$

还是1-1对应. 由 W 的任意性和表示理论可以证明以上的对应是由某个映射 $f\colon G\to\Omega(B(G))$ 导出的, 即 $\phi = f_*$. 再取 W 为球面就可知 f 为弱同伦等价映射.

定理2.8.22 对于 (又是CW复形又是拓扑群的) G, 我们有

$$\pi_n(B(G),g_0)=\pi_{n-1}(G,u),\quad n\geqslant 1,$$

其中 $\pi_0(G,u)$ 为 G 的道路连通分支集合, 其群结构由 G 的乘法自然导出. 特别地, 如果 G 为离散群, 则 $B(G)$ 为以后的定义2.9.5中的 $(G,1)$ 型Eilenberg-Maclane空间.

证 取定理2.8.6中的 W 为 S^0, 我们就得到以下长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+1};B(G)]\xrightarrow{\partial_*}[S^n;G]\xrightarrow{j_*}[S^n;E(G)]\xrightarrow{p_*}[S^n;B(G)]\xrightarrow{\partial_*}[S^{n-1};G]\to\cdots$$

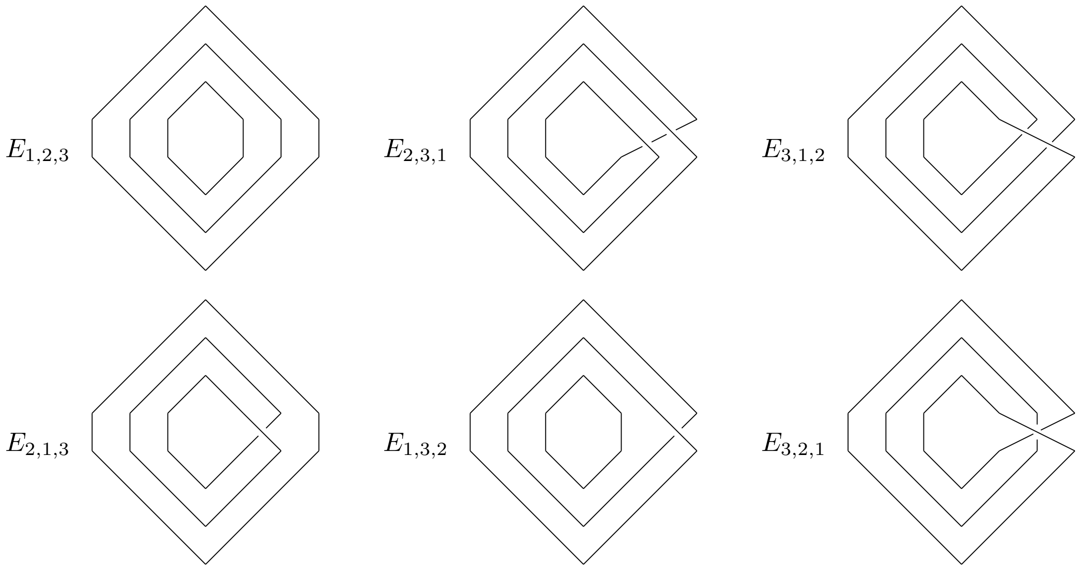
$$\cdots\xrightarrow{\partial_*}[S^1;G]\xrightarrow{j*}[S^1;E(G)]\xrightarrow{p_*}[S^1;B(G)]\xrightarrow{\partial_*}[S^0;G]\xrightarrow{j_*}[S^0;E(G)]\xrightarrow{p_*}[S^0;B(G)].$$

由 $\pi_i(E(G),e)=0$ 就得到定理结论.

例2.8.23 记 F_n 为 n 个点构成的离散空间. 那么带基点的CW复形 (X,x_0) 上的所有以 F_n 为纤维, 没有其它限制条件的纤维丛的丛同构类有多少呢? 由于 $\mathrm{Aut}(F_n)$ 就是 n 元置换群 $S(n)$, 所以保基点的丛同构类就与 $[X,x_0;B(S(n)),1]$ 有1-1对应. 取 $(X,x_0)=(S^1,*)\cong(S(S^0),*)$, $n=3$, 则

$$[X,x_0;B(S(n)),*]=\pi_1(B(S(3)),*)=\pi_0(S(3),*)=S(3).$$

所以所有保基点同构类有 $S(3)$ 的元素个数共6类. 具体地, 对于置换 $\binom{1,2,3}{i,j,k}$, 把它看成由 S^0 到 $S(3)$ 的映射, 即将 -1 映到 $S(3)$ 的单位元 $\binom{1,2,3}{1,2,3}$, 把1映到 $\binom{1,2,3}{i,j,k}$ 的映射, 则按照定义2.8.19的构造, 我们得到保基点纤维丛 $p_{i,j,k}\colon E_{i,j,k}\to S^1$, 其全空间如下图,



其中左边的三条短竖线表示作为映射的置换在 S^0 的基点 -1 处取值单位元对应的恒等转移函数, 而右边三条有直有斜的线就表示置换在点 1 处取值置换对应的置换转移函数. 由以上保基点情形不难看出非保基点的纤维同构类有三种, 由全空间的道路连通分支个数区分, 分别对应 $p_{1,2,3}$ 的同构类, $p_{2,3,1}, p_{3,1,2}$ 的同构类, $p_{1,2,3}, p_{1,3,2}, p_{3,2,1}$ 的同构类. 这就说明 $[S^1; B(S(3))]$ 上有 3 个同伦类, 也就是说底空间为 S^1, 纤维为 3 个离散点的纤维丛共有 3 个同构类.

例2.8.24 纤维丛最直接的应用之一就是光滑流形的切丛和余切丛, 许多流形的分类问题是通过分类相应的切丛或者余切丛来解决的, 而单纯流形没有直接的对应概念.

为了简化文字, 以下叙述中省略所有的光滑字样, 即所有的映射、流形、参照系, 等等都是光滑的.

n维流形 M 的切丛如下定义. 设 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 M 的微分结构(最大参照族), 它的转移函数族为 $\{t_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则切丛 $p_M\colon T(M)\to M$ 以 $\{\mathbb{R}^n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为允许族, 以 $\{t_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为转移函数族, 以 $\mathbb{R}^n$ 为纤维. 具体地,

$$T(M) = \big(\amalg_{\alpha\in\Lambda}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n_\alpha)\big)/\sim,\quad M = \big(\amalg_{\alpha\in\Lambda}(\mathbb{R}^n_\alpha)\big)/\sim,$$

其中 $(r,(x)_\alpha)\sim(t_{\alpha,\beta}(r),(y)_\beta)$, $(x)_\alpha\sim(y)_\beta$, 对所有 $r,x,y\in\mathbb{R}^n$ 和 $(x)_\alpha=(y)_\beta$. 由于有下标的区别, 我们记 M 中的一般元素为 $(x)_\alpha$, $x\in\mathbb{R}^n$ 的形式, 而不是等价类 $[(x)_\alpha]$ 的形式. 同样, 我们记 $T(M)$ 中的一般元素为 $(r,(x)_\alpha)$, $r,x\in\mathbb{R}^n$ 的形式, 而不是等价类 $[(r,(x)_\alpha)_\alpha]$ 的形式.

当 M 是嵌入流形时, 还有切丛的另外一种定义, 同时只有嵌入流形才有法丛. 设 $i\colon M\to\mathbb{R}^{n+k}$ 为嵌入, 这里 $\mathbb{R}^{n+k}$ 为标准欧式空间, 其上有标准内积 $\langle(x_1,\cdots,x_{n+k}),(y_1,\cdots,y_{n+k})\rangle=\Sigma_{i=1}^{n+k}x_iy_i$ (即由单位矩阵表示). 则对于 $x\in M$, 我们有 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的子空间 $T(i(x))$ 由所有 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的经过 $i(x)$ 的, 在 $i(M)$ 内的参数曲线在 $i(x)$ 点的导向量构成, 称为点 $i(x)$ 的切空间. 记 $T(i(x))$ 的补空间为 $\nu(i(x))=\{r\in\mathbb{R}^{n+k}\mid\langle r,y\rangle=0$ 对所有 $y\in T_i(x)\}$, 称为点 $i(x)$ 的法空间. 定义

$$T(i(M))=\{(r,x)\in\mathbb{R}^{n+k}\times M\mid r\in T(i(x)),x\in M\},$$

$$\nu(i(M))=\{(r,x)\in\mathbb{R}^{n+k}\times M\mid r\in\nu(i(x)),x\in M\}.$$

定义 $p_i\colon T(i(M))\to M$ 和 $p_\nu\colon \nu(i(M))\to M$ 为乘积空间到分量空间 M 的投射的限制映射. 则 p_i 和 p_ν 分别称为嵌入流形 M 的切丛和法丛, 当然也是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的子流形 $i(M)$ 的切丛和法丛. 下面给出 p_i 和 p_ν 的纤维丛结构.

对于 M 的参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$, 设 i 在 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 上具体表示为

$$i(x)_\alpha=i(x_1,\cdots,x_n)_\alpha=(\phi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\phi_{n+k}(x_1,\cdots,x_n)).$$

则由定义, $T(i(x_1,\cdots,x_n)_\alpha)$ 以 n 个线性无关的向量

$$t_1(x)_\alpha{=}(\tfrac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_1},\cdots,\tfrac{\partial\phi_{n+k}(x)}{\partial x_1}),\ t_2(x)_\alpha{=}(\tfrac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_2},\cdots,\tfrac{\partial\phi_{n+k}(x)}{\partial x_2}),\ \cdots,\ t_n(x)_\alpha{=}(\tfrac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_n},\cdots,\tfrac{\partial\phi_{n+k}(x)}{\partial x_n})$$

为基. 对于 M 的另一个参照系 $\mathbb{R}^n_\beta$, 设 i 在 $\mathbb{R}^n_\beta$ 上具体表示为

$$i(y)_\beta=i(y_1,\cdots,y_n)_\beta=(\psi_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,\psi_{n+k}(y_1,\cdots,y_n)).$$

同样由定义, $T(i(y_1,\cdots,y_n)_\beta)$ 以 n 个线性无关的向量

$$t_1(y)_\beta{=}(\tfrac{\partial\psi_1(y)}{\partial y_1},\cdots,\tfrac{\partial\psi_{n+k}(y)}{\partial y_1}),\ t_2(y)_\beta{=}(\tfrac{\partial\psi_1(y)}{\partial y_2},\cdots,\tfrac{\partial\psi_{n+k}(y)}{\partial y_2}),\ \cdots,\ t_n(y)_\beta{=}(\tfrac{\partial\psi_1(y)}{\partial y_n},\cdots,\tfrac{\partial\psi_{n+k}(y)}{\partial y_n})$$

为基. 由 $\mathbb{R}_\alpha\cap\mathbb{R}^n_\beta$ 上的等式 $i(x_1,\cdots,x_n)_\alpha = i(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n(x_1,\cdots,x_n))_\beta$ 就得到矩阵等式 $(\frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x_j}) = t_{\alpha,\beta}(\frac{\partial\psi_i(y)}{\partial y_j})$. 这就说明我们可以定义映射 $\overline{r}\colon T(M)\to T(i(M))$ 为 $\overline{r}(r,(x)_\alpha) = (l_\alpha(r),(x)_\alpha)$, 其中线性映射 l_α 定义为 $l_\alpha(\varepsilon_i)=t_i(x)_\alpha$, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的任一组取定标准正交基. 显然 $\overline{r}$ 的定义不依赖于参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 的选取, 因而为丛同构.

不难取到一组定义在 M 上的, 取值为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的向量值函数 $v_1,\cdots,v_k$ 满足对任何 $x\in M$, 向量组 $v_1(i(x))$, $\cdots,v_k(i(x))$ 线性无关并且张成的线性子空间 $u(i(x))$与切空间 $T(i(x))$ 相交于 0, 即 $u(i(x))\cap T(i(x))=0$. 对于以上的参照系 $\mathbb{R}^n_\alpha$, 在 $\mathbb{R}^n_\alpha$ 上我们有向量值函数族 $t_1(x)_\alpha,\cdots,t_n(x)_\alpha,v_1(x)_\alpha,\cdots,v_k(x)_\alpha$, 满足在任一点上取值的向量组都线性无关. 对这 $n{+}k$ 个向量值函数做Schmidt正交化过程, 就得到了 $n{+}k$ 个标准正交的向量值函数 $t'_1(x)_\alpha,\cdots,t'_n(x)_\alpha,v'_1(x)_\alpha,\cdots,v'_k(x)_\alpha$. 同样, 对于 M 的另一个参照系 $\mathbb{R}^n_\beta$, 我们也得到标准正交的向量值函数 $t'_1(y)_\beta,\cdots,t'_n(y)_\beta,v'_1(y)_\beta,\cdots,v'_k(y)_\beta$. 对于点 $(x)_\alpha=(y)_\beta$, 由于 $t_1(x)_\alpha,\cdots,t_n(x)_\alpha$ 和 $t_1(y)_\beta,\cdots,t_n(y)_\beta$ 张成相同的子线性空间, 而且 $v_s(x)_\alpha=v_s(y)_\beta$, 所有我们有 $v'_s(x)_\alpha=v'_s(y)_\beta$ 对 $s=1,\cdots,k$. 这就说明我们得到了一组标准正交的向量值函数 $v'_1,\cdots,v'_k$ 不依赖于参照系的选取. 由此我们得到同胚 $\overline{r}\colon \mathbb{R}^k\times M\to\nu(i(M))$ 定义为 $\overline{r}(r,x)=(l(r),x)$, 其中线性映射 l 定义为 $l(\varepsilon_i)=v'_i(x)$, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$ 为 $\mathbb{R}^k$ 的任一组取定的标准正交基. 显然 $\overline{r}$ 为丛同构. 所以法丛 p_ν 是可平凡化的.

由于 M 局部同胚于 $\mathbb{R}^n$, 所以法丛的全空间 $\nu(i(M))\cong\mathbb{R}^k\times M$ 也局部同胚于 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n+k}$. 于是存在同胚族 $\{\theta_\alpha\colon D^k\times O_\alpha\to N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足以下性质.

(1) $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 M 的开覆盖.

(2) 每个 N_α 为 $i(O_\alpha)$ 作为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的子集的一个邻域.

(3) 把 M 看成 $D^k\times M$ 的子空间 $0\times M$, 其中 D^k 为 $\mathbb{R}^k$ 的单位球, 则 θ_α 限制在 M 上就是 i,

由上可知, 如果 M 为紧流形, 则存在 $i(M)$ 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的邻域 N 和同胚 $\theta\colon D^k\times M\to N$ 满足 θ 限制在 M 上就是 i. 称这样的 N 为嵌入 i 的一个管状邻域, 称以下交换图

$$\begin{tikzcd} D^k\times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "p'"'] & N \arrow[d, "p"] \\ & D^k \end{tikzcd}$$

为单位球法丛的一个平凡化, 其中 p' 为乘积空间到分量空间的投射, p 自然就是把 N 看成平凡法丛的单位丛, 到 D^k 的投射.

2.9 覆盖映射及其应用

覆盖映射早在代数拓扑之前就被研究, 并且广泛存在于数学的各个分支之中, 成为应用最广泛的数学方法之一. 而覆盖映射最形象的应用就是在代数拓扑中, 把代数的Galois基本域扩张定理推广到拓扑空间中来.

定义2.9.1 对于映射$p\colon E\to B$, B 的开子集 O 称为(关于 p)允许的, 如果 $p^{-1}(O)$是若干E 的开子集的不交并$\amalg_\alpha U_\alpha$, 而 p 限制在每一个U_α 上都是一个U_α 到 O 的同胚. 每一个U_α 称为$p^{-1}(O)$ 的一个片.

映射 $p\colon E\to B$ 称为覆盖映射, 如果 B 为道路连通的拓扑空间, 并且存在 B 上的允许开覆盖. E 称为覆盖映射的全空间, B 称为覆盖映射的底空间, E 称为 B 的一个覆盖空间.

我们要求覆盖映射的底空间 B是道路连通的是因为以下定理.

定理2.9.2 覆盖映射 $p\colon E\to B$ 为纤维是离散空间 $F=p^{-1}(b)$ ($b\in B$任取)的纤维丛.

证 每一个允许集 O 的原象集 $p^{-1}(O)$显然为与$F{\times}O$ 同构, 其中 $F=p^{-1}(b)$, $b\in O$. 而道路连通显然意味着所有点的纤维都有1-1对应.

覆盖映射 $p\colon E\to B$最直接的性质就是局部同胚性, 即对任何 $e\in E$, 都存在 e 的一个邻域 O_e 使得 p 限制在 O_e 上为到 $p(O_e)$ 的同胚. 把道路看成点在空间上的一个运动, 则由局部同胚性我们可以直观地得出一个结论: 所有 E 上从e点出发的点运动和所有 B 上从$b=p(e)$点出发的点运动之间是1-1对应的, 因为在小的时间段内点运动处于同胚的空间. 具体地, 令 (PE,e) 为所有以 e 为起点的道路集合, (PB,b) 为所有以 b 为起点的道路集合, 则两个集合是1-1对应的. 同样不难想象相对边界同伦的道路对应道路也相对边界同伦. 所以定义两个集合上的等价关系$\sim$ 为相对边界同伦的道路等价, 则 $PE/_\sim$ 和 $PB/_\sim$ 还是1-1对应的. 以下定理就是这个直观的严格叙述.

定理2.9.3 设 $p\colon E\to B$ 为覆盖映射, $u\in B$ 和 $e\in E$ 满足 $p(e)=b$. 则对 B 上任何一条起点为 b 的道路 u, 存在唯一一条 E 上的起点为 e 的道路 $\tilde u$ 满足 $p\tilde u=u$. $\tilde u$ 称为 u 的起点提升到 e 的提升道路. 如果 $u\simeq v\ \mathrm{rel}\{0,1\}$, H 为连接 u 和 v 的相对于边界 $\{0,1\}$ 的同伦, 则存在唯一的连接 $\tilde u$ 到 $\tilde v$ 的相对于边界 $\{0,1\}$ 的提升同伦 $\widetilde H$, 即 $p\widetilde H=H$. 特别地, $\widetilde u(1)=\widetilde v(1)$. 由此可知 $p_*\colon\pi_1(E,e)\to\pi_1(B,b)$ 为单同态, 即 $p_*(\pi_1(E,e))$ 为 $\pi_1(B,b)$ 的子群.

证 存在性由定理2.8.4得到. 由于覆盖映射的局部同胚性, 保证了唯一性.

定理2.9.4 设 $p\colon E\to B$ 为覆盖映射, $e\in E$ 和$b\in B$ 满足$p(e)=b$. 则群 $\pi_1(B,b)$ 在集合 $p^{-1}(b)$ 上存在右作用定义如下. 对于任何 $e\in p^{-1}(b)$ 和 $[u]\in\pi_1(B,b)$, 令 $\tilde u$ 为 u 的起点提升到 e 的提升道路, 则 $\tilde u(1)\in p^{-1}(b)$, 并且由定理2.9.3, $\widetilde u(1)$不依赖于 u 的选取. 定义 $e[u]=\tilde u(1)$. 该群作用满足以下性质.

(1) 每点 $e\in p^{-1}(b)$ 的迷向子群为 $\pi_1(E,e)\cong p_*(\pi_1(E,e))$.

(2) 该群作用是传递的, 当且仅当 E是道路连通的.

(3) 该群作用是传递又自由的(每点的迷向子群为零), 当且仅当 E单连通.

证 由于 $(e[u])[v]=\widetilde{u}(1)[v]=(\widetilde{u}*\widetilde{v})(1)=e[u*v]=e([u][v])$, $e[0]=\widetilde{0}(1)=e$, 所以定理中定义的作用为群作用.

对于 $[\widetilde{u}]\in\pi_1(E,e)$, $e[p(\widetilde{u})]=e$, 所以 $p_*[\widetilde{u}]$处于 e 的迷向子群. 反之, 如果 $[u]\in\pi_1(B,b)$ 满足 $e[u]=e$, 则 u 的提升映射 $\widetilde{u}$ 满足起点和终点都为 e, 因而 $[\widetilde{u}]\in\pi_1(E,e)$, $[u]=p_*([\widetilde{u}])$. 所以 e 的迷向子群为 $p_*(\pi_1(E,e))$. 由定理2.9.3, $p_*(\pi_1(E,e))\cong\pi_1(E,e)$.

如果 E道路连通, 则对任何 $e,e'\in p^{-1}(b)$, 存在连接 e 到 e' 的道路 $\widetilde{u}$. 于是 $e'=e[p\widetilde{u}]$, 即群作用传递. 反之, 假设群作用传递. 则对任何 $e,e'\in E$, $p(e)=b$, $p(e')=b'$, 设 v 为 B 上的从b' 到 b 的道路, v可唯一提升到 E 上的道路 $\widetilde{v}$ 满足 $\widetilde{v}(0)=b'$, $\widetilde{v}(1)\in p^{-1}(b)$. 由传递性, 存在 $[u]\in\pi_1(B,b)$ 使得 $e[u]=\widetilde{v}(1)$. 由定义, u 的提升道路 $\widetilde{u}$ 满足 $\widetilde{u}(0)=e$, $\widetilde{u}(1)=\widetilde{v}(1)$. 所以 $\widetilde{v}*\widetilde{u}^{-1}$ 为 E 上的从e' 到 e 的道路, 即 E道路连通.

在群作用传递的前提下, 群作用是自由的, 当且仅当迷向子群 $p_*(\pi_1(E))\cong\pi_1(E)=0$.

定义2.9.5 覆盖映射 $p\colon E\to B$ 称为泛(万有, 万能)覆盖映射, 如果 E是单连通的, 称 E是 B 的泛覆盖空间.

对于泛覆盖映射 $p\colon E\to B$, B 上任何一点的原象集 $p^{-1}(b)$ 随意指定一点作为单位元, 在 $\pi_1(B,b)$ 的右作用下就是 $\pi_1(B,b)$. 换种说法, 由于 E单连通, 所以对其上任两点 a,b, 以 a 为起点以 b 为终点的相对于 $\{0,1\}$ 的道路同伦类只有一类, 我们把这唯一的道路同伦类记为 $[a,b]$, 称为 E 上的两点同伦类. 两点同伦类集合 $\{[b_1,b_2]\}_{b_i\in p^{-1}(b)}$ 上没有乘法, 只有条件乘法$[b_1,b_2][b_2,b_3]=[b_1,b_3]$. 而由这个条件乘法就得到等式

$$p_*([b_1,b_2])p_*([b_2,b_3])=p_*([b_1,b_3])\ \text{对任何}\ b_1,b_2,b_3\in p^{-1}(b).$$

该等式自然决定了$\{p_*([b_1,b_2])\}_{b_i\in p^{-1}(b)}=\pi_1(B,b)$ 的乘法.

例2.9.6 把 S^1 看成复平面的单位圆, 则指数映射 $\exp(t)=e^{2\pi it}$ 对 $t\in\mathbb{R}$ 为覆盖映射. 具体地, 取 S^1 的允许开覆盖为 $\{O_1,O_2\}$, 其中 $O_1=S^1\backslash 1$, $O_2=S^1\backslash -1$. 则

$$\exp^{-1}(O_1)=\amalg_{n\in\mathbb{Z}}\,(n,n{+}1),\ \exp^{-1}(O_2)=\amalg_{n\in\mathbb{Z}}\,(n{-}\tfrac{1}{2},n{+}\tfrac{1}{2}).$$

而 $\mathbb{R}$可缩, 当然单连通. 所以 $\exp$ 为泛覆盖映射. 所以有集合的同构

$$\pi_1(S^1,1)\cong\exp^{-1}(1)\cong\mathbb{Z}.$$

复变函数z 为复平面的恒等映射, 限制在单位圆S^1 上仍为 S^1 的恒等映射. 所以可以用 z代表$\pi_1(S^1,1)$ 的恒等映射所在的同伦类, 则对于 $k>0$, 复变函数z^k 限制在单位圆上代表的 $\pi_1(S^1,1)$ 的同伦类也是同伦类z与自身的 k 重乘积同伦类. 这点可以推广到任何整数. 特别地, 复函数z^0 限制在单位圆上也代表$\pi_1(S^1,1)$ 的零类, 复函数z^{-k} 限制在单位圆上代表z^k 的逆类. 显然 $\exp^{-1}(1)$两点同伦类$[m,n]$ 满足 $p_*([m,n])=z^{n-m}$. 所以由条件乘法的等式$[l,m][m,n]=[l,n]$就得到无条件乘法的等式$z^{m-l}z^{n-m}=z^{n-l}$, 即 $\pi_1(S^1,1)$ 上的乘法为 $z^az^b=z^{a+b}$. 所以 $\pi_1(S^1)$ 为整数加群 $\mathbb{Z}$.

从计算基本群的角度我们不难发现泛覆盖空间的重要性. 泛覆盖映射的运用在数学的各个领域中非常广泛, 但在实际情况中, 泛覆盖空间往往不是为了计算基本群的. 最常见的是以下情形. 一个空间 X 的基本群非平凡, 所以某性质很复杂, 无法认识, 而通过泛覆盖映射 $p\colon\widetilde{X}\to X$ 的建立, $\widetilde{X}$ 为单连通空间, 因而该性质成立, 再通过局部同胚的映射 p就能把 $\widetilde{X}$ 的性质通过p传递下来.

如何构造拓扑空间 B 的泛覆盖空间呢？一个自然的想法就是随意取定一点 $b_0 \in B$, 在所有以 b_0 为起点的道路空间 $(P(B), 0_{b_0})$ 上的相对同伦 $u \simeq v \ \mathrm{rel}\{0,1\}$ 自然为其上的等价关系. 则商空间 $(P(B), 0_{b_0})/_{\simeq}$ 就应该是泛覆盖空间. 从集合的角度看, 泛覆盖空间的确是集合 $(P(B), 0_{b_0})/_{\simeq}$, 但如果用紧开拓扑或者任何目前能想象到的拓扑的商拓扑定义这个商空间的拓扑, 无法保证局部同胚性. 比如, 当 B 为单连通空间时, $(P(B), 0_{b_0})$ 作为集合与 B 有显然的1-1对应, 但紧开拓扑的商拓扑空间一般地却非常复杂. 这说明在映射空间 X^Y 中, 等价关系 $\sim$ 确定后, 基本上得不到 $X^Y/_{\sim}$ 的好的性质. 以下的定理2.9.8采用了在开集的不交并空间定义等价关系的方法, 借用了底空间的性质, 完全回避了道路空间 $(P(B), 0_{b_0})$ 的拓扑, 直接构造了商空间 $(P(B), 0_{b_0})/_{\simeq}$ 的拓扑.

定义2.9.7 拓扑空间 B 称为半局部单连通的, 如果对任何 $b \in B$, 存在 b 的邻域 O 满足由内射诱导的基本群同态 $i_*\colon \pi_1(O, b) \to \pi_1(B, b)$ 为零同态.

定理2.9.8 道路连通, 局部道路连通且半局部单连通空间 B 存在泛覆盖空间.

证 定义 B 的开集族 $\mathscr{B}$ 如下. $O \in \mathscr{B}$, 如果 O 为道路连通开集, 且存在 $x_0 \in O$ 使得由内射诱导的基本群同态 $\pi_1(O, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$ 为零同态. 显然如果存在 $x_0 \in O$ 满足以上条件, 则对任何 $x \in O$, 由内射诱导的基本群同态 $\pi_1(O, x) \to \pi_1(B, x)$ 都为零同态.

现证 $\mathscr{B}$ 为 B 的拓扑基. 首先证明 $\mathscr{B}$ 的一个基本性质：如果 $O \in \mathscr{B}$, 则对任何包含于 O 的开集 U, 都有 $U \in \mathscr{B}$, 因为显然由内射诱导的基本群同态 $\pi_1(U, x) \to \pi_1(O, x) \to \pi_1(B, x)$ 仍为零同态. 由此结论就很容易得出以下的证明. 对于任何 $x \in B$, 由半局部单连通性, 存在 x 的邻域 O 使得 $O \in \mathscr{B}$. 令 O_x 为 x 所处的 O 的道路连通分支, 则由于 B 为局部道路连通空间, O_x 为开集. 而 $O_x \subset O$ 蕴含 $O_x \in \mathscr{B}$. 这说明 $B = \cup_{O \in \mathscr{B}} O$. 对于 $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ 和任何 $x \in U_1 \cap U_2$, 令 U_x 为 x 所处的 $U_1 \cap U_2$ 的道路连通分支. 同样由于 B 局部道路连通可知 U_x 也是开集. 则由 $U_x \subset U_1 \cap U_2 \subset U_i$ 可知 $U_x \in \mathscr{B}$. 由定理1.2.3可知 $\mathscr{B}$ 为 B 的拓扑基.

构造集合 E. 记 $P(B)$ 为所有以 b_0 为起点的道路集合, 则对于任何 $\mathscr{B}$ 中的开集 O, 我们有一个以 $P(B)$ 中的元素为下标的集族 $\{O_u\}_{u \in P(B)}$, 其中每一个 O_u 都为同一个集合 O. 为了区别下标不同的同一个集合 O, 我们用 $(x)_{O_u}$, $x \in O$ 表示 O_u 中的元素. 令

$$E = \left(\amalg_{u \in P(B), O \in \mathscr{B}, u(1) \in O} \ O_u \right) / \sim,$$

其中 $(x)_{O_u} \sim (y)_{P_v}$, 如果 $x = y$, $u(1), v(1) \in O \cap P$, 并且存在 $O \cap P$ 中的由 $u(1)$ 到 $v(1)$ 的道路 σ 使得 $u * \sigma \simeq v$. 这里 $\simeq$ 是指作为 B 中的道路的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦, 以下所有同伦号都是如此含义.

记 $q\colon \amalg_{u \in P(B), O \in \mathscr{B}, u(1) \in O} \ O_u \to E$ 为商映射, $q((x)_{O_u}) = [(x)_{O_u}]$, $[O_u] = q(O_u) = \{[(x)_{O_u}] \in E \,|\, x \in O\}$. 显然每个 $[O_u]$ 都是 E 的一个开子空间, 因为对于 $x, y \in O$ 和 $x \neq y$, $[(x)_{O_u}] \neq [(y)_{O_u}]$. 还易证 $[O_u] = [O_v]$, 当且仅当存在 O 中连接 $u(1)$ 到 $v(1)$ 的道路 σ 使得 $u * \sigma \simeq v$. 特别地, 如果还有 $u(1) = v(1)$, 则 $[O_u] = [O_v]$, 当且仅当 $u \simeq v$. 由 $\mathscr{B}$ 为 B 的拓扑基不难证明 $\{O_u\}_{u \in P(B), O \in \mathscr{B}, u(1) \in O}$ 为 E 的拓扑基.

下面证明我们有集合的1-1对应 $\phi\colon E \to P(B)/_{\simeq}$, 其中 $\simeq$ 为 $P(B)$ 的相对于 $\{0,1\}$ 的同伦等价关系. 定义 $\phi([(x)_{O_u}]) = [u * \sigma]$, 其中 σ 为 O 中任一条由 $u(1)$ 到 x 的道路. 显然由等价关系 $\sim$ 的定义, 对应 ϕ 的定义不依赖于 $(x)_{O_u}$ 和 σ 的选取是合理的. 如果 $\phi([(x)_{O_u}]) = \phi([(y)_{P_v}])$, 则 $x = y$ 并且存在 O_u 中的以 $u(1)$ 为起点, x 为终点的道路 σ 和 P_v 中的以 $v(1)$ 为起点, y 为终点道路 τ. 由定义 $(x)_{O_u} \sim (x)_{O_{u*\sigma}} \sim (x)_{(O \cap P)_{u*\sigma}}$, $(y)_{P_v} \sim (y)_{P_{v*\tau}} \sim (y)_{(O \cap P)_{v*\tau}}$. 而 $\phi([(x)_{(O \cap P)_{u*\sigma}}]) = \phi([(y)_{(O \cap P)_{v*\tau}}])$ 蕴含对于 $u*\sigma \simeq v*\tau$. 于是 $(x)_{(O \cap P)_{u*\sigma}} \sim (y)_{(O \cap P)_{v*\tau}}$, 因此 $[(x)_{O_u}] = [(y)_{P_v}]$. 这说明 ϕ 是单射. 任取包含 $u(1)$ 的开集 O, 则 $\phi([(u(1))_{O_u}]) = u$. 所以 ϕ 是满射.

定义$p\colon E\to B$为$p([(x)_{O_u}])=x$, 则p限制在每个O_u上为到O的同胚. 所以p为覆盖映射.

显然b_0的原像集为$p^{-1}(b_0)=\{[(b_0)_{O_u}]\}$, 其中$u$为$B$中的以$b_0$为起始点的回路, O为任何b_0的邻域. 显然$p^{-1}(b_0)$与$\pi_1(B,b_0)$是同一集合. 如果能够证明E道路连通, 则由定理2.9.4, $\pi_1(E)=0$, E就是B的覆盖空间. 对于任何$b_1\in B$, 任取B中的由b_0到b_1的道路ω, 记由b_0到$\omega(t)$的道路ω_t为$\omega_t(s)=\omega(st)$, 任取$\omega(t)$的邻域$O^t\in\mathscr{B}$, 则不难验证$\widetilde{\omega}(t)=[(\omega(t))_{O^t_{u_t}}]$为$E$中的道路. 所以$E$道路连通.

以上定理中的E的构造实际上为集合的直极限. 而以上定理的证明典型地体现了现代数学的一个特点, 条件的提出更多地依赖于逻辑结构, 而不是直观感觉. 比如, 我们有以下定义.

拓扑空间B称为半局部可缩的, 如果对任何$b\in B$, 存在b的可缩邻域O.

这显然是一个比半局部单连通要强得多的条件, 也是我们在实际应用当中采用的来证明覆盖空间存在的条件. 但是如果把以上定理中的半局部单连通条件改为半局部可缩条件, 却无法构造直极限, 因为所有可缩开集根本不构成B的拓扑基, 可缩开集的开子集也未必可缩. 这就是一个逻辑上更强的条件却给不出逻辑上的证明的例子. 也正是因为这种现象的出现, 现代数学中可证明的定理和可具体操作的方法两者相距越来越远. 比如, 如果给一个具体的拓扑空间, 我们在绝大多数情况下是无法通过以上定理的方法来具体构造覆盖空间的.

定义2.9.9 设$p_i\colon E_i\to B$, $i=1,2$, 为同一个底空间B上的两个不同的覆盖映射. 覆盖映射间的同态$f\colon p_1\to p_2$就是指一个满足$p_2f=p_1$的全空间之间的映射$f\colon E_1\to E_2$. p_1和p_2称为同构的, 如果存在同态$f\colon p_1\to p_2$和$g\colon p_2\to p_1$满足$gf=1_{E_1}$, $fg=1_{E_2}$.

设$p_i\colon(E_i,e_i)\to(B,b)$, $i=1,2$, 为同一个带基点底空间(B,b)上的两个不同的保基点覆盖映射. 保基点覆盖映射间的同态$f\colon p_1\to p_2$就是指一个满足$p_2f=p_1$的全空间之间的保基点映射$f\colon(E_1,e_1)\to(E_2,e_2)$. p_1和p_2称为同构的, 如果存在保基点同态$f\colon p_1\to p_2$和$g\colon p_2\to p_1$满足$gf=1_{E_1}$, $fg=1_{E_2}$.

定理2.9.10 设B为道路连通且局部道路连通空间, $p_i\colon(E_i,e_i)\to(B,b)$, $i=1,2$, 为B上的两个保基点覆盖映射, 满足E_1,E_2都是道路连通空间.

存在保基点覆盖映射的同态$f\colon p_1\to p_2$, 当且仅当$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$为$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$的子群. 由此可知f为同构, 当且仅当$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))=(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$.

把p_1,p_2当作非保基点覆盖映射, 则存在非保基点覆盖映射$f\colon p_1\to p_2$, 当且仅当$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$共轭于$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$的某个子群. 由此可知f为同构, 当且仅当$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$共轭于$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$.

证 如果$f\colon p_1\to p_2$为保基点覆盖映射同态, 则有$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))=(p_2f)_*(\pi_1(E_1,e_1))$. 由定理2.9.3, $(p_1)_*$和$(p_2)_*$都为单同态, 所以f_*也为单同态, 等价地, $(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$为$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$的子群.

如果$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$为$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$的子群. 定义$f\colon(E_1,e_1)\to(E_2,e_2)$如下. 对任何$x\in E_1$, 任取连接$e_1$到$x$的道路$\widetilde{u}_1$. 则$B$上的道路$p_1(\widetilde{u}_1)$可以在$E_2$上唯一提升为以$e_2$为起点的道路$\widetilde{u}_2$. 定义$f(x)=\widetilde{u}_2(1)$. 首先证明$f$的定义不依赖于$\widetilde{u}_1$的选取. 假设$\widetilde{v}_1$为连接$e_1$到$x$的另一条道路. 则$[\widetilde{u}_1{*}\widetilde{v}_1^{-1}]\in\pi_1(E_1,e_1)$. 由定理条件$(p_1)_*[(\widetilde{u}_1)*(\widetilde{v}_1^{-1})]$为$(p_2)_*(\pi_2(E_2,e_2))$中的元. 这说明道路$p_1(\widetilde{u}_1)*p_1(\widetilde{v}_1)$可以提升为$E_2$上的回路, 即$p_1(\widetilde{v}_1)$可以提升为$E_2$上的道路$\widetilde{v}_2$并且和$\widetilde{u}_2$的起点和终点相同. 所以$f$不依赖于$\widetilde{u}_1$的选取. 由允许开集的原像集为开集可知$f$连续.

把p_1,p_2当作非保基点覆盖映射, 则存在非保基点覆盖映射$f\colon p_1\to p_2$, 当且仅当存在$e_2'\in p_2^{-1}(b)$和保基点覆盖映射$f\colon(E_1,e_1)\to(E_2,e_2')$使得$f(e_1)=e_2'$, 当且仅当$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1))$为$(p_2)_*(\pi_1(E_2,e_2'))$的子群.

而 $(\pi_1(E_2,e_2'))$ 的子群都与$(\pi_1(E_2,e_2))$ 的子群共轭.

定理2.9.11 设 B 道路连通, 局部道路连通且半局部单连通. 则 B 上的所有全空间道路连通的保基点覆盖映射的同构类集合, 与 $\pi_1(B)$ 的所有子群的集合1-1对应; B 上的所有全空间道路连通的覆盖映射的同构类集合, 与 $\pi_1(B)$ 的所有子群的共轭类集合1-1对应. 由此可知泛覆盖空间的同胚类唯一.

证 令 $p\colon (E,e)\to(B,b)$ 为保基点泛覆盖映射. 对于 $\pi_1(B,b)$ 的任何子群 H, 定义 E 上的等价关系为 $e\sim he$ 对所有 $e\in E$ 和 $h\in H$. 记 $E_H=E/\sim$, $q_H\colon E\to E_H$ 为商映射. 则我们有以下映射的交换图.

$$\begin{tikzcd}
(E,e) \arrow[r, "q_H"] \arrow[dr, "p"'] & (E_H,e_H) \arrow[d, "p_H"] \\
& (B,b)
\end{tikzcd}$$

显然 p, p_H 和 q_H 都是覆盖映射, 并且$(p_H)_*(\pi_1(E_H,e_H))=H$. 由前定理可知由 H 到 p_H 的对应为由 $\pi_1(B)$ 的所有子群的集合到 B 上的所有全空间道路连通的保基点覆盖映射的同构类集合的1-1对应.

非保基点情形完全类似.

以上定理被看作Galois域扩张定理在代数拓扑中的推广.

覆盖映射显然是纤维为离散空间的纤维丛, 但是本节所有的定义和证明中都不涉及与纤维转移函数相关的概念和方法. 这只是因为要解决的问题不同, 因而研究的方法也不同.

例2.9.12 由于 $\pi_1(S^1,*)\cong\mathbb{Z}$ 为交换群, 其所有子群的集合与所有正规子群的集合同为 $\{\mathbb{Z},n\mathbb{Z}\}_{n=1,2,\cdots}$, 所以所有全空间道路连通, 底空间为 S^1 的覆盖映射集合为 $\{\exp,z^n\}_{n=1,2,\cdots}$, 其中 $\exp$ 如例2.9.6中所定义, z^n 为把 S^1 看成复平面的单位元复变函数 z^n 在其上的限制映射. 注意这其中纤维为 3 个离散点的覆盖映射只有一类. 比较例2.8.23中的结果, 两者是一致的. 在例2.8.23中纤维为 3 个离散点的纤维丛中, 只有一类全空间道路连通.

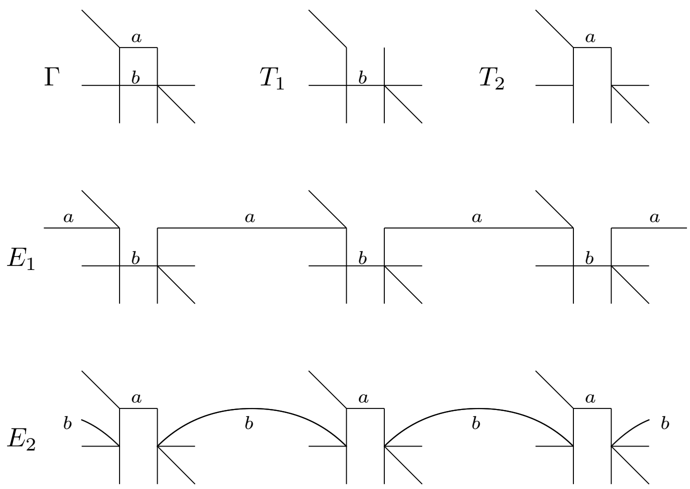
道路连通的CW复形都满足定理2.9.8的条件, 所以存在泛覆盖空间. 我们首先考虑1维CW复形, 也就是图的泛覆盖映射的构造.

定义2.9.13 设 Γ 为一连通图. 记 E 为 Γ 的边集, 即所有 1胞腔构成的集合. Γ 上的一个道路 $\omega\colon I\to\Gamma$ 称为规则的, 如果 ω 限制在 $(0,1)$ 上为到 Γ 的某个条边 e 的内部的同胚, 因而 $\omega(0)$ 和 $\omega(1)$ 一定为边 e 的端点(允许 $\omega(0)=\omega(1)$). 两条规则道路 ω,π 称为等价的, 记为 $\omega\approx\pi$, 如果 $\omega=\pi\phi$, 其中 ϕ 为 I 到自身的保持 $0,1$ 不动的同胚映射. 定义 D 为所有规则道路按照等价关系 $\approx$ 构成的等价类集合. 显然 D 的元素, 也叫定向边, 可以记为 $[a,e,b]$ 的形式, 其中 a 为定向边的起点, b 为定向边的终点, $e\in E$. 定向边 $[a,e,b]$ 存在唯一的逆, 即逆道路所对应的反向边 $[b,e^{-1},a]$. 所以虽然定向边的起点和终点可以相等, 但是即便是起点和终点相同, $[a,e,a]$ 和 $[a,e^{-1},a]$ 也是不同的定向边. Γ 的一条路径就是一列终点和起点相同的定向边的连接 $[a_1,e_1^{\varepsilon_1},a_2][a_2,e_2^{\varepsilon_2},a_3]\cdots[a_n,e_n^{\varepsilon_n},a_{n+1}]$, 在不引起混淆的情况下我们总是把该路径简记为 $[a_1,e_1^{\varepsilon_1}e_2^{\varepsilon_2}\cdots e_n^{\varepsilon_n},a_{n+1}]$, 其中 $\varepsilon_i=\pm1$. Γ 的一条约化路径 $[a_1,e_1^{\varepsilon_1}e_2^{\varepsilon_2}\cdots e_n^{\varepsilon_n},a_{n+1}]$ 为一路径, 满足没有两条相继的定向边互为逆, 即 $e_i^{\varepsilon}\neq e_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}$ 对所有 $i=1,\cdots,n-1$. 特别地, 我们定义 $[a,1,a]$ 为一路径, 称为常值路径.

定义树 T_Γ 如下. 取定一个 Γ 的顶点 b. 则 T_Γ 的顶点集为所有以 b 为起点的 Γ 的约化路径构成的集合. T_Γ 的边如下定义. 如果 $[b,e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n},b_{n+1}]$ 和 $[b,e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n}e_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}},b_{n+2}]$ 都是 Γ 的约化路径, 则存在唯一的一条

边连接这两个顶点. 我们记这条边为 $(e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n}, e_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}})$. 显然 T_Γ 为一树, 因为有指向点 $[b,1,b]$ 的唯一直线场. 令映射 $p\colon T_\Gamma \to \Gamma$ 如下. $p([b, e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n}, b_{n+1}]) = b_{n+1}$, p 将边 $\widetilde{e} = (e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n}, e_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}})$ 顺向同胚地映到 Γ 的边 e_{n+1}, 即如果 $[b_{n+1}, e_{n+1}^{\varepsilon_n+1}, b_{n+2}]$ 由为正规道路 ω 所在的等价类, 则 p 限制在 $\widetilde{e}$ 上满足 $\omega\phi^{-1}$ 为恒等映射, 其中 ϕ 为 e_{n+1} 的特征映射. 显然 p 限制在每条边的内部为同胚, 而由于 T_Γ 的顶点 $\widetilde{b} = [b, e_1^{\varepsilon_1}\cdots e_n^{\varepsilon_n}, b_{n+1}]$ 的邻边集与 Γ 的顶点 $b_{n+1} = p(\widetilde{b})$ 的临边集是1-1对应的, 因而 p 在每个顶点 $\widetilde{b}$ 的附近也是同胚. 所以 T_Γ 为局部同胚, 因而是泛覆盖映射.

以上构造就像定理2.9.8的证明一样, 虽然逻辑上严格, 但是对于具体问题却没有可操作性. 在实际情况中我们构造如下. 取一个 Γ 的最大树 T, 则 $\pi_1(\Gamma, b)$ 的生成元集合就是 Γ 的不在 T 中的边构成的集合 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 也就是说 $\pi_1(\Gamma, b)$ 为自由群 $G = F(\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. 我们得到 G 个 T 的不交并图 $T\times G$. 将不叫并图 $T\times G$ 中的所有形如 (u, g) 和 $(v, e_\alpha g)$ 的顶点连一个边, 其中 e_α 的起点和终点分别为 u 和 v (u 可以等于 v), g 和 $e_\alpha g$ 都为 G 的约化字. 这样我们就把 $T\times G$ 连接成一个更大的树 T_Γ, 该树就是 Γ 的泛覆盖空间. 下图给出了一个秩为 1 的图 Γ 由不同的最大树 T_1 和 T_2 按照以上方法构造的泛覆盖空间 E_1 和 E_2.



注意表面上看 E_1 和 E_2 很不一样, 但其实两者是同胚的, 因为都同胚于定义2.9.13中的泛覆盖空间.

以上的思想也可以推广到任意CW复形的覆盖空间的构造上. 首先我们需要以下的结果.

定理2.9.14 设 $p\colon E \to B$ 为覆盖映射, $b \in B$, $e \in p^{-1}(b)$. 则对于任何保基点映射 $u\colon (S^n, *) \to (B, b)$, $n \geqslant 2$, 存在唯一的提升保基点映射 $\widetilde{u}\colon (S^n, *) \to (E, e)$ 满足 $p\widetilde{u} = u$.

证 由覆盖映射的局部同胚性不难推出提升映射 $\widetilde{u}$ 的唯一性. 下面证明 $\widetilde{u}$ 的存在性. 由于覆盖映射为纤维丛, 由定理2.8.6的同伦群的长恰当序列可知当 $n \geqslant 2$ 时, p 导出的同伦群同态 $p_*\colon \pi_n(E, e) \to \pi_n(B, b)$ 为同构. 于是存在 $\overline{u}\colon (S^n, *) \to (E, e)$ 满足 $p_*[\overline{u}] = [u]$, 其中 $[-]$ 代表 $\pi_n(B, b)$ 的同伦类, 也就是说 $p\overline{u} \simeq u$. 令 $H\colon (I\times S^n, I\times *) \to (B, b)$ 为连接 $p\overline{u}$ 到 u 的同伦, 即 $H(0, x) = p\overline{u}(x)$, $H(1, x) = u(x)$. 则 H 显然有初始映射 $p\overline{u}$ 的提升映射 $\overline{u}$, 而 p 为弱纤维映射, 所以 H 有提升同伦 $\widetilde{H}\colon (I\times S^n, I\times *) \to (E, e)$ 满足 $p\widetilde{H} = H$. 于是 $\widetilde{u}(x) = \widetilde{H}(1, x)$ 就是所要求的提升映射 $\widetilde{u}$.

定义2.9.15 设 (X, x_0) 为道路连通的带基点CW复形, 其骨架为 $\{X^n\}$. 则泛覆盖映射 $p\colon (\widetilde{X}, *) \to (X, x_0)$ 按照骨架的维数如下归纳定义. 记 $\pi_1(X, x_0) = G$. 设 $\overline{p}_1\colon (\overline{X}^1, *) \to (X^1, x_0)$ 为定义2.9.13所定义的 1维骨

架 X^1 的泛覆盖映射. 则 $\pi_1(X^1,x_0)$ 为自由群并且自由地作用在 $\overline{X}^1$ 上. 定义 $\overline{X}^1$ 上的等价关系$\sim$为 $x\sim y$ 如果任何一条连接 x 到 y 的道路 u 都满足 pu 为 X^1 上的回路. 显然$\sim$为等价关系. 记 $\widetilde{X}^1=\overline{X}^1/_\sim$, $p_1\colon \widetilde{X}^1\to X^1$ 为由$\sim$导出的覆盖映射. 由$\sim$的定义可知, 对于任何 X^1 上的回路 $u\colon(S^1,*)\to(X_1,b)$ 和任何 $e\in p_1^{-1}(b)$, 存在唯一的提升回路 $\widetilde{u}\colon(S^1,*)\to(X^1,e)$ 使得 $p_1\widetilde{u}=u$. 构造$\widetilde{X}^2$ 如下. 对于任何 X^2 的胞腔e^2_α, 设其粘合映射为 $\psi^2_\alpha\colon(S^1,*)\to(X^1,b)$. 则对于任何 $e\in p_1^{-1}(b)$, 记 $\psi^2_{\alpha,e}\colon(S^1,*)\to(\widetilde{X}^1,e)$ 为 ψ^2_α 的提升映射. 则 $\widetilde{X}^2$ 的2维胞腔集为 $\{e^2_{\alpha,e}\}$, 其中 $e^2_{\alpha,e}$ 的粘合映射为 $\psi^2_{\alpha,e}$. 定义 $p_2\colon\widetilde{X}^2\to X^2$ 满足限制在 $\widetilde{X}^1$ 上为 p_1, 限制在每个胞腔$e^2_{\alpha,e}$ 的内部为到 e^2_α 的内部的同胚. 归纳地, 假设对于 $n>2$, $p_n\colon\widetilde{X}^n\to X^n$已经定义. 对于任何 X^{n+1} 的胞腔e^{n+1}_α, 设其粘合映射为 $\psi^{n+1}_\alpha\colon(S^n,*)\to(X^n,b)$. 则对于任何 $e\in p_n^{-1}(b)$, 记 $\psi^{n+1}_{\beta,e}\colon(S^n,*)\to(\widetilde{X}^n,e)$ 为 ψ^{n+1}_β 的提升映射. 则 $\widetilde{X}^{n+1}$ 的 n+1维胞腔集为 $\{e^{n+1}_{\beta,e}\}$, 其中 $e^{n+1}_{\beta,e}$ 的粘合映射为 $\psi^{n+1}_{\beta,e}$. 定义 $p_{n+1}\colon\widetilde{X}^{n+1}\to X^{n+1}$ 满足限制在 $\widetilde{X}^n$ 上为 p_n, 限制在每个胞腔$e^{n+1}_{\beta,e}$ 的内部为到 e^{n+1}_β 的内部的同胚. 由此归纳地得到 $\widetilde{X}$ 的骨架为 $\{\widetilde{X}^n\}$, 覆盖映射 $p\colon(\widetilde{X},*)\to(X,x_0)$ 满足限制在每个$\widetilde{X}^n$ 上为 p_n. 不难验证p 为泛覆盖映射.

以上定义同定义2.9.13类似, 理论上清晰简明, 但是不具有实际的可操作性, 主要体现在粘合映射的扩张映射 $\psi^{n+1}_{\beta,e}$ 的具体构造上. 对于只有一个0胞腔的2维CW复形来说, 我们有以下更具体的构造.

定义2.9.15 对于群表示$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, Cayley复形 $C(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$(以下简记为 C)如下定义.

C 的 0维骨架为群 $G=F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$(离散拓扑).

C 的 1-胞腔集合与$S\times G$ 有1-1对应. 具体地, 对于任何 $g\in G$ 和 $s\in S$, 存在唯一的 1-胞腔$e_{g,gs}$以 g 和 gs 为边点. 这里$e_{g,gs}$是和下标顺序有关的. 比如, 如果生成元s 满足 $s^2=1$, 则 $e_{g,gs}$ 和 $e_{gs,g}$是不同的 1-胞腔.

C 的 2-胞腔集合与$\Lambda\times G$ 有1-1对应. 具体地, 对于任何 $g\in G$ 和 $\alpha\in\Lambda$, 存在唯一的 2-胞腔$f_{g,\alpha}$其粘合映射 $\psi_{g,\alpha}$ 如下定义. 假如 $r_\alpha=s_1^{\pm1}\cdots s_n^{\pm1}$, 其中每个$s_k\in S$, 允许$s_i=s_j$ 对 $i\neq j$, 则 $\psi_{g,\alpha}$ 为将S^1 的 n边形剖分中顶点按逆时针顺序依次映到 $g_0{=}g, g_1{=}g_0s_1^{\pm1},\cdots,g_{n-1}{=}g_{n-2}s_{n-1}^{\pm1}$, 将边映到相应的边$e_{g_i,g_{i+1}}$(下标取模$n$整数)的单纯映射.

把 $F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, $C(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, $T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ 分别简记为 G, C, T.

首先给出 G在 C 上的自由的作用 $\circ$.

对于 $h\in G$ 和 C 的顶点 $g\in G$, 定义 $h\circ g=hg$.

对于 $h\in G$ 和 C 的 1-胞腔$e_{g,gs}$, 其中 $g\in G$, $s\in S$, $h\circ$把 $e_{g,gs}$ 同胚地映到 $e_{hg,hgs}$ 上.

对于 $h\in G$ 和 C 的 2-胞腔$f_{g,\alpha}$, 其中 $g\in G$, $\alpha\in\Lambda$, $h\circ$把 $f_{g,\alpha}$ 的内部同胚地映到 $f_{hg,\alpha}$ 的内部, 且为 $h\circ$在边缘上的作用的扩张映射.

以上群作用 $G\times C\to C$显然满足以下性质.

(1) 对每个$g\in G$, 对应$x\to g\circ x$ 为C到自身的同胚映射.

(2) 对每个$x\in C$, 子集 $\{g\circ x\,|\,g\in G\}$ 为 C 的离散子集.

由以上性质可知如果我们定义 C 上的等价关系$\sim$为 $x\sim g\circ x$ 对所有 $g\in G$ 和 $x\in C$, 则商投射 $q\colon C\to C/_\sim$ 为覆盖映射. 具体地, 对于 $x\in C$, 由于子集 $Gx=\{g\circ x\,|\,g\in G\}$ 为Hausdorff空间 C 的离散子集, 所以 $Gx\backslash x$ 为闭集, 所以存在 x 的邻域 O 满足 $O\cap(Gx\backslash x)=\emptyset$, 于是 $U=p(O)$就是一个包含$p(x)$点的允许集, $p^{-1}(U)$就是开集族$\{g\circ y\,|\,y\in O\}_{g\in G}$ 的不交并. 显然 $C/_\sim$就是 T, 不区分T 和 $C/_\sim$, 我们就得到$\sim$导出的商映射 $p\colon C\to T$ 为覆盖映射. 由于 $p^{-1}(x)$与G 有1-1对应, 所以 G在 C 上的作用是自由的, 因而 p 为泛覆盖映射.

例2.9.17 当零关系集为空集时, $C(x_1,\cdots,x_n)$ 同胚于例2.3.4中的分叉树T_n. $T(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $S^1\vee\cdots\vee S^1=\vee_n S^1$($n$重一点并). 所以 $\pi_1(\vee_n S^1,*)=F(x_1,\cdots,x_n)$, 其中 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 为由 $x_1,\cdots,x_n$生成的自由群.

例2.9.18 球面$S^2=T(\,;1)$ 的基本群为零群, 所以 $[S^1;S^2]$也为零群. 实射影空间 $RP^2=T(x;x^2)$ 的基本群为$F(x;x^2)\cong\mathbb{Z}_2$, 由于为交换群, 由定理2.3.22, $[S^1;RP^2]$也为$\mathbb{Z}_2$. 轮胎面$T=T(x,y;xyx^{-1}y^{-1})$ 的基本群为$F(x,y;xyx^{-1}y^{-1})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 同样由于为交换群, 所以 $[S^1;T]$也为 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Klein瓶$K=T(x,y;xyx^{-1}y)\cong T(x,y;x^2y^2)$ 的基本群为 $F(x,y;xyx^{-1}y)\cong F(x,y;x^2y^2)$, 但是 $[S^1;K]$没有群结构.

定理2.9.19 (Borsuk-Ulam定理) 不存在映射 $f\colon S^2\to S^1$ 将对径点映到对径点, 即对所有的 $x\in S^2$, 都有 $f(-x)=-f(x)$.

证 假设存在满足定理条件的 f, 则 f 导出以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ RP^2 \arrow[r, "g"] & RP^1, \end{tikzcd}$$

其中 p,q 为将对径点粘合的商映射, 都为覆盖映射. 由于 $RP^1\cong S^1$, $\pi_1(RP^2)=\mathbb{Z}_2$, $\pi_1(RP^1)=\mathbb{Z}$, 所以 g诱导的基本群同态g_*只能为零同态. 设 u 为 RP^2 上回路, 其同伦类代表基本群中唯一的非单位元. 则 u可以唯一提升为 S^2 上的道路 $\widetilde{u}$ 使得 $\widetilde{u}(0)$ 和 $\widetilde{u}(1)$ 为对径点. 于是复合映射 $f\widetilde{u}$仍然满足 $f\widetilde{u}(0)$ 和 $f\widetilde{u}(1)$ 为对径点. 这说明 $[qf\widetilde{u}]$代表$\pi_1(RP^1)$ 中的非零元. 而 $[qf\widetilde{u}]=[gp\widetilde{u}]=g_*([u])=0$. 矛盾!

习题 2.9

2.9.1.证明如果 $p_1\colon E_1\to B_1$, $p_2\colon E_2\to B_2$ 为(泛)覆盖映射, 则 $p_1\times p_2\colon E_1\times E_2\to B_1\times B_2$也为(泛)覆盖映射. 由此构造轮胎面的泛覆盖映射.

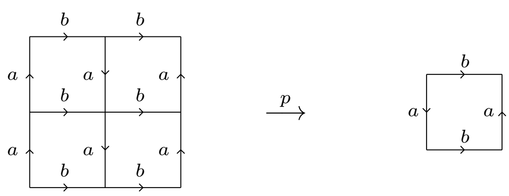
2.9.2. 求射影空间 RP^n $(n>1)$的基本群.

2.9.3. 从覆盖映射角度求Moore空间 $M^2(n)$ 的基本群.

2.9.4. 指出 $S^1\vee S^n$, $D^1\cup S^n$ $(n>1)$的所有覆盖映射的同胚类.

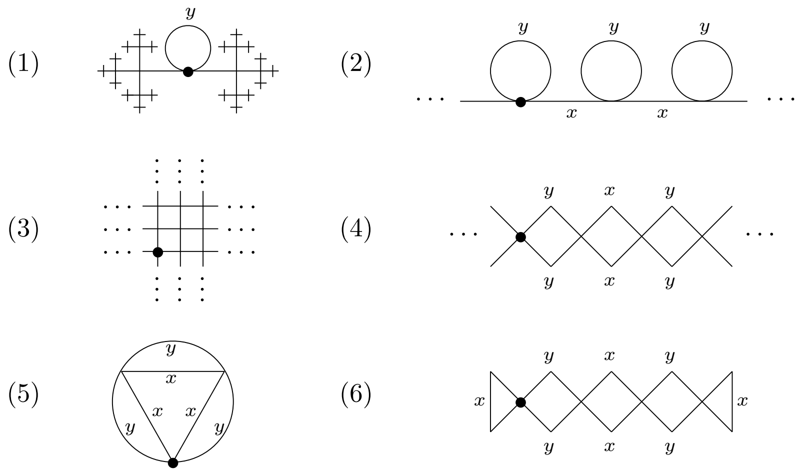
2.9.5. 证明射影平面不是轮胎面的覆盖空间.

2.9.6 下图示意了轮胎面到Klein瓶的覆盖映射 $p\colon S(xyxy)\to S(ab^{-1}ab)$, 其中左边大方框的两个竖边代表$x$, 两个横边代表$y$.



求 $p_*\colon \pi_1(S(xyxy),*) \to \pi_1(S(ab^{-1}ab),*)$并由上图构造Klein瓶的泛覆盖映射.

2.9.7. 下图中平面$\mathbb{R}^2$的子空间((1)无穷分叉)到$S^1\vee S^1$的保基点覆盖映射$p:(E,e)\to(S^1\vee S^1,*)$如下定义. 大的黑点为覆盖空间的基点$e$. 所有圆形, 三角形和菱形的边缘线都是逆时针指向. 其它所有平行于坐标轴的直线段都沿坐标由小到大的指向. 所有分叉点都映到$S^1\vee S^1$的基点. 一条边(连接分叉点又不含分叉点的开线段)标注为x表示p将该条边沿指向同胚映到$S^1\vee S^1$的第一个分量空间$S^1\backslash *$, 标注为y表示p将该条边沿指向映到$S^1\vee S^1$的第二个分量空间$S^1\backslash *$. 所有图中未标注的平行于x轴的边都标注x, 平行于y轴的边都标注y. 试确定这些覆盖映射对应的$\pi_1(S^1\vee S^1,*)=F(x,y)$的子群$p_*(\pi_1(E,e))$.



2.9.8. 覆盖映射$p:E\to B$ (E道路连通)的$\pi_1(B,b)$的子群$p_*(\pi_1(E,e))$ ($e\in p^{-1}(b)$) 什么时候不依赖于基点e的选取. 指出上题中哪些覆盖映射满足这个性质.

2.9.9. 设映射$f\colon S^2\to\mathbb{R}^2$满足$f(-x)=-f(x)$对所有$x\in S^2$. 证明一定存在$x$使$f(x)=0$.

2.9.10. 证明地球上一定有两个对径点海拔和温度相同.

2.9.11. 证明如果F_1,F_2,F_3为S^2的闭集满足$S^2=F_1\cup F_2\cup F_3$, 则一定存在S^2上的两个对径点同属于某个F_i.

2.10 Van Kampen 定理

两个群$G_i=F(S_i;T_i)$, $i=1,2$, 的自由积定义为$G_1*G_2=F(S_1\amalg S_2;T_1\amalg T_2)$, 其中$S_i$为生成元集, T_i为零关系集. 由于我们以下的讨论不涉及空间的对应, 采用$(S_i;T_i)$的简洁形式(T_i中的字可以出现重复和单位元). 自由积不依赖于表示的选取, 因为有以下从同态扩张性角度的定义.

群G_1*G_2和内射同态$i_1\colon G_1\to G_1*G_2$, $i_2\colon G_2\to G_1*G_2$满足以下同态扩张性, 对于任何群H和任何群同态$f_1\colon G_1\to H$和$f_2\colon G_2\to H$,都存在唯一的扩张同态$f\colon G_1*G_2\to H$满足$fi_1=f_1$, $fi_2=f_2$. 反之,如果群G和群同态$i_1\colon G_1\to G$, $i_2\colon G_2\to G$满足以下同态扩张性, 对于任何群H和任何群同态$f_1\colon G_1\to H$和$f_2\colon G_2\to H$,都存在唯一的扩张同态$f\colon G\to H$满足$fi_1=f_1$, $fi_2=f_2$,则$G\cong G_1*G_2$.

对偶地, 满足群的同态提升性的群为乘积群 $G_1{\times}G_2$, 其中作为集合, $G_1{\times}G_2$就是通常的乘法集合, 乘法满足 $(g_1,g_2)(g_1',g_2')=(g_1g_1',g_2g_2')$. 等价地, $G_1{\times}G_2=F(S_1\amalg S_2;T_1\amalg T_2\amalg[S_1,S_2])$, 其中 $G_i=F(S_i;T_i)$, $[S_1,S_2]=\{s_1s_2s_1^{-1}s_2^{-1}\,|\,s_i\in S_i\}$.

同样, 对于两个集合间的对应$f_i\colon A\to B_i$, $i=1,2$, 对应的推出

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle i_{f_1}}\downarrow \\ B_2 & \xrightarrow{i_{f_2}} & B_1\cup_A B_2 \end{array} \qquad B_1\cup_A B_2=(B_1\amalg B_2)/_\sim,\quad f_1(a)\sim f_2(a)\ \text{对所有}\ a\in A$$

满足以下对应的条件对应扩张性.

集合 $B_1\cup_A B_2$ 和内射 $i_1\colon B_1\to B_1\cup_A B_2$, $i_2\colon B_2\to B_1\cup_A B_2$ 满足以下对应条件扩张性, 对于任何集合 E 和任何满足 $g_1f_1=g_2f_2$ 的对应$g_1\colon B_1\to E$ 和 $g_2\colon B_2\to E$, 都存在唯一的扩张对应$g\colon B_1\cup_A B_2\to E$ 满足 $gi_{f_1}=g_1$, $gi_{f_2}=g_2$. 反之, 如果集合 D 和对应$i_{f_1}\colon B_1\to D$, $i_{f_2}\colon B_2\to D$ 满足以下对应条件扩张性, 对于任何集合 E 和任何满足 $g_1f_1=g_2f_2$ 的对应$g_1\colon B_1\to E$ 和 $g_2\colon B_2\to E$, 都存在唯一的扩张对应$g\colon D\to E$ 满足 $gi_{f_1}=g_1$, $gi_{f_2}=g_2$, 则 $D\cong B_1\cup_A B_2$.

设 $\phi_1\colon K\to G_1$, $\phi_2\colon K\to G_2$ 为群同态, $K=F(S;T)$, $G_i=F(S_i,T_i)$. 则两个同态的推出

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ {\scriptstyle \phi_2}\downarrow & & {\scriptstyle i_{\phi_1}}\downarrow \\ G_2 & \xrightarrow{i_{\phi_2}} & G_1\cup_K G_2 \end{array}$$

定义为$G_1{*_K}G_2=F(S_1\amalg S_2;T_1\amalg T_2\amalg\phi_1(T_1)\phi_2(T_2)^{-1})$, 其中 $\phi_1(T_1)\phi_2(T_2)^{-1}=\{\phi_1(s)\phi_2(s)^{-1}\,|\,s\in S\}$, 称为$G_1$ 和 G_2关于同态ϕ_i 的条件自由群. 该群也不依赖于表示的选取, 因为有以下从群同态条件扩张性角度的定义.

群 $G_1{*_K}G_2$ 和内射同态$i_{\phi_1}\colon G_1\to G_1{*_K}G_2$, $i_{\phi_2}\colon G_2\to G_1{*_K}G_2$ 满足以下同态条件扩张性, 对于任何群 H 和任何满足 $f_1\phi_1=f_2\phi_2$ 的群同态$f_1\colon G_1\to H$ 和 $f_2\colon G_2\to H$, 都存在唯一的扩张同态$f\colon G_1{*_K}G_2\to H$ 满足 $fi_{\phi_1}=f_1$, $fi_{\phi_2}=f_2$. 反之, 如果群 G 和群同态$i_{\phi_1}\colon G_1\to G$, $i_{\phi_2}\colon G_2\to G$ 满足以下同态条件扩张性, 对于任何群 H 和任何满足 $f_1\phi_1=f_2\phi_2$ 的群同态$f_1\colon G_1\to H$ 和 $f_2\colon G_2\to H$, 都存在唯一的扩张同态$f\colon G\to H$ 满足 $fi_{\phi_1}=f_1$, $fi_{\phi_2}=f_2$, 则 $G\cong G_1{*_K}G_2$.

对偶地, 两个同态$\phi_i\colon G_i\to K$ 的拉回群 $G_1{\times_K}G_2$ 为 $G_1{\times}G_2$ 的子群 $\{(g_1,g_2)\,|\,\phi_1(g_1)=\phi_2(g_2)\}$.

定理2.10.1 (Van Kampen定理) 设 A,B 为拓扑空间 X 的开集, 满足 $X=A{\cup}B$, 而且A, B, $A{\cap}B$ 都是道路连通的, x_0 为 $A{\cap}B$ 中的一点. 则由内射的推出

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"'] & A \arrow[d, "j_A"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & A\cup B \end{tikzcd}$$

导出基本群的推出

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"'] & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "(j_A)_*"] \\ \pi_1(B,x_0) \arrow[r, "(j_B)_*"] & \pi_1(A\cup B,x_0) \end{tikzcd}$$

即我们有以下群同构

$$\pi_1(X,x_0)=\pi_1(A,x_0)*_{\pi_1(A\cap B,x_0)}\pi_1(B,x_0)=(\pi_1(A,x)*\pi_1(B,x_0))/N,$$

其中 N 为所有形如 $(i_A)_*([\omega])((i_B)_*([\omega]))^{-1}$, $[\omega]\in\pi_1(A\cap B,x_0)$ 的同伦类生成的正规子群.

把上述A,B替换为CW复形 X 的子复形, 则结论仍成立.

证 对于带基点拓扑空间 (U,u_0), 我们给$\pi_1(U,u_0)$一个统一的表示如下. 把回路空间 $(\Omega(U),0)$ 看成集合而不看成拓扑空间, 在其上定义等价关系$\approx$为$\omega\approx\pi$如果存在S^1的保基点自同胚ϕ 使得$\omega=\pi\phi$. 记等价类集合$\Omega(U)/\approx$为Ω_U. 为了区别同伦类, 我们用同一符号ω既表示回路$\omega\colon(S^1,*)\to(U,u_0)$也表示$\omega$所在的$\Omega_U$中的$\approx$等价类. 则对任何$\lambda,\mu,\nu\in\Omega_U$, 我们有$(\lambda*\mu)*\nu\approx\lambda*(\mu*\nu)$. 这说明由集合$\Omega_U$生成的自由群$F(\Omega_U)$的乘法就可以定义为以上的$*$积. 令$T_U$为$\Omega_U$中所有零伦的回路类, 即$T_U=\{u\in\Omega_U\,|\,u\simeq 0\}$. 则$\pi_1(U,u_0)=F(\Omega_U;T_U)$. 注意, 在$F(\Omega_U)$中, 一个回路$\lambda$的逆$\lambda^{-1}$是人为定义的, 没有具体的回路对应. 但是在$F(\Omega_U;T_U)$中, λ的逆λ^{-1}就和逆回路$\mu(t)=\lambda(1-t)$属于同一$\approx$等价类了, 因而可以不区分两者. 显然如果U为V的子空间, 则有$\Omega_U\subset\Omega_V$和$T_U\subset T_V$. 尽管如此, 出于从群表示角度看问题的需要, 在以下讨论一般道路的性质时, 对于$U\subset V$, 我们不把Ω_U中的回路ω看成Ω_V中的回路, 而是通过$j(\omega)$来表示Ω_V中的同一回路, 其中$j\colon U\to V$为内射.

对于任何$u\in\Omega_{A\cap B}$, 我们自然有$j_Ai_Au\approx j_Bi_Bu$. 所以由群同态$(j_A)_*\colon F(\Omega_A,T_A)\to F(\Omega_X,T_X)$和$(j_B)_*\colon\ F(\Omega_B,T_B)\to F(\Omega_X,T_X)$ 和条件同态扩张性我们得到同态

$$i\colon F(\Omega_A,T_A)*_{F(\Omega_{A\cap B},T_{A\cap B})}F(\Omega_B,T_B)\to F(\Omega_X,T_X).$$

换个说法, 记$T_1=\{(j_Ai_Au)(j_Bi_Bu)^{-1}\,|\,u\in\Omega_{A\cap B}\}$, 则$T_1\subset T_X$导出$i$ 的存在性.

首先证明i为满射. 设$\omega\colon I\to X$为$\pi_1(X,x_0)$的一条回路, 即$\omega(0)=\omega(1)=x_0$. 由Lebesgue引理, 对I的开覆盖$\{\omega^{-1}(A),\omega^{-1}(B)\}$, 存在$n$满足$\omega([\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$包含于$A,B$两者之一对所有$i=1,\cdots,n$. 取由$x_0$到$\omega(\frac{i}{n})$的道路$\gamma_i$如下. γ_0和γ_n取常值道路. 对于$1\leqslant i<n$, 如果$\omega([\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$和$\omega([\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}])$都包含于$A$, 则取$\gamma_i$为$A$中的道路; 如果$\omega([\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}])$和$\omega([\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}])$都包含于$B$, 则取$\gamma_i$为$B$中的道路; 否则, 取$\gamma_i$为$A\cap B$中的道路. 令$\omega_i\colon I\to X$为$\omega_i(s)=\omega((t_i-t_{i-1})s+t_{i-1})$. 如下图所示.

显然我们有同伦式

$$\omega\simeq(\gamma_0*\omega_1*\gamma_1^{-1})*(\gamma_1*\omega_2*\gamma_2^{-1})*\cdots*(\gamma_{n-2}*\omega_{n-1}*\gamma_{n-1}^{-1})*(\gamma_{n-1}*\omega_n*\gamma_n),$$

而其中每个$u_i=\gamma_{i-1}*\omega_i*\gamma_i$为或者为$A$中的回路, 或者为$B$中的回路. 所以$[\omega]\simeq i([u_1])\cdots i([u_n])$. 因此$i$为满射.

下面证明i为单射. T_X中的一个回路一定为$\omega_1\omega_2^{-1}$的形式, 其中$\omega_1\simeq\omega_2$. 设$H\colon I\times I\to X$为由ω_1到ω_2的保基点同伦, 则对$I\times I$的开覆盖$\{H^{-1}(A),H^{-1}(B)\}$, 存在n 将$I\times I$分为n^2个方块$Q_{i,j}=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]\times[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$, 使得每一个$H(Q_{i,j})$或者为$A$中的回路, 或者为$B$中的回路. 令$\overline{u}_{i,j},\overline{v}_{i,j}\colon I\to X$ 分别为H限制在$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]\times\frac{j}{n}$和$\frac{i}{n}\times[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]$上的道路, 即$\overline{u}_{i,j}(s)=H(\frac{(1-s)(i-1)+si}{n},\frac{j}{n})$, $\overline{v}_{i,j}(s)=H(\frac{i}{n},\frac{(1-s)(j-1)+sj}{n})$.

取道路 $\gamma_{i,j}$ 如下. 取 $\gamma_{i,0},\gamma_{i,m}$ 都为常值道路. 如果 H 将以 $(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 为顶点的所有(最多4个)方块全都映到 A 中, 则取 $\gamma_{i,j}$ 为 A 中的由 x_0 到 $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 的道路; 如果 H 将以 $(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 为顶点的所有方块全都映到 B 中, 则取 $\gamma_{i,j}$ 为 B 中的由 x_0 到 $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 的道路; 否则取 $\gamma_{i,j}$ 为 $A\cap B$ 中的由 x_0 到 $H(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ 的道路. 比如, 当 $n=4$时, I^2被分成16个方块, 每个小方块$Q_{i,j}$内的字母表示H将该方块映到字母所代表的子空间中, 如下图,

(0,1) (1,1)

A	A	B	A
A	A	A	B
A	B	B	B
B	A	B	B

(0,0) (1,0)

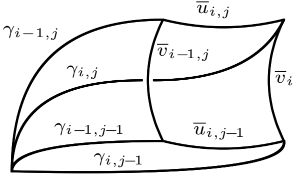
则 $\gamma_{0,i},\gamma_{4,i}$取常值道路, $\gamma_{1,3},\gamma_{1,4}$取 A 中的道路, $\gamma_{3,1},\gamma_{3,4}$取 B 中的道路, 其余所有 $\gamma_{i,j}$取 $A\cap B$ 中的道路. 定义

$$\xi_{i,j}\approx\gamma_{i-1,j}*\overline{u}_{i,j}*\gamma_{i,j}^{-1},\qquad \eta_{i,j}\approx\gamma_{i,j-1}*\overline{v}_{i,j}*\gamma_{i,j}^{-1},$$

由于 H 限制在 $Q_{i,j}$ 的边缘为零伦, 我们就得到同伦式

$$\gamma_{i-1,j-1}*\overline{u}_{i,j-1}*\overline{v}_{i,j}*\overline{u}_{i,j}{}^{-1}*\overline{v}_{i-1,j}{}^{-1}*\gamma_{i-1,j-1}^{-1}\simeq\xi_{i,j-1}*\eta_{i,j}*\xi_{i,j}^{-1}*\eta_{i-1,j}^{-1}\simeq 0.$$

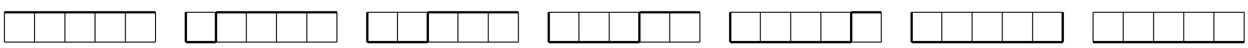
如下图所示



而由于 $H(Q_{i,j})$包含于 A 和 B两者之一, 所以每个$\xi_{i,j-1}*\eta_{i,j}*\xi_{i,j}^{-1}*\eta_{i-1,j}^{-1}$属于 $j_A(T_A)$ 和 $j_B(T_B)$ 两者之一. 记 $\eta_i\approx\eta_{i,0}*\eta_{i,1}*\cdots*\eta_{i,n-1}*\eta_{i,n}$, 则

$$\begin{aligned}
&\eta_{i-1}\\
\approx\quad&\eta_{i-1,1}*\eta_{i-1,2}*\cdots*\eta_{i-1,n}\\
\simeq\quad&(\xi_{i,0}*\eta_{i,1}*\xi_{i,1}^{-1}\eta_{i-1,1}^{-1})(\eta_{i-1,1}*\eta_{i-1,2}*\cdots*\eta_{i-1,n})\\
\approx\quad&\eta_{i,1}*\xi_{i,1}^{-1}*\eta_{i-1,2}*\cdots*\eta_{i-1,n}\\
\simeq\quad&(\eta_{i,1}*\xi_{i,1}^{-1})*(\xi_{i,1}*\eta_{i,2}*\xi_{i,2}^{-1}*\eta_{i-1,2}^{-1})*(\eta_{i-1,2}*\eta_{i-1,3}*\cdots*\eta_{i-1,n})\\
\approx\quad&\eta_{i,1}*\eta_{i,2}*\xi_{i,2}^{-1}*\eta_{i-1,3}*\cdots*\eta_{i-1,n}\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
\approx\quad&\eta_{i,1}*\eta_{i,2}*\cdots*\eta_{i,n}\\
\approx\quad&\eta_i
\end{aligned}$$

下图中的粗线显示了以上同伦对应的道路的变化



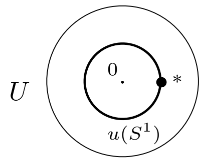
这说明每个$\eta_{i-1}*\eta_i^{-1}$ 都为 $j_A(T_A)$ 和 $j_B(T_B)$ 中的零伦道路的 $*$乘积的形式, 所以 $\eta_0*\eta_n^{-1}\approx(\eta_0*\eta_1^{-1})*(\eta_1*\eta_2^{-1})$ $*\cdots*$ $(\eta_{n-1}*\eta_n^{-1})$也为以上形式. 而由 i 为满射可知$\omega_1*\omega_2^{-1}\simeq\eta_0*\eta_n^{-1}$. 所以 i 为单射.

如果 A, B 为子CW复形, 则由于子复形为Hausdorff空间的非退化子空间, 因而为某个邻域的强形变收缩核, 将A, B用相应的邻域替换可知结论仍成立.

虽然Van Kampen定理证明的是无限情形的群表示问题, 但是最重要的应用却是以下情形: 如果 $\pi_1(A,x)$, $\pi_1(B,x)$ 和 $\pi_1(A\cap B,x)$ 都有有限群表示, 则 $\pi_1(A\cup B,x)$也有有限群表示. 由此可知有限型CW复形的基本群都是有限表示群, 1胞腔个数有限的CW复形的基本群是有限生成群.

Van Kampen定理对高阶同伦群是不成立的, 但是在以下情况却很自然可以推广到高维.

定理2.10.2 设拓扑空间 X 有开子集 U 同胚于开圆盘$\hat{D}^2=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,\|x\|<1\}$, 不区分$U$ 和 $\hat{D}^2$, 令 $\overline{u}\colon D^2\to\hat{D}^2=U$ 为嵌入$\overline{u}(x)=\frac{1}{2}x$. 记 $u\colon(S^1,*)\to(X\backslash 0,*)$ 为$\overline{u}$在 S^1 上的限制映射, 如下图所示.

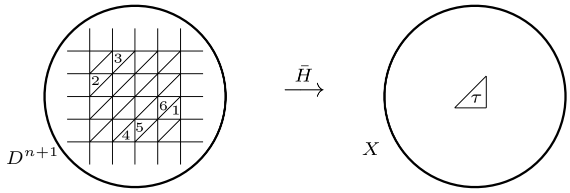


则 $\pi_1(X,*)=\pi_1(X\backslash 0,*)/N([u])$, 其中 $N([u])$ 表示由保基点同伦类 $[u]$生成的正规子群.

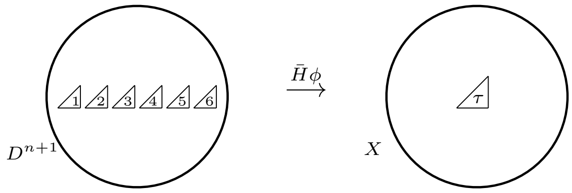
设CW复形 X 有开子集 U 同胚于开圆盘$\hat{D}^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,\|x\|<1\}$, $n>1$, 不区分U 和 $\hat{D}^n$, 令 $\overline{u}\colon D^{n+1}\to\hat{D}^{n+1}=U$ 为嵌入$\overline{u}(x)=\frac{1}{2}x$. 记 $u\colon(S^n,*)\to(X\backslash 0,*)$ 为$\overline{u}$在 S^n 上的限制映射, 则 $\pi_n(X,*)=\pi_n(X\backslash 0,*)/N([u])$, 其中 $N([u])$ 表示由所有形如 $[\omega][u]$, $[\omega]\in\pi_1(X\backslash 0,*)$ 的元生成的子群, 群作用 $[\omega][u]$ 如定理2.3.14所定义.

证 取 X 的开子集 $A=X\backslash 0$, $B=U$. 显然 $A\cap B=U\backslash 0\simeq S^1$, 所以 $\pi_1(A\cap B,*)\cong\pi_1(S^1,*)$ 为由 $[u]$生成的自由群 $\mathbb{Z}$. 由于 B可缩, 所以 $\pi_1(B,x_0)=0$. 由Van Kampen定理, $\pi_1(X,x_0)=\pi_1(A,x_0)/N([u])$.

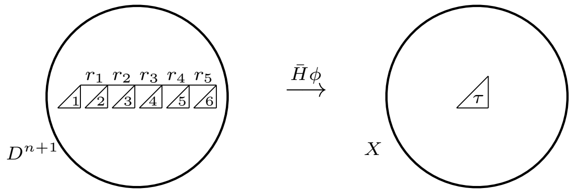
当 X 为CW复形时, 我们从另一个角度证明该结论, 而这个角度允许 $n>1$. 为了区别X 和 $X\backslash 0$ 中的同伦, 我们记 $\simeq$ 为 X 中的保基点同伦, 记 $\simeq_0$ 为 $X\backslash 0$ 中的保基点同伦, 记 $\pi_1(X,*)$ 中的同伦类为 $[-]$, 记 $\pi_1(X\backslash 0,*)$ 中的同伦类为 $[-]_0$. 我们只需证明对于任何映射 $f\colon(S^n,*)\to(X,*)$, 存在 $g\colon(S^n,*)\to(X\backslash 0,*)$ 使得 $f\simeq g$并且如果 $f\simeq 0$, 则 $[g]_0\in N([u])$. 由于 X 为CW 复形, 我们可以假设 X 为单纯复形, 并且f 为单纯映射. 则由于 $f(S^n)$ 的维数$<n+1$, 因此 $\mathrm{im}\,f$不可能包含D^{n+1}. 通过与X 的保持$\overline{u}(D^{n+1})$ 的边界和外部不变的同伦于恒等映射的自同胚ϕ_1 的复合, 可以使$0\notin\mathrm{im}\,(\phi_1 f)$. 令 $g=\phi_1 f$, 则 g 为由 S^n 到 $X\backslash 0$ 的保基点映射, 并且$f\simeq g$. 如果 $f\simeq 0$, 即 $g\simeq 0$, 令 $H\colon I\times S^n\to X$ 为连接g到常值映射的同伦. 如果 $H(I\times S^n)\subset X\backslash 0$, 则 $[g]_0=0$自然属于 $N([u])$. 假设 $\mathrm{im}H$包含点 0. 将$1\times S^n$压缩为一点后, 我们就由 H 得到单纯映射 $\bar{H}\colon D^{n+1}\to X$ 满足 $\bar{H}$ 限制在 D^{n+1} 的边缘S^n 上为 g. 不妨假设设 X 的剖分满足 $\mathrm{im}\overline{u}$就是某个n-单形 τ, U 的原点为 τ 的内部点, τ 的某个顶点为基点 $*$. 设 $\bar{H}^{-1}(0)=\{o_1,\cdots,o_m\}$, 其中 o_i 为 D^{n+1} 的剖分的单形 σ_i 的内部点, $i=1,\cdots,m$. σ_k以及单纯映射 $\bar{H}$ 的关系如下图示意. 为了作图方便, 我们把 σ_k简记为 k, 取 $m=6$.



显然将$\bar{H}$与D^n 的保持边界不动的, 同伦于恒等映射的 ϕ复合, 可以使$\bar{H}\phi$ 如下图所示,



设 $\bar{H}\phi$ 将σ_i 的顶点 x_i映到 τ 的基点 $*$, 则可以取 D^{n+1} 中由 x_i 到 x_{i+1} 的嵌入道路 r_i 使得m 个单形和$m-1$条嵌入道路的象集的并这个子空间 $Y=(\cup_i\sigma_i)\cup(\cup_i r_i(I))$ 为 D^{n+1} 的强形变收缩核, 如下图所示.



记 κ 为 D^{n+1} 的压缩到 Y 的强形变收缩同伦, 则 $\bar{H}\phi\kappa$ 限制在 $I\times S^{n-1}$ 上就是连接 g到以下h 的 $X\backslash 0$ 上的同伦. 把每个σ_i边缘都和S^n不区分, 则 $\bar{H}\phi$ 限制在每个σ_i 的边缘上的映射 u_i就是 u. 则

$$h=u_1*(r_1*u_2*r_1^{-1})*\cdots*(r_{m-1}*u_m*r_{m-1}^{-1}),\quad n=1,$$

$$h=u_1+(u_2)_{r_1}+\cdots+(u_m)_{r_{m-1}},\quad n>1,$$

其中 $(u_i)_{r_{i-1}}$ 为定理2.3.16所定义的 σ_u 中, 取 $\sigma=u_i$, 取 $u=r_{i-1}$. 所以 $g\simeq_0 h$, 而 $[h]_0\in N([u])$.

定理2.10.3 设 $\psi\colon(S^n,*)\to(X,x_0)$ 为保基点映射, X 为CW复形, $n\geqslant 1$. 则

$$\pi_n(\widetilde{C}_\psi,x_0)=\pi_n(X,x_0)/N([\psi]),$$

其中当 $n=1$时, $N([\psi])$ 为由 $[\psi]$生成的正规子群; 当 $n>1$时, $N([\psi])$ 为 $\pi_1(X,x_0)$ 群模$\pi_n(X,x_0)$ 中由 $[\psi]$生成的子模.

设 X^n 为$n+1$维CW复形 X 的 n维骨架, X 的 $(n+1)$-胞腔集为 $\{e_\alpha^{n+1}\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于基点 x_0 和 e_α^{n+1} 的粘合映射 ψ_α, 定义 $\psi'_\alpha=\psi_\alpha$ 如果 ψ_α 为保基点映射; 否则任取连接 x_0 到 $\psi_\alpha(*)$ 的道路 u_α, 定义 $\psi'_\alpha=[x_0;u_\alpha;\psi_\alpha(*)]_\pi(\psi_\alpha)$ (如定理2.3.16中所定义). 则

$$\pi_k(X,x_0)=\pi_k(X^n,x_0)\text{ for }k<n,\quad \pi_n(X,x_0)=\pi_n(X^n,x_0)/N(\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda}),$$

其中当 $n=1$时, $N(\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda})$ 就是由 $\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda}$生成的正规子群; 当 $n>1$时, $N(\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda})$ 为 $\pi_1(X,x_0)$ 群模$\pi_n(X,x_0)$ 中由 $\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda}$生成的子模.

证 $\widetilde{C}_\psi$ 有开子集 $U=\widetilde{C}_\psi\backslash X$ 同胚于 D^{n+1}, 所以由前定理, $\pi_n(\widetilde{C}_\psi,*)\cong\pi_n(\widetilde{C}_\psi\backslash 0,*)/N([u])$. 任取一条连接 $*$ 到 x_0 的道路 v, 则 $\pi_n(\widetilde{C}_\psi\backslash 0,*)/N([u])\cong\pi_n(\widetilde{C}_\psi\backslash 0,x_0)/N([v*u*v^{-1}])\cong\pi_n(\widetilde{C}_\psi\backslash 0,x_0)/N([\psi])$. 而 X 为 $\widetilde{C}_\psi$ 的强形变收缩核, 所以 $\pi_n(\widetilde{C}_\psi\backslash 0,x_0)/N([\psi])\cong\pi_n(X,x_0)/N([\psi])$.

有了以上结论, 用Zorn引理对胞腔作归纳就可证明 $\pi_n(X,x_0)=\pi_n(X^n,x_0)/N(\{[\psi'_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda})$. 而对于 $k<n$ 和映射 $f\colon S^k\to X$, 由定理2.7.12, 可以假设 $f(S^k)\subset X^k\subset X^n$. 这说明内射 $i\colon X^n\to X$导出的 k阶同伦群同态为满射. 同样两个映射的同伦 $H\colon I\times S^k\to X$也可以假设 $H(I\times S^k)\subset X^{k+1}\subset X^n$. 这说明内射 $i\colon X^n\to X$导出的 k阶同伦群同态为单射.

以上定理说明CW复形的n阶同伦群与X的大于$n+1$维的胞腔结构无关. 还说明有限型CW复形的大于2阶的同伦群都是有限生成Abel群.

还需要注意的是以上定理中e_α^{n+1}的粘合映射$\psi_\alpha\colon S^n\to X$是可以映到$k<n$的$k$维骨架$X^k$中的, 换句话说, 即使胞腔$e_\alpha^{n+1}$关于任何$n$-胞腔$e_\beta^n$都满足粘合度$[e_\alpha^{n+1};e_\beta^n]=0$, $[\psi_\alpha]$也未必代表零类.

例2.10.4 对任何群表示$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 我们有$\pi_1(T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),*)=F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$.

对任何Abel群表示$(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 我们有$\pi_n(T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}),*)=\mathbb{Z}(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$.

定理2.10.5 对任何群G和正整数$n\geqslant 1$ (G为Abel群如果$n>1$), 存在道路连通的CW复形$(K(G,n),*)$满足以下条件.

$$\pi_k(K(G,n),*)=\begin{cases} G & k=n,\\ 0 & k\neq n.\end{cases}$$

称满足以上同伦群条件的拓扑空间(不一定为CW复形)为(G,n)型的Eilenberg-Maclane空间.

证 先证$n=1$的情形. 构造CW复形K如下. 任取一个群G的表示$F(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 令$K$的2维骨架$K^2=T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. 假设对于$n>2$, K^n已经构造好了, 满足$\pi_1(K^n,*)=G$, $\pi_k(K^n,*)=0$对$1<k<n$. 记$\{[\psi_\beta]\}_{\beta\in\Gamma}$为$\pi_n(K^n,*)$的生成元集合, 定义$K^{n+1}=K^n\cup_{\psi_\beta}\{D_\beta^{n+1}\}_{\beta\in\Gamma}$, 也就是说$K^{n+1}$的$n+1$维胞腔集为$\{e_\beta^{n+1}\}_{\beta\in\Gamma}$, 其中每个$e_\alpha^{n+1}$的粘合映射为$\psi_\beta$. 由定理2.10.3, $\pi_n(K^{n+1},*)=0$. 于是K^{n+1}满足$\pi_1(K^{n+1},*)=G$, $\pi_k(K^{n+1},*)=0$对$1<k<n+1$. 归纳完成. 由定理2.10.3, 以$\{K^n\}$为骨架的CW复形就是$K(G,1)$.

对于$n\geqslant 2$, 把以上的$K^2=T(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$替换为$K^{n+1}=T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 其它做法一样, 就得到$K(G,n)$的构造.

定理2.10.6 对于群G,F, 设(X,x_0)为一(F,n)型的Eilenberg-Maclane空间, 则

$$[K(G,n),*;X,x_0]\cong\mathrm{Hom}(G,F),$$

也就是说保基点同伦类集合与群同态集合有1-1 对应. 具体地, 对于$[f]\in[K(G,n),*;X,x_0]$, 我们有f导出的群同态$f_*\colon\pi_n(K(G,n),*)\to\pi_n(X,x_0)$, 则对应$[f]\to f_*$为1-1对应.

CW复形$K(G,n)$的伦型唯一. 当G为Abel群时, $K(G,n)$为H群并且$K(G,n-1)$与回路空间$\Omega(K(G,n))$弱同伦等价.

证 由于$K(G,n)$道路连通, 所以我们可以假设$K(G,n)$为带基点空间并且所有的胞腔的粘合映射都是保基点映射, 这样讨论问题方便. 所以下述证明中所有的CW复形都是带基点空间, 所有的映射都是保基点映射, 但是我们省略所有与基点相关的符号.

设$\theta\colon G\to F$为群同态, 构造$f\colon K(G,n)\to X$使得$f_*=\theta$如下. 由$K(G,n)$的构造, 我们可以假设$K(G,n)$的$(n+1)$维骨架$K^{n+1}=T_n(S;\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, 因而它的$n$维骨架$K^n=\vee_{s\in S}S_s^n$. 对于$s\in S$, 记$i_s\colon S^n\to K^n$为到$S_s^n$的内射. 则$[i_\alpha]\in\pi_n(K(G,n))\cong G$对应群$G$的生成元$s$. 于是存在映射$f_s\colon S^n\to X$使得$[f_s]\in\pi_n(X)\cong F$也对应群$F$的元$\theta(s)$. 由于$i_s$为内射, 所以我们自然就得到映射$f_n\colon K^n\to X$满足$f_ni_s=f_s$对每个$s\in S$. 导出的群同态$(f_n)_*\colon\pi_n(K(G,n))\to\pi_n(X)$满足将每个生成元$s$映到$\theta(s)$. 而对于$K^{n+1}$的$(n+1)$-胞腔$e_\alpha^{n+1}$, $\alpha\in\Lambda$, 其粘合映射$\psi_\alpha^{n+1}=\psi_n(r_\alpha)$由定义满足 $[\psi_\alpha^{n+1}]\in\pi_n(K^{n+1})\cong G$对应$G$的单位元, 所以$(f_n)_*([\psi_\alpha^{n+1}])=[f_n\psi_\alpha^{n+1}]\in\pi_n(X)\cong F$也对应$F$的单位元, 即$f_n\psi_\alpha^{n+1}$零伦, 因而可以扩张为$f_\alpha\colon e_\alpha^{n+1}\to X$. 于是(由Zorn引理)$f_n$可以扩张为$f_{n+1}\colon K^{n+1}\to X$满足限制在每个胞腔$e_\alpha^{n+1}$上都是$f_\alpha$.

这说明导出的n阶同伦群同态$(f_{n+1})_*\colon \pi_n(K^{n+1}) \to \pi_n(X)$满足$(f_{n+1})_* = \theta$. 对于$K(G,n)$的$(n+2)$维骨架$K^{n+2}$的胞腔$e_\gamma^{n+2}$的粘合映射$\psi_\gamma^{n+2}$来说, 由于$\pi_{n+1}(X)=0$, 所以$f_{n+1}\psi_\gamma^{n+2}$零伦, 因而$f_{n+1}\psi_\gamma^{n+2}$可以扩张到$f_\gamma\colon e_\gamma^{n+2} \to X$上. 于是我们可以将$f_{n+1}$扩张到$f_{n+2}\colon K^{n+2} \to X$满足限制在每个$e_\gamma^{n+2}$上都是$f_\gamma$. 由于添加$(n+2)$-胞腔不影响导出的$n$阶同伦群同态, 所以$(f_{n+2})_* = \theta$. 归纳地, 我们就得到映射$f\colon K(G,n) \to X$满足限制在每个$K^k$ $(k \geqslant n)$上都是f_k并且导出的n阶同伦群同态满足$f_* = \theta$. 这说明对应$[f] \to f_*$为满射.

设$f,g\colon K(G,n) \to X$满足$f_* = g_*$. 不难用以上相同的方法在每个胞腔上讨论就可知$f \simeq g$. 因此对应$[f] \to f_*$为单射.

由以上结论, 对于同型的CW复形$K(G,n)$和$K'(G,n)$, 恒等同态1_G对应的映射$f\colon K(G,n) \to K'(G,n)$按照定义就是同伦等价映射. 所以$K(G,n)$的伦型唯一. 由定义, 回路空间$\Omega(K(G,n))$为$(G,n-1)$型的Eilenberg-Maclane空间, 因此恒等同态1_G对应的映射$f\colon K(G,n-1) \to \Omega(K(G,n))$就是弱同伦等价映射.

定义2.10.6 设$f\colon X \to Y$为CW复形间的一个胞腔映射. 则对于X的n-胞腔e_α^n和Y的n-胞腔e_β^n $(n > 0)$, 它们的关于f的粘合度$[e_\alpha^n; e_\beta^n]_f$如下定义. 首先对所有的胞腔先取定特征映射. 由$e_\alpha^n, e_\beta^n$的特征映射$\phi_\alpha^n, \phi_\beta^n$我们得到满足以下交换图的内射$i_\alpha, i_\beta$.

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\phi_\alpha^n} & X^n \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S^n{=}D^n/S^{n-1} & \xrightarrow{i_\alpha} & X^n/X^{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\phi_\beta^n} & Y^n \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S^n{=}D^n/S^{n-1} & \xrightarrow{i_\beta} & Y^n/Y^{n-1} \end{array}$$

其中所有q都为商映射. 于是我们得到$j_\beta\colon Y^n/Y^{n-1} \to S^n$满足$j_\beta$限制在分量球面$S_\beta^n$上为$i_\beta^{-1}$, j_β限制在其它分量球面上为到基点的常值映射. 定义$[e_\alpha^n; e_\beta^n]_f = \deg(j_\beta f i_\alpha)$.

定理2.10.7 设$f\colon X \to Y$为CW复形间的一个胞腔映射. 则对于任何X的n-胞腔e_α^n和Y的$(n-1)$-胞腔e_η^{n-1}, 我们有粘合度公式

$$\Sigma_{e_\beta^n}[e_\alpha^n; e_\beta^n]_f[e_\beta^n; e_\eta^{n-1}] = \Sigma_{e_\xi^{n-1}}[e_\alpha^n; e_\xi^{n-1}][e_\xi^{n-1}; e_\eta^{n-1}]_f,$$

其中e_β^n取遍Y的n-胞腔, e_ξ^{n-1}取遍X的$(n-1)$-胞腔.

证 显然粘合度公式与$n-2$维骨架没关系, 也就是说f导出的映射$\overline{f}\colon X/X^{n-2} \to Y/Y^{n-2}$和$f$满足相同的粘合度公式. 同理, $\overline{f}$也和维数$> n$的胞腔无关. 所以我们可以假设$X = T_n(S, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, $Y = T_n(S', \{r'_\beta\}_{\beta\in\Gamma})$, f如下定义. 由于导出的基本群同态$f_*\colon \mathbb{Z}(S, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) \to \mathbb{Z}(S', \{r'_\beta\}_{\beta\in\Gamma})$为群同态, 所以可以假设

$$f_*(s) = \Sigma_{s'\in S'}\, n_{s,s'} s', \quad n_{s,s'} \in \mathbb{Z}, \quad s \in S, \quad s' \in S',$$

而且可以假设f限制在每个胞腔e_s^{n-1}上同定义2.7.8中方法, 即$f|_{e_s^{n-1}} = \Sigma_{s'\in S'}\, n_{s,s'} i_{s'}$, 其中$i_{s'}$为$S^{n-1}$到$Y$的$n-1$维骨架$\vee_{s'\in S'} S_{s'}^{n-1}$的分量空间$S_{s'}^{n-1}$的内射. 类似地我们有$i_s$. 给两个拓扑空间单纯剖分, 设$f$为单纯映射, 并且在每个$n$单形的内部取一个定向. 在每个$Y$的$n$-胞腔$e_\beta^n$的内部取一个正向$n$-单形$\tau_\beta$, 则对每一个$X$的$n$-胞腔$e_\alpha^n$, 其内部必然有$n_\alpha$个正向$n$单形$\sigma_1, \cdots, \sigma_{n_\alpha}$满足$f$限制在每个$\Delta_i$上都是到$\Delta_\beta$的同胚, 其中$n_\alpha = 0$如果不存在这样的$n$-单形. 定义$s_f(\sigma_i) = 1$, 如果$f$保持定向; $s_f(\sigma_i) = -1$, 如果f改变定向. 记$n_{\alpha,\beta} = \Sigma_{i=1}^{n_\alpha} s_f(\sigma_i)$. 由例2.5.11可知, $[e_\alpha^n; e_\beta^n]_f = n_{\alpha,\beta}$. 同定理2.10.2的证明一样, 我们有$e_\alpha^n$的粘合映射$\psi_\alpha^n$满足$f\psi_\alpha^n$与$\Sigma_{\beta\in\Gamma}\, n_{\alpha,\beta}\psi_\beta^n$同伦, 即$f\psi_\alpha^n \simeq \Sigma_{\beta\in\Gamma}\, n_{\alpha,\beta}\psi_\beta^n$, 其中$\psi_\beta^n$为$Y$的胞腔$e_\beta^n$的粘合映射. 这就蕴含

字的等式$f_*(r_\alpha) = \Sigma_{\beta\in\Gamma}\, n_{\alpha,\beta} r_\beta$. 假设$r_\alpha = \Sigma_{s\in S} r_{\alpha,s} s$, $r'_\beta = \Sigma_{s'\in S'} r_{\beta,s'} s'$, 其中$r_{\alpha,s}, r_{\beta,s'} \in \mathbb{Z}$, 则以上字的等式蕴含映射的同伦等式

$$f_*(\Sigma_{s\in S}\, r_{\alpha,s} i_s) = \Sigma_{s\in S,\, s'\in S'}\, r_{\alpha,s} n_{s,s'} i_{s'} \simeq \Sigma_{\beta\in\Gamma,\, s'\in S'}\, n_{\alpha,\beta} r_{\beta,s'} i_{s'},$$

即$\Sigma_{s\in S}\, r_{\alpha,s} n_{s,s'} = \Sigma_{\beta\in\Gamma,}\, n_{\alpha,\beta} r_{\beta,s'}$对每个$\alpha$和$s' \in S$都成立. 这就是粘合度公式, 因为由定义$[e^n_\alpha; e^{n-1}_s] = r_{\alpha,s}$, $[e^n_\beta; e^{n-1}_{s'}] = r_{\beta,s'}$.

当$n = 2$时, 以上证明也成立, 只需要把映射的加号变为回路的非交换的连接号.

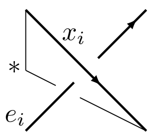
Van Kampen定理在求补空间的基本群问题当中非常有用. 为此, 我们先看一个不需要Van Kampen定理的简单情形.

定义2.10.8 设Γ为平面$\mathbb{R}^2$上的一个有限单纯图, 顶点用数字标为$1, \cdots, m$, 边为$e_1, \cdots, e_n$.

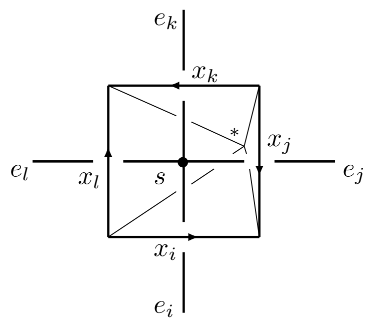
平面图Γ的结构群$F(x_1, \cdots, x_n; r_1, \cdots, r_m)$定义如下. 生成元集$\{x_1, \cdots, x_n\}$与边集$\{e_1, \cdots, e_n\}$是1-1对应的, 零关系集$\{r_1, \cdots, r_m\}$与顶点集$\{v_1, \cdots, v_m\}$是1-1对应的. 首先给每条边一个定向. 然后在每个顶点k附件取一个充分小的圆S^1_k, 满足圆内不含除k外的任何顶点. 让一个动点v围绕圆S^1_k逆时针旋转一圈, 起点在任意图外的一点. 假设动点v先后碰到边$e_{i_1}, \cdots, e_{i_s}$后又回到起点. 记$p_t = 1$如果v碰到指向朝左的边e_{i_t}; 记$p_t = -1$如果v碰到指向朝右的边e_{i_t}. 则定义$r_k = x^{p_1}_{i_1} \cdots x^{p_s}_{i_s}$. 称$r_k$为由顶点$k$决定的零关系. 注意, 虽然$r_k$的定义依赖动点$v$的起点的选取, 但是不同的选取并不改变字$r_k$的循环顺序, 比如由字$x_1 \cdots x_{n-1} x_n$变为$x_n x_1 \cdots, x_{n-1}$, 循环意义上的顺序没变, 因而不影响代表的群.

定理2.10.9 有限单纯平面图Γ的补空间$\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma$的基本群与图的结构群同构.

证 首先要对结构群中的生成元和零关系一个具体的几何解释. 不妨假设Γ在xy平面上. 取$\mathbb{R}^3\backslash\Gamma$的基点为$* = (0, 0, -1)$. 取$x_i$为以下保基点的嵌入回路, 从基点出发跑到$xy$平面之上, 围绕边$e_i$以右手系方向绕到$xy$平面下, 再直接回到基点. 我们用$x_i$既表示回路也表示该回路在$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma, *)$中所代表的同伦类. 嵌入回路$x_i$与边$e_i$的关系如下图所示.

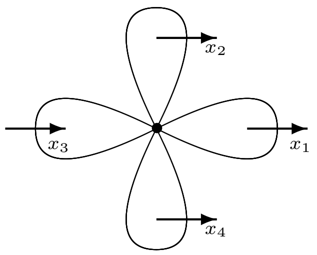


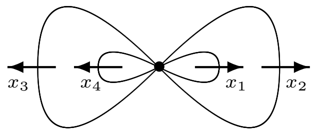
当x_i表示以上的回路(同伦类)时, 围绕顶点的零关系自然代表一条零伦的回路, 如下图所示意,



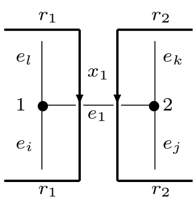
其中展示了顶点s有四条边e_i, e_j, e_k, e_l以其为边点的情形, 由于呈右手系关系, 我们只标明围绕边的回路(由粗线表示)的方向. 那么由s决定的零关系$x_i x_j^{-1} x_k x_l^{-1}$正好与图中四条粗线, 也是四条回路$x_i, x_j^{-1}, x_k, x_l^{-1}$连接成的零伦回路一样.

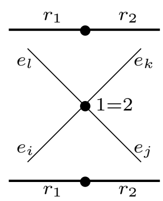
下面我们对图Γ的顶点个数做归纳证明基本群$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma,*)$就是结构群. 我们只需证$\Gamma$是连通的情形, 因为不交并图的补空间显然满足$\mathbb{R}^3\backslash(\Gamma_1\amalg\Gamma_2)\simeq(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_1)\vee(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_2)$. 当$\Gamma$只有一个顶点的时候, $\mathbb{R}^3\backslash\Gamma$与$n$个$S^1$的一点并空间$\vee_n S^1$同伦型, 因此$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma,*)\cong F(x_1,\cdots,x_n)$. 而$\Gamma$的结构群我们下图的两种情况为例($n=4$).





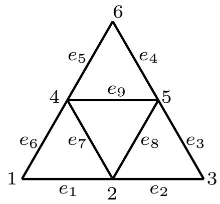
左右两个图的结构群分别为$F(x_1,\cdots,x_4;x_1^{-1}x_1x_2^{-1}x_2x_3x_3^{-1}x_4x_4^{-1})$和$F(x_1,\cdots,x_4;x_2^{-1}x_1^{-1}x_1x_2x_3x_4x_3^{-1}x_4^{-1})$. 显然两个群表示代表同一个自由群. 由此不难证明一般情况下一个点的结构群都是自由群. 假设定理对少于n个顶点的图成立, 而Γ有$n+1$个顶点. 则Γ至少有一条边有两个边点, 不妨设边e_1有边点1和2, 由1指向2. 记Γ_1为Γ将边e_1压成一点的商空间Γ/e_1. 则$\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_1\cong(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)/e_1\simeq(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma)$. 由归纳假设$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_1)=F(x_2,\cdots,x_n;r_1r_2,r_3,\cdots)$, 而$\Gamma$的结构群为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;x_1^{-1}r_1,x_1r_2,r_3,\cdots)$, 如下图所示.

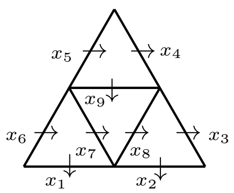




所以Γ的结构群与Γ_1的结构群一样, 因此为其补空间的基本群.

例2.10.10 对于以下标号的的单纯图, 边的定向总是从标号小的顶点指向标号大的顶点,





则该图的结构群为$F(x_1,\cdots,x_9;x_1^{-1}x_6^{-1},x_2^{-1}x_8^{-1}x_7^{-1}x_1,x_3^{-1}x_2,x_6x_7x_9^{-1}x_5^{-1},x_4^{-1}x_9x_8x_3,x_5x_4)$. 显然只由左边的顶点和边的标号不容易看出零关系, 因而像右边那样, 直接把x_i及其方向标出, 省略顶点和边的标号, 就较容易写出零关系了. 注意, 由于边的定向是人为的, 所以x_i的方向也可以随意取定.

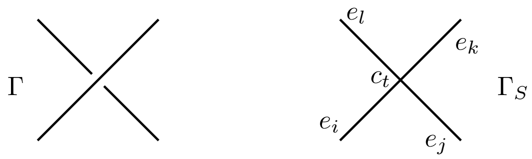
定义2.10.11 设Γ为$\mathbb{R}^3$中的一个有限单纯图. 则存在某个平面S, Γ往该平面上的投影图Γ_S满足以下条件.

(1) 图Γ的所有点都在平面S的一侧, 称为平面S的上侧. 因此, Γ在Γ_S的上侧.

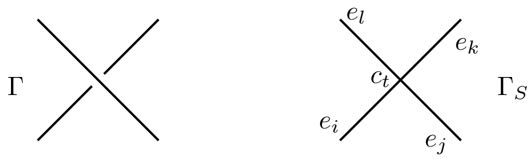
(2) 记$p\colon\Gamma\to\Gamma_S$为投射, 即对Γ上的点x, $p(x)$为过点x垂直于S的直线与S的交点. 则Γ_S只有有限个点$c_1,\cdots,c_s$满足$p^{-1}(c_k)$由两点构成, 其它所有的点c都满足$p^{-1}(c)$为独点集. 称$c_1,\cdots,c_s$为Γ在S上的交叉点.

(3) 从平面上侧充分远处看Γ, 在每个交叉点附近都是以下两种情况之一.

称以上的投射 p 为 Γ 的一个规则投射, 称 Γ_S 为 Γ 的一个规则投影图. 设 Γ_S 有交叉点 $c_1,\cdots,c_s$ 和其它从 Γ 上投影下来的顶点 $v_1,\cdots,v_m$. 设 Γ_S 有边 $e_1,\cdots,e_n$. 则 Γ_S 有结构群 $F(x_1,\cdots,x_n;q_1,\cdots,q_s,r_1,\cdots,r_m)$, 其中 q_i,r_j 分别为由 c_i,v_j 决定的零关系. 则 Γ 关于规则投射 p 的结构群 $F(x_1,\cdots,x_n;q_1,\cdots,q_s,r_1,\cdots,r_m,h_1,\cdots,h_s)$ 定义如下. 如果从上侧充分远处看 Γ 和 Γ_S 在交叉点 c_t 处如下图,



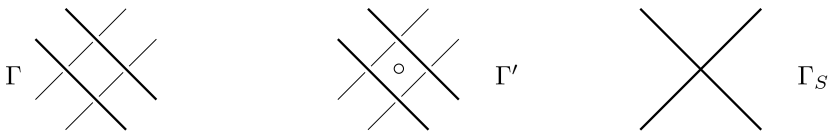
那么当边 e_l,e_j 同时指向或反指 c_t 时, 就有 $h_t=x_lx_j$; 当边 e_l,e_j 一个指向另一个反指 c_t 时, 就有 $h_t=x_lx_j^{-1}$. 如果从上侧充分远处看 Γ 和 Γ_S 在交叉点 c_t 处如下图,



那么当边 e_i,e_k 同时指向或反指 c_t 时, 就有 $h_t=x_ix_k$; 当边 e_i,e_k 一个指向另一个反指 c_t 时, 就有 $h_t=x_ix_k^{-1}$.

定理2.10.12 $\mathbb{R}^3$ 中的有限单纯图 Γ 的补空间 $\mathbb{R}^3\backslash\Gamma$ 的基本群与图关于关于任何规则投射的结构群同构.

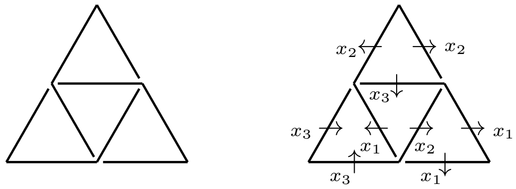
证 首先考虑 Γ 只有一个交叉点 c_1 的情形. 在此情况下, $\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_S$ 为 $\mathbb{R}^3\backslash\Gamma$ 抠一个点得到的空间. 具体地, 我们将线扩成带, 如下图所示.



当把 Γ 的线扩成(为 $\mathbb{R}^3$ 的开集)带的时候, 左图中两条带子所夹的部分就是 $\mathbb{R}^3\backslash\Gamma$ 中同胚于开圆盘的部分, 将中心点抠去, 就得到中间的带子 Γ', 中心的空心圆从补空间角度看表示抠去该点, 而从 Γ' 的角度看却是上下两个紧贴在一起却无交点的带子补上了一个共同的交点, 再将 Γ' 的两条带子缩成线, 就得到右图的 Γ_S. 所以由定理2.10.2, $\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma,x_0)=\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma_S,x_0)/N(h_1)=F(x_1,\cdots,x_n;q_1,r_1,\cdots,r_m,h_1)$. 定理成立. 一般情况对 Γ 的交叉点个数作归纳就可以得到.

注意结构群 $F(x_1,\cdots,x_n;q_1,\cdots,q_s,r_1,\cdots,r_m,h_1,\cdots,h_s)$ 中 h_i 都是某个 x_i 与另一个 $x_j^{\pm1}$ 的等价, 因此我们常常写成 $F(y_1,\cdots,y_l;q_1',\cdots,q_s',r_1',\cdots,r_m')$ 的形式, 其中 $y_1,\cdots,y_l$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 去掉与 $x_i^{\pm1}$ 等价的 x_j 后所得到的子集合, q_i',r_j' 就是把字母 x_j 换成 $x_i^{\pm1}$ 后所得到的字. 而这个过程只需在标号的阶段直接代替就可以得到.

例2.10.13 设 Γ 为 S^1 在 $\mathbb{R}^3$ 中如下图左的嵌入的象空间.



显然Γ的规则投影图Γ_S为例2.10.10中的图, 如果严格按照先求Γ_S的结构群, 再加上新的零关系的方式求出Γ的结构群那就很麻烦. 如果我们按照右图的方式直接把x_i和方向画出来, 而且把显然同伦的Γ_S中不同的x_i和x_j在图中直接标号相同, 另外, x_i的标号i和方向可以随意取定, 那么就很容易写出Γ的结构群为

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma,*)=F(x_1,x_2,x_3;x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1},x_1x_2^{-1}x_3x_2,x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}).$$

需要指出的是给出一个群的组合表示与真正认识这个群的性质完全是两回事. 比如我们没有一个像求行列式值那样的可以设计程序用计算机解决的方法来判断两个有限表示是否代表同一群, 也没有这样的方法判断一个有限表示是否代表有限群, 或者是Abel群, 等等, 许多类似的问题都没有方法.

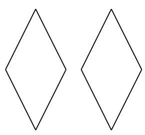
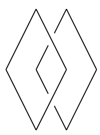
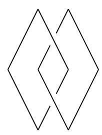
习题 2.10

2.10.1. 证明如果X_i的基点x_i为其某个邻域O_i强形变收缩核, $i=1,\cdots,n$, 则我们有$\pi_1(X_1\vee\cdots\vee X_n,*)\cong\pi_1(X_1,x_1)*\cdots*\pi_1(X_n,x_n)$. 由此证明$\pi_1(\vee_n S^1,*)\cong F(x_1,\cdots,x_n)$.

2.10.2. 证明对任何正整数$p,q>1$, $M^1(p)\vee M^1(q)\not\simeq M^1(pq)$.

2.10.3 证明对于非交换群G, CW复形$K(G,1)$不可能是H群.

2.10.4. 利用以下$\mathbb{R}^3$中的图Γ在平面上投影图的结构群计算$\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\Gamma,*)$.

(1)  (2)  (3) 

2.11 高阶同伦群的一般性质

球面同伦$\pi_{n+k}(S^k,*)$和$\pi_k(S^m\vee S^n,*)$的特点是其中的同伦类的代表元总可以取为Thom映射, 其道路的零伦映射也总是可以取为Thom零伦, 所以我们必须了解什么是Thom映射和Thom零伦.

定义2.11.1 以下定义中, k为一取定的正整数, n为一取定的非负整数. 如果涉及单纯或者微分结构, 总是假定空间偶(D^{n+k+1},S^{n+k})已经取定了一个单纯剖分或者标准的光滑结构. 在单纯情况下, 我们用$v(-)$表示单形或者单纯复形的顶点集.

首先给出单纯情形的定义.

子复形N的内射$i\colon N\to S^{n+k}$称为S^{n+k}的一个管状嵌入, 如果存在单纯映射$p\colon N\to\Delta^k$, 其中Δ^k为标准k-单形, 满足以下条件.

(1) 如果 S^{n+k} 的 $(n+k)$-单形 σ 满足 $v(\sigma)\subset v(N)$, $p(v(\sigma))=v(\Delta^k)$, 则 $\sigma\in N$.

(2) 如果 S^{n+k} 的单形 σ 不是 N 的某个 $(n+k)$-单形的面, 则 $\sigma\notin N$.

由以上条件就可以得到以下结论：N 为 $(n+k)$维带边流形, 并且 $M=p^{-1}(c)$ 为闭流形, 这里 c 为 Δ^k 的重心点. 称 N 为 M 的管状邻域. 称单纯映射 p 为管状嵌入 i 的管状投射. 特别地, 定义空管状嵌入为取 $N=\emptyset$ 时的管状投射, 仍记为 $\emptyset$.

对于上述管状嵌入 i, 单纯型Thom映射 (并不是管状投射 p 的单纯扩张!)

$$t(i,M)\colon(S^{n+k},*)\to(S^k,*)$$

如下定义. 把 S^k 看成商空间 $\Delta^k/\partial(\Delta^k)$ 就得到商投射 $\varrho\colon\Delta^k\to S^k$, 则 $t(i,M)$ 限制在 N 上为 ϱp, $t(i,M)$ 将包含基点的子集 $S^{n+k}\backslash N$ 都映到 S^k 的基点 $*$. 特别地, 定义空管状投射 $\emptyset$ 对应的Thom映射为保基点常值映射 0.

子复形偶 (V,N) 的内射 $i\colon(V,N)\to(D^{n+k+1},S^{n+k})$ 称为 D^{n+k+1} 的一个管状嵌入, 如果存在单纯映射 $q\colon V\to\Delta^k$ 满足以下条件.

(1) 如果 D^{n+k+1} 的 $(n+k+1)$-单形 σ 满足 $v(\sigma)\subset v(V)$, $q(v(\sigma))=v(\Delta^k)$, 则 $\sigma\in V$.

(2) 如果 D^{n+k+1} 的单形 σ 不是 V 的某个 $(n+k+1)$-单形的面, 则 $\sigma\notin V$.

由以上条件就可以得到以下结论. V 为 $(n+k+1)$维带边流形, 限制映射 $i|_N\colon N\to S^{n+k}$ 为 S^{n+k} 的一个管状嵌入, 其管状投射为限制映射 $q|_N$, 并且 $W=q^{-1}(c)$ 为带边紧流形满足 $\partial W=q^{-1}(c)\cap N$ (允许 $\partial W=\emptyset$). 称 V 为 W 的管状邻域, 称 q 为管状嵌入 i 的管状投射. 记 $i|_{\partial W}=\partial i$, 称为 i 的边缘.

对于上述管状嵌入 i, 单纯型Thom零伦 (并不是 q 的单纯扩张!)

$$h(i,W)\colon(D^{n+k+1},*)\to(S^k,*)$$

如下定义. $h(i,W)$ 限制在 V 上为 ϱq, $h(i,W)$ 将包含基点的子集 $D^{n+k+1}\backslash V$ 都映到 S^k 的基点 $*$. 边缘嵌入对应的Thom映射 $t(\partial i,\partial W)$ 称为 $h(i,W)$ 的边缘. 特别地, 当 $\partial W=\emptyset$ 时, $h(i,W)$ 的边缘就是 0.

下面给出光滑情形的定义.

对于 n维光滑闭流形 M 到 S^{n+k} 的光滑嵌入 $i'\colon M\to S^{n+k}$, 由例2.8.24, 存在 i' 的一个管状邻域 N 单位球法丛的平凡化

$$\begin{tikzcd} D^k\times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "p'"'] & N \arrow[d, "p"] \\ & D^k \end{tikzcd}$$

满足 θ 为光滑同胚, $\theta|_{0\times M}=i'$, 其中 p' 为乘积空间到分量空间的投射. 称 N 的内射 $i\colon N\to S^{n+k}$ 为闭流形 M 到球面 S^{n+k} 的一个管状嵌入, 称 p 为 i 的管状投射. 特别地, 定义空管状嵌入为取 $N=\emptyset$ 时的管状投射, 仍记为 $\emptyset$.

对于上述管状嵌入 i, 光滑型Thom映射(并不是光滑映射!)

$$t(i,M)\colon(S^{n+k},*)\to(S^k,*)$$

如下定义. 把 S^k 看成商空间 $D^k/\partial(D^k)$ 就得到商投射 $\varrho\colon D^k\to S^k$, 则 $t(i,M)$ 限制在 N 上为 ϱp, $t(i,M)$ 将包含基点的子集 $S^{n+k}\backslash N$ 都映到 S^k 的基点 $*$. 特别地, 定义空管状嵌入 $\emptyset$ 对应的Thom映射为保基点常值映射 0.

对于流形偶$i'\colon (W,\partial W)\to (D^{n+k+1},S^{n+k})$的光滑嵌入, 同样存在$i'$的一个管状邻域$V$和单位球法丛的平凡化

$$\begin{tikzcd} D^k\times(W,\partial W) \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "q'"'] & (V,N) \arrow[d, "q"] \\ & D^k \end{tikzcd}$$

满足θ为光滑同胚, $\theta|_{0\times M}=i'$, 其中q'为乘积空间到分量空间的投射. 称内射$i\colon (V,N)\to (D^{n+k+1},S^{n+k})$为带边紧流形$W$到实心球$D^{n+k+1}$的一个管状嵌入, 称$q$为$i$的管状投射. 显然限制内射$i|_N\colon \partial N\to S^{n+k}$为闭流形$\partial W$到$S^{n+k}$的一个管状嵌入, 其管状投射为限制映射$q|_N$. 记$i|_N=\partial i$, 称为$i$的边缘. 特别地, 如果$\partial W=\emptyset$, 则$\partial i$为空管状嵌入$\emptyset$.

对于上述管状嵌入i, 光滑型Thom零伦 (并不光滑!)

$$h(i,W)\colon (D^{n+k+1},*)\to (S^k,*)$$

如下定义. $h(i,W)$限制在V上为$\varrho\, q$, $h(i,W)$将包含基点的子集$D^{n+k+1}\backslash V$都映到S^k的基点$*$. 边缘对应的Thom映射$t(\partial i,\partial W)$称为Thom零伦$h(i,W)$的边缘. 特别地, 如果$\partial W=\emptyset$, 则$h(i,W)$的边缘为保基点常值映射0.

在以上定义中, 我们从单纯和光滑两个角度定义了Thom映射和Thom零伦. 由于我们只讨论Thom映射$t(i,M)$所代表的$[S^{m+k},*;S^k,*]$中的保基点同伦类$[t(i,M)]$问题, 所以由逼近定理, 在我们讨论的问题中所有的管状投射都可以忽略光滑或者单纯的条件, 即需要单纯(光滑)的条件就可以假设映射是单纯(光滑)的. 尤其是一般CW复形间的映射在局部用逼近定理, 同样也可以忽略单纯或者光滑条件. 所以在以下的叙述中, 除非必须, 我们总是省去单纯和光滑字样.

不难看出同伦类$[t(i,M)]$是不依赖于管状嵌入的i的同痕类的, 也就是说$[t(i,M)]=[t(i',M)]$, 如果管状嵌入i和i'同痕. 两者的管状投射本质上是一样的, 所以我们不把Thom映射写成$t(i,M,p)$的形式. 正因为如此, 以下定义中的Thom映射和零伦的加法才有意义.

定义2.11.2 在本定义中, 总是把球面S^{n+k}看成线性空间的一点紧化空间$(\mathbb{R}^{n+k})^*$, 并且假定所有的管状嵌入$i\colon N\to S^{n+k}$都满足$i(N)$不包含无穷远点$*$, 所以总是把管状嵌入i写成$i\colon N\to \mathbb{R}^{n+k}$的形式. 同样, 总是把实心球$D^{n+k+1}$看成上半线性空间的一点紧化空间$(\mathbb{R}_+^{n+k+1})^*$, 并且总是假定所有带边紧流形的管状嵌入$i\colon (V,N)\to (D^{n+k},S^{n+k})$都满足$i(V)$不包含无穷远点$*$, 所以总是把管状嵌入$i$写成$i\colon (V,N)\to (\mathbb{R}_+^{n+k+1},\mathbb{R}^{n+k})$的形式.

设M_1,M_2为两个n维闭流形, $i\colon N_1\amalg N_2\to \mathbb{R}^{n+k}$为两个流形的不交并流形到$S^{n+k}$的管状嵌入. 称管状嵌入$i$ (关于N_1和N_2)是分离的, 如果N_1和N_2分别处于$\mathbb{R}^{n+k}$的某个超平面(余维数为1线性子空间或者其平移子空间)的两侧. 称管状嵌入i (关于N_1和N_2)是纠缠的, 如果i不同痕于任何一个分离的管状嵌入.

设$i_\nu\colon N_\nu\to \mathbb{R}^{n+k}$为$n$维闭流形$M_\nu$到$S^{n+k}$的管状嵌入, $\nu=1,2$. 定义球面S^{n+k}上的分离的管状嵌入$i_1{+}i_2\colon N_1\amalg N_2\to \mathbb{R}^{n+k}$如下. 由于$N_1,N_2$为紧集, 所以可以将$N_1$和$N_2$分别平移到处于某个超平面$P$的两侧的$N_1'$和$N_2'$. 于是存在与$i_\nu$同痕的管状嵌入$i_\nu'\colon N_\nu\to \mathbb{R}^{n+k}$为把$i(N_\nu)$平移到$N_\nu'$的平移嵌入. 这样就可以定义管状嵌入$i_1{+}i_2$满足限制在$N_\nu$上为$i_\nu'$. 显然这样定义的$i_1{+}i_2$的同痕类不依赖于$i_1$和$i_2$的同痕类的选取, 也不依赖于超平面$P$的选取, 并且总是分离的. 当超平面$P$取第$i$个坐标为0的点构成的子空间时,

由定义 $t(i_1{+}i_2, M_1\amalg M_2) = t(i_1', M_1) +_i t(i_2', M_2)$, 其中加法 $+_i$ 如例2.1.9中定义. 所以我们就有同伦类的等式 $[t(i_1, M_1)] + [t(i_2, M_2)] = [t(i_1{+}i_2, M_1\amalg M_2)]$, 其中 $[-]$ 代表 $\pi_{n+k}(S^k, *)$ 中的保基点同伦类.

设 W_1, W_2 为两个 $(n{+}1)$维带边紧流形, $i\colon (V_1\amalg V_2, N_1\amalg N_2) \to (\mathbb{R}_+^{n+k+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ 为两个流形的不交并流形到 D^{n+k+1} 的管状嵌入. 称管状嵌入 i (关于 V_1 和 V_2)是分离的, 如果 V_1 和 V_2 分别处于 $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 的某个垂直于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的超平面 P 的两侧. 称管状嵌入 i (关于 V_1 和 V_2)是纠缠的, 如果 i 不同痕于任何一个分离的管状嵌入.

设 $i_\nu\colon (V_\nu, N_\nu) \to \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 为 $(n{+}1)$维带边紧流形 W_ν 到 D^{n+k+1} 的管状嵌入, $\nu = 1, 2$. 定义实心球面 D^{n+k+1} 上的分离的管状嵌入 $i_1{+}i_2\colon (V_1\amalg V_2, N_1\amalg N_2) \to (\mathbb{R}_+^{n+k+1}, \mathbb{R}^{n+k})$ 如下. 由于 V_1, V_2 为紧集, 所以可以将 V_1 和 V_2, 沿着平行于 $\mathbb{R}^{n+k+1}$ 的超平面 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的方向, 平移到处于 $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 的某个垂直于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的超平面 P 的两侧的 V_1' 和 V_2', 显然 N_1 和 N_2 也同时在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中平移到 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的超平面 $P\cap\mathbb{R}^{n+k}$ 的两侧的 N_1' 和 N_2'. 于是存在与 i_ν 同痕的管状嵌入 $i_\nu'\colon V_\nu \to \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 为把 $i_\nu(V_\nu)$ 平移到 V_ν' 的平移嵌入. 这样就可以定义管状嵌入 $i_1{+}i_2$ 满足限制在 V_ν 上为 i_ν'. 显然这样定义的 $i_1{+}i_2$ 的同痕类不依赖于 i_1 和 i_2 的同痕类的选取, 也不依赖于超平面 P 的选取, 并且总是分离的, 而且边缘满足 $\partial(i_1{+}i_2) = \partial i_2{+}\partial i_2$.

定理2.11.3 对于正整数 k 和非负整数 n, 我们有Abel群的同构

$$\pi_{n+k}(S^k, *) \cong \pi_{n+k}^k,$$

其中 π_{n+k}^k 称为协边群, 如下定义. 记 S 为由所有 n 维闭子流形到 S^{n+k} 的的管状嵌入的同痕类构成的集合. 具体地, 记 S 中的一般元为等价类 $[i]$ 的形式, 则 $[i] = [i']$, 当且仅当 i 和 i' 同痕. 令 S 的子集 T 由所有形如 $[i_1]{+}[i_2]{-}[i_1{+}i_2]$ 或者 ∂i 的元构成, 其中 $i_1{+}i_2$ 为管状嵌入的加法, ∂i 为某个Thom零伦的管状嵌入的边缘. 则 $A_{n+k}^k = \mathbb{Z}(S; T)$.

证 定义对应 $\theta\colon \pi_{n+k}^k \to \pi_{n+k}(S^k, *)$ 为 $\theta([\,i\,]) = [\,t(i, M)\,]$. 由以下的等式

$$[t(i_1{+}i_2, M_1\amalg M_2)] = [t(i_1, M_1)] + [t(i_2, M_2)], \quad [t(\partial(i_1{+}i_2), \partial(W_1\amalg W_2))] = [t(\partial i_1, \partial W_1)]{+}[t(\partial i_2, \partial W_2)]$$

可知 θ 为群同态.

首先证明单纯情形.

设 $f\colon (S^{n+k}, *) \to (S^k, *)$ 为一单纯映射. 任取 S^k 上的一个顶点集不含基点的 k-单形 τ, 把 τ 看成标准 k-单形 Δ^k. 令 N 为 S^{n+k} 中所有满足 f 限制在其上为到 Δ^k 的满射的 $(n{+}k)$-单形构成的子复形, 则 N 满足管状投射的条件, 其管状投射为限制映射 $p = f|_N$. 令 ϕ 如定理2.5.3证明中所定义, 满足把 $S^k\backslash\tau$ 压缩到基点, 把 τ 的内部同胚映到 $S^k\backslash *$, ϕ 与恒等映射同伦. 则 ϕf 就是Thom映射 $t(i, M)$. 这说明 θ 为满射.

设 $H\colon (D^{n+k+1}, *) \to (S^k, *)$ 为一零伦. 还是把 S^k 上的一个顶点集不含基点的 k-单形 τ 看成标准 k-单形 Δ^k. 令 V 为 D^{n+k+1} 中所有满足 H 限制在其上为到 Δ^k 的满射的 $(n{+}k{+}1)$-单形构成的子复形, 则 V 满足管状投射的条件, 其管状投射为限制映射 $q = H|_N$. 令 ϕ 同上, 则 ϕH 就是Thom零伦 $h(i, W)$. 这说明 θ 为单射.

下面证光滑情形.

设 $f\colon (S^{n+k}, *) \to (S^k, *)$ 为一光滑映射. 由微分拓扑知识可知, f 在 S^k 上存在非基点的非退化点 c (原象集的任一点的切映射为满线性映射), 并且原象集 $f^{-1}(c)$ 为光滑闭流形. 取 $f^{-1}(c)$ 的法丛的单位球丛的

一个平凡化, 即可以取到c的一个同胚于D^k的紧邻域D和光滑同胚θ满足以下的交换图,

$$\begin{tikzcd} D\times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "p'"'] & N \arrow[d, "f|_N"] \\ & D \end{tikzcd}$$

其中$N=f^{-1}(D)$, $M=f^{-1}(c)$, θ为同胚, $\theta(c\times M)=M$, p'为乘积空间到分量空间的投射. 不区分D和D^k, 则N就是M的内射的管状邻域, 以上交换图就是单位球法丛的一个平凡化. 令ϕ如定理2.5.3证明中所定义, 满足把$S^k\backslash D$压缩到基点, 把D的内部同胚映到$S^k\backslash *$, ϕ与恒等映射同伦. 则ϕf就是Thom映射$t(i,M)$. 这说明θ为满射.

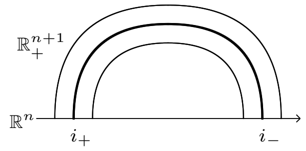
设$H\colon (D^{n+k+1},*)\to(S^k,*)$为一光滑零伦. 由微分拓扑知识可知, H在S^k上存在非退化点c, 并且原象集$H^{-1}(c)$为光滑带边紧流形, 其法丛平凡. 取法丛的单位球丛, 即可以取到c的一个同胚于D^k的紧邻域D, 满足以下的交换图

$$\begin{tikzcd} D\times(W,\partial W) \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "q'"'] & (V,N) \arrow[d, "H|_V"] \\ & D \end{tikzcd}$$

其中$V=f^{-1}(D)$, $W=f^{-1}(c)$, $N=V\cap S^{n+k}$, $\partial W=W\cap S^{n+k}$, θ为同胚, $\theta(c\times W)=W$, q'为乘积空间到分量空间的投射. 不区分D和D^k, 则V就是管状邻域. 令ϕ同上, 则ϕH就是Thom零伦$h(i,W)$. 这说明θ为单射.

不难看出以上定理是定理2.5.3的推广, 证明的直观想法完全一样. 反之, 如果我们把定理2.5.3看成以上定理的特例, 从协边群角度重新叙述定理2.5.3, 就不难发现正交群在协边群里的作用. 具体地, 对于n维闭流形M的管状嵌入$i\colon N\to S^{n+k}$和映射$u\colon M\to O(k)$, 我们有管状嵌入$ui\colon N\to S^{n+k}$定义为$(ui)(x,m)=u(m)x$对所有$x\in D^k$和$m\in M$, 这里不区分N和$D^k\times M$, 正交群$O(k)$自然作用在欧式空间$\mathbb{R}^k$的单位球D^k上. 显然如果两个映射$u,u'\colon M\to O(k)$是同伦的, 则$[t(ui,M)]=[t(u'i,M)]$. 如果u,u'不同伦, 则$[t(ui,M)]$和$[t(u'i,M)]$就可能不同了. 特别地, 如果u不零伦, 则$[t(i,M)]$和$[t(ui,M)]$也可能不同了.

现在讨论取以上定理中的$n=0$时的情况. 在此情况下, Thom映射$t(i,M)$中的M为0维流形, 也就是有限个离散点. 因此不是和形式的Thom映射为独点空间$*$的管状嵌入$i\colon N\cong D^k\to S^k$. 表面看, 在同痕的意义上, 独点空间的管状嵌入只有一类, 但其实注意到非保基点映射的同伦类集合$[*,*;O(k),*]$对应着正交群的两个道路连通分支, 因此独点空间的嵌入的同痕类有两类, 由单纯情况的是否保定向和光滑情况的嵌入在任一点的Jacobi行列式的正负来区分, 记这两个嵌入的同痕类i_+和i_-. 则由下图所示的Thom零伦不难看出$[t(i_+,c)]+[t(i_-,c)]=0$.



纠缠的概念在协边群的定义当中不是必要的, 也就是说定义2.11.2中完全可以不叙述分离和纠缠. 但是当研究$\pi_k(S^m\vee S^n,*)$时, 以下要定义的不同维数的不交并流形的管状嵌入的纠缠的概念就非常重要了.

注意, 以下的定义与定义2.11.2除了两个嵌入流形的维数允许不同, 因而一点并Thom映射(零伦)是到一点并 $S^m \vee S^n$ 的映射(零伦)以外, 其余所有的地方都完全相同.

定义2.11.4 同定义2.11.2一样, 在本定义中, 总是把球面和实心球面看成一点紧化空间, 把管状嵌入写成到(上半)线性空间的形式. m 和 n 为两个取定的非负整数(允许相同), 都小于取定的正整数 k.

设 M_1, M_2 为两个 $k-m$ 维和 $k-n$维的闭流形, $i\colon N_1 \amalg N_2 \to \mathbb{R}^k$ 为不交并流形到 S^k 的管状嵌入. 称管状嵌入 i (关于 N_1 和 N_2)是分离的, 如果 N_1 和 N_2 分别处于 $\mathbb{R}^k$ 的某个超平面 P 的两侧. 称管状嵌入 i (关于 N_1 和 N_2)是纠缠的, 如果 i 不同痕于任何一个分离的管状嵌入.

设 $i_1\colon N_1 \to \mathbb{R}^k$, $i_2\colon N_2 \to \mathbb{R}^k$ 为两个维数分别为 $k-m$ 和 $k-n$ 的闭流形 M_1 和 M_2 到 S^k 的管状嵌入. 由于 N_1, N_2 为紧集, 所以可以将 N_1 和 N_2 分别平移到处于某个超平面 P 的两侧的 N_1' 和 N_2'. 于是存在与 i_ν 同痕的管状嵌入 $i_\nu'\colon N_\nu \to \mathbb{R}^{n+k}$ 为把 $i(N_\nu)$ 平移到 N_ν' 的平移嵌入. 这样就可以定义管状嵌入 $i_1 \vee i_2$ 满足限制在 N_ν 上为 i_ν'. 显然这样定义的 $i_1 \vee i_2$ 的同痕类不依赖于 i_1 和 i_2 的同痕类的选取, 也不依赖于超平面 P 的选取, 并且总是分离的. 我们有一点并Thom映射

$$t(i_1 \vee i_2, M_1 \amalg M_2)\colon (S^k, *) \to (S^m \vee S^n, *)$$

定义如下. 把 $D^m/\partial(D^m)$ 看成 $S^m \vee S^n$ 的子空间 S^m 就得到商映射和内射的复合映射 $\varrho_1\colon D^m \to S^m \vee S^n$, 把 $D^n/\partial(D^n)$ 看成 $S^m \vee S^n$ 的子空间 S^n 就得到商映射和内射映射的复合映射 $\varrho_2\colon D^n \to S^m \vee S^n$, 则上述的一点并Thom映射限制在 N_ν' 上就是 $\varrho_\nu p_\nu$, 把包含基点的 $S^k \setminus (N_1' \cup N_2')$ 都映到 $S^m \vee S^n$ 的基点 $*$.

设 W_1, W_2 为两个 $k-m+1$维和 $k-n+1$维的带边紧流形, $i\colon (V_1 \amalg V_2, N_1 \amalg N_2)) \to (\mathbb{R}_+^{k+1}, \mathbb{R}^{n+k})$ 为不交并流形到实心球 D^{k+1} 的管状嵌入. 称管状嵌入 i (关于 V_1 和 V_2)是分离的, 如果 V_1 和 V_2 分别处于 $\mathbb{R}_+^{k+1}$ 的某个垂直于 $\mathbb{R}^k$ 的超平面 P 的两侧. 称管状嵌入 i (关于 V_1 和 V_2)是纠缠的, 如果 i 不同痕于任何一个分离的管状嵌入.

设 $i_1\colon (V_1, N_1) \to (\mathbb{R}_+^{k+1}, \mathbb{R}^k)$, $i_2\colon (V_2, N_2) \to (\mathbb{R}_+^{k+1}, \mathbb{R}^k)$ 为两个维数分别为 $k-m+1$ 和 $k-n+1$ 的带边紧流形 W_1 和 W_2 到 D^{k+1} 的管状嵌入. 由于 V_1, V_2 为紧集, 所以可以将 V_1 和 V_2, 沿着平行于 $\mathbb{R}^{n+k+1}$ 的超平面 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的方向, 平移到处于 $\mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 的某个垂直于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的超平面 P 的两侧的 V_1' 和 V_2', 显然 N_1 和 N_2 也同时在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中平移到 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的超平面 $P \cap \mathbb{R}^{n+k}$ 的两侧的 N_1' 和 N_2'. 于是存在与 i_ν 同痕的管状嵌入 $i_\nu'\colon V_\nu \to \mathbb{R}_+^{n+k+1}$ 为把 $i_\nu(V_\nu)$ 平移到 V_ν' 的平移嵌入. 这样就可以定义管状嵌入 i_1+i_2 满足限制在 V_ν 上为 i_ν'. 显然这样定义的 i_1+i_2 的同痕类不依赖于 i_1 和 i_2 的同痕类的选取, 也不依赖于超平面 P 的选取, 并且总是分离的. 同上, 我们得到一点并Thom零伦

$$t(i_1 \vee i_2, M_1 \amalg M_2)\colon (D^{k+1}, *) \to (S^m \vee S^n, *)$$

满足 $\partial(i_1 \vee i_2) = \partial i_2 \vee \partial i_2$.

定理2.11.5 对于 $m, n \geqslant 1$ 和 $k \geqslant 2$, 我们有内射导出的同伦群同态 $(j_1)_*\colon \pi_k(S^m, *) \to \pi_k(S^m \vee S^n, *)$ 和 $(j_2)_*\colon \pi_k(S^n, *) \to \pi_k(S^m \vee S^n, *)$. 再由直和群的同态扩张性, 我们就有群同态

$$j_*\colon \pi_k(S^m, *) \oplus \pi_k(S^n, *) \to \pi_k(S^m \vee S^n, *)$$

满足限制在 $\pi_k(S^m, *)$ 上为 $(j_1)_*$, 限制在 $\pi_k(S^n, *)$ 上为 $(j_2)_*$. 我们有以下结论.

当 $2 \leqslant k < m+n-2$ 时, j_* 为同构; 当 $k = m+n-2$ 时, j_* 为满同态.

当取 $k=1$ 时, 将 $\oplus$ 改为非交换群的自由积 $*$, 由Van Kampen定理可知 j_* 为同构.

证 j_* 有从Thom映射角度的定义. 对于Thom映射 $t(i_1, M_1)$ 和 $t(i_2, M_2)$,

$$j_*([t(i_1, M_1)], [t(i_2, M_2)]) = [t(i_1 \vee i_2, M_1 \amalg M_2].$$

从这个角度看, 如果 $\pi_k(S^m \vee S^n, *)$ 中的任何同论类都可以写成 $[t(i_1 \vee i_2, M_1 \amalg M_2]$ 的形式, 则 j_* 为满同态; 如果 $\pi_k(S^m \vee S^n, *)$ 中的任何零伦 $H\colon D^{k+1} \to S^m \vee S^n$ 都满足 $H|_{S^k}$ 与某个分离的Thom零伦的边缘同伦, 则 j_* 为单同态.

首先证明当 $2 \leqslant k \leqslant m+n-2$ 时, i_* 为满同态.

对于单纯映射 $f\colon (S^k, *) \to (S^m \vee S^n, *)$, 取 S^m 上的一个不含基点的 m-单形 τ_1, 取 S^n 上的一个不含基点的 n-单形 τ_2, 把两个单形都看成标准单形. 对于 $\nu = 1, 2$, 令 N_ν 为 S^k 中所有满足 f 限制在其上为到 τ_ν 的满射的 k-单形构成的子复形. 于是就得到两个管状投射 $p_1\colon N_1 \to D^m$ 和 $p_2\colon N_2 \to D^n$. 对于球面 S^r 上的不含基点的单形 τ, 记 ϕ_r 如定理2.5.3证明中所定义, 即 ϕ_r 把 $S^r \backslash \tau$ 压缩到基点, 把 τ 的内部同胚映到 $S^r \backslash *$, 并且同伦于恒等映射. 令 $\phi = \phi_m \amalg \phi_n\colon (S^m \vee S^n, *) \to (S^m \vee S^n, *)$. 则显然 $f \simeq \phi f$. 我们得到三个Thom映射

$$g = t(i, M_1 \amalg M_2)\colon (S^k, *) \to (S^m \vee S^n, *),$$

$$g_1 = t(i_1, M_1)\colon (S^k, *) \to (S^m, *), \quad g_2 = t(i_2, M_2)\colon (S^k, *) \to (S^n, *),$$

其中 i 的管状投射限制在 N_ν 上为 p_ν. 如果 i 与 $i_1 \vee i_2$ 同痕, 即 $[f] = [t(i_1 \vee i_2, M_1 \amalg M_2)]$, 则 j_* 为满射. 下面证明 i 是分离的. 令 $\mu(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{\|f(x_1)-f(x_2)\|}$ 为由 $M_1 \times M_2$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的单位球面 S^{k-1} 的映射. 由于 $M_1 \times M_2$ 的维数是 $k-m+k-n$, 而 S^{k-1} 的维数是 $k-1$, 所以当 $k<m+n-1$时, 前者的维数小于后者的维数, 因而 μ不是满射. 取单位球面 S^{k-1} 中的向量 $\xi \notin \mu(M_1 \times M_2)$, 取 P 为以 ξ 为法方向的超平面. 则 N_1 和 N_2 可以通过沿着与 ξ 平行的方向分别平移到 P 的两侧, 而且平移过程没有交点. 所以 i 与 $i_1 \vee i_2$ 同痕.

下面证明当 $k<m+n-2$ 时, j_* 为单射.

同上类似, 对于零伦 $H\colon (D^{k+1}, *) \to (S^m \vee S^n, *)$, 通过分别取 S^m 和 S^n 上的两个不含基点的单形的原象的方法, 我们就得到三个Thom零伦,

$$h = h(i, W_1 \amalg W_2)\colon (D^{k+1}, *) \to (S^m \vee S^n, *),$$

$$h_1 = t(i_1, W_1)\colon (D^{k+1}, *) \to (S^m, *), \quad h_2 = h(i_2, W_2)\colon (D^{k+1}, *) \to (S^n, *).$$

如果 i 与 $i_1 \vee i_2$ 同痕, 则 $H|_{S^k}$ 与 $t(\partial i_1 \vee \partial i_2, W_1 \amalg W_2)$ 同伦, j_* 为单射. 下面证明 i 与 $i_1 \vee i_2$ 同痕. 令 $\mu(x_1, x_2) = \frac{H(x_1)-H(x_2)}{\|H(x_1)-H(x_2)\|}$ 为由 $W_1 \times W_2$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的单位球面 S^{k-1} 的映射. 由于 $W_1 \times W_2$ 的维数是 $k-m+k-n+2$, 而 S^{k-1} 的维数是 $k-1$, 所以当 $k<m+n-2$时, 前者的维数小于后者的维数, 因而 μ不是满射. 取单位球面 S^{k-1} 中的向量 $\xi \notin \mu(W_1 \times W_2) \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$, 取 P 为 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的以 ξ 为法方向的超平面. 则管状邻域 V_1 和 V_2 可以通过沿着与 ξ 平行的方向分别平移到 P 的两侧, 而且平移过程没有交点. 所以 i 与 $i_1 \vee i_2$ 同痕.

由以上的证明不难理解, 当维数 k 很大时, $\pi_k(S^m \vee S^n, *)$ 比 $\pi_k(S^m, *) \oplus \pi_k(S^n)$ 要复杂得多, 而且多出的同伦类都体现在管状嵌入以不同方式纠缠的Thom映射之中.

定理2.11.6 我们有以下同伦群的结论.

(1) 设 A,B 为CW复形 X 的子复形, 满足 $X=A\cup B$. 如果 $(A,A\cap B)$ 是 $m-1$ 连通的, $(B,A\cap B)$ 是 $n-1$ 连通的, 则内射导出的群同态 $j_*\colon \pi_k(A,A\cap B,x_0)\to\pi_k(X,B,x_0)$ 满足当 $k<m+n-2$ 时, j_* 为同构; 当 $k=m+n-2$ 时, j_* 为满同态.

(2) 设 A 为CW复形 X 的子复形, $q\colon (X,A)\to(X/A,*)$ 为商映射. 对于 $m,n\geqslant 1$, 如果 A 是 $m-1$ 连通的, (X,A) 是 $n-1$ 连通的, 则 q 导出的群同态 $q_*\colon \pi_k(X,A,x_0)\to\pi_k(X/A,*)$ 满足当 $k<m+n-2$ 时, 为同构; 当 $k=m+n-2$ 时, 为满同态.

(3) 对于 $n-1$ 连通的CW复形 X $(n\geqslant 1)$, 对应$[f]\to[S(f)]$导出的群同态$S_*\colon\pi_k(X,x_0)\to\pi_{k+1}(S(X),*)$ 满足当 $k\leqslant 2n-1$时, 为同构; 当 $k=2n-1$时, 为满同态.

证 (1) 由定理2.7.6, 我们可以假设相对CW复形 $(A,A\cap B)$ 的胞腔维数都 $\geqslant m$, 相对CW复形 $(B,A\cap B)$ 的胞腔维数都$\geqslant n$. 我们首先证明 $(A,A\cap B)$只有一个m_1-胞腔$e_1^{m_1}$, $m_1\geqslant m$, $(B,A\cap B)$只有一个n_2-胞腔$e_2^{n_2}$, $n_2\geqslant n$, 的情形. 这个特殊情形的证明和前定理的证明几乎一样, 只是把 $S^m\vee S^n$ 中的 S^m 和 S^n 分别换成胞腔 $e_1^{m_1}$ 和 $e_2^{n_2}$, 基点换成子空间 $A\cap B$. 所以具体证明省略. 而胞腔个数任意的情形由Zorn引理对胞腔个数作归纳就可以推出.

(2) 对于空间偶 (X,A), 我们有以下的偶映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "p"'] & (X\cup C(A),C(A)) \arrow[d, "q"] \\
& (X/A,*,*)
\end{tikzcd}$$

其中 i 为内射, q 为将锥 $C(A)$ 压缩为一点的强形变收缩核映射, p 为将 A 压缩为一点的商映射. 所以我们有以下同伦群同态的交换图,

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(X,A,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & \pi_k(X\cup C(A),C(A),x_0) \arrow[d, "q_*"] \\
& \pi_k(X/A,*)
\end{tikzcd}$$

显然 q 为同伦等价映射, 所以 q_* 对所有 k 都为同构. 取(1)中的 (X,A,B) 为上述的 $(X,A,C(A))$, 我们有 i_* 为同构对 $k=1,\cdots,m+n-2$, i_* 为满同态对 $k=m+n-1$. 所以 p_* 与 i_* 满足同样的性质.

(3) 由同伦群的长恰当序列

$$\cdots\to\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(C(X),x_0)\to\pi_n(C(X),X,x_0)\to\pi_{n-1}(X,x_0)\to\pi_{n-1}(C(X),x_0)\to\cdots$$

和 $C(X)$ 的可缩性我们有 $\partial_*\colon\pi_n(C(X),X,*)\to\pi_{n-1}(X)$ 为同构, 对所有 $n\geqslant 1$. 取(2)中的 (X,A) 为恰当序列中的 $(C(X),X)$, 我们有 $p_*\colon\pi_k(C(X),X,x_0)\to\pi_k(C(X)/X,x_0)$ 为同构当 $k<2n-1$时, p_* 为满同态当 $k=2n-1$ 时. 所以 $S_*=p_*\partial_*^{-1}$ 也满足同样性质.

以上定理的结论(1)被看成是Van Kampen定理在高维的推广.

要想更深入地讨论同伦群(同调群)的性质, 就无法回避极限群的概念.

定向Abel 群系统 $\{A_\alpha,i_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 如下定义. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为Abel群族, 下标集上有一个偏序关系$\leqslant$满足对任何 $\alpha,\beta\in\Lambda$, 如果 $\alpha<\beta$, 则存在群同态 $i_{\alpha,\beta}\colon A_\alpha\to G_\beta$. 群同态族 $\{i_{\alpha,\beta}\}$ 满足 $i_{\beta,\gamma}i_{\alpha,\beta}=i_{\alpha,\gamma}$ 对所有 $\alpha<\beta<\gamma$.

定向$Abel$群系统$\{A_\alpha, i_{\alpha,\beta}\}_{\alpha\in\Lambda}$的直极限群$\operatorname{dirlim} A_\alpha$为直和群的商群

$$\operatorname{dirlim} A_\alpha = \big(\oplus_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\big)/N,$$

其中N由所有形如$a - i_{\alpha,\beta}(a)$, $a\in A_\alpha$, $\alpha<\beta$的元素生成. 逆极限群$\operatorname{invlim} A_\alpha$为直积群的子群

$$\operatorname{invlim} A_\alpha = \{(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \mid a_\beta = i_{\alpha,\beta}(a_\alpha)\ \text{对所有}\ \alpha<\beta\}.$$

定理2.11.7 设$X=\cup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, 其中每个$X_\alpha$都是$X$的包含基点的CW子复形, 满足对任何有限个$\alpha_1,\cdots,\alpha_k \in\Lambda$, 都存在$\alpha\in\Lambda$使得$\cup_{i=1}^k X_{\alpha_i}\subset X_\alpha$. 则我们有

$$\pi_n(X,x_0)\cong \operatorname{dirlim}\pi_n(X_\alpha,x_0),$$

其中定向系统$\{\pi_n(X_\alpha,x_0), i_{\alpha,\beta}\}$下标集的偏序关系定义为$\alpha\leqslant\beta$如果$X_\alpha\subset X_\beta$, 群同态$i_{\alpha,\beta}\colon \pi_n(X_\alpha,x_0)\to \pi_n(X_\beta,x_0)$为由内射导出的同伦群同态.

证 由内射$i_\alpha\colon (X_\alpha,x_0)\to(X,x_0)$导出同伦群同态$(i_\alpha)_*$和直和群$\oplus_{\alpha\in\Lambda}\pi_n(X_\alpha,x_0)$的同态扩张性, 我们有群同态

$$i_*\colon\ \oplus_{\alpha\in\Lambda}\ \pi_n(X_\alpha,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$$

满足限制在每个分量群$\pi_n(X_\alpha,x_0)$上都是$(i_\alpha)_*$. 显然对于直极限群定义中涉及的子群N, 我们有$i_*(N)=0$. 所以i_*导出商群同态

$$j_*\colon \operatorname{dirlim}\pi_n(X_\alpha,x_0)\to\pi_n(X,x_0).$$

对于$f\colon(S^n,*)\to(X,x_0)$, 由于$f(S^n)$为紧集, 所以一定存在有限个$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$使得$f(S^n)\subset\cup_{i=1}^k X_{\alpha_i}$. 于是存在$\alpha\in\Lambda$使得$\cup_{i=1}^k X_{\alpha_i}\subset X_\alpha$. 这说明$\pi_n(X,x_0)$中的同伦类$[f]$属于$(i_\alpha)_*([f]_\alpha)$, 其中$[-]_\alpha$表示同伦群$\pi_n(X_\alpha,x_0)$中的同伦类. 所以$j_*$为满同态. 同样, 对于零伦$H\colon(D^{n+1},*)\to(X,x_0)$, 由于$H(D^{n+1})$为紧集, 所以一定存在$\alpha$使得$H(D^{n+1})\subset X_\alpha$. 于是$\pi_n(X,x_0)$中的任何零伦$H$也是某个$\pi_n(X_\alpha,x_0)$中的零伦. 这说明$j_*$为单同态.

注意, 以上定理中的条件不是平凡的. 比如, 令$X=X_1\vee X_2$, 下标集$\Lambda=\{1,2\}$. 则子复形族$\{X_1,X_2\}$满足$X=X_1\cup X_2$, 但不满足定理所要求的条件. $\operatorname{dirlim}\pi_n(X_i,x_0)=\pi_n(X_1,x_0)\oplus\pi_n(X_2,x_0)$. 但是$\pi_n(X,x_0)$一般地并不同构于极限群.

定义2.11.8 设$(X,x_0),(Y,y_0)$为带基点CW复形. 称由X到Y的稳定同伦群定义为

$$[X;Y]_{_S} = \operatorname{dirlim}\,[S^n(X),*;S^n(Y),*],$$

其中定向群系统$\{[S^n(X),*;S^n(Y),*], i_{k,l}\}$中$i_{k,l}\colon [S^k(X),*;S^k(Y),*]\to[S^l(X),*;S^l(Y),*]$为$l{-}k$重同纬对应$[f]\to[S^{l-k}(f)]$.

注意, 一般地, $[X,x_0;Y,y_0]$根本不是群! 但是$[X;Y]_{_S}$却永远都是Abel群. 而对于$n\geqslant 2$, $S^n(X)$为$n{-}1$连通的空间, 所以$[X;Y]_{_S}$与基点的选取无关.

定理2.11.9 设 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为CW复形间的保基点映射. 则对任何CW复形 (Z,z_0), 我们都有以下长恰当序列

$$\cdots\to[Z;S^{n-1}(C_f)]_S\to[Z;S^n(X)]_S\to[Z;S^n(Y)]_S\to[Z;S^n(C_f)]_S\to[Z;S^{n+1}(X)]_S\to\cdots,$$

$$\cdots\to[S^{n+1}(X);Z]_S\to[S^n(C_f);Z]_S\to[S^n(Y);Z]_S\to[S^n(X);Z]_S\to[S^{n-1}(C_f);Z]_S\to\cdots.$$

证 对任何 $k\geqslant 0$, 取定理2.2.14中的映射为 $S^k(f)\colon (S^k(X),*)\to(S^k(Y),*)$, 则我们有以下长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+k+1}(X);S^k(Z)]\to[S^{n+k}(C_f);S^k(Z)]\to[S^{n+k}(Y);Z]\to[S^{n+k}(X));S^k(Z)]$$
$$\to[S^{n+k-1}(C_f);S^k(Z)]\to\cdots.$$

而定向系统的直极限保持恰当性(一般地, 逆极限不保持恰当性!), 所以对以上的长恰当序列关于 k取直极限, 就得到定理的第二个长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+1}(X);Z]_S\to[S^n(C_f);Z]_S\to[S^n(Y);Z]_S\to[S^n(X);Z]_S\to[S^{n-1}(C_f);Z]_S\to\cdots.$$

定理的第一个长恰当序列是在以上长恰当序列的基础上, 通过对同伦群的一般性质的应用才能得到的. 首先考虑带基点空间偶 (I_f,X,x_0), 这里映射柱空间 I_f 定义为 $I_f=((I\times X)\amalg Y)/\sim$, 其中 $(1,x)\sim f(x)$, $(t,x_0)\sim y_0$ 对所有 $x\in X$, $t\in I$. 对任何 $k\geqslant 0$, 取定理2.3.17中的空间偶为 $(S^k(I_f),S^k(X),*)$, 则我们有以下长恰当序列

$$\cdots\to\pi_{n+k+1}(S^k(I_f),S^k(X),*)\to\pi_{n+k}(S^k(X),*)\to\pi_{n+k}(S^k(I_f),*)\to\pi_{n+k}(S^k(I_f),S^k(X),*)$$
$$\to\pi_{n+k-1}(S^k(X),*)\to\cdots.$$

由于 $S^k(I_f)$ 和 $S^k(X)$ 都是 $k-1$ 连通空间, 所以由定理2.11.5, 当 $k>n+2$ 时, 我们有 $\pi_{n+k}(S^k(I_f),S^k(X),*)\cong\pi_{n+k}(S^k(I_f/X),*)=\pi_{n+k}(S^k(C_f),*)$, 这里把 X 看成 I_f 的子空间 $0\times X$. 因此, 当对 k 取直极限群后, 把以上的长恰当序列中的相对同伦群替换成商空间 C_f 的同伦群, 把 I_f 替换成同伦等价的 Y, 就变成以下长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+1};C_f]_S\to[S^n;X]_S\to[S^n;Y]_S\to[S^n;C_f]_S\to[S^{n-1};X]_S\to\cdots.$$

记 $\mathscr{C}$ 为对任何映射 f 都有定理的第一个恰当序列的带基点CW复形的空间族, 即如果 $(Z,z_0)\in\mathscr{C}$, 则对任何 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$, 我们都有长恰当序列

$$\cdots\to[S^{n+1}(Z);C_f]_S\to[S^n(Z);X]_S\to[S^n(Z);Y]_S\to[S^n(Z);C_f]_S\to[S^{n-1}(Z);X]_S\to\cdots.$$

我们要证明 $\mathscr{C}$ 满足以下两条性质.

(1)对任何 $n\geqslant 0$ 和任意下标集 Λ, 我们有 $(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha,*)\in\mathscr{C}$, 其中每个 $S^n_\alpha\cong S^n$.

(2)如果 $(U,x_0),(V,y_0)\in\mathscr{C}$, 则对任何 $g\colon (U,u_0)\to(V,v_0)$, 我们有 $(C_g,*)\in\mathscr{C}$.

如果证明了以上两条性质, 则对任何CW复形 (Z,z_0), 通过对骨架 Z^n 的归纳和胞腔个数的归纳, 我们就可以证明 $(Z,z_0)\in\mathscr{C}$.

(1)的证明. 由一点并空间的映射扩张性可知$[\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;Y]=\Pi_{\alpha\in\Lambda}[X_\alpha;Y]$. 而直积群保持恰当性, 所以由 $S^n\in\mathscr{C}$就可知$\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha\in\mathscr{C}$.

(2)的证明. 由已知条件我们有以下Abel群的交换图,

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\cdots & {[S^{n+2}(U);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n+1}(U);X]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n+1}(U);Y]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n+1}(U);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(U);X]_S} \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & {[S^{n+1}(C_g);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(C_g);X]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(C_g);Y]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(C_g);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(C_g);X]_S} \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & {[S^{n+1}(V);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(V);X]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(V);Y]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(V);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(V);X]_S} \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & {[S^{n+1}(U);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(U);X]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(U);Y]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n}(U);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(U);X]_S} \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & {[S^{n}(C_g);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(C_g);X]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(C_g);Y]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-1}(C_g);C_f]_S} \arrow[r] \arrow[d] & {[S^{n-2}(C_g);X]_S} \arrow[d] & \cdots \\
& {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

其中所有竖的序列都是恰当的, 横的序列关于 U 和 V 的也恰当, 则由Abel群的性质可知横的关于 C_g 的序列也是恰当的. 所以 $C_g \in \mathscr{C}$.

以上定理说明取稳定同伦群时, 定理2.2.14中对偶的但是却完全不同的非稳定同伦群的长恰当序列对应着相同的稳定同伦群的长恰当序列. 不仅如此, 由非稳定的同构 $[S(X),*;Y,y_0] \cong [X,x_0;\Omega(Y),0]$ 我们有 $[X;Y]_S = [S(X),S(Y)]_S \cong [X,\Omega(S(Y))]$, 这说明 $\Omega(S(Y))$ 和 Y 在取稳定同伦群时是可以互相替换的, 即在稳定的意义上 Ω 相当于 S 的逆. 同理可知, 映射纤维空间取再取同纬的空间 $S(P_f)$ 和映射锥空间 C_f 在取稳定同伦群时可以互相替换. 当然, 研究稳定同伦群就必须把 $[X;Y]_S$ 推广到更一般的谱空间 $[E;F]$, 在谱空间的范畴里, 稳定同伦就对应于广义的同调和上同调理论. 而许多流形的分类问题就是广义上同调群的计算问题.

高阶同伦群的计算方法是非常复杂的, 需要用到谱序列和同调代数的方法, 而且目前能计算出来的也非常少. 到目前为止, 我们对高阶同伦群整体性质的认识非常有限, 被称为蛮荒时代. 以下只是介绍两种由同伦群引出的代数结构, 以便对同伦群的复杂性有所认识.

拓扑空间 X 的阶数 >1 的同伦群 $\pi_*(X,x_0)$ 构成一个分次Lie代数. 具体地, 存在Whitehead积

$$[\ ,\ ]\colon \pi_s(X,x_0) \times \pi_t(X,x_0) \to \pi_{s+t-1}(X,x_0), \quad s,t \geqslant 2,$$

满足以下性质. 对于任何 $\alpha \in \pi_p(X,x_0)$, $\beta \in \pi_q(X,x_0)$, $\gamma \in \pi_r(X,x_0)$, $p,q,r \geqslant 1$,

(1) $[\alpha,\beta] = (-1)^{pq}[\beta,\alpha]$.

(2) $[\alpha,[\beta,\gamma]] + (-1)^{pq+pr}[\beta,[\gamma,\alpha]] + (-1)^{pr+qr}[\gamma,[\alpha,\beta]] = 0$.

Whitehead积的具体构造如下. 对于 $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$, $[\alpha,\beta] = [\Delta'(f \vee g)\psi_{m,n}]$, 其中 $\psi_{m,n}\colon S^{m+n-1} \to S^m \vee S^n$ 为以前定义的使 $S^m \times S^n \cong \widetilde{C}_{\psi_{m,n}}$ 的粘合映射, Δ' 为 X 的上对角映射. 当 X 为H-群时, Whitehead积平凡, 即 $[\alpha,\beta]=0$ 对所有 α,β. 当 X 不单连通时, 这个分次Lie代数还有 $\pi_1(X,x_0)$ 的群模结构. 即使当 X 单连通时(比如球面 S^n, $n>1$), 对于分次Abel群上定义的Lie代数我们也是几乎只知道概念的存在性.

由定理2.11.6的结论(3), 对于任何$n \geqslant 0$, 我们有

$$\pi_n^S \cong \pi_{2n+1}(S^{n+1},*) \cong \pi_{2n+2}(S^{n+2},*) \cong \cdots \cong \pi_{2n+k}(S^{n+k},*) \cong \cdots,$$

称为n阶球面稳定同伦群. 如果只把π_n^S简单地看成特殊的同伦群$\pi_{2n+1}(S^{n+1},*)$, 那么就不会对π_n^S有任何更进一步的认识, 因为稳定同伦群比非稳定同伦群性质要好得多, 能得到的结果也多得多. 所以我们总是把π_n^S中的稳定同伦类写成一列无穷的同伦类的列$[t(i_k,M)]_k$的形式, 其中k从某个充分大的整数一直取到无穷, M为一个n维流形, $i_k\colon N \to \mathbb{R}^{n+k}$为$M$的管状嵌入, 满足$i_{k+l}$为$i_k$与标准的$\mathbb{R}^{n+k}$到$\mathbb{R}^{n+k+l}$的嵌入的复合映射. 通过微分拓扑的手术方法可以证明当$n \geqslant 7$和k充分大时, 任何Thom映射$t(i'_k,M)$都协边于某个$t(i_k,S^n)$, 这里协边意为$[i'_k]$和$[i_k]$在协边群π_{n+k}^k中代表相同的协边类, 而这里的S^n只是拓扑意义上的球面, 它不一定与标准的S^n (取标准微分结构) 光滑同胚. 令$O=\cup_{n=1}^\infty O(n)$, 其中$O(n)$为n阶正交矩阵群, 则我们得到一个$\pi_n(O,*)$在群π_n^S上的作用

$$\pi_n(O,*)\times\pi_n^S \to \pi_n^S$$

定义如下. 对于任何映射$u\colon (S^n,*) \to (O,*)$, 存在$N$使得$u(S^n) \subset O(N)$, 于是对于$k \geqslant N$, 我们就得到映射$u_k\colon S^n \to O(k)$, 就是把$u$看成由$S^n$到$O(k)$的映射. 这样$u$就写成一映射列$u_k$, 其中$k$从$N$一直取到无穷大. 等价地, $\pi_n(O,*)$中同伦类也可以写成一列同伦类$[u_k]_k$, 其中k从某个整数一直取到无穷大, 所有的u_k都是同一个映射u看成到不同的$O(k)$的映射. 由定理2.11.7, $\pi_n(O)=\mathrm{dirlim}\pi_n(O(k))$, 以上写法就是该极限群元素的具体表达方法. 于是我们可以定义上述的群作用为

$$[u]\,[t(i_k,S^n)]_k=[u_k]_k\,[t(i_k,S^n)]_k=[t(u_ki_k,S^n)]_k\,.$$

作为分次Abel群, π_*^S有乘法满足分次交换性, 即如果$a\in\pi_m^S$, $b\in\pi_n^S$, 则$ab=(-1)^{mn}ba$. 为了理解稳定同伦群的乘法, 我们首先考虑嵌入的乘法对应的非稳定同伦群的乘法. 对于m维流形M_1的管状嵌入$i_1\colon N_1 \to \mathbb{R}^{m+k}$和$n$维流形$M_2$的管状嵌入$i_2\colon N_2 \to \mathbb{R}^{n+l}$, 我们分别有乘积流形$M_1\times M_2$和$M_2\times M_1$的管状嵌入$i_1\times i_2\colon N_1\times N_2 \to \mathbb{R}^{m+n+k+l}$和$i_2\times i_1\colon N_2\times N_1 \to \mathbb{R}^{m+n+k+l}$, 其Thom映射满足$t(i_1\times i_2,M_1\times M_2)=\phi_1 t(i_2\times i_1,M_2\times M_1)\phi_2$, 这里$\phi_1$是将$\mathbb{R}^{m+n+k+l}$的前$n+l$个坐标和后$m+k$个坐标互换位置的线性变换, ϕ_2是将$\mathbb{R}^{m+n}$的前n个坐标和后m个坐标互换位置的线性变换. 于是我们有非稳定同伦类的等式

$$[t(i_1\times i_2,M_1\times M_2)]=(-1)^{(m+k)(n+l)+kl}[t(i_2\times i_1,M_2\times M_1)].$$

显然这个乘积依赖于k,l的选取, 因而无法直接导出稳定同伦群的乘法. 对于以上的两个嵌入, 取一个偶数r满足$r>k,l$. 令嵌入$i'_1=j_{k,r}i_1$和$i'_2=j_{l,r}i_2$, 其中$j_{s,t}$为$\mathbb{R}^s$到$\mathbb{R}^t$的自然嵌入. 而i'_ν和i_ν在稳定同伦群中代表相同的稳定同伦类. 因此定义$t(i_\nu,M_\nu)$在稳定同伦群中代表的同伦类$[t(i_\nu,M_\nu)]_S$的两个乘积类分别为$[t(i'_1\times i'_2,M_1\times M_2)]_S$ 和$[t(i'_2\times i'_1,M_2\times M_1)]_S$. 这样定义的$\pi_*^S$的乘法不依赖于偶数$r$的选取并且满足分次交换性 $[t(i_1\times i_2,M_1\times M_2)]=(-1)^{mn}[t(i_2\times i_1,M_2\times M_1)]$.

球面稳定同伦群π_*^S与几何、代数等多方面的重要问题都密切相关. 比如, Adams证明了$\pi_*(O)$在π_*^S上的作用是子群的加法作用, 即存在π_n^S的子群$\mathrm{im}J_n$使得$\pi_n^S=\mathrm{im}J_n\oplus A_n$, 而$\pi_n(O,*)$在$\pi_n^S$上的作用就是子群$\mathrm{im}J_n$的加法作用. Bott利用傅里叶级数, 算子理论的技巧从分类稳定向量丛的角度计算出了$\pi_*(O)$, 从而发现了K理论. Adams利用了Bott的结果, 用谱序列的方法计算出了$\mathrm{im}J_*$, 从而开创了利用同调代数的方法逼近同伦群的计算方法, 该方法是目前唯一的计算球面稳定同伦群的方法. Thom证明了当维数$n \geqslant$

7时, S^n 的两个微分同胚的流形的嵌入对应的Thom映射代表的稳定同伦类相同, 即 A_n 与 S^n 的微分同胚类1-1对应, 开创了协边理论(就是特殊的广义(上)同调理论), 该理论也是目前流形分类问题最主要的方法. 所以 π_*^S 的计算是代数拓扑的中心问题之一. 表面上看, π_*^S 有分次交换的乘法, 而且对于每个n, π_n^S 也都为有限Abel群, 应该很简单, 但到目前为止, 我们对它几乎没什么整体性认识, 因而被公认为最复杂的代数结构之一.

第三章　同调论

3.1 一般(上)同调论

Abel群就是交换群. 由于Abel群的概念和性质非常简单又基础, 所以不以定义和定理的形式给出, 而是直接列出.

从链复形理论的角度, 我们更愿意把Abel群看成有加法的集合, 所以以下对Abel群的性质的叙述总是和集合的性质做类比.

首先说明Abel群和一般集合不同的两点. Abel群最显著的特点就是商性, 即可以对任何子群做商群, 而集合对任何子集没法作商集(商集总是有等价关系才可以定义). 但Abel群却不具有补性, 即Abel群的子群没有补群(只有当Abel群是欧式空间时, 才有补空间), 但集合的子集都有补(余)集.

一个集合 S 的一族子集 $\{S_\alpha\}_\alpha$ 有并集 $\cup_\alpha S_\alpha$ 和交集 $\cap_\alpha S_\alpha$. Abel群 A 的一族子群 $\{A_\alpha\}_\alpha$ 有加群 $+_\alpha A_\alpha$ 和交群 $\cap_\alpha A_\alpha$.

由对应的扩张性和提升性我们有集族 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的不交并集 $\cup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 和乘积集 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$. 由群同态的扩张性和提升性我们有Abel群族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的直和群 $\oplus_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 和直积群 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. 注意, 即使在下标集 Λ 有限的情况下, $\cup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 集和 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 集一般地也不一样(有1-1对应), 但是当 Λ 有限时, $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 群和 $\Pi_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 群却一样(同构). Abel群 A 的子群 B 有补群, 就相当于说存在 A 的子群 C 使得 $A\cong B\oplus C$.

Abel群 A 和 B 有张量积群 $A\otimes B$ 如下定义. 如果 A 和 B 为自由群, 即 $A=\mathbb{Z}(S)$, $B=\mathbb{Z}(T)$, 其中 S,T 为生成元集, 则 $A\otimes B=\mathbb{Z}(S\times T)$. 如果 $A=\mathbb{Z}(S;U)$, $B=\mathbb{Z}(T;V)$, 其中 U,V 为零关系集, 则 $A\otimes B=\mathbb{Z}(S\times T;(U\times T)\cup(S\times V))$. 从生成元和零关系的角度看, Abel群的张量积是集合偶 (S,U) 和 (T,V) 的乘积关系 $(S\times T,(U\times T)\cup(S\times V))$ 的推广. A 和 B 分别有组合表示 $A=\mathbb{Z}((A);\{(a+a')-(a)-(a')\}_{(a),(a')\in(A)})$ 和 $B=\mathbb{Z}((B);\{(b+b')-(b)-(b')\}_{(b),(b')\in(B)})$, 其中 (C) 表示忘记 C 的群结构得到的集合. 所以 $A\otimes B$ 有自然的组合表示 $A\otimes B=\mathbb{Z}((A)\times(B);\{(a+a',b)-(a,b)-(a',b),(a,b+b')-(a,b)-(a,b')\}_{(a),(a')\in(A),\,(b),(b')\in(B)})$. 为了与 $A\oplus B$ 中的一般元 (a,b) 区别, 总是把 $(A)\otimes(B)$ 中的生成元素写成 $a\otimes b$ 的形式而不是 (a,b) 的形式. 因而 $A\otimes B$ 上述自然的表示等价于以下描述, $A\otimes B$ 的生成元形如 $a\otimes b$, 零关系形如 $(a+a')\otimes b-a\otimes b-a'\otimes b$, $a\otimes(b+b')-a\otimes b-a\otimes b'$. 由这个表示就得到张量积群的泛性质: 如果由乘积集合 $A\times B$ 到Abel群 C 的对应 f 满足 $f(a+a',b)=f(a,b)+f(a',b)$, $f(a,b+b')=f(a,b)+f(a,b')$ 对所有 $a,a'\in A$ 和 $b,b'\in B$, 则存在唯一群同态 $\widetilde{f}\colon A\otimes B\to C$ 满足 $\widetilde{f}(a\otimes b)=f(a,b)$ 对所有 $a\in A$ 和 $b\in B$. 由集合 $(A\amalg A')\times B=(A\times B)\amalg(A'\times B)$ 对应的条件扩张性的描述, 再结合张量积群的泛性质就得到张量积的分配律 $(A\oplus A')\otimes B\cong(A\otimes B)\oplus(A'\otimes B)$. 由乘积集合的交换对应 $(a,b)\to(b,a)$, 再结合张量积的泛性质就得到张量积的交换性 $A\otimes B\cong B\otimes A$. 对于Abel群同态 $f\colon A\to B$ 和 $g\colon C\to D$, Abel群同态 $f\otimes g\colon A\otimes C\to B\otimes D$ 定义为 $(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)$.

Abel群 A 和 B 之间的所有群同态集合构成Abel群, 称为(由 A 到 B 的)同态群, 记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$, 其群结构如下定义. 对于 $f,g\in\mathrm{Hom}(A,B)$, 定义 $f+g\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 为 $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$ 对所有 $a\in A$. 零同态 0 为 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 的零元, f 的负元 $-f$ 定义为 $(-f)(a)=-f(a)$ 对所有 $a\in A$. 由 A 到 B 的同态群是由 S 到 T 的集合的对应集 T^S 的推广. 由同态扩张和提升性得 $\mathrm{Hom}(A\oplus A'),B)\cong\mathrm{Hom}(A,B)\oplus\mathrm{Hom}(A'B)$, $\mathrm{Hom}(A,B\oplus B')\cong\mathrm{Hom}(A,B)\oplus\mathrm{Hom}(A,B')$.

自由Abel群最重要的一个性质就是, *自由Abel群的任何子群都是自由群.*

这个结论并不像任何线性空间都存在基, 任何环都存在最大理想等命题那么显然. 对于有限生成的自由Abel群 $\mathbb{Z}(x_1,\cdots,x_n)$, 假设它的子群 B 由 $t_1,\cdots,t_m$ 生成, 其中 $t_i=\Sigma_{j=1}^{n}n_{i,j}x_j$. 通过对矩阵 $(n_{i,j})_{m\times n}$ 化成阶梯型就得到 B 的生成元 $t'_{i_1},\cdots,t'_{i_s}$, 其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n$, $t'_{i_s}=c_{i_s,i_s}x_{i_s}+c_{i_s,i_s+1}x_{i_s+1}+\cdots+c_{i_s,n}x_n$. 于是 $B=\mathbb{Z}(t_{i_1},\cdots,t_{i_s})$. 所以上述自由群的性质是任何有限整数矩阵可通过初等行变换阶梯化这个命题对无穷的推广.

自由Abel群另外一个重要性质就是, *自由Abel群到任何Abel群的群同态由生成元的像唯一决定, 等价地, Abel群同态 $\phi\colon\mathbb{Z}(S)\to B$ 由限制对应 $\phi|_S\colon S\to B$ 唯一决定.*

由上述性质, 我们要想定义或者描述一个群同态 $\phi\colon\mathbb{Z}(S)\to B$, 只需定义或者描述每个 $\phi(s)$ 就可以了. 具体地, 如果对每个 $s\in S$, 我们确定了 $\phi(s)$, 则对任何 $n_1s_1+\cdots+n_ks_k\in\mathbb{Z}(S)$, 定义 $\phi(n_1s_1+\cdots+n_ks_k)=n_1\phi(s_1)+\cdots+n_k\phi(s_k)$.

(上)同调理论最重要的概念就是恰当(正和)性. *Abel群同态的无穷序列*

$$\cdots\xrightarrow{f_{n+2}}A_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}A_n\xrightarrow{f_n}A_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots$$

称为在 A_n 处恰当(正和), 如果 $\operatorname{im}f_{n+1}=\ker f_n$. 如果序列在每一处 A_n 都恰当, 则称序列为长恰当序列.

Abel群的有限序列

$$A_m\xrightarrow{f_{m-1}}A_{m-1}\xrightarrow{f_{m-2}}\cdots\xrightarrow{f_{n+2}}A_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}A_n$$

称为恰当序列, 如果序列在 $A_{m-1},\cdots,A_{n+1}$ 处都恰当. 特别地, Abel群的短恰当序列是指以下的序列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\longrightarrow 0,$$

等价于说, i 为单同态, j 为满同态, 也等价于说, A 为 B 的子群, C 为商群 B/A. 以上短恰当序列称为分裂的, 如果 $B\cong A\oplus C$.

短恰当序列 $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{j}C\to 0$ 是分裂的, 当且仅当或者存在群同态 $p\colon B\to A$ 使得 $pi=1_A$, 或者存在群同态 $q\colon C\to B$ 使得 $jq=1_C$.

(上)同调理论最常用的Abel群的性质就是, *如果Abel群同态 $f\colon A\to B$ 为满同态, 则对任何Abel群 G, $f\otimes 1_G\colon A\otimes G\to B\otimes G$ 为满同态, $\mathrm{Hom}(f,1_G)\colon\mathrm{Hom}(B,G)\to\mathrm{Hom}(A,G)$ 为单同态, 其中 $\mathrm{Hom}(f,1_G)(\phi)=\phi f$. 如果Abel群同态 $f\colon A\to B$ 为单同态, 则对任何Abel群 G, $\mathrm{Hom}(1_G,f)\colon\mathrm{Hom}(G,A)\to\mathrm{Hom}(G,B)$ 为单同态, 其中 $\mathrm{Hom}(1_G,f)(\phi)=f\phi$.*

如果Abel群同态 $f\colon A\to B$ 为单同态, 则对于Abel群 G, $f\otimes 1_G$ 未必为单同态, $\mathrm{Hom}(f,1_G)$ 也未必为满同态. 如果Abel群同态 $f\colon A\to B$ 为满同态, 则对Abel群 G, $\mathrm{Hom}(1_G,f)$ 未必为满同态.

上述性质使得取张量积群和同态群作用不保持恰当性, 但保持微分性. 具体地, 对于Abel群的长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{f_{n+2}}A_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}A_n\xrightarrow{f_n}A_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots,$$

对于Abel群 G, 取取张量积群和同态群得到的以下两个序列

$$\cdots\xrightarrow{f_{n+2}\otimes 1_G}A_{n+1}\otimes G\xrightarrow{f_{n+1}\otimes 1_G}A_n\otimes G\xrightarrow{f_n\otimes 1_G}A_{n-1}\otimes G\xrightarrow{f_{n-1}\otimes 1_G}\cdots,$$

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f_{n-1},1_G)} \mathrm{Hom}(A_{n-1},G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f_n,1_G)} \mathrm{Hom}(A_n,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f_{n+1},1_G)} \mathrm{Hom}(A_{n+1},G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f_{n+2},1_G)} \cdots$$

都未必恰当, 但却保持微分性, 即 $(f_n \otimes 1_G)(f_{n+1} \otimes 1_G) = 0$ 和 $\mathrm{Hom}(f_{n+1},1_G)\mathrm{Hom}(f_n,1_G) = 0$.

由于Poncaré发现的(上)同调群都是分次Abel群, 所以分次Abel群成为数学中常见的对象.

分次Abel群 A_* 是指一族以整数为下标集的Abel群的不交并

$$\amalg_{n=-\infty}^{\infty} A_n = \cdots \amalg A_{-2} \amalg A_{-1} \amalg A_0 \amalg A_1 \amalg A_2 \amalg \cdots.$$

称每个 A_n 为 A_* 的 n 阶分量群. 分次群中的元都是齐次元, 即 $a \in A_*$ 意味着 $a \in A_n$ 对某个 n, 称 n 为 a 的阶数, 记为 $|a|$. 分次Abel群的加法只在阶数相同的元中进行, 因而对于 $a \in A_*$, $b \in A_*$, 如果 $|a| \neq |b|$, 则 $a+b$ 不是 A_* 中的元, 等价地, $a+b \in A_*$ 蕴含 $|a| = |b|$. 特别地, 所有的分量群都是零群的分次Abel群仍称为零群, 仍记为0. 分次Abel群的(齐次)群同态 $f\colon A_* \to B_*$是指一族群同态的不交并 $f = \amalg_{n=-\infty}^{\infty} f_i$, 其中每个 $f_n\colon A_n \to B_n$ 为群同态, 称为同态 f 的分量同态. 同样, 每个分量同态都是零同态的群同态仍称为零同态, 仍记为0.

Abel群的所有定义和性质都可以推广到分次Abel群. 具体地, Abel群 A 具有什么定义和满足什么性质, 分次Abel群 A_* 就有相应的定义和满足相应的性质, 等价于每个分量群 A_n 具有相应的定义和满足相应的性质. 凡是以上述方式推广的定义和性质就不再赘述.

分次Abel群有不分次Abel群不具有的同纬运算. 对于分次Abel群 A_*, ΣA_* 称为 A_* 的同纬群, 其分量群定义为 $(\Sigma A_*)_n = A_{n-1}$. 显然 Σ 有逆运算 Σ^{-1} 满足 $\Sigma^{-1}(\Sigma A_*) = \Sigma(\Sigma^{-1} A_*) = A_*$. 所以对任何 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有 n 阶同纬 Σ^n. 特别地, Σ^0 为恒等运算.

两个分次Abel群 A_* 和 B_* 的张量积群 $A_* \otimes B_*$ 定义为 $(A_* \otimes B_*)_n = \oplus_{s+t=n} A_s \otimes B_t$. 由 A_* 到 B_* 的分次同态群 $\mathrm{Hom}_*(A_*,B_*)$ 定义为 $\mathrm{Hom}_n(A_*,B_*) = \mathrm{Hom}(\Sigma^n A*, B_*)$, 其中 $\mathrm{Hom}(\Sigma^n A_*, B_*)$ 为由 $\Sigma^n A_*$ 到 B_* 的所有齐次群同态构成的不分次的Abel群.

对于(不分次)Abel群 G 和分次Abel群 A_*, 定义分次Abel群 $A_* \otimes G$, $\mathrm{Hom}(A_*,G)$, $\mathrm{Hom}(G,A_*)$ 的分量群分别为 $A_n \otimes G$, $\mathrm{Hom}(A_n,G)$, $\mathrm{Hom}(G,A_n)$. 对于分次Abel群的同态 $f\colon A_* \to B_*$, 自然有分次Abel群的同态, $f \otimes 1_G\colon A_* \otimes G \to B_* \otimes G$, $\mathrm{Hom}(f,1_G)\colon \mathrm{Hom}(B_*,G) \to \mathrm{Hom}(A_*,G)$, $\mathrm{Hom}(1_G,f)\colon \mathrm{Hom}(G,A_*) \to \mathrm{Hom}(G,B_*)$. 把 G 看成特殊的分次Abel群 G_*, 满足 $G_0 = G$, $G_k = 0$ 如果 $k \neq 0$, 则我们有 $\mathrm{Hom}(A_*,G) = \mathrm{Hom}_*(A_*,G_*)$, $\mathrm{Hom}(G,A_*) = \mathrm{Hom}_*(G_*,A_*)$.

在有对偶关系背景下, 一个分次Abel群 A_* 的对偶对象就记为 A^*, 虽然 A^* 的集合论构造在不同的场合有不同的定义, 但还是个分次Abel群. 所以分次Abel群理论还有把分次写成上标的形式的情形.

注意, 在实际应用中, 分次Abel群 A_* 总是连通的, 即存在整数 N 满足 $A_k = 0$ 对所有 $k < N$, 这时我们记 $A_* = \amalg_{n=N}^{\infty} A_n$. 分次Abel群写成上标时也一样.

定义3.1.1 链复形 (C_*, d) 是指以下Abel群同态的无穷序列

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+3}} C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

满足 $\mathrm{im}\, d_{n+1} \subset \ker d_n$ 对所有 n. 分次Abel群 $C_* = \amalg_n C_n$ 称为链复形的链群, $d = \amalg_n d_n\colon C_* \to \Sigma^{-1} C_*$ 称为链复形的微分. 在不引起误解的情况下(尤其是具体计算当中), 所有的 d_n 都简记为 d. 所以条件 $\mathrm{im}\, d_{n+1} \subset$

$\ker d_n$ 对所有 n 等价于条件 $d^2 = 0$. 链复形 (C_*, d) 的同调群定义为

$$H_*(C_*) = H_*(C_*, d) = \amalg_n H_n(C_*), \quad H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}.$$

$Z_n = \ker d_n$ 称为链复形的 n 阶循环群, 其中的元素叫做循环元. $B_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ 称为链复形的 n 阶边缘群, 其中的元素称为边缘元. $H_n(C_*)$ 称为链复形的 n 阶同调群, 其上的每一个元素称为一个同调类, 用 $[x]$ 的形式表示, 其中 $x \in Z_n$. x 称为同调类 $[x]$ 的代表元. 则对于 $x, y \in \ker d$, $[x] = [y]$, 当且仅当 存在 $z \in C_*$ 使得 $dz = x - y$.

链复形 (C_*, d) 称为自由的, 如果每个 C_n 都为自由Abel群.

对偶地, 上链复形 (C^*, δ) 是指以下Abel群同态的无穷序列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_n} C^n \xrightarrow{\delta_{n+1}} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+2}} C^{n+2} \xrightarrow{\delta_{n+3}} \cdots$$

满足 $\operatorname{im} \delta_n \subset \ker \delta_{n+1}$ 对所有 n. 分次Abel群 $C^* = \amalg_n C^n$ 称为上链复形的链群, $\delta = \amalg_n \delta_n \colon C^* \to \Sigma C^*$ 称为上链复形的微分. 在不引起误解的情况下, 所有的 δ_n 都简记为 δ. 所以条件 $\operatorname{im} \delta_n \subset \ker \delta_{n+1}$ 对所有 n 等价于条件 $\delta^2 = 0$. 上链复形 (C^*, δ) 的上同调群定义为

$$H^*(C^*) = H^*(C^*, \delta) = \amalg_n H^n(C^*), \quad H^n(C^*) = \ker \delta_{n+1} / \operatorname{im} \delta_n.$$

$Z_n = \ker \delta_{n+1}$ 称为上链复形的 n 阶循环群, 其中的元素叫做循环元. $B_n = \operatorname{im} \delta_n$ 称为上链复形的 n 阶边缘群, 其中的元素称为边缘元. $H^n(C^*)$ 称为上链复形的 n 阶上同调群, 其上的每一个元素称为一个上同调类, 用 $[x]$ 的形式表示, 其中 $x \in Z_n$. x 称为上同调类 $[x]$ 的代表元. 则对于 $x, y \in \ker\delta$, $[x] = [y]$, 当且仅当 存在 $z \in C_*$ 使得 $\delta z = x - y$.

上链复形 (C^*, δ) 称为自由的, 如果每个 C^n 都为自由群.

显然上链复形 (C^*, δ) 唯一对应着一个链复形 (C_*, d) 满足 $C^n = C_{-n}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$. 所以有关上链复形的所有证明都可以省略了. 既然上链复形和链复形在本质上是一回事, 那么上链复形的定义有必要么? 绝对必要. 这是因为到目前为止, 还没有发现有意义的同调理论涉及到不连通的(上)链复形, 也就是说目前所有同调理论涉及的链群作为分次Abel群都是连通的, 而且在绝大多数情况下也是非负分次的. 在某些情况下, (上)链复形为分次群的群模, 表面上看作为分次Abel群是不连通的, 但(上)链复形的生成元并没有负阶数, 因而本质上还是连通的. 所以在实际情况中, 链复形和上链复形对应着不同的情况. 而且在代数几何中, 只有上同调的定义, 没有相对应的有意义的同调定义.

定义3.1.2 对于链复形 (C_*, d) 和Abel群 G, 以下Abel群同态的无穷序列

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2} \otimes 1_G} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1} \otimes 1_G} C_n \xrightarrow{d_n \otimes 1_G} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1} \otimes 1_G} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\operatorname{Hom}(d_{n-2}, 1_G)} C_{n-1} \xrightarrow{\operatorname{Hom}(d_{n-1}, 1_G)} C_n \xrightarrow{\operatorname{Hom}(d_n, 1_G)} C_{n+1} \xrightarrow{\operatorname{Hom}(d_{n+1}, 1_G)} \cdots$$

仍然是链复形, 分别记为 $(C_* \otimes G, d \otimes 1_G)$, $(\operatorname{Hom}(C_*, G), \operatorname{Hom}(d, 1_G))$.

链复形 (C_*, d) 以 G 为系数的同调群和上同调群定义为

$$H_*(C_*; G) = H_*(C_* \otimes G, d \otimes 1_G), \quad H^*(C_*; G) = H^*(\operatorname{Hom}(C_*, G), \operatorname{Hom}(d, 1_G)).$$

显然 $H_*(C_*; \mathbb{Z}) = H_*(C_*)$.

对于自由链复形 (C_*, d), 定义它的对偶上链复形为 $(C^*, \delta) = (\mathrm{Hom}(C_*, \mathbb{Z}), \mathrm{Hom}(d, 1_{\mathbb{Z}}))$.

在代数拓扑理论的实际情况中, 带系数的(上)同调总是从一个链复形 (C_*, d) 的基础上定义的, 而且这个链复形还是自由的. 所以我们不叙述从上链复形基础上定义的带系数的(上)同调群理论, 虽然逻辑上有这个定义.

定义3.1.3 链复形之间的链同态 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 是指分次Abel群同态 $f\colon C_* \to D_*$, 满足 $fd = d\,f$, 即我们有以下Abel群同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots \\
 & & f_{n+1}\downarrow & & f_n\downarrow & & f_{n-1}\downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & D_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots.
\end{array}$$

链复形 (C_*, d) 和 (D_*, d) 称为同构的, 记作 $(C_*, d) \cong (D_*, d)$, 如果存在链同态 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 和 $g\colon (D_*, d) \to (C_*, d)$ 满足 $gf = 1_{C_*}$ 和 $fg = 1_{D_*}$. f 和 g 称为互逆的链同构.

对偶地, 上链复形之间的链同态 $f\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 是指分次Abel群同态 $f\colon C^* \to D^*$, 满足 $f\delta = \delta\, f$, 即我们有以下Abel群同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\delta_n} & C^n & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & C^{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+2}} & \cdots \\
 & & f_{n-1}\downarrow & & f_n\downarrow & & f_{n+1}\downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & D^{n-1} & \xrightarrow{\delta_n} & D^n & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+2}} & \cdots.
\end{array}$$

上链复形 (C^*, δ) 和 (D^*, δ) 称为同构的, 记作 $(C^*, \delta) \cong (D^*, \delta)$, 如果存在链同态 $f\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 和 $g\colon (D^*, \delta) \to (C^*, \delta)$ 满足 $gf = 1_{C^*}$ 和 $fg = 1_{D^*}$. f 和 g 称为互逆的链同构.

定理3.1.4 由链同态 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 导出同调群的同态 $f_*\colon H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ 定义为 $f_*([x]) = [f(x)]$. 导出的同态满足以下性质.

(1) $(1_{C_*})_* = 1_{H_*(C_*)}$.

(2) $(fg)_* = f_* g_*$.

对偶地, 由上链复形的链同态 $f\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 导出上同调群的同态 $f_*\colon H^*(C^*) \to H^*(D^*)$ 定义为 $f_*([x]) = [f(x)]$. 导出的同态满足以下性质.

(1) $(1_{C^*})_* = 1_{H^*(C^*)}$.

(2) $(fg)_* = f_* g_*$.

对于链复形的链同态 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 和任意的系数群 G, 有导出的带系数的(上)同调群同态

$$f_*\colon H_*(C_*; G) \to H_*(D_*; G), \quad f^*\colon H^*(D_*; G) \to H^*(C_*; G)$$

分别由 $f \otimes 1_G\colon C_* \otimes G \to D_* \otimes G$, $\mathrm{Hom}(f, 1_G)\colon \mathrm{Hom}(D_*, G) \to \mathrm{Hom}(C_*, G)$ 导出. 导出的带系数的(上)同调群同态满足以下性质.

(1) $(1_{C_*})_* = 1_{H_*(C_*;G)}$, $(1_{C_*})^* = 1_{H^*(C_*;G)}$.

(2) $(fg)_* = f_* g_*$, $(fg)^* = g^* f^*$.

证 如果 $[x]=[x']$,则存在 y 使得 $dy=x-x'$, 于是 $d(f(y))=f(d(y))=f(x)-f(x')$, 因而 $[f(x)]=[f(x')]$. 这说明 f_* 的定义不依赖于代表元 x 的选取. 而 $f_*([x]+[y])=f_*([x+y])=[f(x)+f(y)]=f_*([x])+f_*([y])$. 所以 f_* 为群同态. 其它性质类似.

定义3.1.5 链复形 (C_*,d) 称为链复形 (D_*,d) 的子复形, 如果 C_* 为 D_* 的分次子群, 即每一个 C_n 为 D_n 的子群, C_* 上的微分为 D_* 上的微分的限制. 商复形 $(D_*/C_*,d)$ 定义为 $(\amalg_{n\in\mathbb{Z}}\big(D_n/C_n),d\big)$, 其中商复形的微分为原微分在商群上导出的微分.

对偶地, 上链复形 (C^*,δ) 称为上链复形 (D^*,δ) 的子复形, 如果 C^* 为 D^* 的分次子群, 即每一个 C^n 为 D^n 的子群, C^* 上的微分为 D^* 上的微分的限制. 商复形 $(D^*/C^*,\delta)$ 定义为 $(\amalg_{n\in\mathbb{Z}}\big(D^n/C^n),\delta\big)$, 其中商复形的微分为原微分在商群上导出的微分.

定理3.1.6 (五项引理)设以下Abel群同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ {\scriptstyle\psi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_3}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_4}\downarrow & & {\scriptstyle\psi_5}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

满足两行都恰当. 如果 $\psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_5$ 都为同构, 则 ψ_3 为同构.

证 如果 $a_3\in A_3$ 满足 $\psi_3(a_3)=0$, 则 $\psi_4(f_3(a_3))=g_3(\psi_3(a_3))=0$. 由于 ψ_4 为同构, 所以 $f_3(a_3)=0$. 由 A_3 处的恰当性, 存在 $a_2\in A_2$ 使得 $f_2(a_2)=a_3$. 所以 $g_2(\psi_2(a_2))=\psi_3(f_2(a_2))=\psi_3(a_3)=0$. 由 B_2 处的恰当性, 存在 $b_1\in B_1$ 使得 $g_1(b_1)=\psi_2(a_2)$. 由于 ψ_1 为同构, 所以存在 $a_1\in A_1$ 使得 $\psi_1(a_1)=b_1$. 所以 $\psi_2(f_1(a_1))=g_1(\psi_1(a_1))=g_1(b_1)=\psi_2(a_2)$. 由于 ψ_2 为同构, 所以 $f_1(a_1)=a_2$. 所以 $a_3=f_2(a_2)=f_2(f_1(a_1))=0$. 因此, ψ_3 为单同态.

对于 $b_3\in B_3$, 由于 ψ_4 为同构, 存在 $a_4\in A_4$ 使得 $\psi_4(a_4)=g_3(b_3)$. 所以 $\psi_5(f_4(a_4))=g_4(\psi_4(a_4))=g_4(g_3(b_3))=0$. 由于 ψ_5 为同构, 所以 $f_4(a_4)=0$. 由 A_4 处的恰当性, 存在 $a_3\in A_3$ 使得 $f_3(a_3)=a_4$. 所以 $g_3(b_3)=\psi_4(a_4)=\psi_4(f_3(a_3))=g_3(\psi_3(a_3))$. 由 B_3 处的恰当性, 存在 $b_2\in B_2$ 使得 $g_2(b_2)=b_3-\psi_3(a_3)$. 由于 ψ_2 为同构, 存在 $a_2\in A_2$ 使得 $\psi_2(a_2)=b_2$. 所以 $b_3-\psi_3(a_3)=g_2(b_2)=g_2(\psi_2(a_2))=\psi_3(f_2(a_2))$. 所以 $b_3\in\operatorname{im}\psi_3$. 因此, ψ_3 为满同态.

以上定理的证明方法叫追图法, 该方法比较好地说明Abel群是有加法的集合.

定理3.1.7 设 (C_*,d) 为链复形 (D_*,d) 的子复形, 则存在连接同态 $\partial_*\colon H_*(D_*/C_*)\to\Sigma^{-1}H_*(C_*)$ 满足以下长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(C_*)\xrightarrow{i_n}H_n(D_*)\xrightarrow{j_n}H_n(D_*/C_*)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(C_*)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots$$

其中 $i\colon(C_*,d)\to(D_*,d)$ 为内射链同态, $j\colon(D_*,d)\to(D_*/C_*,d)$ 为商链同态.

如果 (U_*,d) 为 (V_*,d) 的子复形, 链同态 $f\colon(D_*,d)\to(V_*,d)$ 满足 $f(C_*)\subset U_*$, 则有以下恰当序列的交换图.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*) & \xrightarrow{i_n} & H_n(D_*) & \xrightarrow{j_n} & H_n(D_*/C_*) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(C_*) & \xrightarrow{i_{n-1}} & \cdots \\ & & {\scriptstyle\bar{f}_n}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & {\scriptstyle\tilde{f}_n}\big\downarrow & & {\scriptstyle\bar{f}_n}\big\downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(U_*) & \xrightarrow{i_n} & H_n(V_*) & \xrightarrow{j_n} & H_n(V_*/U_*) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(U_*) & \xrightarrow{i_{n-1}} & \cdots \end{array}$$

其中 $\bar{f}$ 为限制同态, $\widetilde{f}$ 为商同态. 三个分次群同态 $\bar{f}_n, f_n, \widetilde{f}_n$ 中如果有两个是同构, 则另一同态也为同构.

对偶地, 设 (C^*, δ) 为上链复形 (D^*, δ) 的子复形, 则存在连接同态 $\partial_*\colon H^*(D^*/C^*) \to \Sigma H^*(C^*)$ 满足以下长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} H^n(C^*) \xrightarrow{i_n} H^n(D^*) \xrightarrow{j_n} H^n(D^*/C^*) \xrightarrow{\partial_n} H^{n+1}(C^*) \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots$$

其中 $i\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 为内射链同态, $j\colon (D^*, \delta) \to (D^*/C^*, \delta)$ 为商链同态.

如果 (U^*, δ) 为 (V^*, δ) 的子复形, 链同态 $f\colon (D^*, \delta) \to (V^*, \delta)$ 满足 $f(C^*) \subset U^*$, 则有以下恰当序列的交换图.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & H^n(C^*) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & H^n(D^*) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "f_n"'] & H^n(D^*/C^*) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\widetilde{f}_n"'] & H^{n+1}(C^*) \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & H^n(U^*) \arrow[r, "i_n"] & H^n(V^*) \arrow[r, "j_n"] & H^n(V^*/U^*) \arrow[r, "\partial_n"] & H^{n+1}(U^*) \arrow[r, "i_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $\bar{f}$ 为限制同态, $\widetilde{f}$ 为商同态. 三个分次群同态 $\bar{f}_n, f_n, \widetilde{f}_n$ 中如果有两个是同构, 则另一同态也为同构.

证 为了区别不同的同调群, 我们分别用 $[-]_1, [-]_2, [-]_3$ 表示 $H_*(C_*), H_*(D_*), H_*(D_*/C_*)$ 的同调类, 分别用 d_1, d_2, d_3 表示 $C_*, D_*, D_*/C_*$ 的微分, 用 $\overline{x}$ 表示 D_*/C_* 中的元素, 其中 $x \in D_*$. 这种表示蕴含 $\overline{x} = \overline{y}$ 如果 $x-y \in C_*$, $\overline{x} = 0$ 如果 $x \in C_*$. $[x]_i$ 蕴含 x 为一循环元, 即 $d_i x = 0$.

首先定义分次群同态 ∂_*. 定义 $\partial_*[\overline{x}]_3 = [d_2 x]_1$ 对任意 $\overline{x} \in \ker d_3$. 由于 $d_3\overline{x} = 0$ 等价于 $d_2 x \in C_*$, 并且 $d_1(d_2 x) = d_2^2 x = 0$, 所以 $[d_2 x]_1$ 定义合理. 如果 $[\overline{x}]_3 = [\overline{x}']_3$, 即存在 $y \in D_*$ 和 $z \in C_*$ 使得 $d_2 y-(x-x') = z$, 则 $d_2 x-d_2 x' = -d_2 z = -d_1 z \in \operatorname{im} d_1$, 即 $[d_2 x]_1 = [d_2 x']_1$. 所以, ∂_* 的定义不依赖于 x 的选取. 而 $\partial_*([\overline{x+y}]_3)$ $= [d_2(x+y)]_1 = [d_2 x]_1+[d_2 y]_1 = \partial_*[\overline{x}]_3+\partial_*[\overline{y}]_3$. 所以 ∂_* 为群同态.

序列在 $H_n(C_*)$ 处的恰当性. 由于 $i_*(\partial_*([\overline{x}]_3)) = i_*([d_2 x]_1) = [d_2 x]_2 = 0$, 所以 $\operatorname{im}\partial_* \subset \ker i_*$. 如果 $i_*([x]_1) = 0$, 即 $[x]_2 = 0$, 则存在 $y \in D_*$ 使得 $d_2 y = x$. 则 $[x]_1 = \partial_*[\overline{y}]_3$. 所以, $\ker i_* \subset \operatorname{im}\partial_*$.

序列在 $H_n(D_*)$ 处的恰当性. 由于 $j_*(i_*([x]_1)) = [\overline{x}]_3 = 0$, 所以 $\operatorname{im} i_* \subset \ker j_*$. 如果 $j_*([x]_2) = 0$, 即 $[\overline{x}]_3 = 0$, 则存在 $y \in D_*$ 和 $z \in C_*$ 使得 $d_2 y = x-z$. 则 $i_*([z]_1) = [x]_2$. 所以, $\ker j_* \subset \operatorname{im} i_*$.

序列在 $H_n(D_*/C_*)$ 处的恰当性. 由于 $\partial_*(j_*([x]_2)) = \partial_*([\overline{x}]_3) = [d_2 x]_1 = 0$, 所以 $\operatorname{im} j_* \subset \ker\partial_*$. 如果 $\partial_*([\overline{x}]_3) = 0$, 即 $[d_2 x]_1 = 0$, 则存在 $y \in C_*$ 使得 $d_1 y = d_2 x$. 则 $j_*[x-y]_2 = [\overline{x}]_3$. 所以, $\ker\partial_* \subset \operatorname{im} j_*$.

现证同态图的交换性. 由于 $i\bar{f} = fi$ 和 $jf = \widetilde{f}j$, 所以 $i_*\bar{f}_* = f_* i_*$ 和 $j_* f_* = \widetilde{f}_* j_*$. 而 $\bar{f}_*(\partial_*([\overline{x}]_3)) = [\bar{f} d_2 x]_1 = [d_2 \bar{f} x]_1 = \partial_*(\widetilde{f}_*([\overline{x}]_3))$. 所以 $\bar{f}_*\partial_* = \partial_*\widetilde{f}_*$.

由5项引理, $\bar{f}_*, f_*, \widetilde{f}_*$ 中有两个是同构, 则另一同态也为同构.

以上定理是同调理论最基本的定理. 正是因为这个定理, 导致大多数建立在单独对象上的同调理论必须要推广到建立在对象偶上的相对同调理论. 由于带系数的同调和上同调都是在自由链复形的基础上建立的, 所以在实际应用中经常采用以下的等价形式.

注意以下定理只在自由链复形上成立!

定理3.1.8 (短恰当引长恰当定理) 设 (C_*, d), (D_*, d) 和 (E_*, d) 都为自由链复形而且有链复形的短恰当序列

$$0 \to C_* \xrightarrow{i} D_* \xrightarrow{j} E_* \to 0,$$

即 i 和 j 都为链同态, 且对每个 n, 序列 $0 \to C_n \xrightarrow{i} D_n \xrightarrow{j} E_n \to 0$ 都恰当.

对任何的Abel群 G, 存在带系数的同调群的连接同态 $\partial_*\colon H_*(E_*;G)\to\Sigma^{-1}H_*(C_*;G)$ 和带系数的上同调群的连接同态 $\partial^*\colon H^*(C_*;G)\to\Sigma H^*(E_*;G)$ 满足以下长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(C_*;G)\xrightarrow{i_n}H_n(D_*;G)\xrightarrow{j_n}H_n(E_*;G)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(C_*;G)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots,$$

$$\cdots\xrightarrow{\partial^{n-1}}H^n(E_*;G)\xrightarrow{j^n}H^n(D_*;G)\xrightarrow{i^n}H^n(C_*;G)\xrightarrow{\partial^n}H^{n+1}(E_*;G)\xrightarrow{i^{n+1}}\cdots,$$

其中 i_*,j_*,i^*,j^* 为由 i,j 导出的带系数(上)同调群的同态.

以上长恰当序列是自然的, 即对于以下自由链复形(注意自由条件!)的短恰当序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_* & \xrightarrow{i} & D_* & \xrightarrow{j} & E_* & \longrightarrow & 0\\
 & & \bar f\downarrow & & f\downarrow & & \widetilde f\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & U_* & \xrightarrow{i} & V_* & \xrightarrow{j} & W_* & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

有以下带系数(上)同调群的长恰当序列的交换图.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C_*;G) & \xrightarrow{i_n} & H_n(D_*;G) & \xrightarrow{j_n} & H_n(E_*;G) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(C_*;G) & \xrightarrow{i_{n-1}} & \cdots\\
 & & \bar f_n\big\downarrow & & f_n\big\downarrow & & \widetilde f_n\big\downarrow & & \bar f_n\big\downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(U_*;G) & \xrightarrow{i_n} & H_n(V_*;G) & \xrightarrow{j_n} & H_n(W_*;G) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(U_*;G) & \xrightarrow{i_{n-1}} & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & H^n(W_*;G) & \xrightarrow{j^n} & H^n(V_*;G) & \xrightarrow{i^n} & H^n(U_*;G) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n-1}(W_*;G) & \xrightarrow{i^{n+1}} & \cdots\\
 & & \big\downarrow\bar f^n & & \big\downarrow f^n & & \big\downarrow\widetilde f^n & & \big\downarrow\bar f^n & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & H^n(E_*;G) & \xrightarrow{j^n} & H^n(D_*;G) & \xrightarrow{i^n} & H^n(C_*;G) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n-1}(E_*;G) & \xrightarrow{i^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

其中三个由 $\bar f,f,\widetilde f$ 导出的(上)同调群同态中有两个是同构, 则另一个也为同构.

证 不是所有的短恰当序列 $0\to C\xrightarrow{i}D\xrightarrow{j}E\to 0$ 都是分裂的, 但如果 D,E 都是自由群(蕴含 C 是自由的), 短恰当序列一定分裂. 设 $E=\mathbb{Z}(T)$. 定义 $q\colon E\to D$ 如下. 对于 $t\in T$, 任取满足 $j(t')=t$ 的 $t'\in D$, 定义 $q(t)=t'$. 显然由 D 的自由性可知 $qj=1_E$. 所以短恰当序列分裂.

对于一般的短恰当序列 $0\to C\to D\to E\to 0$, 张量积序列 $0\to C\otimes G\to D\otimes G\to E\otimes G\to 0$ 未必恰当. 但由上结论, 如果 C,D,E 都是自由群, 则短恰当序列分裂, 因此张量积序列还是分裂的, 因而也还是恰当的. 所以对以下的链复形的短恰当序列

$$0\to C_*\otimes G\xrightarrow{i\otimes 1_G}D_*\otimes G\xrightarrow{j\otimes 1_G}E_*\otimes G\to 0$$

应用前定理, 就得到本定理同调群部分的结论.

同样对上述的短恰当序列, 同态群序列 $0\to\mathrm{Hom}(E,G)\to\mathrm{Hom}(D,G)\to\mathrm{Hom}(C,G)\to 0$ 未必恰当. 但由上结论, 如果 C,D,E 都是自由群, 则短恰当序列分裂, 因此同态群序列还是分裂的, 因而也还是恰当的. 所以对以下的上链复形的短恰当序列

$$0\to\mathrm{Hom}(E_*,G)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(j,1_G)}\mathrm{Hom}(D_*,G)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,1_G)}\mathrm{Hom}(C_*,G)\to 0$$

应用前定理, 就得到本定理上同调群部分的结论.

定义3.1.9 两个链复形的链同态 $f,g\colon(C_*,d)\to(D_*,d)$ 称为同伦的, 记为 $f\simeq g$, 如果存在分次群同态 $s\colon C_*\to\Sigma D_*$ 满足 $ds+sd=g-f$ (也可以是 $ds-sd=g-f$). 称 s 为连接 f 到 g 的链同伦.

对偶地, 两个上链复形的链同态 $f, g\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 称为同伦的, 记为 $f \simeq g$, 如果存在分次群同态 $s\colon C^* \to \Sigma^{-1}D^*$ 满足 $\delta s + s\delta = g - f$ (也可以是 $\delta s - s\delta = g - f$). 称 s 为连接 f 到 g 的链同伦.

定理3.1.10 链同态的同伦关系为等价关系, 而且关于链同态的复合封闭, 即如果链同态 $u \simeq u'$, $v \simeq v'$, 则复合链同态满足 $vu \simeq v'u'$. 同伦的链同态导出相同的同调群同态, 即如果 $f \simeq g$, 则 $f_* = g_*$.

证 设 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 为链同态, 令 $0\colon C_* \to \Sigma C_*$ 为零同态, 由 $d0 + 0d = f - f$ 可知 0 为连接 f 到自身的链同伦. 设 s 为连接 f 到 g 的链同伦, 则 $-s$ 为连接 g 到 f 的链同伦. 如果 s 为连接 f 到 g 的链同伦, t 为连接 g 到 h 的链同伦, 则 $s+t$ 为连接 f 到 h 的链同伦.

假设 s 为连接 u 到 u' 的链同伦, 即 $ds+sd = u'-u$, 则 $dvs+vds = v(ds+sd) = vu'-vu$, 所以 vs' 为连接 vu 到 vu' 的链同伦. 同样, 假设 t 为连接 v 到 v' 的链同伦, 则 $dtu'+tu'd = (dt+td)u' = v'u'-vu'$, 所以 tu' 为连接 vu' 到 $v'u'$ 的链同伦. 因此, $u \simeq u'$ 和 $v \simeq v'$ 蕴含 $vu \simeq vu' \simeq v'u'$.

对于满足 $ds+sd = f-g$ 的链同伦和 $x \in \ker d$, $g(x)-f(x) = d(s(x))$, 所以 $[f(x)] = [g(x)]$, 即 $f_*([x]) = g_*([x])$.

定义3.1.11 两个链复形 (C_*, d) 和 (D_*, d) 称为同伦等价的, 记为 $(C_*, d) \simeq (D_*, d)$, 如果存在链同态 $f\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 和 $g\colon (D_*, d) \to (C_*, d)$ 使得 $gf \simeq 1_{C_*}$ 和 $fg \simeq 1_{D_*}$. f, g 称为互逆的链同伦等价. 显然如果 $(C_*, d) \simeq (D_*, d)$, 则 $H_*(C_*) \cong H_*(D_*)$.

两个上链复形 (C^*, δ) 和 (D^*, δ) 称为同伦等价的, 记为 $(C^*, \delta) \simeq (D^*, \delta)$, 如果存在链同态 $f\colon (C^*, \delta) \to (D^*, \delta)$ 和 $g\colon (D^*, \delta) \to (C^*, \delta)$ 使得 $gf \simeq 1_{C^*}$ 和 $fg \simeq 1_{D^*}$. f, g 称为互逆的链同伦等价. 显然如果 $(C^*, \delta) \simeq (D^*, \delta)$, 则 $H^*(C^*) \cong H^*(D^*)$.

定理3.1.12 如果链同态 $f, g\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 满足 $f \simeq g$, 则对任何Abel群 G, 导出的带系数的(上)同调群的同态

$$f_*, g_*\colon H_*(C_*; G) \to H_*(C_*; G), \quad f^*, g^*\colon H^*(D_*; G) \to H^*(C_*; G)$$

满足 $f_* = g_*$, $f^* = g^*$.

由上可知如果 $(C_*, d) \simeq (D_*, d)$, 则对任何Abel群 G, 都有

$$H_*(C_*; G) \cong H_*(D_*; G), \quad H^*(C_*; G) \cong H^*(D_*; G).$$

证 如果 s 为连接 f 到 g 的链同伦, 则张量积同态 $s\otimes 1_G$ 为连接 $f\otimes 1_G$ 到 $g\otimes 1_G$ 的链同伦, 同态群同态 $\mathrm{Hom}(s, 1_G)$ 也为连接 $\mathrm{Hom}(f, 1_G)$ 到 $\mathrm{Hom}(g, 1_G)$ 的链同伦.

定义3.1.13 两个链复形 (C_*, d) 和 (D_*, d) 的直和链复形和张量积链复形

$$(C_*, d) \oplus (D_*, d) = (C_*\oplus D_*, d), \quad (C_*, d) \otimes (D_*, d) = (C_*\otimes D_*, d)$$

定义为 $d(a, b) = (da, db)$, $d(a\otimes b) = (da)\otimes b + (-1)^{|a|}a\otimes(db)$ 对所有 $a \in C_*$ 和 $b \in D_*$.

一族链复形 $\{(C_*^\alpha, d)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的直积链复形和直和链复形(后者看成前者的子复形)

$$\Pi_{\alpha\in\Lambda}(C_*^\alpha, d) = (\Pi_{\alpha\in\Lambda}C_*^\alpha, d), \quad \oplus_{\alpha\in\Lambda}(C_*^\alpha, d) = (\oplus_{\alpha\in\Lambda}C_*^\alpha, d)$$

定义为 $d(a_\alpha)_\alpha = (da_\alpha)_\alpha$ 对每个 $(a_\alpha)_\alpha \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}C_*^\alpha$.

对偶地, 两个上链复形 (C^*,δ) 和 (D^*,δ) 的直和上链复形和张量积上链复形

$$(C^*,\delta)\oplus(D^*,\delta)=(C^*\oplus D^*,\delta),\quad (C^*,\delta)\otimes(D^*,\delta)=(C^*\otimes D^*,\delta)$$

定义为 $\delta(a,b)=(\delta a,\delta b)$, $\delta(a\otimes b)=(\delta a)\otimes b+(-1)^{|a|}a\otimes(\delta b)$ 对所有 $a\in C^*$ 和 $b\in D^*$.

一族上链复形 $\{(C^*_\alpha,\delta)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的直积上链复形和直和上链复形(后者看成前者的子复形)

$$\Pi_{\alpha\in\Lambda}(C^*_\alpha,\delta)=(\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha,\delta),\quad \oplus_{\alpha\in\Lambda}(C^*_\alpha,\delta)=(\oplus_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha,\delta)$$

定义为 $\delta(a_\alpha)_\alpha=(\delta a_\alpha)_\alpha$ 对每个 $(a_\alpha)_\alpha\in\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha$.

由定义

$$H_*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*,d)=\Pi_{\alpha\in\Lambda}H_*(C^\alpha_*,d),\quad H_*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*,d)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}H_*(C^\alpha_*,d),$$

$$H^*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha,\delta)=\Pi_{\alpha\in\Lambda}H^*(C^*_\alpha,\delta),\quad H^*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha,\delta)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}H^*(C^*_\alpha,\delta).$$

定理3.1.14 设链同态 $f,g\colon(C_*,d)\to(D_*,d)$ 和 $p,q\colon(U_*,d)\to(V_*,d)$ 满足 $f\simeq g$, $p\simeq q$. 则

$$f\oplus p,g\oplus q\colon(C_*\oplus D_*,d)\to(U_*\oplus V_*,d)\quad\text{和}\quad f\otimes p,g\otimes q\colon(C_*\otimes D_*,d)\to(U_*\otimes V_*,d)$$

满足 $f\oplus p\simeq g\oplus q$, $f\otimes p\simeq g\otimes q$. 由此可知如果 $(C_*,d)\simeq(D_*,d)$, $(U_*,d)\simeq(V_*,d)$, 则

$$(C_*\oplus U_*,d)\simeq(D_*\oplus V_*,d),\quad (C_*\otimes U_*,d)\simeq(C_*\otimes V_*,d).$$

如果链复形族 $\{(C^\alpha_*,d),(D^\alpha_*,d)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足 $(C^\alpha_*,d)\simeq(D^\alpha_*,d)$ 对每个 α, 则

$$\Pi_{\alpha\in\Lambda}(C^\alpha_*,d)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}(D^\alpha_*,d),\quad \oplus_{\alpha\in\Lambda}(C^\alpha_*,d)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}(D^\alpha_*,d).$$

对任何Abel群 G, 都有以 G 为系数的同调和上同调的同构

$$H_*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}H_*(C^\alpha_*;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}H_*(D^\alpha_*;G)\cong H_*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}D^\alpha_*;G),$$

$$H_*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}H_*(C^\alpha_*;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}H_*(D^\alpha_*;G)\cong H_*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}D^\alpha_*;G),$$

$$H^*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}H^*(C^\alpha_*;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}H^*(D^\alpha_*;G)\cong H^*(\Pi_{\alpha\in\Lambda}D^\alpha_*;G),$$

$$H^*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}C^\alpha_*;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}H^*(C^\alpha_*;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}H^*(D^\alpha_*;G)\cong H^*(\oplus_{\alpha\in\Lambda}D^\alpha_*;G).$$

对偶地, 以上结论对上链复形同样成立, 不再赘述.

证 设 s,t 分别为连接 f 到 g 和连接 p 到 q 的链同伦, 则 $s\oplus t$ 为连接 $f\oplus p$ 到 $g\oplus q$ 的链同伦. 记张量积复形上的微分为 $d_\otimes$. 令 $g'(x)=(-1)^{|x|}g(x)$. 则由

$$(d_\otimes)(s\otimes p)(x\otimes y)+(s\otimes p)(d_\otimes)(x\otimes y)=f(x)\otimes p(y)-g(x)\otimes p(y)$$

$$(d_\otimes)(g'\otimes t)(x\otimes y)+(g'\otimes t)(d_\otimes)(x\otimes y)=g(x)\otimes p(y)-g(x)\otimes q(y)$$

可知 $s\otimes p+g'\otimes t$ 为连接 $f\otimes p$ 到 $g\otimes q$ 的链同伦.

其它情况显然.

带系数的同调群和上同调群是不是由不带系数的同调群决定的呢? 当原复形是自由的时候, 答案是肯定的. 为此我们需要以下的定义.

定义3.1.15 对于Abel群 A 和 G, Abel群 $\mathrm{Tor}(A,G)$ 和 $\mathrm{Ext}(A,G)$ 如下定义. 称以下的Abel群的恰当序列

$$0 \xrightarrow{d_1} F_1 \xrightarrow{d_0} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

为 A 的一个自由分解, 如果 F_1 和 F_2 都是自由Abel群. 由于自由Abel群的任何子群都是自由群, 所以自由分解总是存在的. 由 A 的自由分解得到以下两个恰当序列

$$F_1{\otimes}G \xrightarrow{d_0\otimes 1_G} F_0{\otimes}G \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_G} A{\otimes}G \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\varepsilon,1_G)} \mathrm{Hom}(F_0,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_0,1_G)} \mathrm{Hom}(F_1,G).$$

则定义Tor和Ext群为能够满足以下恰当序列的群.

$$0 \to \mathrm{Tor}(A,G) \xrightarrow{d_1\otimes 1_G} F_1{\otimes}G \xrightarrow{d_0\otimes 1_G} F_0{\otimes}G \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1_G} A{\otimes}G \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\varepsilon,1_G)} \mathrm{Hom}(F_0,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_0,1_G)} \mathrm{Hom}(F_1,G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(d_1,1_G)} \mathrm{Ext}(A,G) \to 0.$$

定理3.1.16 群 $\mathrm{Tor}(A,G)$ 和 $\mathrm{Ext}(A,G)$ 的定义不依赖于 A 的自由分解的选取. 我们有

$$\mathrm{Tor}(A{\oplus}B,G) \cong \mathrm{Tor}(A,G) \oplus \mathrm{Tor}(B,G),$$

$$\mathrm{Ext}(A{\oplus}B,G) \cong \mathrm{Ext}(A,G) \oplus \mathrm{Ext}(B,G),$$

证 是同调代数理论的直接的应用, 在此省略.

定理3.1.17 (泛系数定理) 设 (C_*,d) 为自由链复形. 则对任何Abel群 G,

$$H_n(C_*;G) \cong H_n(C_*){\otimes}G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*),G),$$

$$H^n(C_*;G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(C_*),G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*),G).$$

以上的两个直和群不是自然的, 也就是说链同态导出的(上)同调群的同态不一定将直和的分量群映到分量群之中.

证 由于 C_* 是自由的, 而自由群的所有子群都是自由的, 所以由自由群的短恰当序列

$$0 \to \mathrm{ker}d_n \to C_n \to \mathrm{im}d_n \to 0$$

的分裂性可知对每个 n, 都存在自由群的直和分解 $C_n = Z_n{\oplus}U_n$ 使得 $Z_n = \mathrm{ker}d_n$, 微分的限制同态 $r_n = d_n|_{U_n}\colon U_n \to Z_{n-1}$ 为单同态, 因而 $H_n(C_*) = Z_n/U_{n+1}$.

由上可知, $\mathrm{ker}(d_n{\otimes}1_G) = Z_n{\otimes}G \oplus \mathrm{ker}(r_n{\otimes}1_G)$, $\mathrm{im}(d_{n+1}{\otimes}1_G) = d_{n+1}(U_{n+1}){\otimes}G$. 所以 $H_*(C_*;G) = (Z_n{\otimes}G)/(d_{n+1}(U_{n+1}){\otimes}G) \oplus \mathrm{ker}(r_n{\otimes}1_G)$. 由定义, 以上直和群中的第一个分量群为 $H_n(C_*){\otimes}G$, 第二个分量群为 $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*),G)$.

对偶地, $\mathrm{kerHom}(d_n,1_G) = \mathrm{Hom}(U_n,1_G){\oplus}\mathrm{kerHom}(r_{n+1},1_G)$, $\mathrm{imHom}(d_{n-1},1_G) = \mathrm{Hom}(Z_{n-1},1_G)d_{n-1} = \{\phi d_{n-1}\,|\,\phi \in \mathrm{Hom}(Z_{n-1},1_G)\}$. 所以 $H^*(C_*;G) = (\mathrm{Hom}(U_n,1_G))/(\mathrm{Hom}(Z_{n-1},1_G)d_{n-1}) \oplus \mathrm{kerHom}(r_{n+1},1_G)$. 由定义, 以上直和群中的第一个分量群为 $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*),G)$, 第二个分量群为 $\mathrm{Hom}(H_n(C_*),G)$.

习题3.1

3.1.1. 证明如果自由链复形 (C_*, d) 零调, 即 $H_*(C_*) = 0$, 则 $(C_*, d) \simeq 0$, 其中 0 为分次零群上唯一的链复形.

3.1.2. 链复形 (C_*, d) 满足 $C_1 = C_2 = \mathbb{Z}$, $C_0 = \mathbb{Z}_n$, $C_k = 0$, $k \neq 0, 1, 2$. 微分满足 $d_0(z) = 0$ 对所有 $z \in C_0$, $d_1(z) = z \operatorname{mod} n$ 对所有 $z \in C_1$, $d_2(z) = nz$ 对所有 $z \in C_2$. 如下图

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\operatorname{mod} n} \mathbb{Z}_n \to 0.$$

试证 $H_*(C_*) = 0$, 但 $(C_*, d) \not\simeq 0$.

3.1.3. 记自由Abel群 $A_n = \mathbb{Z}(x_1, \cdots, x_n)\,(n = 1, 2, \cdots, \infty)$ 的子群 $A_n^k = \{\, \Sigma_i c_i x_i \in A_n \mid \Sigma_i c_i \equiv 0 \mod k\}$. 试给出 A_n^k 作为自由群的生成元的集 (当然不唯一).

3.1.4. 证明如果 (C_*, d) 为自由链复形 (D_*, d) 的子复形满足以下性质.

(1) D_*/C_* 仍为自由群.

(2) 内射导出的同态 $i_*\colon H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ 为同构.

则内射导出的链同态 $i\colon (C_*, d) \to (D_*, d)$ 为链同伦等价.

3.1.5. 证明如果Abel群同态 $f\colon A \to B$ 为满同态, 则对任何Abel群 G, $f \otimes 1_G\colon A \otimes G \to B \otimes G$ 为满同态, $\mathrm{Hom}(f, 1_G)\colon \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 为单同态. 举例Abel群同态 f 为单同态, 但对Abel群 G, $f \otimes 1_G$ 不是单同态, $\mathrm{Hom}(f, 1_G)$ 不是满同态.

3.1.6. 证明如果短恰当序列 $0 \to C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \to 0$ 满足存在 $p\colon D \to C$ 使得 $pi = 1_C$, 或者存在 $q\colon E \to D$ 使得 $jq = 1_E$, 则短恰当序列分裂.

3.1.7. Abel群 A 的元 a 称为挠元, 如果存在非零整数 n 使得 $na = 0$. 验证 A 的所有挠元构成 A 的子群, 称为 A 的挠群. 如果 A 的挠群为零群, 则称 A 为无挠群, 等价于对于任何 $0 \neq g \in G$ 和 $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $ng \neq 0$. 证明有限生成的无挠群一定是自由群. 举例一个无挠群, 但不是自由群.

3.1.8. 计算 $\mathbb{Z} \otimes G$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, 其中 G 为任意Abel群.

3.1.9. 计算 $\mathbb{Z}_m \otimes G$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, G)$, 其中 G 为任意Abel群. 特别地, 计算 $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$.

3.1.10. 计算 $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z})$, $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z})$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, A)$, 其中 A 为任意Abel群.

3.1.11. 计算 $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, G)$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, G)$. 特别地, 计算 $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$.

3.1.12. 证明对于有限型自由链复形 (C_*, d) (每个 C_n 都是有限生成的自由Abel群)和任意Abel群 G, 我们有上链复形的同构 $(\mathrm{Hom}(C_*, G), \mathrm{Hom}(d, 1_G)) \cong (C^* \otimes G, \delta \otimes 1_G)$.

3.2 单纯同调论

单纯同调群不论是链复形的构造还是同调群的定义都是Poncarè发现的, 它标志着代数拓扑的产生.

定义3.2.1 单纯复形 K 的单纯链复形 $(C_*(K),d)$ 如下定义. 每个 $C_n(K)$ 为 K 的所有 n-单形生成的自由Abel群, 如果没有 n-单形就是零群. 记形式单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$ 在 $C_k(K)$ 中对应的生成元为 $\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor$, 则对于 $(0,\cdots,k)$ 的一个置换 π, 规定 $\lfloor v_{\pi(0)},\cdots,v_{\pi(k)}\rfloor=\tau(\pi)\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor$, 其中 $\tau(\pi)$ 为置换 π 的符号. 这个规定使得我们避免了先在顶点集上给一个全序才能定义微分的麻烦. 微分定义为 $d\lfloor v_0\rfloor=0$, 对于 $k>0$,

$$d\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor=\Sigma_{i=0}^k\,(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_k\rfloor,$$

其中 $\widehat{v}$ 表示将符号 v 从公式中删去. 由于

$$\begin{aligned}
&d^2\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor\\
=\;&d(\Sigma_{i=0}^k\,(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,v_k\rfloor)\\
=\;&\Sigma_{s<i}^k\,(-1)^{i+s}\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_s},\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,v_k\rfloor+\Sigma_{i<t}\,(-1)^{i+t-1}\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,\widehat{v_t},\cdots,v_k\rfloor\\
=\;&0,
\end{aligned}$$

所以 $(C_*(K),d)$ 为链复形. 定义 K 的单纯同调群为

$$H_*(K)=\amalg_{n=0}^\infty H_n(K),\quad H_n(K)=H_n(C_*(K),d).$$

对于Abel群 G, 定义 K 的以 G 为系数的单纯同调群和单纯上同调群为

$$H_*(K;G)=H_*(C_*(K);G),\quad H^*(K;G)=H^*(C_*(K);G).$$

定义 K 的约化单纯链复形 $(\widetilde{C}_*(K),d)$ 如下. $\widetilde{C}_*(K)=\amalg_{n=-1}^\infty\widetilde{C}_n(K)$, 其中对于 $n\geqslant 0$, $\widetilde{C}_n(K)=C_n(K)$ 同上. $C_{-1}(K)$ 为由空集对应的空单形 $\emptyset$ 生成的自由Abel群, 其生成元记为 $\lfloor\,\rfloor$. 微分规定为 $d\lfloor v\rfloor=\lfloor\,\rfloor$ 对所有顶点 v, $d\lfloor\,\rfloor=0$. 对于 $n>0$, 微分 d 同非约化情形. 定义 K 的约化单纯同调群为

$$\widetilde{H}_*(K)=\amalg_{n=0}^\infty\widetilde{H}_n(K),\quad \widetilde{H}_n(K)=H_n(\widetilde{C}_*(K),d).$$

对于Abel群 G, 定义 K 的以 G 为系数群的约化单纯同调群和约化单纯上同调群为

$$\widetilde{H}_*(K;G)=H_*(\widetilde{C}_*(K);G),\quad \widetilde{H}^*(K;G)=H^*(\widetilde{C}_*(K);G).$$

单纯复形偶 (K,L) 的相对链复形和约化相对链复形都定义为商复形

$$(C_*(K,L),d)=(C_*(K)/C_*(L),d)=(\widetilde{C}_*(K)/\widetilde{C}_*(L),d)=(\widetilde{C}_*(K,L),d).$$

等价地, $C_n(K,L)$ 为由所有 $K\backslash L$ 中的 n-单形生成的自由Abel群, 因而 $C_*(K,L)$ 为 $C_*(K)$ 的子群, 但是由于微分不一样, 所以不是子复形.

单纯复形偶的 (K,L) 相对单纯同调群和约化相对单纯同调群都定义为

$$H_*(K,L)=H_*(C_*(K,L),d)=H_*(\widetilde{C}_*(K,L),d)=\widetilde{H}_*(K,L).$$

对于Abel群 G, 定义 (K,L) 的以 G 为系数群的约化相对单纯同调群和约化相对单纯上同调群为

$$H_*(K,L;G)=\widetilde{H}_*(K,L;G)=H_*(C_*(K,L);G),$$

$$H^*(K,L;G)=\widetilde{H}^*(K,L;G)=H^*(C_*(K,L);G).$$

需要注意的是微分 d 的表达式不是唯一的. 比如以下两公式

$$d\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor=\Sigma_{i=0}^k(-1)^{i+1}\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_k\rfloor,$$

$$d\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor=\Sigma_{i=0}^k(-1)^{k-i}\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_k\rfloor$$

都是微分, 并且有同构的同调群. 在理论证明时, 有时会采用不同的公式来证明不同的问题. 但是在实际计算中, 总是取一个固定的公式.

定理3.2.2 单纯映射 $f\colon K\to U$ 导出链同态(仍记为) $f\colon(C_*(K),d)\to(C_*(U),d)$ 定义为

$$f(\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor)=\lfloor f(v_0),\cdots,f(v_k)\rfloor,$$

这里规定 $\lfloor f(v_0),\cdots,f(v_k)\rfloor=0$ 如果顶点出现重复. 因而对任何Abel群 G, 有导出的(上)同调群同态

$$f_*\colon H_*(K;G)\to H_*(U;G),\quad f^*\colon H^*(U;G)\to H^*(K;G)$$

满足以下性质.

(1) $(1_K)_*=1_{H_*(K;G)}$, $(1_K)^*=1_{H^*(K;G)}$.

(2) $(fg)_*=f_*g_*$, $(fg)^*=g^*f^*$.

单纯偶映射 $f\colon(K,L)\to(U,V)$ 导出相对链复形的链同态 $f\colon(C_*(K,L),d)\to(C_*(U,V),d)$ 定义为

$$f(\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor)=\lfloor f(v_0),\cdots,f(v_k)\rfloor.$$

其中 $\{v_0,\cdots,v_k\}$ 取遍所有 $K\backslash L$ (并不是单纯复形) 中的单形, 因而 $\lfloor f(v_0),\cdots,f(v_k)\rfloor=0$ 如果顶点有重复或者 $\{f(v_0),\cdots,f(v_k)\}$ 为 V 的单形. 对任何Abel群 G, 有导出的(上)同调群同态

$$f_*\colon H_*(K,L;G)\to H_*(U,V;G),\quad f^*\colon H^*(U,V;G)\to H^*(K,L;G)$$

满足以下性质.

(1) $(1_{(K,L)})_*=1_{H_*(K,L;G)}$, $(1_{(K,L)})^*=1_{H^*(K,L;G)}$.

(2) $(fg)_*=f_*g_*$, $(fg)^*=g^*f^*$.

以上结论对约化(上)同调群也成立.

证 定理3.1.4的推论.

定理3.2.3 对于单纯复形偶 (K,L) 和任何系数群 G, 存在带系数的(上)同调群的连接同态

$$\partial_*\colon H_*(K,L;G)\to\Sigma^{-1}H_*(L;G)\quad 和\quad \partial^*\colon H^*(L;G)\to\Sigma H^*(K,L;G)$$

满足以下长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(L;G)\xrightarrow{i_n}H_n(K;G)\xrightarrow{j_n}H_n(K,L;G)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(L;G)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots,$$

$$\cdots\xrightarrow{\partial^{n-1}}H^n(K,L;G)\xrightarrow{j^n}H^n(K;G)\xrightarrow{i^n}H^n(L;G)\xrightarrow{\partial^n}H^{n+1}(K,L;G)\xrightarrow{i^{n+1}}\cdots,$$

其中 i_*, i^* 由内射 $i\colon L \to K$ 导出, j_*, j^* 由内射 $j\colon (K,\emptyset) \to (K,L)$ 导出.

以上恰当序列是自然的, 也就是说对于单纯偶映射 $f\colon (K,L) \to (U,V)$, 记 $f\colon (C_*(K),d) \to (C_*(U),d)$, $\widetilde{f}\colon (C_*(K,L),d) \to (C_*(U,V),d)$, $\overline{f}\colon (C_*(L),d) \to (C_*(V),d)$ 为导出的链同态, 则我们有以下带系数(上)同调群的长恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(L;G) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & H_n(K;G) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "f_n"'] & H_n(K,L;G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\widetilde{f}_n"'] & H_{n-1}(L;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(V;G) \arrow[r, "i_n"] & H_n(U;G) \arrow[r, "j_n"] & H_n(U,V;G) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(V;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & H^n(U,V;G) \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "\bar{f}^n"] & H^n(U;G) \arrow[r, "i^n"] \arrow[d, "f^n"] & H^n(V;G) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\widetilde{f}^n"] & H^{n+1}(U,V;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] \arrow[d, "\bar{f}^n"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & H^n(K,L;G) \arrow[r, "j^n"] & H^n(K;G) \arrow[r, "i^n"] & H^n(L;G) \arrow[r, "\partial^n"] & H^{n+1}(K,L;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中三个由 $\bar{f}, f, \widetilde{f}$ 导出的(上)同调群同态中有两个是同构, 则另一个也为同构.

以上结论对约化(上)同调群也成立.

证 注意到 $C_*(K,L)$ 仍为自由群, 所以是取定理3.1.8中 $(C_*,d) = (C_*(L),d)$, $(D_*,d) = (C_*(K),d)$ 的直接应用.

定义3.2.4 对于单纯复形 K 和 L, 定义拓扑空间 $K\times L$ 的单纯剖分, 同时也定义了乘积单纯复形 $K\times L$ 如下. 首先分别给 K 的顶点集 V 和 L 的顶点集 W 一个全序. 则 $K\times L$ 的顶点集为 $V\times W$, 全序定义为 $(v,w) < (v',w')$ 如果 $v < v'$, 或者 $v = v'$ 但 $w < w'$. 称保持顶点顺序的形式单形为保序单形. 则 $K\times L$ 的所有保序单形如下定义. 设 $\{v_0,\cdots,v_m\}$ 为 K 的保序单形, $\{w_0,\cdots,w_n\}$ 为 L 的保序单形, 则 $\{u_0,\cdots,u_{m+n}\}$ 为 $K\times L$ 的单形, 其中 $u_k = (v_{i_k}, w_{j_k})$ 满足 $i_0 = 0$, $j_0 = 0$, 对每个 $k = 0,1,\cdots,m+n-1$, 或者 $i_{k+1} = i_k$, $j_{k+1} = j_k+1$, 或者 $i_{k+1} = i_k+1$, $j_{k+1} = j_k$.

对于单纯复形 $I = \Delta^1$ (标准 2-单形), $I\times K$ 的所有保序单形如下

$$\{(0,v_0),\cdots,(0,v_{s-1}),(0,v_s),(1,v_s),(1,v_{s+1}),\cdots,(1,v_k)\}, s = 0,\cdots,k,$$

其中 $\{v_0,\cdots,v_k\}$ 为 K 的保序单形.

两个单纯映射 $f,g\colon K \to L$ 称为单纯同伦的, 如果存在单纯映射 $H\colon I\times K \to L$ 满足以下性质. 对所有 K 的保序单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$, 都有

$$H(\{(0,v_0),\cdots,(0,v_k)\}) = \{f(v_0),\cdots,f(v_k)\}, \quad H(\{(1,v_0),\cdots,(1,v_k)\}) = \{g(v_0),\cdots,g(v_k)\}.$$

称 H 为连接 f 到 g 的单纯同伦.

两个单纯映射 $f,g\colon K \to L$ 称为PL同伦的, 如果分别存在 K,L 的加细复形 K',L' 和 f,g 的加细单纯映射 $f',g'\colon K' \to L'$ (作为拓扑空间之间的映射 $f = f'$, $g = g'$) 满足 f' 和 g' 单纯同伦.

定理3.2.5 同伦的单纯映射导出相同的(约化)单纯(上)同调群(系数群任意)的同态.

证 对于连接 f 到 g 的单纯同伦 H, 定义链同伦 s 如下. 对任何 K 的保序单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$, 令

$$s\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor = \Sigma_{i=0}^{k}(-1)^i\lfloor H(0,v_0),H(0,v_1),\cdots,H(0,v_i),H(1,v_i),H(1,v_{i+1}),\cdots,H(1,v_k)\rfloor.$$

则

$$
\begin{aligned}
& ds\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor \\
= \;& d(\Sigma_{i=0}^{k}\,(-1)^i\lfloor H(0,v_0),\cdots,H(0,v_i),H(1,v_i),\cdots,H(1,v_k)\rfloor) \\
= \;& \Sigma_{s<i}\;(-1)^{i+s}\,\lfloor H(0,(v_0),\cdots,\widehat{H(0,v_s)},\cdots,H(0,v_s),H(1,v_s),\cdots,H(1,v_k)\rfloor \\
& +\Sigma_{s=0}^{k}\,\lfloor H(0,v_0),\cdots,H(0,v_{s-1}),H(1,v_s),\cdots,H(1,(v_k)\rfloor \\
& -\Sigma_{s=0}^{k}\,\lfloor H(0,v_0),\cdots,H(0,v_s),H(1,v_{s+1}),\cdots,H(1,(v_k)\rfloor \\
& -\Sigma_{i<t}\;(-1)^{i+t}\,\lfloor H(0,(v_0),\cdots,H(0,v_i),H(1,v_i),\cdots,\widehat{H(1,v_t)},\cdots,H(1,v_k)\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& sd\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor \\
= \;& s(\Sigma_{i=0}^{k}\,(-1)^i\lfloor H(0,v_0),\cdots,H(0,v_i),H(1,v_i),\cdots,H(1,v_k)\rfloor) \\
= \;& \Sigma_{s<i}\;(-1)^{i+s}\,\lfloor H(0,(v_0),\cdots,\widehat{H(0,v_s)},\cdots,H(0,v_s),H(1,v_s),\cdots,H(1,v_k)\rfloor \\
& -\Sigma_{i<t}\;(-1)^{i+t}\,\lfloor H(0,(v_0),\cdots,H(0,v_i),H(1,v_i),\cdots,\widehat{H(1,v_t)},\cdots,H(1,v_k)\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (ds+sd)\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor \\
= \;& \lfloor g(v_0),\cdots,g(v_k)\rfloor-\lfloor f(v_0),\cdots,f(v_k)\rfloor
\end{aligned}
$$

所以 f 和 g 导出的单纯链复形的链同态也是同伦的. 由定理3.1.12, 定理成立.

定义3.2.6 一个 n维伪流形 M 为一紧的 n维单纯复形满足以下条件. M 由规则相处的 n 单形的并构成, M 的每一个 $(n-1)$-单形都只有不超过两个 n-单形以它为面. 记 ∂M 由 M 的所有只有一个 n-单形以其为面的 $(n-1)$-单形并成. 特别地, 规定所有 0维单纯复形为伪流形.

定理3.2.7 设 M 为 n 维连通伪流形, 则 $H_n(M,\partial M)=\mathbb{Z}$ 如果 M 可定向; $H_n(M,\partial M)=0$ 如果 M 不可定向.

当 M 可定向时, $H_n(M,\partial M)$ 的生成元由以下元 $\sigma_1+\cdots+\sigma_k$ 表示, 其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 为 M 的所有正向 n-单形.

证 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 为 M 的所有 n-单形, $\tau_1,\cdots,\tau_l$ 为 $M\backslash\partial M$ 的所有 $(n-1)$-单形. 对于 $C_n(M,\partial M)$ 中的元 $x=n_1\sigma_1+\cdots+n_k\sigma_k$, 我们有 $dx=m_1\tau_1+\cdots+m_l\tau_l$, 其中 $m_i=\pm n_s\pm n_t$, 以 τ_i 为面的两个 n-单形为 σ_s 和 σ_t. 所以如果 x 为循环元, 则所有的 $n_i=\pm n_j$. 显然当 M 可定向时, x 为循环元, 当且仅当 $n_1=\cdots=n_k$, 其中 σ_i 都是正向形式单形; 当 M 不可定向时, x 为循环元, 当且仅当 $n_1=\cdots=n_k=0$.

定义3.2.8 单纯复形 K 的子复形 B^n_α 称为复形的一个 n-块, 如果 B^n_α 为一个 n维伪流形并且相对同调群满足 $H_n(B^n_\alpha,\partial B^n_\alpha)=\mathbb{Z}$, $H_k(B^n_\alpha,\partial B^n_\alpha)=0$ 如果 $k\neq n$.

单纯复形偶 (K,L) 的一个块剖分 $B=\{B^n_\alpha\}$ 是由 K 的一些块构成的集合, 满足以下条件.

(1) $K\setminus L=\amalg_{B^n_\alpha\in B}\,(B^n_\alpha\backslash\partial B^n_\alpha)$, 这蕴含对于 $\alpha\neq\beta$, $(B^n_\alpha\backslash\partial B^n_\alpha)\cap(B^m_\beta\backslash\partial B^m_\beta)=\emptyset$.

(2) 对于维数 >0 的每一个块 B^n_α, 作为集合的 ∂B^n_α 为有限个 $(n-1)$ 块和 L 的集合并, 这些 $(n-1)$ 块以及它们的面都称为 B^n_α 的真面. 每个块都是它自己的面.

如果 B 的每一个 n-块 B_α^n 都满足 $B_\alpha^n/\partial B_\alpha^n\cong S^n$, 等价地, $B_\alpha^n\backslash\partial B_\alpha^n$ 与开球 $D^n\backslash S^{n-1}$ 同胚, 则称 B 为 K 的一个球形块剖分.

单纯复形 K 的一个(球形)块剖分就是单纯复形偶 $(K,\emptyset)$ 的一个(球形)块剖分.

不难发现块剖分与CW复形的胞腔结构的相似性, 而球形剖分就是一个胞腔结构.

定理3.2.9 设 $B=\{B_\alpha^n\}$ 为单纯复形偶 (K,L) 的一个块剖分. 则对于每个块 B_α^n, 记 $H_n(B_\alpha^n,\partial B_\alpha^n)$ 的生成元的代表元为 b_α^n, 即取定块的定向后, b_α^n 为所有正向单形的和. 定义 $C_n(B)$ 为单纯链群 $C_n(K,L)$ 的子群, 由所有 n-块对应的 b_α^n 生成. 则 $(C_*(B),d)$ 为相对单纯链复形 $(C_*(K,L),d)$ 的子复形并且满足内射导出同调群的同态

$$i_*\colon H_*(B;G)\to H_*(K,L;G)\quad 和 \quad i^*\colon H^*(K,L;G)\to H^*(B;G)$$

都是同构, 这里系数群 G 任意. $(C_*(B),d)$ 称为块剖分 B 的块链复形.

证 记 F_n 为所有 n 块中的 n-单形构成的集合.

设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 为 F_n 的所有 n-单形, $\tau_1,\cdots,\tau_l$ 为 F_{n-1} 的所有 $(n-1)$-单形. 对于 $\mathbb{Z}(F_n)\cap\ker d_n$ 中的元 $x=n_1\sigma_1+\cdots+n_k\sigma_k$, 我们有 $dx=m_1\tau_1+\cdots+m_l\tau_l$, 其中 $m_i=\pm n_s\pm n_t$, 以 τ_i 为面的两个 n-单形为 σ_s 和 σ_t. 所以如果 x 为循环元, 则 $n_i=n_j$, 如果 σ_i 和 σ_j 为某个 n 块中相邻的两个 n 单形. 这说明 x 为形如 b_α^n 的元的线性组合, 即 $\mathbb{Z}(F_n)\cap\mathrm{ker}d_n=C_n(B)$. 而 $dx\in\mathbb{Z}(F_{n-1})\cap\mathrm{ker}d_{n-1}=C_{n-1}(B)$. 这说明 $(C_*(B),d)$ 为 $(C_*(K),d)$ 的子复形.

对于 $x=n_1\sigma_1+\cdots+n_t\sigma_t\in\mathrm{ker}d_n$, 其中 σ_i 为形式单形, 如果 $x\notin\mathbb{Z}(F_n)$, 不妨假设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$, $s\leqslant t$, 为某个 B_α^{n+k}, $k>0$, 的 n-单形, 其余的 σ_i 都不是 B_α^{n+k} 的单形, 则 $y_1=n_1\sigma_1+\cdots+n_s\sigma_s$ 为 $C_n(B_\alpha^{n+k},\partial B_\alpha^{n+k})$ 中的边缘元. 由于 $H_n(B_\alpha^{n+k},\partial B_\alpha^{n+k})=0$, 所以存在 $z_1\in C_{n+k}(B_\alpha^{n+k},\partial B_\alpha^{n+1})$ 使得 $d_{n+1}(z_1)=y_1+x_1'$, 其中 x_1' 为 ∂B_α^{n+k} 中的 n-单形的线性组合. 令 $x_1=x-y_1-x_1'$. 则 x_1 满足 $d_{n+1}(z_1)=x-x_1$, 但 x_1 由 B_α^{n+k} 之外的 n 单形的线性组合. 如果 x_1 还不在 $\mathbb{Z}(F_n)$ 中, 则把 x 替换成 x_1, 重复以上过程, 我们最终可以找到 z_k 和 x_k, 满足 $dz_k=x-x_k$ 并且 $x_k\in\mathbb{Z}(F_n)\cap\mathrm{ker}d_n$. 于是我们有以下结论：如果 $x\in\mathrm{ker}d_n$, 则存在 $z\in C_{n+1}(K,L)$ 和 $y\in C_n(B)$ 使得 $d_{n+1}(z)=x-y$. 类似地可以证明, 如果 $dx\in\mathbb{Z}(F_n)$, 则存在 $z\in C_{n+2}(K,L)$ 和 $y\in C_{n+1}(B)$ 使得 $d_{n+2}(z)=x-y$. 这说明内射导出的同调群同态 $H_*(C_*(B))\to H_*(C_*(K))$ 为同构, 而显然 $C_*(K)/C_*(B)$ 为自由群, 所以内射导出的链同态 $i\colon(C_*(B),d)\to(C_*(K),d)$ 为链同伦等价. 由定理3.1.12可知定理成立.

定义3.2.10 设 K' 为单纯复形 K 的一个加细. 该加细的块剖分 B 是加细复形 K' 上的一个球形剖分, 定义如下.

对于 K 的非空单形 σ, 设 σ 由 K' 的与其维数相同的单形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 并成, 记 B_σ 为 K' 的由 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 并成的子复形. 显然 $(B_\alpha,\partial B_\sigma)$ 为 $|\sigma|$维带边流形, 与 $(S^{|\sigma|},\partial S^{|\sigma|})$ 同胚. 所以我们有球形剖分 $B=\{B_\sigma\}_{\sigma\in K}$. 由 σ 的定向自然决定了 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 的定向. 具体地过程如下. 设 σ 的一个形式单形为 $\{v_0,,\cdots,v_n\}$, σ_i 的一个形式单形为 $\{u_0,\cdots,u_n\}$. 由于每个 u_j 都是局部线性空间 σ 中的点, 所以有一个局部线性同伦 $H\colon I\times\sigma_i\to\sigma$ 定义为 $H(s,t_0u_0+\cdots+t_nu_n)=((1-s)t_0u_0+st_0v_0))+\cdots+(1-s)t_nu_n+st_nv_n)$. 则两个形式单形定向相同, 如果 $H(s,-)$ 对所有 $s\in I$ 都为同胚; 否则定向相反. 这个法则叫同痕法则. 由同痕法则, 块链复形 $(C_*(B),d)$ 中 $H_{|\sigma|}(B_\sigma,\partial B_\sigma)$ 的生成元的代表元为 $b_\sigma=\sigma_0+\cdots+\sigma_k$, 其中每个 σ_k 为正向单形.

定理3.2.11 单纯复形 K 的加细块剖分 B 满足 $(C_*(B),d) \cong (C_*(K),d)$. 所以 K 和它的任何加细复形 K' 有相同的(约化)同调群和(约化)上同调群, 其中系数群任意.

证 由于 σ 在 $B_*(K)$ 中对应的生成元为 $\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor$, 记 $b_\sigma = \lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor_B$. 下面我们证明

$$d\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor_B = \Sigma_{i=0}^n(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n\rfloor_B.$$

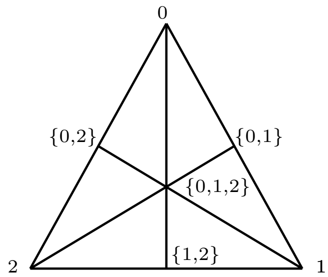
假设形式单形 $\{u_0,\cdots,u_n\} \in B_\sigma$ 并且与形式单形 $\{v_0,\cdots,v_n\}$ 定向相同, 而且形式单形 $\{u_0,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_n\} \in B_{\{v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n\}}$, 则 $\{u_0,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_n\}$ 与形式单形 $\{v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n\}$ 也定向相同. 这说明以上等式成立, 因而块链复形 $(C_*(B),d)$ 与 $(C_*(K),d)$ 同构. 所以定理成立.

我们经常要用到单纯复形的重心重分, 该作用的特点就是让重分后的复形的相邻的顶点间的距离同时缩短, 而且单纯映射自然也对应重分的映射.

定义3.2.12 单纯复形 K 的重心重分复形 $K^{(1)}$ 如下定义. $K^{(1)}$ 的顶点集为 K. $K^{(1)}$ 的所有 k-单形形如 $\{\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}$, 其中每个 σ_{i-1} 都是 σ_i 的真子集. 归纳地定义 n 重重心重分为 $K^{(n)} = (K^{(n-1)})^{(1)}$.

设 $f\colon K \to L$ 为单纯映射. 则重心重分映射 $f^{(1)}\colon K^{(1)} \to L^{(1)}$ 定义为 $f^{(1)}(\sigma) = f(\sigma)$ (重复顶点去掉) 对所有 $\sigma \in K$ (这里 K 是 $K^{(1)}$ 的顶点集). 显然作为拓扑空间之间的映射, $f^{(1)}$ 和 f 是一样的. 归纳地定义 n 重重心重分映射为 $f^{(n)} = (f^{(n-1)})^{(1)}$.

下图画出了标准 2-单形 Δ^2 重心重分后的单形.



定理3.2.13 带系数的(上)同调群为同伦不变量, 即同伦型的单纯复形有相同的(上)同调群.

证 设 $f,g\colon K \to L$ 为单纯复形间的同伦的映射, 由单纯逼近定理, 通过对 K 和 L 同时加细, 可以假设 f,g 为单纯映射. 对连接同伦作多重重心重分可知, 存在 $r > 0$ 和单纯映射 $H'\colon I(s)\times K^{(r)} \to L^{(r)}$ 为连接 $f^{(r)}$ 到 $g^{(r)}$ 的单纯映射, 其中 $I(s)$ 为把 I 分成 s 段的加细, 即 $I(s)$ 有顶点 $0,\frac{1}{s},\frac{2}{s},\cdots,\frac{s-1}{s},1$. 记 H' 在 $\frac{i}{s}\times K^{(r)}$ 上的限制为 h_i. 则 $h_0 = f^{(r)}$, $h_s = g^{(r)}$. 而且 h_i 和 h_{i+1} 单纯同伦. 所以 $f^{(r)} \simeq g^{(r)}$. 这就说明 f 和 g 导出相同的(上)同调群同态. 所以(上)同调群为同伦不变量.

定义3.2.14 单纯复形 K 的重心重分的块剖分记为 $S_K = \{S_\sigma\}_{\sigma\in K}$. 我们从不考虑 $K^{(1)}$ 的形式单形, 因为 $K^{(1)}$ 的顶点集有包含关系, 所以所有的单形有唯一的标准形式 $\{\sigma_0,\cdots,\sigma_k\}$, 其中每个 σ_{i-1} 都是 σ_i 的真子集, 所以我们总是用同一个符号既表示 $K^{(1)}$ 的标准形式的单形, 也表示它对应的 $C_*(K^{(1)})$ 的生成元.

对于 K 的形式单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$, 记 $K^{(1)}$ 的标准形式的 n-单形如下

$$\langle\overline{v}_0,\overline{v}_1,\cdots,\overline{v}_k\rangle = \{\,\{v_0\},\{v_0,v_1\},\cdots,\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}\,\}.$$

注意, 对于 $(0,1,\cdots,n)$ 的置换排序 $(i_0,i_1,\cdots,i_k)$, $\langle\overline{v}_0,\overline{v}_1,\cdots,\overline{v}_k\rangle$ 和 $\langle\overline{v}_{i_0},\overline{v}_{i_1},\cdots,\overline{v}_{i_k}\rangle$ 代表 $K^{(1)}$ 的不同的单形! 由定义, $H_n(S_\sigma,\partial S_\sigma)$ 的生成元的代表元为

$$s_{\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor}=\Sigma_{(i_0,\cdots,i_k)}\,\tau(i_0,\cdots,i_k)\langle\overline{v}_{i_0},\cdots,\overline{v}_{i_k}\rangle,$$

其中 $(i_0,\cdots,i_k)$ 取遍 $(0,\cdots,n)$ 的置换排列, $\tau(-)$ 为置换的符号. 显然 $s_{\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor}=\tau(i_0,\cdots,i_k)s_{\lfloor v_{i_0},\cdots,v_{i_k}\rfloor}$. 由此显然有 $ds_{\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor}=\Sigma_{i=0}^k(-1)^i s_{\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},v_k\rfloor}$ 和链同构 $(C_*(S_K),d)\cong(C_*(K),d)$.

对于 n 维单纯闭流形 M, 它的重心重分有补块剖分 $S'_M=\{S'_\sigma\}_{\sigma\in K}$ 定义如下. 设 $\sigma=\{v_0,\cdots,v_k\}$, $\{v_0,\cdots,v_k,,u_1,\cdots,u_{n-k}\}\in K$, 记 $K^{(1)}$ 的 $(n-k)$-单形如下

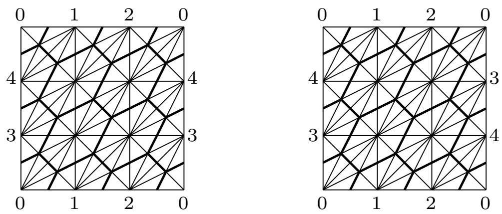
$$\langle v_0,\cdots,v_k|u_1,\cdots,u_{n-k}\rangle=\{\,\{v_0,\cdots,v_k\},\{v_0,\cdots,v_k,u_1\},\cdots,\{v_0,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_{n-k-1}\}\,\}$$

注意以上单形与 $v_0,\cdots,v_k$ 的排列顺序无关, 但却与 $u_1,\cdots,u_{n-k}$ 的排列顺序有关! S'_σ 由所有以上规则相处的 $(n-k)$-单形并成. 由于 M 为流形, 所以 S'_σ 为 σ 的补空间(局部地看成欧式空间), 因而 $S'_\sigma\backslash\partial S'_\sigma$ 同胚于 $D^{n-|\sigma|}\backslash S^{n-|\sigma|-1}$. 所以 S'_M 为球状块剖分. 由定义 $H_{n-|\sigma|}(S_\sigma,\partial S_\sigma)$ 的生成元由形式如下

$$s_{\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor}=\sum\pm\langle v_0,\cdots,v_k|u_1,\cdots,u_{n-k}\rangle,$$

其中和式中的 $u_1,\cdots,u_{n-k}$ 取遍所有满足 $\{v_0,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_{n-k}\}$ 为 M 的 n-单形的顶点有序序列, 也就是说如果 $u_1,\cdots,u_{n-k}$ 出现在和式中, 则任何置换排列 $u_{i_0},\cdots,u_{i_{n-k}}$ 也出现在和式中, 而且不同的排列代表不同的项. 如果 $\{v_0,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_{n-k}\}$ 为正向单形, 则符号 $\pm$ 为正, 如果 $\{v_0,\cdots,v_k,\,u_1,\cdots,u_{n-k}\}$ 为负向单形, 则符号 $\pm$ 为负.

下图左右分别示意了环面和Klein瓶的重心重分和粗线画出的补块剖分,



由图不难看出两个补块剖分的块链复形作为分次Abel群是完全同构的, 但是微分却不同, 所以一个满足以下对偶定理, 另一个则不满足.

定理3.2.15 (Poncaré对偶定理) 对于连通的可定向 n 维单纯闭流形 M, $H_i(M)\cong H^{n-i}(M)$.

证 考虑 M 的单纯上链复形 $(C^*(M),d)=(\mathrm{Hom}(C_*(M),\mathbb{Z}),\mathrm{Hom}(d,1_{\mathbb{Z}}))$. 由于单纯复形是有限的, 所以 $C_k(M)$ 和 $C^k(M)$ 存在对偶基. 记 $C_k(M)$ 的生成元 $\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor$ 的对偶元为 $\lceil v_0,\cdots,v_k\rceil$. 则对偶元仍满足 $\lceil v_0,\cdots,v_k\rceil=\tau(i_0,\cdots,i_k)\lceil v_{i_0},\cdots,v_{i_k}\rceil$. 由定义,

$$\delta\lceil v_0,\cdots,v_k\rceil=\Sigma_v\,\lceil v,v_0,\cdots,v_k\rceil,$$

其中 v 取遍 M 的所有顶点, $\lceil v,v_0,\cdots,v_k\rceil=0$ 如果出现重复顶点或者 $\{v,v_0,\cdots,v_k\}$ 不是 M 的单形.

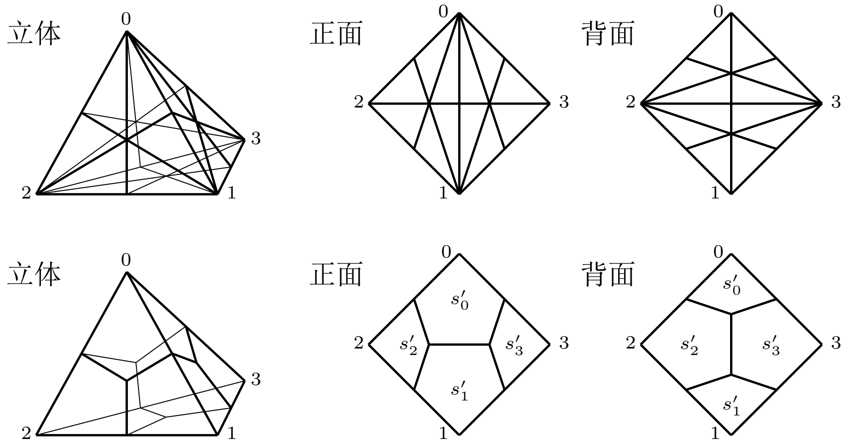
现考虑 $ds_{\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor}$ 中的项. $c=\langle v_0,\cdots,v_k|u_1,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_{n-k}\rangle$ 为 $d\langle v_0,\cdots,v_k|u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_{n-k}\rangle$ 中的一项. 而存在唯一的 n 单形 $\{v_0,\cdots,v_k,u_1,\cdots,v_i,\cdots,u_{n-k}\}$ 以单形 $\{v_0,\cdots,v_k,u_1,\cdots,\widehat{u_i},\cdots,u_{n-k}\}$ 为面, 于是 c 也

为 $d\lfloor v_0,\cdots,v_k|u_1,\cdots,v_i,\cdots,u_{n-k}\rfloor$ 中的一项. 而且和前面的一项符号相反. 这说明 $ds_{\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor}$ 中只剩下形如 $(-1)^{k+1}\{\{v_0,\cdots v_k,u_1\},\{v_0,\cdots,v_k,u_1,u_2\},\cdots,\{v_0,\cdots,v_k,u_1,u_2,\cdots,u_{n-k}\}\}$ 的项. 因此我们有

$$ds_{\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor}=\sum\pm\langle u_1,v_0,\cdots,v_k|u_2,\cdots,u_{n-k}\rangle=\sum s_{\lfloor v,v_0,\cdots,v_n\rfloor}.$$

这说明对应 $s_{\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor}\to\lceil v_0,\cdots,v_n\rceil$ 导出由 $(C_*(S'_M),d)$ 到 $(C^{n-*}(M),\delta)$ 的链同构. 定理成立.

下图示意了当 M 为标准 3 单形的边 $\partial\Delta^3$ 时, $M^{(1)}$ 和 S'_M 的关系.



其中块s'_i,s'_j 的交集(折线段)为 $s'_{i,j}$, 块s'_i,s'_j,s'_k 的交集(重心点)为 $s'_{i,j,k}$.

对于拓扑空间偶 (X,A), 自然有补(余)空间 $A^c=X\backslash A$ 和商空间 X/A. 而单纯复形偶就没有对应的概念. 可在实行了重心重分后, 这些概念就有了.

定义3.2.16 对于单纯复形偶 (K,L), 定义 L 相对于 K 的补(余)复形 $L^c=(K\backslash L)'$ 为 $K^{(1)}$ 的如下定义的子复形

$$L^c=(K\backslash L)'=\{\sigma\backslash\tau\mid\sigma\in K^{(1)},\ \tau\in L^{(1)},\ \tau\subset\sigma\}.$$

定义商链复形 $(K/L)'$ 如下. 在 $K^{(1)}$ 的顶点集 K 上定义等价关系 $\sim$ 为所有子集 L 中的顶点全都等价, 其余顶点只和自己等价. 记 L 在 $K^{(1)}/_\sim$ 中对应的等价类记为 $*$. 则 $(K/L)'$ 的顶点集为 $K^{(1)}/_\sim$, $(K/L)'$ 的单形由 $K^{(1)}$ 的单形得到的商单形构成. 具体地, 设 $K^{(1)}$ 的标准形式的单形为 $\{\sigma_0,\cdots,\sigma_k\}$. 如果 $\sigma_0\notin L$, 于是所有的 $\sigma_i\notin L$, 规定 $\{\sigma_0,\cdots,\sigma_k\}$ 也是 $(K/L)'$ 的单形. 如果 $\sigma_i\in L$, 但 $\sigma_{i+1}\notin L$, 于是所有 $\sigma_{i+1+s}\notin L$, 规定 $\{*,\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_k\}$ 为 $(K/L)'$ 的单形.

不难看出链复形 $(K\backslash L)'$ 作为拓扑空间为拓扑空间 $K^{(1)}\backslash L^{(1)}$ 的强形变收缩核, 同样, 链复形 $(K/L)'$ 作为拓扑空间为拓扑空间 $K^{(1)}\backslash L^{(1)}$ 的一点紧化空间.

定理3.2.17 (Alexander对偶定理) 设 M 为连通的可定向 n维单纯闭流形, (K,L) 为 M 的子复形偶. 则

$$H_i(K,L)\cong H^{n-i}(L^c,K^c)=H^{n-i}((M\backslash L)',(M\backslash K)'),$$

$$H^i(K,L)\cong H_{n-i}(L^c,K^c)=H_{n-i}((M\backslash L)',(M\backslash K)').$$

如果 M 为 S^n 的单纯剖分, 则

$$\widetilde{H}_i(K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K^c) = \widetilde{H}^{n-i-1}((M\backslash K)'),$$

$$\widetilde{H}^i(K) \cong \widetilde{H}_{n-i-1}(K^c) = \widetilde{H}_{n-i-1}((M\backslash K)').$$

证 考虑补块剖分的单纯复形 $(C_*(S'_M), d)$ 中的相对链复形 $(C_*(S'_K)/C_*(S'_L), d)$, 其中 $S'_K = \{S'_\sigma\}_{\sigma\in K}$ 为 S'_M 的子集. 同样的公式

$$ds_{\lfloor v_0,\cdots,v_n\rfloor} = \sum \pm\langle u_1, v_0, \cdots, v_k | u_2, \cdots, u_{n-k}\rangle = \sum s_{\lfloor v_0,\cdots,v_n,v\rfloor}.$$

蕴含 $(C_*(S'_K)/C_*(S'_L), d) \cong (C^{n-*}(L^c, K^c), \delta)$. 定理前半部分成立.

如果 M 为 S^n 的单纯剖分, 则 $\widetilde{H}_n(M) = \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_k(M) = 0$, 如果 $k \neq n$. 由长恰当序列

$$\cdots \to \widetilde{H}_k(K^c) \to \widetilde{H}_k(M') \to \widetilde{H}_k(M', K^c) \to \widetilde{H}_{k-1}(K^c) \to \cdots$$

可知 $\widetilde{H}_k(M', K^c) = \widetilde{H}_{k-1}(K^c)$ 对 $k < n$, $\widetilde{H}_{n-1}(K^c) \oplus \mathbb{Z} = \widetilde{H}_n(M', K^c)$. 所以定理成立.

对偶定理的发现源于流形的重心重分, 但是推广到一般情形是由流形的奇异(上)同调群上的$\cup$积和$\cap$积决定的, 也就是说存在大量不可剖分流形, 其上对偶定理仍然成立. 这就需要把单纯(上)同调的定义推广到任意拓扑空间上. 而一旦单纯(上)同调推广到任意空间的奇异(上)同调之后, 某些空间的特殊阶数的奇异上同调群反而与其上的单纯结构的PL同胚类1-1对应. 这说明一个非常有趣的现象, 虽然单纯复形让Poncaré发现了(上)同调群的定义和对偶定理, 但是单纯结构却不是拓扑空间能够定义(上)同调群和满足对偶定理的前提条件.

习题3.2

3.2.1. 定义单纯链群 $C_*(K)$ 上的新的微分为

$$d_1\lfloor v_0, \cdots, v_k\rfloor = \Sigma_{i=0}^k (-1)^{i+1}\lfloor v_0, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rfloor,$$

$$d_2\lfloor v_0, \cdots, v_k\rfloor = \Sigma_{i=0}^k (-1)^{k-i}\lfloor v_0, \cdots, \widehat{v_i}, \cdots, v_k\rfloor$$

试证 $(C_*(K), d) \cong (C_*(K), d_1) \cong (C_*(K), d_2)$.

3.2.2. 设 K 为有限单纯链复形. 具体描述 K 的单纯上链复形 $(C^*(K), \delta) = (\mathrm{Hom}(C_*(K), \mathbb{Z}), \mathrm{Hom}(d, 1_{\mathbb{Z}}))$ 的结构. 证明对任何Abel群 G, $(\mathrm{Hom}(C^*(K), G), \mathrm{Hom}(d, 1_G)) \cong ((C^*(K)\otimes G, \delta\otimes 1_G)$.

3.2.3. 证明 $(C_*(K\amalg L), d) \cong (C_*(K)\oplus C_*(L), d)$, $(\Sigma C_*(K*L), d) \cong (C_*(K)\otimes C_*(L), d)$.

3.2.4. 试给出单纯复形 $K\times L$ 的一个块剖分 B, 使得 $(C_*(B), d) \cong (C_*(K)\otimes C_*(L), d)$.

3.2.5. 试举例一个单纯复形上的块剖分 B 不是任何该单纯复形的加细的块剖分.

3.2.6. 验证 $(K\backslash L)'$ 为链复形, 证明它为 $K\backslash L$ 的强形变收缩核.

3.2.7. 证明当 K 为有限单纯复形时, 我们有拓扑空间的同胚 $(K/L)' = (K\backslash L)^* \cong K/L$,

3.3 奇异同调论

定义3.3.1 对于 $k=0,1,\cdots$, 拓扑空间 X 的一个奇异 k-单形为一映射

$$u\colon \Delta^k \to X,$$

其中 Δ^k 为标准 k 单形, 它的顶点我们简记为 $0,1,\cdots,k$.

拓扑空间 X 的奇异链复形 $(S_*(X),d)$ 如下定义. 每个 $S_n(X)$ 为 X 的所有奇异 n-单形生成的自由Abel群, $n<0$ 时为零群. 微分如下定义. 对于奇异 0-单形 u_0, $du_0=0$. 对于 $k>0$ 的奇异 k-单形 u,

$$du=\Sigma_{i=0}^k u\lambda_i,$$

其中 $\lambda_i\colon \Delta^{k-1}\to\Delta^k$ 为把顶点 $0,1,\cdots,k-1$ 依次映到顶点 $0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k$ 上的单纯映射. 每个 $u\lambda_i$ 都称为 u 的一个(真)面.

为了和单纯情形比较, 对于奇异 k-单形 $u\colon \Delta^k\to X$, 记它在 $S_k(X)$ 中对应的生成元为 $\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor$, 其中 $0,1,\cdots,k$ 代表标准单形的顶点. 注意, 对于 $(0,\cdots,k)$ 的一个非恒等置换 π, 符号 $\lfloor u(\pi(0)),\cdots,u(\pi(k))\rfloor$ 没有意义! 即使 $\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor$ 中有重复的取值也不是 0, 因为它是奇异单形 u 所代表的生成元. 用这套符号系统, 奇异链复形的微分就定义为 $d\lfloor u(0)\rfloor=0$ 对所有奇异 0-单形 $u\colon \Delta^0\to X$. 而对于 $k>0$ 和奇异 k-单形 u,

$$d\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor=\Sigma_{i=0}^k(-1)^i\lfloor u(0),\cdots,\widehat{u(i)},\cdots,u(k)\rfloor,$$

其中 $\widehat{u}$ 表示将符号 u 从公式中删去, $\lfloor u(0),\cdots,\widehat{u(i)},\cdots,u(k)\rfloor$ 表示 $(k-1)$-单形 $u\lambda_i$,

由于

$$\begin{aligned}
& d^2\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor \\
= \ & d(\Sigma_{i=0}^k(-1)^i\lfloor u(0),\cdots,\widehat{u(i)},\cdots,u(k)\rfloor) \\
= \ & \Sigma_{s<i}^k(-1)^{i+s}\lfloor u(0),\cdots,\widehat{u(s)},\cdots,\widehat{u(i)},\cdots,u(k)\rfloor+\Sigma_{i<t}(-1)^{i+t-1}\lfloor u(0),\cdots,\widehat{u(i)},\cdots,\widehat{u(t)},\cdots,u(k)\rfloor \\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

所以 $d^2=0$, 因而 $(S_*(X),d)$ 为链复形. 定义 X 的奇异同调群为

$$H_*(X)=H_*(S_*(X),d).$$

对于Abel群 G, 定义 X 的以 G 为系数的奇异同调群和奇异上同调群为

$$H_*(X;G)=H_*(S_*(X);G),\quad H^*(X;G)=H^*(S_*(X);G).$$

X 的约化奇异链复形 $(\widetilde{S}(X),d)$ 定义如下. 对于 $n\geqslant 0$, $\widetilde{S}_n(X)=S_n(X)$. $\widetilde{S}_{-1}(X)$ 为由空集 $\emptyset$ 到 X 的唯一空映射生成的自由Abel群, 其生成元记为 $\lfloor\,\rfloor$. 微分规定为 $d\lfloor u(0)\rfloor=\lfloor\,\rfloor$ 对所有奇异 0-单形 u, $d\lfloor\,\rfloor=0$. 对于 $n>0$, 微分 d 同非约化情形. 定义 X 的约化奇异同调群为

$$\widetilde{H}_*(X)=H_*(\widetilde{S}_*(X),d).$$

对于Abel群 G, 定义 X 的以 G 为系数的约化奇异同调群和约化奇异上同调群为

$$\widetilde{H}_*(X;G)=H_*(\widetilde{S}_*(X);G),\quad \widetilde{H}^*(X;G)=H^*(\widetilde{S}_*(X);G).$$

空间偶 (X,A) 的相对奇异链复形和相对约化奇异链复形都定义为商复形

$$(S_*(X,A),d)=(S_*(X)/S_*(A),d)=(\widetilde{S}_*(X)/\widetilde{S}_*(A),d)=(\widetilde{S}_*(X)/\widetilde{S}_*(A),d),$$

等价地, $\widetilde{S}_k(X)/\widetilde{S}_k(A)$ 为由所有满足 $u(\Delta^k)\not\subset A$ 的奇异 k-单形 u 生成的自由Abel群.

空间偶的 (X,A) 相对奇异同调群和约化相对奇异同调群都定义为

$$H_*(X,A)=H_*(S_*(X,A),d)=H_*(\widetilde{S}_*(X,A),d)=\widetilde{H}(X,A).$$

对于Abel群 G, 定义 (X,A) 的以 G 为系数的(约化)相对奇异同调群和(约化)相对奇异上同调群为

$$H_*(X,A;G)=\widetilde{H}_*(X,A;G)=H_*(\widetilde{S}_*(X,A);G),$$

$$H^*(X,A;G)=\widetilde{H}^*(X,A;G)=H^*(\widetilde{S}_*(X,A);G).$$

如果不引起误解, 总是省略(上)同调群中的奇异字样, 即所有的(上)同调群都是指奇异(上)同调群.

定理3.3.2 映射 $f\colon X\to Y$ 导出奇异链复形的链同态(仍记为) $f\colon (S_*(X),d)\to(S_*(Y),d)$ 定义为

$$f(\lfloor u_0,\cdots,u_k\rfloor)=\lfloor (fu)_0,\cdots,(fu)_k\rfloor$$

对所有奇异单形 u, 即 $f(u)=fu$. 因而对任何Abel群 G, 有导出的(上)同调群同态

$$f_*\colon H_*(X;G)\to H_*(Y;G),\quad f^*\colon H^*(Y;G)\to H^*(X;G)$$

满足以下性质.

(1) $(1_X)_*=1_{H_*(X;G)}$, $(1_X)^*=1_{H^*(X;G)}$.

(2) $(fg)_*=f_*g_*$, $(fg)^*=g^*f^*$.

偶映射 $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ 导出奇异链复形的链同态(仍记为) $f\colon (S_*(X,A),d)\to(S_*(Y,B),d)$ 定义为

$$f(\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor)=\lfloor (fu)(0),\cdots,(fu)(k)\rfloor$$

对所有奇异单形 $u\in S_*(X,A)$, 因而有导出同调群的同态 $f_*\colon H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$. 因而对任何Abel群 G, 有导出的(上)同调群同态

$$f_*\colon H_*(X,A;G)\to H_*(Y,B;G),\quad f^*\colon H^*(Y,B;G)\to H^*(X,A;G)$$

满足以下性质.

(1) $(1_{(X,A)})_*=1_{H_*(X,A;G)}$, $(1_{(X,A)})^*=1_{H^*(X,A;G)}$.

(2) $(fg)_*=f_*g_*$, $(fg)^*=g^*f^*$.

以上结论对约化(上)同调群也成立.

证 定理3.1.4的推论.

定理3.3.3 我们有以下结论.

(1) 独点空间的同调群为 $H_0(*)=\mathbb{Z}$, $H_n(*)=0$ 如果 $n\neq 0$. 约化同调群 $\widetilde{H}_*(*)$ 为零群.

(2) 对于拓扑空间 X, $H_0(X)$ 为 X 的道路连通分支生成的自由Abel群, $H_0(X)\cong\widetilde{H}_0(X)\oplus\mathbb{Z}$.

(3) 对于道路连通的拓扑空间 X, $H_1(X)$ 为 $\pi_1(X,x_0)$ 的交换化群.

(4) 对于不交并空间, 任意系数的(上)同调群都满足

$$H_*(\amalg_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;G)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}H_*(X_\alpha;G),\quad H^*(\amalg_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;G)=\Pi_{\alpha\in\Lambda}H^*(X_\alpha;G).$$

证 (1) 记 $S_n(*)$ 的唯一生成元为 s_n, 则 $ds_n=0$ 如果 n 为正奇数, $ds_0=0$, $ds_n=s_{n-1}$ 如果 n 为正偶数. 所以结论成立.

(2) $S_0(X)=\mathbb{Z}(X)$, 其中 $x\in X$ 也代表满足 $v(0)=x$ 唯一的奇异 0-单形 v. 所以 $\ker d_0=S_0(X)=\mathbb{Z}(X)$. 而 $\mathrm{im}d_1$ 由形如 $y-x$ 的元生成, 其中 x,y 存在连接 x 到 y 的道路 u. 而 u 作为奇异 1-单形自然满足 $du=y-x$. 所以 $H_0(X)$ 为道路连通分支生成的自由Abel群. 由长恰当序列

$$\cdots\to(0{=})\,\widetilde{H}_0(\emptyset)\to H_0(\widetilde{X})\to H_0(X)\to\widetilde{H}_{-1}(\emptyset)\,({=}\,\mathbb{Z})\to 0$$

可知 $H_0(X)\cong\widetilde{H}_0(X)\oplus\mathbb{Z}$.

(3) 定义 $\phi\colon\Omega(X)\to H_1(X)$ 如下. 对于回路 $u\colon(S^1,0)\to(X,x_0)$, 记 $q\colon I\to S^1=I/\{0,1\}$ 为商投射, 则 u 的平化 uq 就是一个奇异 1-单形, 而且在 $\ker d$ 之中, 所以定义 $\phi(u)=[uq]$. 不难验证

a) 对于保基点常值映射 0, $\phi(0)=0$.

b) 如果有保基点同伦 $u\simeq v$ 则 $\phi(u)=\phi(v)$.

c) 对于连接的道路, 我们有 $\phi(u{*}v)=\phi(u){+}\phi(v)$.

由上性质可知 ϕ 导出群同态(仍记为) $\phi\colon\pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$.

下面证明 ϕ 为单同态. 如果 $\phi(u)\neq 0$, 则 u 一定不零伦, 因为如果零伦, 则由 b) 可知 $\phi(u)=\phi(0)=0$. 矛盾! 所以 ϕ 为单同态.

下面证明 ϕ 为满同态. 设 $x=n_1u_1{+}\cdots{+}n_ku_k\in S_*(X)$. 则 $dx=m_1p_1{+}\cdots{+}m_sp_s$, 其中 m_i 为以 p_i 为起点的 u_s 的系数 n_s 的和减去以 p_i 为终点的 u_s 的系数 n_s 的和. 由此可知如果 $dx=0$, 则 x 一定是以下两类元的整系数线性组合. 第一类, 起点和终点一样的单形 v. 第二类, $v_1{+}\cdots{+}v_t$, 其中 v_i 的终点是 v_{i+1} 的起点, v_t 的终点是 v_1 的起点. 第一类元显然属于 $\mathrm{im}\phi$. 对于第二类元 $v_1{+}\cdots{+}v_t$, 令 u 为回路 $v_1{*}\cdots{*}v_t$ (把 v_i 看成道路), 任取连接 x_0 到 $v_1(0)$ 的一条道路 w, 则显然 $\phi(w{*}u{*}w^{-1})=[v_1{+}\cdots{+}v_t]$. 所以 ϕ 是满同态.

(4) 由定义 $S_*(\amalg_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha)=\oplus_{\alpha\in\Lambda}S_*(X_\alpha)$.

定理3.3.4 对于空间偶 (X,A) 和任何系数群 G, 存在带系数的(上)同调群的连接同态

$$\partial_*\colon H_*(X,A;G)\to\Sigma^{-1}H_*(A;G)\quad \text{和}\quad \partial^*\colon H^*(A;G)\to\Sigma H^*(X,A;G)$$

满足以下由空间偶 (X,A) 导出的长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(A;G)\xrightarrow{i_n}H_n(X;G)\xrightarrow{j_n}H_n(X,A;G)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(A;G)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots,$$

$$\cdots\xrightarrow{\partial^{n-1}}H^n(X,A;G)\xrightarrow{j^n}H^n(X;G)\xrightarrow{i^n}H^n(A;G)\xrightarrow{\partial^n}H^{n+1}(X,A;G)\xrightarrow{i^{n+1}}\cdots,$$

其中 i_*,i^* 由内射 $i\colon A\to X$ 导出, j_*,j^* 由内射 $j\colon(X,\emptyset)\to(X,A)$ 导出.

以上恰当序列是自然的, 也就是说对于偶映射 $f\colon(X,A)\to(Y,B)$, 记 $f\colon(S_*(X),d)\to(S_*(Y),d)$, $\widetilde{f}\colon(S_*(X,A),d)\to(S_*(Y,B),d)$, $\overline{f}\colon(S_*(A),d)\to(S_*(B),d)$ 为导出的链同态, 则我们有以下带系数的(上)同

调群的长恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(A;G) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & H_n(X;G) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "f_n"'] & H_n(X,A;G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\widetilde{f}_n"'] & H_{n-1}(A;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\bar{f}_n"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(B;G) \arrow[r, "i_n"] & H_n(Y;G) \arrow[r, "j_n"] & H_n(Y,B;G) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & H^n(Y,B;G) \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "\bar{f}^n"] & H^n(Y;G) \arrow[r, "i^n"] \arrow[d, "f^n"] & H^n(B;G) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\widetilde{f}^n"] & H^{n+1}(Y,B;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] \arrow[d, "\bar{f}^n"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & H^n(X,A;G) \arrow[r, "j^n"] & H^n(X;G) \arrow[r, "i^n"] & H^n(A;G) \arrow[r, "\partial^n"] & H^{n+1}(X,A;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

其中三个由 $\bar{f}, f, \widetilde{f}$ 导出的(上)同调群同态中有两个是同构, 则另一个也为同构.

以上结论对约化(上)同调群也成立.

证 注意到 $S_*(K,L)$ 仍为自由群, 所以是取定理3.1.8的 $(C_*,d)=(C_*(L),d)$, $(D_*,d)=(C_*(K),d)$ 的直接应用.

定理3.3.5 同伦的映射导出相同的(约化)同调群同态, 因而同伦型的空间有同构的(约化)同调群. 同伦的偶映射也导出相同的(约化)同调群同态, 因而同伦型的空间偶有同构的(约化)相对同调群. 简单地说, (上)同调群是同伦不变量.

证 设 $H\colon I\times X\to Y$ 为连接 f 到 g 的同伦. 于是有链同态 $f,g\colon (S_*(X),d)\to(S_*(Y),d)$, 下面我们构造连接链同态 f 到 g 的同伦 s.

$I\times\Delta^k$ 的所有 $(k+1)$-单形为以下 $k+1$ 个

$$\Delta^{s,k}=\{(0,0),\cdots,(0,s-1),(0,s),(1,s),(1,s+1),\cdots,(1,k)\},\quad s=0,1,\cdots,k.$$

记 $\phi_{s,k}\colon\Delta^{k+1}\to\Delta^{s,k}$ 为把标准 $(k+1)$-单形 Δ^{k+1} 的顶点 $0,1,\cdots,k+1$ 按顺序依次映到以上顶点的单纯映射, 则对任何 X 的奇异 k-单形 $u\colon\Delta^k\to X$, 我们有复合映射构成的 X 的奇异 $(k+1)$-单形 $(1_I\times u)\phi_{s,t}$. 记这个单形在 $S_{k+1}(X)$ 中的生成元为 $\lfloor(0,u(0)),\cdots,(0,u(s)),(1,u(s)),\cdots,(1,u(k))\rfloor$. 类似地, 记复合映射构成的 Y 的奇异 $(k+1)$-单形 $H(1_I\times u)\phi_{s,t}$ 在 $S_{s+t}(Y)$ 中的生成元为

$$\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(s)),H(1,u(s)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor.$$

则 $\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(k))\rfloor=\lfloor(fu)(0),\cdots,(fu)(k)\rfloor$, $\lfloor H(1,0)),\cdots,H(1,k)\rfloor=\lfloor(gu)(0),\cdots,(gu)(k)\rfloor$ 对任何 X 的奇异单形 $\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor$. 定义链同伦 $s\colon S_*(X)\to\Sigma S_*(Y)$ 如下.

$$s\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor=\Sigma_{i=0}^k(-1)^i\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(i)),H(1,u(i)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor.$$

则(比较定理3.2.5)

$$
\begin{aligned}
& ds\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor \\
= \;& d(\Sigma_{i=0}^{k}\,(-1)^i\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(i)),H(1,u(i)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor) \\
= \;& \Sigma_{s<i}\;(-1)^{i+s}\,\lfloor H(0,(u(0)),\cdots,H\widehat{(0,u(s)}),\cdots,H(0,u(s)),H(1,u(s)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor \\
& +\Sigma_{s=0}^{k}\,\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(s-1)),H(1,u(s)),\cdots,H(1,(u(k))\rfloor \\
& -\Sigma_{s=0}^{k}\,\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(s)),H(1,u(s+1)),\cdots,H(1,(u(k))\rfloor \\
& -\Sigma_{i<t}\;(-1)^{i+t}\,\lfloor H(0,(u(0)),\cdots,H(0,u(i)),H(1,u(i)),\cdots,H\widehat{(1,u(t)}),\cdots,H(1,u(k))\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& sd\lfloor u(0),\cdots,u(k)\rfloor \\
= \;& s(\Sigma_{i=0}^{k}\,(-1)^i\lfloor H(0,u(0)),\cdots,H(0,u(i)),H(1,u(i)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor) \\
= \;& \Sigma_{s<i}\;(-1)^{i+s}\,\lfloor H(0,(u(0)),\cdots,H\widehat{(0,u(s)}),\cdots,H(0,u(s)),H(1,u(s)),\cdots,H(1,u(k))\rfloor \\
& -\Sigma_{i<t}\;(-1)^{i+t}\,\lfloor H(0,(u(0)),\cdots,H(0,u(i)),H(1,u(i)),\cdots,H\widehat{(1,u(t)}),\cdots,H(1,u(k))\rfloor
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (ds+sd)\lfloor u_0,\cdots,u_k\rfloor \\
= \;& \lfloor (gu)(0),\cdots,(gu)(k)\rfloor-\lfloor (fu)(0),\cdots,(fu)(k)\rfloor
\end{aligned}
$$

所以 $ds+sd=g-f$, 因而 $f\simeq g$. 约化情形只需令 $s\lfloor\,\rfloor=0$. 所以定理前半部分成立.

同样的公式, 在相对链复形上也成立. 所以定理的后半部分也成立.

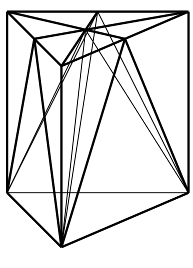
定理3.3.6 (切除定理) 设 $U\subset A\subset X$ 满足 $\mathrm{Cl}(U)\subset\mathrm{Int}(A)$, 则

$$H_*(X,A)\cong H_*(X\backslash U,A\backslash U;G),\quad H^*(X,A)\cong H^*(X\backslash U,A\backslash U;G),$$

其中系数群 G 任意.

证 我们只需证明 $(S_*(X\backslash\mathrm{Cl}(U),A\backslash\mathrm{Cl}(U)),d)$ 与 $(S_*(X,A),d)$ 链同伦等价即可.

首先给 $I\times\Delta^k$ 一个新的剖分, 在底面 $0\times\Delta^k$ 上不变, 在顶面 $1\times\Delta^k$ 上为重心重分 $(\Delta^k)^{(1)}$. 当 $k=2$ 时, 如下图所示.



由上剖分就给出 Δ^k 到地面的恒等嵌入和到顶面的重分嵌入的一个链同伦, 具体如下. 剖分复形的所有 $(k+1)$-单形如下形式

$$
\begin{aligned}
& \langle i_0,\cdots,i_t|j_1,\cdots,j_{k-t}\rangle \\
= & \{(0,i_0),(0,i_1),\cdots,(0,i_t),(1,\{i_0,\cdots,i_t\}),(1,\{i_0,\cdots,i_t,j_1\}),\cdots,,(1,\{i_0,\cdots,i_t,j_1,\cdots,j_{k-t}\})\},
\end{aligned}
$$

其中 $0\leqslant i_0<\cdots<i_t\leqslant k$, $\{i_0,\cdots,i_t,j_1,\cdots,j_{k-t}\}=\{0,1,\cdots,k\}$. 令

$$s(\Delta^k)=\Sigma\,(-1)^t\tau(i_0,\cdots,i_t,j_1,\cdots,j_{k-t})\langle i_0,\cdots,i_t|j_1,\cdots,j_{k-t}\rangle,$$

其中和式取遍所有上述的 $(k+1)$-单形. 不难验证

$$(ds+sd)(\Delta^k) = (\Sigma\,\tau(j_0,\cdots,j_k)\{(1,\{j_0\}),(1,\{j_0,j_1\}),\cdots,(1,\{j_0,\cdots,j_k\})\}) - \{(0,0),(0,1),\cdots,(0,k)\}.$$

其中和式取遍 $(0,\cdots,k)$ 的置换排列 $(j_0,\cdots,j_k)$.

对于奇异 k-单形 u 和 $(0,\cdots,k)$ 的置换排列 $(j_0,\cdots,j_k)$, 记 $u_{j_0,\cdots,j_k}$ 为奇异单形 $u\lambda_{j_0,\cdots,j_k}$, 其中 $\lambda_{j_0,\cdots,j_k}$ 为将 Δ^k 的顶点 $0,\cdots,k$ 保序地映到重心重分复形 $(\Delta^k)^{(1)}$ 中的顶点 $\{j_0\},\cdots,\{j_0,\cdots,j_k\}$ 的单纯映射. 于是我们有链同态

$$\phi\colon S_*(X,A)\to S_*(X,A)$$

定义为 $\phi(u)=\Sigma\,\tau(j_0,\cdots,j_k)u_{j_0,\cdots,j_k}$, 其中和式取遍 $(0,\cdots,k)$ 的置换排列. 而由上面构造的单纯链复形上的链同伦 s 不难构造出奇异链复形上链同伦 $s\colon S_*(X,A)\to\Sigma S_*(X,A)$ 使得 $ds+sd=1_{S_*(X,A)}-\phi$.

对于 $H_*(X,A)$ 中的同调类 $[x]$, 由Lesbegue引理可知, 存在 $r>0$ 使得 $\phi^r(x)=\Sigma\,u_i$, 其中每个 u_i 满足或者 $u_i(\Delta^k)\subset X\backslash\mathrm{Cl}(U)$, 或者 $u_i(\Delta^k)\subset\mathrm{Int}(A)$. 于是 $\phi^r(x)\in S_*(X\backslash\mathrm{Cl}(U),A\backslash\mathrm{Cl}(U))$. 这说明 $(S_*(X,A),d)$ 的自由子复形 $(S_*(X\backslash\mathrm{Cl}(U),A\backslash\mathrm{Cl}(U)),d)$ 与它有相同的同调群, 因而内射导出的链同态为链同伦等价.

定理3.3.7 我们有以下以任何Abel群 G 为系数的约化(上)同调群的结论.

(1) 如果 A 为Hausdorff空间 X 的非退化子空间, 则

$$\widetilde{H}_*(X,A;G)\cong\widetilde{H}_*(X/A;G),\quad \widetilde{H}^*(X,A;G)\cong\widetilde{H}^*(X/A;G).$$

所以由空间偶 (X,A) 引出的长恰当序列变为以下形式

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(A;G)\xrightarrow{i_n}H_n(X;G)\xrightarrow{j_n}H_n(X/A;G)\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(A;G)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots$$

$$\cdots\xrightarrow{\partial^{n-1}}H^n(X/A;G)\xrightarrow{j^n}H^n(X;G)\xrightarrow{i^n}H^n(A;G)\xrightarrow{\partial^n}H^{n+1}(X/A;G)\xrightarrow{i^{n+1}}\cdots$$

并且序列关于偶映射是自然的.

特别地, 当 (X,A) 为CW复形偶, 或者相对CW复形时以上性质成立.

(2) 对于基点非退化的拓扑空间的一点并, 我们有

$$\widetilde{H}_*(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{H}_*(X_\alpha;G),\quad \widetilde{H}^*(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{H}_*(X_\alpha;G).$$

(3) 我们有同纬同构

$$S_*\colon\widetilde{H}_*(\widetilde{S}(X);G)\to\Sigma\widetilde{H}_*(X;G),\quad S^*\colon\widetilde{H}^*(X;G)\to\Sigma\widetilde{H}^*(\widetilde{S}(X);G).$$

同纬同构是自然的, 即对于映射 $f\colon X\to Y$, 我们有以下的交换图.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_*(\widetilde{S}(X);G) & \xrightarrow{S_*} & \Sigma\widetilde{H}_*(X;G) \\ \downarrow{\scriptstyle S(f)_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \widetilde{H}_*(\widetilde{S}(Y);G) & \xrightarrow{S_*} & \Sigma\widetilde{H}_*(Y;G), \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{H}^*(Y;G) & \xrightarrow{S^*} & \Sigma\widetilde{H}^*(\widetilde{S}(Y);G) \\ \downarrow{\scriptstyle S(f)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \widetilde{H}^*(X;G) & \xrightarrow{S^*} & \Sigma\widetilde{H}^*(\widetilde{S}(X);G). \end{array}$$

以上结论对保基点情形也成立, 即把映射换为保基点映射, 把 $\widetilde{S}(-)$ 换为 $S(-)$, 结论仍成立.

(4) 对于映射 $f\colon X\to Y$, 我们有映射导出的长恰当序列

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}}\widetilde{H}_n(X;G)\xrightarrow{f_n}\widetilde{H}_n(Y;G)\xrightarrow{j_n}\widetilde{H}_n(\widetilde{C}_f;G)\xrightarrow{\partial_n}\widetilde{H}_{n-1}(X;G)\xrightarrow{i_{n-1}}\cdots,$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} \widetilde{H}^n(\widetilde{C}_f;G) \xrightarrow{j^n} \widetilde{H}^n(Y;G) \xrightarrow{i^n} \widetilde{H}^n(X;G) \xrightarrow{\partial^n} \widetilde{H}^{n+1}(\widetilde{C}_f;G) \xrightarrow{i^{n+1}} \cdots,$$

其中 $\partial_* = S_* q_*$, $\partial^* = q^* S^*$, 而 $q\colon \widetilde{C}_f \to \widetilde{C}_f/Y \cong \widetilde{S}(X)$ 为商投射. 以上序列是自然的, 即由以下映射的同伦交换图(不是严格的交换图!)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & \widetilde{C}_f \arrow[d, "w"'] \\ U \arrow[r, "g"] & V \arrow[r, "j"] & \widetilde{C}_g \end{tikzcd}$$

得到长恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \widetilde{H}_n(X;G) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "u_n"'] & \widetilde{H}_n(Y;G) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "v_n"'] & \widetilde{H}_n(\widetilde{C}_f;G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "w_n"'] & \widetilde{H}_{n-1}(X;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "u_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \widetilde{H}_n(U;G) \arrow[r, "g_n"] & \widetilde{H}_n(V;G) \arrow[r, "j_n"] & \widetilde{H}_n(\widetilde{C}_g;G) \arrow[r, "\partial_n"] & \widetilde{H}_{n-1}(U;G) \arrow[r, "i_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & \widetilde{H}^n(\widetilde{C}_g;G) \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "w_n"'] & \widetilde{H}^n(V;G) \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "v_n"'] & \widetilde{H}^n(U;G) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "u_n"] & \widetilde{H}^{n+1}(\widetilde{C}_g;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] \arrow[d, "w_{n+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & \widetilde{H}^n(\widetilde{C}_f;G) \arrow[r, "j^n"] & \widetilde{H}^n(Y;G) \arrow[r, "f^n"] & \widetilde{H}^n(X;G) \arrow[r, "\partial^n"] & \widetilde{H}^{n+1}(\widetilde{C}_f;G) \arrow[r, "i^{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

以上结论对保基点情形也成立, 即把映射换为保基点映射, 把 $\widetilde{C}_{(-)}$ 换为 $C_{(-)}$, 结论仍成立.

证 (1) 由切除定理, $H_*(X\cup\widetilde{C}(A),\widetilde{C}(A);G) \cong H_*(X\cup(\widetilde{C}(A)\backslash[0,A]),\widetilde{C}(A)\backslash[0,A];G)$. 而空间偶 (X,A) 为空间偶 $(X\cup(\widetilde{C}(A)\backslash[0,A]),\widetilde{C}(A)\backslash[0,A])$ 的强形变收缩核. 所以 $H_*(X,A;G) \cong H_*(X\cup\widetilde{C}(A),\widetilde{C}(A);G)$. 由 A 非退化得 $(X\cup\widetilde{C}(A),\widetilde{C}(A)) \simeq (X/A,*)$. 所以 $\widetilde{H}_*(X\cup\widetilde{C}(A),\widetilde{C}(A);G) \cong \widetilde{H}_*(X/A,*;G) \cong \widetilde{H}_*(X/A;G)$.

(2) 首先证明 $(S_*(X\vee Y),d)$ 的自由子复形 $(S_*(X)\oplus S_*(Y),d)$ 的内射导出的同调群同态为同构, 因而内射导出的链同态为链同伦等价. 我们有以下长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{i_n} \widetilde{H}_n(X\vee Y) \xrightarrow{j_n} \widetilde{H}_n(X\vee Y,X) \xrightarrow{\partial_n} \widetilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots$$

由 Y 的基点非退化可知 X 为 $X\vee Y$ 的非退化子空间, 所以 $\widetilde{H}_*(X\vee Y,X) \cong \widetilde{H}_*((X\vee Y)/X) = \widetilde{H}_*(Y)$. 而商投射 $q\colon X\vee Y \to (X\vee Y)/Y \cong X$ 导出的同调群同态满足 $q_*i_* = 1_{H_*(X)}$. 这说明 i_* 为单同态, 因而以上长恰当序列变成分裂的短恰当序列 $0 \to \widetilde{H}_*(X) \to \widetilde{H}_*(X\vee Y) \to \widetilde{H}_*(Y) \to 0$. 因而 $H_*(X\vee Y) \cong H_*(X)\oplus H_*(Y)$, 并且由直和群的同态扩张性可知 $(S_*(X)\oplus S_*(Y),d)$ 到 $(S_*(X\vee Y),d)$ 的内射导出的同调群同态为同构. 显然以上两个空间的情形可以自然推广到有限个空间的情形.

下面证明 $(S_*(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha),d)$ 的自由子复形 $(\oplus_{\alpha\in\Lambda}S_*(X_\alpha),d)$ 的内射导出的同调群同态 i 为同构, 因而内射导出的链同态为链同伦等价, 由定理3.1.12, 定理成立. 对于 $H_*(\vee_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha)$ 中的同调类 $[x]$, $x = \Sigma_i n_i u_i$, 显然存在有限个下标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \Lambda$ 使得每个奇异单形 u_i 都属于 $S_*(\vee_{k=1}^n X_{\alpha_k})$. 而由以上的有限个空间的结论可知存在 $y \in \oplus_{k=1}^n S_*(X_{\alpha_k})$ 使得 $[y]=[x]$. 这说明 i 为满射. 假如 $[x]=0$, 则存在 $y = \Sigma_j m_j v_j$ 使得 $dy = x$, 则同样存在有限个下标 $\beta_1,\cdots,\beta_m \in \Lambda$ 使得每个奇异单形 v_j 都属于 $S_*(\vee_{k=1}^m X_{\beta_k})$. 于是 x 在 $\oplus_{k=1}^m S_*(X_{\beta_k})$ 中就代表零类. 这说明 i 为单同态. 所以 i 为同构.

(3) 由于长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}} \widetilde{H}_n(X;G) \xrightarrow{i_n} \widetilde{H}_n(\widetilde{C}(X;G) \xrightarrow{j_n} \widetilde{H}_n(\widetilde{C}(X),X;G) \xrightarrow{\partial_n} \widetilde{H}_{n-1}(X;G) \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots$$

中的 $\widetilde{C}(X)$ 可缩, 因而 $\widetilde{H}_*(\widetilde{C}(X);G)=0$, 所以得到分次群同构 $\partial_*\colon \widetilde{H}_*(\widetilde{C}(X),X;G)\to\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(X;G)$. 而 X 为 $\widetilde{C}(X)$ 的非退化子空间, 所以 $H_*(\widetilde{C}(X),X;G)\cong H_*(\widetilde{C}(X)/X;G)\cong H_*(\widetilde{S}(X);G)$. 所以存在同构. 自然性由恰当序列的自然性推出.

(4) 令 $I_f=(Y\amalg(I\times X))/_\sim$, 其中 $(1,x)\sim f(x)$ 对所有 $x\in X$. 我们有映射的同伦交换图

$$\begin{tikzcd}
{[0,\frac{1}{2}]\times X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{q}"] & I_f \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q"] & (I_f,[0,\frac{1}{2}]\times X) \arrow[d, "\widetilde{q}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "j"] & (\widetilde{C}_f,[[0,\frac{1}{2}],X]),
\end{tikzcd}$$

其中 $\overline{q}$ 为乘积空间到分量空间的投射, q 为把 I_f 压缩到 Y 的强形变收缩核映射, $\widetilde{q}\colon I_f\to I_f/(0\times X)\cong\widetilde{C}_f$ 为商投射. 由此得到以下恰当序列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \widetilde{H}_n([0,\frac{1}{2}]\times X;G) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\overline{q}_n"] & \widetilde{H}_n(I_f;G) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "q_n"] & \widetilde{H}_n(I_f,[0,\frac{1}{2}]\times X;G) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\widetilde{q}_n"] & \widetilde{H}_{n-1}([0,\frac{1}{2}]\times X;G) \arrow[r, "i_{n+1}"] \arrow[d, "\overline{q}_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & \widetilde{H}_n(X;G) \arrow[r, "i_n"] & \widetilde{H}_n(Y;G) \arrow[r, "j_n"] & \widetilde{H}_n(\widetilde{C}_f,[[0,\frac{1}{2}],X];G) \arrow[r, "\partial_n"] & \widetilde{H}_{n-1}(X;G) \arrow[r, "i_{n+1}"] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

由于 $\overline{q},q$ 都是同伦等价映射, 因而 $\overline{q}_*,q_*$ 都是同构. 而 $\widetilde{q}_*$ 由切除定理可知也为同构, 因为两个同调群都同构于 $H_*(I_f\backslash(0\times X),(0,\frac{1}{2}]\times X;G)$. 显然 $(\widetilde{C}_f,[[0,\frac{1}{2}],X])\simeq(\widetilde{C}_f,*)$, 因而 $\widetilde{H}_*(\widetilde{C}_f,[[0,\frac{1}{2}],X];G)\cong\widetilde{H}_*(\widetilde{C}_f,*;G)\cong\widetilde{H}_*(\widetilde{C}_f;G)$. 所以定理的长恰当序列存在. 其自然性由空间偶引出的长恰当序列的自然性推出.

需要注意的是(上)同调群关于纤维映射和纤维丛没有好的性质, 一般都要经过谱序列来计算, 虽然同伦群反而对这两者有简单的长恰当序列的结果.

例3.3.8 由 $\widetilde{H}_*(S^0)\oplus\mathbb{Z}=H_*(S^0)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 得 $\widetilde{H}_0(S^0)=\mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_k(S^0)=0$ 如果 $k\neq 0$. 再由泛系数定理就可知 $\widetilde{H}_0(S^0;G)=G$, $\widetilde{H}_k(S^0;G)=0$ 如果 $k\neq 0$. 再由同纬同构得 $\widetilde{H}_n(S^n;G)=G$, $\widetilde{H}_k(S^n;G)=0$ 如果 $k\neq n$.

对于若干同维数的球面的一点并空间 $\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha$, 其中每个 $S^n_\alpha\cong S^n$, 我们有

$$H_n(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha;G)\cong\oplus_{\alpha\in\Lambda}H_n(S^n_\alpha;G),\quad H^n(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha;G)\cong\Pi_{\alpha\in\Lambda}H^n(S^n_\alpha;G),$$

$\widetilde{H}_k(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha;G)=0$, $\widetilde{H}^k(\vee_{\alpha\in\Lambda}S^n_\alpha;G)=0$, 如果 $k\neq n$.

有了以上球面的一点并空间的同调群的计算, CW复形的(上)同调群就可以回避不可实际计算的奇异链复形, 而是通过胞腔结构计算了.

定义3.3.9 CW复形 X 的胞腔链复形 $(C_*(X),d)$ 如下定义. 每个分量群 $C_n(X)$ 为 X 的所有 n-胞腔生成的自由Abel群, 胞腔集为空集时就是零群. 微分定义为 $de^0_\eta=0$ 对所有 0-胞腔 e^0_η. 对于 $n>0$ 和 n-胞腔 e^n_α,

$$de^n_\alpha=\Sigma_\beta[e^n_\alpha;e^{n-1}_\beta]e^{n-1}_\beta,$$

其中 $[e^n_\alpha;e^{n-1}_\beta]$ 为粘合度, e^{n-1}_β 取遍所有的 $(n-1)$-胞腔. 由粘合度性质, $(C_*(X),d)$ 为链复形.

定义 X 的约化胞腔链复形 $(\widetilde{C}_*(X),d)$ 如下. 对于 $n\neq-1$, $\widetilde{C}_n(X)=C_n(X)$. $C_{-1}(X)$ 为由空集对应的空胞腔 $\emptyset$ 生成的自由Abel群, 其生成元仍记为 $\emptyset$. 微分规定为 $de^0_\eta=\emptyset$ 对所有 0-单形 e^0_η, $d\emptyset=0$. 对于 $n>0$, 微分 de^n_α 同非约化情形.

对于CW复形偶或者相对CW复形 (X,A), 相对胞腔链复形和约化相对胞腔链复形都定义为商复形

$$(C_*(X,A),d)=(C_*(X)/C_*(A),d)=(\widetilde{C}_*(X)/\widetilde{C}_*(A),d)=(\widetilde{C}_*(X,A),d).$$

等价地, $C_n(X,A)$ 为由所有 $X\backslash A$ 中的 n-胞腔生成的自由Abel群, 因而 $C_*(X,A)$ 为 $C_*(X)$ 的自由子群, 但是由于微分不一样, 所以不是子复形.

定理3.3.10 对于CW复形 X 和任何系数群 G, 我们有带系数(上)同调群的同构

$$H_*(X;G)\cong H_*(C_*(X);G),\quad H^*(X;G)\cong H^*(C_*(X);G).$$

对于CW复形偶或者相对CW复形 (X,A), 我们也有带系数(上)同调群的同构

$$H_*(X,A;G)\cong H_*(C_*(X,A);G),\quad H^*(X,A;G)\cong H^*(C_*(X,A);G).$$

以上两类同构对于CW复形和胞腔映射是自然的, 具体如下. 对于偶胞腔映射 $f\colon (X,A)\to(Y,B)$, 定义导出的胞腔链复形的链同态为 $f(e^n_\alpha)=\Sigma\,[e^n_\alpha;f^n_\beta]f^n_\beta$, 其中 f^n_β 取遍 Y 的胞腔, $[e^n_\alpha;f^n_\beta]$ 为以下

$$S^n\xrightarrow{i_\alpha}\vee_\alpha S^n_\alpha\cong X^n/X^{n-1}\xrightarrow{f}Y^n/Y^{n-1}\cong\vee_\beta S^n_\beta\xrightarrow{q_\beta}S^n$$

映射的映射度. 则我们有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
H_*(X,A;G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & H_*(C_*(X,A);G) \arrow[d, "f_*"'] & H^*(Y,B;G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"'] & H^*(C_*(Y,B);G) \arrow[d, "f^*"'] \\
H_*(Y,B;G) \arrow[r, "\cong"] & H_*(C_*(Y,B);G), & H^*(X,A;G) \arrow[r, "\cong"] & H^*(C_*(X,A);G).
\end{tikzcd}$$

空间偶引出的长恰当序列和由胞腔映射导出的长恰当序列也可以做以上替换并且满足自然性.

以上结论对于约化(上)同调群仍然成立.

证 考虑骨架偶 (X^k,X^{k-1}), $k=1,2,\cdots$, 引出的长恰当序列

$$\cdots\longrightarrow H_{n+1}(X^n)\longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1})\xrightarrow{j_{n+1}}H_{n+1}(X^{n+1}/X^n)\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(X^n)\longrightarrow H_n(X^{n+1})\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow H_n(X^{n-1})\longrightarrow H_n(X^n)\xrightarrow{j_n}H_n(X^n/X^{n-1})\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(X^{n-1})\longrightarrow H_{n-1}(X^n)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-2})\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1})\xrightarrow{j_{n-1}}H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})\xrightarrow{\partial_{n-1}}H_{n-2}(X^{n-2})\longrightarrow H_{n-2}(X^{n-1})\longrightarrow\cdots$$

由定义 $H_n(X^n/X^{n-1})=C_n(X)=$所有 n-胞腔生成的自由Abel群, $\overline{d}=j_{*-1}\partial_*$, 这里为了区别, 我们用 $\overline{d}$ 表示 $C_*(X)$ 的微分, 用 d 表示 $S_*(X)$ 的微分. 下面证明 $(C_*(X),\overline{d})\simeq(S_*(X),d)$. 这就证明了同构 $H_*(X;G)\cong H_*(C_*(X);G)$, $H^*(X;G)\cong H^*(C_*(X);G)$.

由定义 $H_k(X^0)=0$ 当 $k>0$ 时. 由恰当序列 $H_{n+k+1}(X^n,X^{n-1})\to H_{n+k}(X^n)\to H_{n+k}(X^{n-1})\to H_{n+k}(X^n,X^{n-1})$ 归纳地就得到 $H_{n+k}(X^n)=0$ 当 $k>0$ 时. 所以上述长恰当序列就成了以下形式

$$0\longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1})\xrightarrow{j_{n+1}}H_{n+1}(X^{n+1}/X^n)\xrightarrow{\partial_{n+1}}H_n(X^n)\longrightarrow H_n(X^{n+1})\longrightarrow\cdots$$

$$0\longrightarrow H_n(X^n)\xrightarrow{j_n}H_n(X^n/X^{n-1})\xrightarrow{\partial_n}H_{n-1}(X^{n-1})\longrightarrow H_{n-1}(X^n)\longrightarrow\cdots$$

$$0\longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1})\xrightarrow{j_{n-1}}H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})\xrightarrow{\partial_{n-1}}H_{n-2}(X^{n-2})\longrightarrow H_{n-2}(X^{n-1})\longrightarrow\cdots$$

由于以上恰当序列中的 j_n 为单同态, 所以 $H_n(X^n)$ 同构于 $C_n(X)$ 的子群, 因而为自由群. 于是存在直和分解 $S_*(X^n) = U_n \oplus Z_n$ 满足 $Z_n = \ker \widetilde{d}_n$, $U_n = \operatorname{im} \widetilde{d}_{n+1}$, $H_n(X^n) \cong Z_n$, 这里的 $\widetilde{d}_i$ 为 X^n 的奇异链复形的微分. 由于 j_n 为单同态, 所以不区分 Z_n 和 $j_n(Z_n)$. 由自由群的短恰当序列 $0 \to H_n(X^n) \to C_n(X) \to \operatorname{im} \partial_n \to 0$ 可知存在直和分解 $C_n(X) = Z_n \oplus V_n$ 满足 $Z_n = \ker \partial_n = \ker j_{n-1}\partial_n = \ker \overline{d}_n$. 由定义, $\overline{d}_n$ 在 $C_n(X)$ 上的微分 $\overline{d}$ 和作为 $S_n(X)$ 的元的微分 d 是一致的. 所以 $(C_*(X), \overline{d})$ 是 $(S_*(X), d)$ 的子复形. 对于任何 X 的 n-单形 u, 由于作为映射, u 同伦于一个满足 $S_n(X^n)$ 中的奇异 n-单形 u', 所以存在 $z \in S_{n+1}(X)$ 使得 $dz = u - u'$. 这说明对任何 $[x] \in H_n(X)$, 存在 $x' \in Z_n$ 使得 $[x] = [x']$, 这里 $[\,,]$ 代表 $H_n(X)$ 中的同调类. 同样由 $S_{n+1}(X)$ 的奇异 $(n+1)$-单形同伦于 $S_{n+1}(X^{n+1})$ 中的奇异单形可以证明, 如果 $x \in Z_n$, $[x]$ 代表 $H_n(X)$ 的零类, 则存在 $z \in V_{n+1}$ 使得 $\overline{d}z = x$. 这就说明 $(C_*(X), \overline{d})$ 到 $(S_*(X), d)$ 的内射导出同调群的同构, 因而两者同伦等价.

空间偶情形类似. 而恰当序列的自然性直接验证.

例3.3.11 单纯复形作为以单形为胞腔的CW复形, 其单纯链复形和胞腔链复形完全一致. 这说明(约化)奇异(上)同调群是(约化)单纯(上)同调群的推广. 需要注意的是两个单纯复形间的胞腔映射比单纯映射要多得多.

以上我们介绍了奇异(上)同调理论的除了乘法性质以外的基本性质. 还有基于某个谱空间 E 的稳定同伦群定义的广义(上)同调理论. 分别记这样的广义同调群和广义上同调群为 $H_*(X;E)$ 和 $H^*(X;E)$, 广义(上)同调群也对应着约化广义(上)同调群. 而(约化)广义(上)同调群满足本节所有的一般性质, 即把系数群 G 改为谱空间 E, 所有(约化)广义(上)同调群也成立. 但是约化广义同调群不满足 $\widetilde{H}_k(S^n;E) = 0$ 对于 $k \neq n$. 分次Abel群 $\widetilde{H}_*(S^0;E) = H_*(*;E)$ 唯一决定了不同的广义(上)同调理论的区别, 称为广义(上)同调理论的系数群. 比如, 球面稳定同伦群 $\pi_*^S(S^0)$ 就是系数群.

3.4 同调群和上同调群的计算

胞腔链复形是计算CW复形的最简单的方法.

例3.4.1 S^n 的(上)同调群可以通过同纬同构计算, 也可以通过最简单的胞腔结构计算. 下面我们用以下的胞腔结构

$$S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^{n-1} \subset S^n$$

来计算, 其中 k 维骨架为 S^k, 有两个 k-胞腔 $e_+^k = S_+^k$ 和 $e_-^k = S_-^k$, 特征映射 $\phi_\pm^k \colon (D^k, S^{k-1}) \to (S_\pm^k, \partial(S_\pm^k))$ 取为

$$\phi_\pm^k(x_1, \cdots, x_k) = (x_1, \cdots, x_k, \pm\sqrt{1-r^2}\,), \quad r^2 = \Sigma_{i=1}^k x_i^2.$$

再取同胚映射 $\phi_k \colon (S^k, (0,\cdots,0,-1)) \to (D^k/S^{k-1}, *)$ 为 $\phi_k(x_1, \cdots, x_{k+1}) = [\frac{1}{2}(1-x_{k+1})(x_1, \cdots, x_k)]$. 取定以上映射后就确定粘合度为 $[e_\pm^k; e_+^{k-1}] = 1$, $[e_\pm^k; e_-^{k-1}] = -1$. 所以胞腔链复形 $(C_*(S^n), d)$ 如下

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e_+^{n+1}, e_-^{n+1}) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e_+^n, e_-^n) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e_+^{n-1}, e_-^{n-1}) \xrightarrow{d} \cdots,$$

其中 $de_+0 = 0$, $de_-^0 = 0$. 由此不难算出 $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$, $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $H_k(S^n) = 0$ 如果 $k \neq 0, n$.

而球面以上的胞腔结构可以继承到射影平面 $RP^n = S^n/\!\sim$ 上, 其中 $\sim$ 将对径点等价. 具体地, RP^n 有以下胞腔结构

$$* = RP^0 \subset RP^1 \subset \cdots \subset RP^{n-1} \subset RP^n,$$

其中 k 维骨架为 RP^k, 也是唯一的 k-胞腔 $e^k = RP^k$, 看成 S^n 的胞腔 e^k_+ 和 e^k_- 粘合起来得到的胞腔. 所以特征映射也由 S^n 的特征映射和商映射复合得来. 而且 $[e^k; e^{k-1}] = [e^k_\pm; e^{k-1}_+] + (-1)^{k+1}[e^k_\pm; e^{k-1}_-] = 1 + (-1)^{k+1}$. 所以 RP^n 的胞腔链复形 $(C_*(RP^n), d)$ 如下

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e^2) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e^1) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}(e^0) \xrightarrow{d} 0,$$

其中 $de^{2k} = 0$, $de^{2k+1} = 2e^{2k}$. 因此 $H_k(RP^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $k = 0, 1, \cdots, n$, $H_k(RP^n) = 0$ 如果 $k < 0$ 或者 $k > n$.

对于有限型自由链复形 (C_*, d) 来说, $H_*(C_*)$ 可以归纳计算, 这里有限型是指存在 M, N 使得 $C_k = 0$ 对于 $k < M$ 和 $k > N$, 每个非零的 C_k 都是有限生成的自由Abel群. 假设 $H_{n-1}(C_*)$ 和 $\ker d_n$ 已经算出. 由于 $\ker d_n$ 为自由群 C_n 的子群, 所以仍为自由群, 因此存在 $x_1, \cdots, x_s \in C_n$ 使得 $\ker d_n = \mathbb{Z}(x_1, \cdots, x_s)$, 而且 x_i 表示成 C_n 的生成元的线性组合系数都已经确定. 设 $y_1, \cdots, y_t$ 为 C_{n+1} 的生成元, 满足 $dy_i = \Sigma_j c_{i,j} x_j$, $c_{i,j} \in \mathbb{Z}$. 则得一微分表

	x_1	$\cdots$	x_s
y_1	$c_{1,1}$	$\cdots$	$c_{1,s}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_t	$c_{t,1}$	$\cdots$	$c_{t,s}$

通过变换生成元组就可以得到同调群的标准形式. 具体地, 通过做初等变换把以上整数部分的矩阵化为对角型. 在做行变换的时候, 第一列的 y_i 也同样做相应的变换, 比如

	x_1	$\cdots$	x_s
y_1	$c_{1,1}$	$\cdots$	$c_{1,s}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_t	$c_{t,1}$	$\cdots$	$c_{t,s}$

变为

	x_1	$\cdots$	x_s
y_1	$c_{1,1}$	$\cdots$	$c_{1,s}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_t + ry_1$	$c_{t,1} + rc_{1,1}$	$\cdots$	$c_{t,s} + rc_{1,s}$

同样, 在做列变换的时候, 第一行的 x_i 也对应做逆变换. 所谓逆变换就是乘以 -1 和交换两列的逆变换还是乘以 -1 和交换两列. 但是第三类列变换就如下所示.

	x_1	$\cdots$	x_s
y_1	$c_{1,1}$	$\cdots$	$c_{1,s}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_t	$c_{t,1}$	$\cdots$	$c_{t,s}$

变为

	$x_1 - rx_s$	$\cdots$	x_s
y_1	$c_{1,1}$	$\cdots$	$c_{1,s} + rc_{1,1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_t	$c_{t,1}$	$\cdots$	$c_{t,s} + rc_{t,1}$

这样就得到以下将生成元组 $x_1, \cdots, x_s$ 换为生成元组 $x'_1, \cdots, x'_u, x''_1, \cdots, x''_v, x'''_1, \cdots, x'''_w$, 将生成元组 $y_1, \cdots, y_t$ 换为生成元组 $y'_1, \cdots, y'_u, y''_1, \cdots, y''_v, y'''_1, \cdots, y'''_r$ 的新的微分表.

	x_1'	$\cdots$	x_u'	x_1''	$\cdots$	x_v''	x_1'''	$\cdots$	x_w'''
y_1'	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_u'	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
y_1''	0	$\cdots$	0	l_1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_v''	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	l_v	0	$\cdots$	0
y_1'''	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_r'''	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0

其中 x_i', x_i'', x_i''' 由 $x_1, \cdots, x_s$ 线性表出, y_i', y_i'', y_i''' 由 $y_1, \cdots, y_t$ 线性表出, $l_i > 1$, $l_i \mid l_{i+1}$. 则

$$
\begin{aligned}
& H_n(C_*) \\
= \ & \mathbb{Z}(x_1'', \cdots, x_v'', x_1''', \cdots, x_w'''; l_1 x_1'', \cdots, l_v x_v'') \\
= \ & \mathbb{Z}(x_1''', \cdots, x_w''') \oplus \ \mathbb{Z}(x_1''; l_1 x_1'') \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(x_v''; l_v x_v''), \\
= \ & \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{w} \oplus \ \mathbb{Z}_{l_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{l_v},
\end{aligned}
$$

并且 $\ker d_{n+1} = \mathbb{Z}(y_1''', \cdots, y_r''')$. 所以归纳地可计算 $H_*(C_*)$. 再将以上的每个 $\mathbb{Z}_{l_i}$ 化为 $\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{r_s}}$ 的形式, 其中每个 p_i 为素数, 就得到 $H_n(C_*)$ 的标准形式了.

对偶地, 有限型自由上链复形 (C^*, δ) 可以把次数从上往下归纳, 看作链复形来计算.

这里需要强调的是, 计算(上)同调群一定要写成标准形式, 不可以只给出一个Abel群的组合表示!

例3.4.2 对于 $n > 2$, 把 S^{n-2} 看成 $\mathbb{R}^n$ 中以下子空间

$$S^{n-2} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

则群 $\mathbb{Z}_n$ 自由作用在 S^{n-2} 如下. $1(x_1, \cdots, x_p) = (x_2, \cdots, x_p, x_1)$, 其中 1 为 $\mathbb{Z}_n$ 的生成元. 于是得到商空间 $T_n = S^{n-2}/\mathbb{Z}_n = S^{n-2}/\!\sim$, 其中 $x \sim y$ 如果 $x = gy$ 对某个 $g \in \mathbb{Z}_n$. 下面计算 $H_*(T_7)$.

把 S^{n-2} 看成标准 $(n-1)$-单形的边 $\partial\Delta^{n-1}$, 则 $T_n \cong (\partial\Delta^{n-1})/\!\sim$, 其中 $\{i_0, \cdots, i_k\} \sim \{i_0+1, \cdots, i_k+1\}$ 对所有 $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k < n$, 下标取 $\mathbb{Z}_n$ 中的元素, 即 $i = i+n$. 记 $q \colon \partial\Delta^{n-1} \to T_n$ 为商映射. 当 n 是素数 p 时, q 限制在每个单形的内部 $\hat{\sigma}$ 都是同胚, 所以 $\{\mathrm{Cl}(q(\hat{\sigma}))\}_{\sigma \in \partial\Delta^{p-1}}$ 就构成 T_p 的胞腔复形结构. 记 $\sigma = \{i_0, \cdots, i_k\}$ 对应的胞腔 $\mathrm{Cl}(q(\hat{\sigma}))$ 在 $C_*(T_p)$ 中的生成元为 $\lfloor i_0, \cdots, i_k \rfloor$ 的形式, 则这些生成元在形式上满足和单纯链复形完全一样的性质, 只不过多了一些等价关系. 具体如下.

(1) $\lfloor i_0, \cdots, i_k \rfloor = \lfloor i_0+1, \cdots, i_k+1 \rfloor$.

(2) $\lfloor i_{\pi(0)}, \cdots, i_{\pi(k)} \rfloor = \tau(\pi) \lfloor i_0, \cdots, i_k \rfloor$.

(3) $d\lfloor i_0, \cdots, i_k \rfloor = \Sigma_{s=0}^k (-1)^s \lfloor i_0, \cdots, \widehat{i_s}, \cdots, i_k \rfloor$.

(4) $C_k(T_p)$ 的生成元个数为 $\binom{p}{k}/p$.

对于 T_7, 我们有

$$C_0(T_7) = \mathbb{Z}(\lfloor 1 \rfloor),$$

$$C_1(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2\rfloor,\lfloor 1,3\rfloor,\lfloor 1,4\rfloor),$$

$$C_2(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2,3\rfloor,\lfloor 1,2,4\rfloor,\lfloor 1,2,5\rfloor,\lfloor 1,2,6\rfloor,\lfloor 1,3,5\rfloor),$$

$$C_3(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2,3,4\rfloor,\lfloor 1,2,3,5\rfloor,\lfloor 1,2,3,6\rfloor,\lfloor 1,2,4,5\rfloor,\lfloor 1,2,4,6\rfloor),$$

$$C_4(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2,3,4,5\rfloor,\lfloor 1,2,3,4,6\rfloor,\lfloor 1,2,3,5,6\rfloor),C_5(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2,3,4,5,6\rfloor).$$

所以 $H_0(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1\rfloor)\cong\mathbb{Z}$, $Z_1=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2\rfloor,\lfloor 1,3\rfloor,\lfloor 1,4\rfloor)$. 将以下微分表

	$\lfloor 1,2\rfloor$	$\lfloor 1,3\rfloor$	$\lfloor 1,4\rfloor$
$\lfloor 1,2,3\rfloor$	2	-1	0
$\lfloor 1,2,4\rfloor$	1	1	-1
$\lfloor 1,2,5\rfloor$	1	0	2
$\lfloor 1,2,6\rfloor$	1	1	-1
$\lfloor 1,3,5\rfloor$	0	2	1

的整数部分化为对角型得

	$\lfloor 1,2\rfloor+\lfloor 1,3\rfloor-\lfloor 1,4\rfloor$	$\lfloor 1,3\rfloor-3\lfloor 1,4\rfloor$	$\lfloor 1,4\rfloor$
$\lfloor 1,2,4\rfloor$	1	0	0
$\lfloor 1,2,4\rfloor-\lfloor 1,2,5\rfloor$	0	1	0
$2\lfloor 1,2,5\rfloor-2\lfloor 1,2,4\rfloor+\lfloor 1,3,5\rfloor$	0	0	7
$k_{2,1}=\lfloor 1,2,6\rfloor-\lfloor 1,2,4\rfloor$	0	0	0
$k_{2,2}=\lfloor 1,2,3\rfloor-\lfloor 1,2,5\rfloor-\lfloor 1,2,4\rfloor+\lfloor 1,3,5\rfloor$	0	0	0

所以 $H_1(T_7)\cong\mathbb{Z}_7$, $Z_2=\mathbb{Z}(k_{2,1},k_{2,2})$. 将以下微分表

	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$
$\lfloor 1,2,3,4\rfloor$	-1	0
$\lfloor 1,2,3,5\rfloor$	0	-1
$\lfloor 1,2,3,6\rfloor$	1	-1
$\lfloor 1,2,4,5\rfloor$	1	0
$\lfloor 1,2,4,6\rfloor$	1	0

的整数部分化为对角型得

	$k_{2,1}$	$k_{2,2}$
$-\lfloor 1,2,3,4\rfloor$	1	0
$-\lfloor 1,2,3,5\rfloor$	0	1
$k_{3,1}=\lfloor 1,2,4,5\rfloor+\lfloor 1,2,3,4\rfloor$	0	0
$k_{3,2}=\lfloor 1,2,4,6\rfloor+\lfloor 1,2,3,4\rfloor$	0	0
$k_{3,3}=\lfloor 1,2,3,6\rfloor+\lfloor 1,2,3,4\rfloor-\lfloor 1,2,3,5\rfloor$	0	0

所以 $H_2(T_7)=0$, $Z_3=\mathbb{Z}(k_{3,1},k_{3,2},k_{3,3})$. 将以下微分表

	$k_{3,1}$	$k_{3,2}$	$k_{3,3}$
$\lfloor 1,2,3,4,5\rfloor$	1	0	1
$\lfloor 1,2,3,4,6\rfloor$	0	2	-1
$\lfloor 1,2,3,5,6\rfloor$	2	-1	-1

的整数部分化为对角型得

	$k_{3,1}+k_{3,3}$	$k_{3,2}+3k_{3,3}$	$k_{3,3}$
$\lfloor 1,2,3,4,5\rfloor$	1	0	0
$2\lfloor 1,2,3,4,5\rfloor-\lfloor 1,2,3,5,6\rfloor$	0	1	0
$4\lfloor 1,2,3,4,5\rfloor-\lfloor 1,2,3,4,6\rfloor-2\lfloor 1,2,3,5,6\rfloor$	0	0	7

所以 $H_3(T_7)\cong\mathbb{Z}_7$, $Z_4=0$. 所以 $H_4(T_7)=0$, $H_5(T_7)=\mathbb{Z}(\lfloor 1,2,3,4,5,6\rfloor)\cong\mathbb{Z}$.

对偶地, 上链复形 $C^*(T_7),\delta)$ 的生成元为

$$C^0(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1\rceil),$$

$$C^1(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2\rceil,\lceil 1,3\rceil,\lceil 1,4\rceil),$$

$$C^2(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3\rceil,\lceil 1,2,4\rceil,\lceil 1,2,5\rceil,\lceil 1,2,6\rceil,\lceil 1,3,5\rceil),$$

$$C^3(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3,4\rceil,\lceil 1,2,3,5\rceil,\lceil 1,2,3,6\rceil,\lceil 1,2,4,5\rceil,\lceil 1,2,4,6\rceil),$$

$$C^4(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3,4,5\rceil,\lceil 1,2,3,4,6\rceil,\lceil 1,2,3,5,6\rceil),C^5(\partial_7/_\sim)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3,4,5,6\rceil).$$

$H^5(T_7)=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3,4,5,6\rceil)\cong\mathbb{Z}$, $Z_4=\mathbb{Z}(\lceil 1,2,3,4,5\rceil,\lceil 1,2,3,4,6\rceil,\lceil 1,2,3,5,6\rceil)$. 将以下微分表

	$a=\lceil 1,2,3,4,5\rceil$	$b=\lceil 1,2,3,4,6\rceil$	$c=\lceil 1,2,3,5,6\rceil$
$\lceil 1,2,3,4\rceil$	2	1	0
$\lceil 1,2,3,5\rceil$	-1	1	1
$\lceil 1,2,3,6\rceil$	1	-1	-1
$\lceil 1,2,4,5\rceil$	1	0	2
$\lceil 1,2,4,6\rceil$	0	2	-1

的整数部分化为对角型得

	$a-b-c$	$b+3c$	c
$\lceil 1,2,3,6\rceil$	1	0	0
$\lceil 1,2,4,5\rceil+\lceil 1,2,3,5\rceil$	0	1	0
$2\lceil 1,2,4,5\rceil+2\lceil 1,2,3,5\rceil-\lceil 1,2,4,6\rceil$	0	0	7
$k^*_{3,1}=\lceil 1,2,3,4\rceil+\lceil 1,2,3,5\rceil-\lceil 1,2,4,5\rceil-\lceil 1,2,4,6\rceil$	0	0	0
$k^*_{3,2}=\lceil 1,2,3,6\rceil+\lceil 1,2,3,5\rceil$	0	0	0

所以 $H^4(T_7)\cong\mathbb{Z}_7$, $Z_3=\mathbb{Z}(k^*_{3,1},k^*_{3,2})$. 将以下微分表

	$k^*_{3,1}$	$k^*_{3,2}$
$\lceil 1,2,3\rceil$	0	-1
$\lceil 1,2,4\rceil$	1	0
$\lceil 1,2,5\rceil$	0	1
$\lceil 1,2,6\rceil$	-1	1
$\lceil 1,3,5\rceil$	0	-1

的整数部分化为对角型得

	$k^*_{3,1}$	$k^*_{3,2}$
$\lceil 1,2,4\rceil$	1	0
$\lceil 1,2,5\rceil$	0	1
$k^*_{2,1}=\lceil 1,2,3\rceil+\lceil 1,2,5\rceil$	0	0
$k^*_{2,2}=\lceil 1,2,5\rceil+\lceil 1,3,5\rceil$	0	0
$k^*_{2,3}=\lceil 1,2,4\rceil-\lceil 1,2,5\rceil+\lceil 1,2,6\rceil$	0	0

所以 $H^3(T_7)=0$, $Z_2=\mathbb{Z}(k^*_{2,1},k^*_{2,2},k^*_{2,3})$. 将以下微分表

	$k^*_{2,1}$	$k^*_{2,2}$	$k^*_{2,3}$
$\lceil 1,2\rceil$	2	0	1
$\lceil 1,3\rceil$	-1	2	1
$\lceil 1,4\rceil$	0	1	-1

的整数部分化为对角型得

	$k^*_{2,1}-2k^*_{2,2}+k^*_{2,3}$	$k^*_{2,2}-k^*_{2,3}$	$k^*_{2,3}$
$-\lceil 1,3\rceil$	1	0	0
$\lceil 1,4\rceil$	0	1	0
$\lceil 1,2\rceil+2\lceil 1,3\rceil-4\lceil 1,4\rceil$	0	0	7

所以 $H^2(T_7)\cong\mathbb{Z}_7$, $Z_1=0$. 所以 $H^1(T_7)=0$, $H^0(T_7)=\mathbb{Z}(\lceil 1\rceil)\cong\mathbb{Z}$.

上同调群可以通过泛系数定理来计算. 当系数群取数域 F 时, 将以上的运算在数域中进行就得可以算出 $H_*(T_7;F)$ 和 $H^*(T_7;F)$. 当然也可以用泛系数定理来计算. 而任意系数的计算就通过泛系数定理来计算简单. 不难用以上两种方法的任何一种算出 $H_k(T_7;\mathbb{Z}_7)=\mathbb{Z}_7$ 当 $k=0,1,\cdots,5$, 其它情况 $H_k(T_7;\mathbb{Z}_7)=0$.

注意, 当 n 不是素数时, 以上方法不成立, 因为商投射 q 限制在每个单形的内部不再是同胚了.

通过上例我们不难看出(上)同调群的计算无法在理论上做一般的归纳, 因为涉及到素数. 比如, 我们很容易有以下猜想: 对任何素数 $p>2$, $H_k(T_p;\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$ 当 $k=0,1,\cdots,p-2$, 其它情况 $H_k(T_p;\mathbb{Z}_p)=0$. 这个猜想是正确的, 但绝不可能是通过以上的计算做归纳得出的.

3.5 同调代数简介

泛系数定理涉及了群 $\mathrm{Tor}(A,B)$ 和 $\mathrm{Ext}(A,B)$ 的定义, 那么这些群的同构类为什么不依赖于自由分解的选取呢? 这就涉及同调代数理论. 而适用范围最泛, 对偶性质最完整的同调代数理论是建立在(不分次)环上的模论的基础之上的.

定义3.5.1 一个环 R 是指存在满足以下性质的乘法的Abel群. 我们总是记 a 和 b 的乘积元为 ab.

(1) (结合律) 对任何 $a,b,c\in R$, $(ab)c=a(bc)$.

(2) (分配律) 对任何 $a,a',b,b'\in R$, $(a+a')b=ab+a'b$, $a(b+b')=ab+ab'$.

(3) (单位性) 存在恒等元(也称单位元) $1\in R$ 使得 $1a=a1=a$ 对所有 $a\in R$.

R 称为交换环, 如果 $ab=ba$ 对所有 $a,b\in R$.

等价地, 一个环 R 是指存在满足以下性质的乘法群同态 $\mu\colon R\otimes R\to R$ 的Abel群.

(1) (结合律) 对任何 $\mu(1_R\otimes\mu)=\mu(\mu\otimes 1_R)$.

(2) (单位性) 存在恒等元 $1\in R$ 使得 $\mu(1\otimes a)=\mu(a\otimes 1)=a$ 对所有 $a\in R$.

R 称为交换环, 如果 $\mu T=\mu$, 其中 $T\colon R\otimes R\to R\otimes R$ 定义为 $T(a\otimes b)=b\otimes a$ 对所有 $a,b\in R$.

3.5.2 一个左 R-模 M 是指存在满足以下性质的 R 的左作用的Abel群. 我们总是记 $r\in R$ 在 $m\in M$ 上的左作用元为 rm.

(1) (结合律) 对任何 $r,r'\in R$ 和 $m\in M$, $(rr')m=r(r'm)$.

(2) (分配律) 对任何 $r,r'\in R$ 和 $m,m'\in M$, $(r+r')m=rm+r'm$, $r(m+m')=rm+rm'$.

(3) (单位性) 对于恒等元 $1\in R$, 我们有 $1m=m$ 对所有 $m\in M$.

等价地, 一个左 R-模 M 是指存在满足以下性质的群同态 $\mu\colon R\otimes M\to M$ 的Abel群.

(1) (结合律) 对任何 $\mu(1_R\otimes\mu)=\mu(\mu\otimes 1_M)$ ($\mu\otimes 1_M$ 中的 μ 是 R 的乘法).

(2) (单位性) 对于恒等元 $1\in R$, 我们有 $\mu(1\otimes a)=a$ 对所有 $a\in R$.

两个左 R-模之间的模同态是指一个群同态 $f\colon M\to N$ 满足 $f(rm)=rf(m)$ 对所有 $r\in R$ 和 $m\in M$. 两个左 R-模 M 和 N 是同构的, 记为 $M\cong N$, 如果存在模同态 $f\colon M\to N$ 和 $g\colon N\to M$ 使得 $gf=1_M$, $fg=1_N$.

完全类似地, 我们有右 R-模, 右 R-模的模同态和同构的定义.

一个双 R-模 M 既是一个左 R-模, 又是一个右 R-模, 而且两种模作用一致地满足结合律, 即 $(rm)r'=r(mr')$ 对所有 $r,r'\in R$ 和 $m\in M$.

当 R 是交换环时, 规定 $rm=mr$, 则左模, 右模, 双模的定义都一样. 所以对于交换环 R, 只有模的定义, 而没有左模, 右模和双模的区别. 对于群 G 上的左群模 M, 也就是左 $\mathbb{Z}(G)$-模, M 自然也是个右模, 定义为 $mg=g^{-1}m$ 对所有 $g\in g$ 和 $m\in M$, 显然也是个双模. 所以群模也只有模的定义, 没有左模, 右模和双模的区别. 推而广之, 如果环 R 有一个反自同构 $(-)^c\colon R\to R$ 满足 $(rr')^c=(r')^cr^c$, 则也只有 R-模, 没有左模, 右模和双模的区别.

为了节省文字, 如果不引起误解, 我们总是省略 R 字样, 也就是说一个左(右, 双)模, 都是指 R-模. 当描述左模, 右模, 双模都具有的性质时, 就用模代替, 而且具体的模作用只用左模的情形代替.

定义3.5.3 对于一族模 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 直积群 $\Pi_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ 和直和群 $\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ 都还是模, 分别称为直积模和直和模, 其模作用定义为 $r(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}=(rm_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

一个自由模 $R(S)$ 是指直和模 $\oplus_{s\in S}R_s$, 其中每个 $R_s=R$, 称为由集合 S 生成的左模. 由于 R 自然是模, 所以以上定义确实是模. 所以我们记 $R(S)$ 的一般元为如下形式 $r_1s_1+\cdots+r_ns_n$, 其中 $r_i\in R$, $s_i\in S$. S 称为自由模的生成元集. 可 R 又自然是双模, 所以自由模自然地就是双模, 不过自由模的子模却有左子模, 右子模和双子模之分.

对偶地, 一个上自由模 $R^\circ(S)$ 是指直积模 $\Pi_{s\in S}R_s^\circ$, 其中每个 $R_s^\circ=R^\circ$, 而 $R^\circ=\mathrm{Hom}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 由所有从 R 到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的Abel群同态构成, 其左模结构定义为 $(r\phi)(s)=\phi(rs)$ 对所有 $r,s\in R$ 和 $\phi\in\mathrm{Hom}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 显然还可以定义右模结构为 $(\phi r)(s)=\phi(sr)$. 所以上自由模自然地也是双模, 不过上自由模的子模却有左子模, 右子模和双子模之分.

以上定义的 R° 中的 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 完全可以被任何一个可除Abel群替代, 其中可除Abel群 A 为满足以下性质的群. 对任何 $a\in A$, $a\neq 0$, 和 $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\neq 0$, 存在(不一定唯一) $b\in A$ 使得 $\lambda b=a$. 我们取 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 只不过因为是所有可除Abel群中最“小”的一个.

同自由Abel群一样, 自由模 $R(S)$ 也有以下性质. *自由模 $R(S)$ 到任何模的模同态由生成元的像唯一决定, 等价地, 模同态 $\phi\colon R(S)\to N$ 由限制对应 $\phi|_S\colon S\to N$ 唯一决定*. 由此性质, 我们定义或者描述一个自由模到另一个模上的模同态 ϕ, 只要定义或者描述每个生成元的像 $\phi(s)$ 就可以了. 具体地, 如果对每个 $s\in S$, 我们确定了 $\phi(s)$, 则对任何 $r_1s_1+\cdots+r_ns_n\in R(S)$, 定义 $\phi(r_1s_1+\cdots+r_ns_n)=r_1\phi(s_1)+\cdots+r_n\phi(s_n)$. 不过这个过分依赖生成元的性质没有对偶的性质, 所以被以下的更抽象却更广泛的投射性取代.

定义3.5.4 投射模 P 满足以下投射性质. 对于任何满的模同态 $f\colon M\to N$ 和模同态 $g\colon P\to N$, 存在模同态 $h\colon P\to M$ 使得 $g=fh$. 形象地说, 下图中左边的满射 f 决定了右边的交换图中 h 的存在性.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd} \qquad f\text{ 满蕴含} \qquad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

对偶地, 内射模 I 满足以下内射性质. 对于任何单的模同态 $f\colon M\to N$ 和模同态 $g\colon M\to I$, 存在模同态 $h\colon N\to I$ 使得 $g=hf$. 形象地说, 下图中左边的单射 f 决定了右边的交换图中 h 的存在性.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ I & \end{tikzcd} \qquad f\text{ 单蕴含} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

定理3.5.5 自由模为投射模. 任何模都是自由模的商模.

对偶地, 上自由模是内射模. 任何模都是上自由模的子模.

证 对于满的模同态 $f\colon M\to N$ 和模同态 $g\colon R(S)\to N$, 定义模同态 $h\colon R(S)\to M$ 如下. 对 $s\in S$, 任取 $z\in f^{-1}(g(s))$, 定义 $h(s)=z$. 则显然 h 满足 $g=fh$. 所以自由模为投射模.

对任意模 M, 定义自由模到 M 的模同态 $\varepsilon\colon R(M)\to M$ 为 $\varepsilon(m)=m$ 对所有 $m\in M$. 显然 ε 为满射, 所以 $M=R(M)/\mathrm{im}\,\varepsilon$ 为自由群的商群.

对偶情形, 我们首先证明一个群同构 $\Phi\colon \mathrm{Hom}_R(M,R^\circ)\to \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 这个同构来自于公式 $(a^b)^c=a^{bc}$ 在Abel群中的推广 $\mathrm{Hom}(C,\mathrm{Hom}(B,A))=\mathrm{Hom}(C\otimes B,A)$, 其中取 $C=M$, $B=\mathbb{Z}$, $A=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 具体地, 对于 $\phi\in \mathrm{Hom}_R(M,R^\circ)$, 定义 $\Phi(\phi)=\varphi\in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为 $\varphi(m)=\phi(m)(1)$ 对所有 $m\in M$. 反之, 对于 $\varphi\in \mathrm{Hom}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 定义 $\Phi^{-1}(\varphi)=\phi\in \mathrm{Hom}_R(M,R^\circ)$ 为 $\phi(m)(1)=\varphi(m)$ 对所有 $m\in M$. 很容易验证这确实是个群同构. 群同构 Φ 的非常重要的作用是, 将模 M 到上自由模 R° 的模同态的存在性问题转化为忘记模结构的Abel群 M 到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的Abel群同态的存在性问题.

现证 R° 为内射模. 对于单的模同态 $f\colon M\to N$ 和模同态 $g\colon M\to R^\circ$, 由上面的群同构, 存在Abel群同态 $\phi=\Phi(g)\colon M\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 现将 ϕ 扩张为 $\psi\colon N\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 假设 ψ 已经扩张到 N 的子群 N' 上, 任取 $x\notin N'$. 如果存在整数 $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\neq 0$ 使得 $\lambda x\in N'$, 则定义 $\psi(x)=\lambda^{-1}\psi(\lambda x)$. 如果对任何整数 $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\neq 0$, 都有 $\lambda x\notin N'$, 则定义 $\psi(x)=0$. 于是 ψ 又可以扩张到 $N'+\mathbb{Z}(x)$ 上. 由Zorn引理, ϕ 一定可以扩张到最大的子群, 就是 N 自己上的 ψ. 则 $h=\Phi^{-1}(\psi)$ 满足 $g=hf$. 所以 R° 为内射模.

由直积模的同态提升性可知上自由模作为若干 R° 的直积群仍为内射模.

对于模 M 和 $m\in M$, 记 (m) 为 M 的由 m 生成的子模. 同上面的将 ϕ 扩张为 ψ 的证明类似, 利Zorn引理可以证明存在Abel群同态 $\psi_m\colon (m)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 满足 $\psi_m(m)=1$. 于是得到模同态 $i_m=\Phi^{-1}(\psi_m)\colon (m)\to R^\circ$. 再由 R° 的内射性, 由 (m) 到 M 的内射推出存在模同态 $\bar{i}_m\colon M\to R^\circ$ 为 i_m 的扩张同态. 再由直积模的同态提升性可知同态族 $\{\bar{i}_m\}_{m\in M,m\neq 0}$可以唯一提升到模同态 $i_M\colon M\to \Pi_{n\in M,n\neq 0}R^\circ_n$, 其中每个 $R^\circ_n=R^\circ$. 显然 i_M 为单同态.

定义3.5.6 两个模 M 和 N 的同态群 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 是由所有两模间的模同态构成的Abel群, 其加法定义为 $(f+g)(m)=f(m)+g(m)$.

对于模同态 $\phi\colon U\to M$ 和 $\psi\colon N\to V$, 我们有Abel群同态 $\mathrm{Hom}_R(\phi,\psi)\colon \mathrm{Hom}_R(M,N)\to \mathrm{Hom}_R(U,V)$ 定义为 $\mathrm{Hom}_R(\phi,\psi)f=\psi f\phi$ 对所有 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

一个右模 M 和一个左模 N 的张量积群 $M\otimes_R N$ 为如下定义的Abel群. 令 L 为忘记模结构的Abel群的张量积群 $M\otimes N$ 的子群, 由所有形如 $mr\otimes n-m\otimes rn$, $r\in R$, $m\in M$, $n\in N$, 的元生成. 则 $M\otimes_R N=(M\otimes N)/L$. 我们仍记 $M\otimes_R N$ 中的生成元为 $m\otimes n$ 的形式, 只不过在 $M\otimes_R N$ 中, $mr\otimes n=m\otimes rn$.

对于右模同态 $\phi\colon M\to U$ 和左模同态 $\psi\colon N\to N$, 我们有Abel群同态 $\phi\otimes_R\psi\colon M\otimes_R N\to U\otimes_R V$ 定义为 $(\phi\otimes_R\psi)(m\otimes n)=\phi(m)\otimes\psi(n)$ 对所有 $m\otimes n\in M\otimes_R N$.

注意, 当 R 为交换环时, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 还是模. 但是当 R 不是交换环时, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 没有模结构, 只是Abel群. 对于 $r\in R$ 和 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, 只能定义 rf 为满足 $(rf)(m)=rf(m)$ 的群同态, 但这个群同态却不是模同态, 因为对于 $rr'\neq r'r$, 显然有 $(rf)(r'm)=rr'm\neq r'rm=r'((rf)(m))$. 类似地, 当 R 为交换环时, $M\otimes_R N$ 还是模, 或者当 M,N 至少有一个是双模时, $M\otimes_R N$ 也还是模. 其它情况下, $M\otimes_R N$ 一般没有模结构, 只是Abel群.

定理3.5.7 如果右模同态 $f\colon M\to N$ 为满同态, 则对任何左模 L, 群同态 $f\otimes_R 1_L\colon M\otimes_R L\to N\otimes_R L$ 为满同态. 同样, 如果左模同态 $f\colon M\to N$ 为满同态, 则对任何右模 L, 群同态 $1_L\otimes_R f\colon L\otimes_R M\to L\otimes_R N$ 为满同态.

如果模同态 $f\colon M\to N$ 为满同态, 则对任何模 L, 群同态 $\mathrm{Hom}_R(f,1_L)\colon \mathrm{Hom}_R(N,L)\to \mathrm{Hom}_R(M,L)$ 为单同态. 如果模同态 $f\colon M\to N$ 为单同态, 则对任何模 L, 群同态 $\mathrm{Hom}_R(1_L,f)\colon \mathrm{Hom}_R(L,M)\to \mathrm{Hom}_R(L,N)$

为单同态.

如果 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ 为模同态的短恰当序列, 则对任何投射模 P 和内射模 I, 我们都有模同态的恰当短恰当序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P, i)} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P, j)} \mathrm{Hom}_R(P, C) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(j, 1_I)} \mathrm{Hom}_R(B, I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(i, 1_I)} \mathrm{Hom}_R(A, I) \to 0.$$

证 前半部分同Abel群情形的证明完全一样. 后半部分由投射性和内射性的定义自然得出.

定义3.5.8 模 M 的自由分解是指以下模同态的长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{d_3} F_2(M) \xrightarrow{d_2} F_1(M) \xrightarrow{d_1} F_0(M) \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

其中每个 $F_n(M)$ 都是自由模. 称链复形 $(F_*(M), d)$ 为 M 的自由模链复形. 显然自由模链复形的同调群满足 $H_0(F_*(M)) = M$, $H_k(F_*(M)) = 0$ 如果 $k \neq 0$.

模 M 的投射分解是指以下模同态的长恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2(M) \xrightarrow{d_2} P_1(M) \xrightarrow{d_1} P_0(M) \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

其中每个 $P_n(M)$ 都是投射模. 特别地, 自由分解都是投射分解. 称链复形 $(P_*(M), d)$ 为 M 的投射模链复形. 显然投射模链复形的同调群满足 $H_0(P_*(M)) = M$, $H_k(P_*(M)) = 0$ 如果 $k \neq 0$.

对偶地, 模 M 的上自由分解是指以下模同态的长恰当序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} C_0(M) \xrightarrow{\delta_1} C_1(M) \xrightarrow{\delta_2} C_2(M) \xrightarrow{\delta_3} \cdots$$

其中每个 $C_n(M)$ 都是上自由模. 称上链复形 $(I_*(M), \delta)$ 为 M 的上自由模上链复形. 显然上自由模上链复形的上同调群满足 $H^0(I_*(M)) = M$, $H^k(I_*(M)) = 0$ 如果 $k \neq 0$.

模 M 的内射分解是指以下模同态的长恰当序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I_0(M) \xrightarrow{\delta_1} I_1(M) \xrightarrow{\delta_2} I_2(M) \xrightarrow{\delta_3} \cdots$$

其中每个 $I_n(M)$ 都是内射模. 称上链复形 $(I_*(M), \delta)$ 为 M 的内射模上链复形. 显然内射模上链复形的上同调群满足 $H^0(I_*(M)) = M$, $H^k(I_*(M)) = 0$ 如果 $k \neq 0$.

一个自然的问题就是, 以上分解总是存在么? 答案是肯定的. 由于任何模都是自由模的商模, 所以我们总有自由分解

$$\cdots \longrightarrow R(\ker d_1) \xrightarrow{d_2} R(\ker \varepsilon) \xrightarrow{d_1} R(M) \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

其中所有 d_n 和 ε 都是将左边自由模中的生成元映到右边模中的元素的同态. 所以自由分解总是存在的. 同样, 由任何模都是上自由模的子模也可以构造出上自由模分解.

定理3.5.9 模 M 的任何两个投射模链复形都是链同伦等价的, 对偶地, 模 M 的任何两个内射模上链复形都是链同伦等价的.

证 先证明对于模同态 $f\colon M\to N$, 存在导出的投射模链复形的链同态 $f_*\colon (P_*(M),d)\to(P_*(N),d)$, 也是以下交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & P_n(M) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1(M) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0(M) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[d, "f"'] \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(N) \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n(N) \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1(N) \arrow[r, "d_1"] & P_0(N) \arrow[r, "\varepsilon"] & N
\end{tikzcd}$$

构造如下. 由于 $\varepsilon\colon P_0(N)\to N$ 为满射并且 $P_0(M)$ 为投射模, 所以对于 $f\varepsilon$, 存在 f_0 使得 $\varepsilon f_0 = f\varepsilon$. 归纳地, 假设 f_n 已经定义, 则由于 $d_{n+1}f_nd_n = f_nd_{n+1}d_n = 0$, 所以 $d_{n+1}f_n$ 可以看成到 $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ 的满同态. 于是由下图中

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n+1}(M) \arrow[d, "d_{n+1}f_n"] \\
P_{n+1}(N) \arrow[r, "d_{n+1}"] & \ker d_n
\end{tikzcd}$$

的满射 d_{n+1} 可知存在 f_{n+1} 使得 $d_{n+1}f_{n+1} = f_nd_{n+1}$. 链同态 f_* 构造完成.

以上的链同态 f_* 显然不唯一. 下面证明如果 f_*, f'_* 都是导出的链同态, 则两者同伦. 由于 $\varepsilon f_0 = \varepsilon f'_0$, 所以 $f_0 - f'_0 \in \operatorname{imd} d_1$, 即 $f_0 - f'_0$ 可以看成到 $\operatorname{imd} d_1$ 的同态, 而 d_1 为到 $\operatorname{imd} d_1$ 的满同态, 由 $P_0(M)$ 的投射性, 存在 s 使得 $d_1 s = f_0 - f'_0$. 归纳地, 假设 s 已经在 $P_{n-1}(M)$ 上定义了, 并且满足 $d_n s + s d_{n-1} = f_{n-1} - f'_{n-1}$. 由于 $d_n(f_n - f'_n) = (f_{n-1} - f'_{n-1})d_n = d_n s d_n + s d_{n-1} d_n = d_n s d_n$, 所以 $f_n - f'_n - s d_n \in \operatorname{im} d_n$, 即可以看成到 $\operatorname{im} d_n$ 的同态, 而 d_n 为到 $\operatorname{imd} d_n$ 的满同态, 由 $P_n(M)$ 的投射性, 存在 s 使得 $d_n s = f_n - f'_n - s d_n$. 同伦 s 的归纳构造完成.

假设 $(P_*(M),d)$ 和 $(Q_*(M),d)$ 为 M 的两个不同的投射链复形, 则由以上结果可知存在链同态 f_* 和 g_* 满足以下交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & P_n(M) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1(M) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0(M) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[d, "1_M"'] \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}"] & Q_n(M) \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & Q_1(M) \arrow[r, "d_1"] & Q_0(M) \arrow[r, "\varepsilon"] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & Q_n(M) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & Q_1(M) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "g_1"'] & Q_0(M) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[d, "1_M"'] \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1}(M) \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n(M) \arrow[r, "d_n"] & \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1(M) \arrow[r, "d_1"] & P_0(M) \arrow[r, "\varepsilon"] & M
\end{tikzcd}$$

由链同态的同伦性可知 $g_*f_* \simeq 1_{P_*(M)}$, $f_*g_* \simeq 1_{Q_*(M)}$. 所以 $(P_*(M),d) \simeq (Q_*(M),d)$.

对偶地, 对于模同态 $f\colon M\to N$, 存在导出的内射模链复形的链同态 $f_*\colon (I_*(M),\delta)\to(I_*(N),\delta)$, 也是以下交换图

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"'] & I_0(M) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_0"'] & I_1(M) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & I_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"'] & I_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \cdots \\
N \arrow[r, "\varepsilon"] & I_0(N) \arrow[r, "\delta_1"] & I_1(N) \arrow[r, "\delta_2"] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & I_n(N) \arrow[r, "\delta_n"] & I_{n+1}(N) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义如下. 由于 $\varepsilon\colon M\to I_0(M)$ 为单射并且 $I_0(N)$ 为投射模, 所以对于 εf, 存在 f_0 使得 $f_0\varepsilon = \varepsilon f$. 归纳地, 假设 f_n 已经定义. 由 δ_n 导出单同态 $\delta'_n\colon I_n(M)/\operatorname{im}\delta_{n-1}\to I_{n+1}(M)$, 同样由 δ_nf_n 导出同态 $g_n\colon I_n(M)/\operatorname{im}\delta_{n-1}$

$\to I_{n+1}(N)$. 于是由下图中

$$\begin{tikzcd} I_n(M)/\operatorname{im}\delta_{n-1} \arrow[r, "\delta'_n"] \arrow[d, "g_n"'] & I_{n+1}(M) \\ I_{n+1}(N) & \end{tikzcd}$$

的单同态 δ'_n 可知存在 f_{n+1} 使得 $f_{n+1}\delta'_n = g_n$. f_{n+1} 自然满足 $f_{n+1}\delta_n = \delta_n f_n$. 链同态 f_* 构造完成.

以上的链同态 f_* 显然不唯一. 下面证明如果 f_*, f'_* 都是导出的链同态, 则两者同伦. 由于 δ_1 和 $f_0-f'_0$ 分别导出单同态 $\delta'_1\colon I_0(M)/\operatorname{im}\varepsilon \to I_1(M)$ 和同态 $g_0\colon I_0(M)/\operatorname{im}\varepsilon \to I_0(N)$, 而 $I_0(N)$ 又是内射模, 所以存在 $s\colon I_1(M) \to I_0(N)$ 使得 $g_0 = s\delta'_1$. s 自然满足 $s\delta_1 = f_0-f'_1$. 归纳地, 假设 s 已经在 $I_n(M)$ 上定义了, 并且满足 $s\delta_{n-1} + \delta_{n-2}s = f_{n-1}-f'_{n-1}$. 由于 $(f_n-f'_n)\delta_{n-1} = \delta_{n-1}(f_{n-1} - f'_{n-1}) = \delta_{n-1}s\delta_{n-1}+\delta_{n-1}\delta_{n-2}s = \delta_{n-1}s\delta_{n-1}$, 所以 $(f_n-f'_n-\delta_{n-1}s)\delta_{n-1} = 0$, 即 $f_n-f'_n-\delta_{n-1}s$ 导出同态 $g_n\colon I_n(M)/\operatorname{im}\delta_{n-1} \to I_n(N)$, 而 δ_n 导出单同态 $\delta'_n\colon I_n(M)/\operatorname{im}\delta_{n-1} \to I_{n+1}(M)$, 由 $I_n(N)$ 的内射性, 存在 s 使得 $s\delta'_n = g_n$. 而 s 自然满足 $s\delta_n = f_n-f'_n-\delta_{n-1}s$. 同伦 s 的归纳构造完成.

假设 $(I_*(M),\delta)$ 和 $(J_*(M),\delta)$ 为 M 的两个不同的内射上链复形, 则由以上结果可知存在链同态 f_* 和 g_* 满足以下交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "1_M"'] & I_0(M) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_0"'] & I_1(M) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & I_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"'] & I_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \cdots \\ M \arrow[r, "\varepsilon"] & J_0(M) \arrow[r, "\delta_1"] & J_1(M) \arrow[r, "\delta_2"] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & J_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] & J_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "1_M"'] & J_0(M) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "g_0"'] & J_1(M) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "g_1"'] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & J_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "g_n"'] & J_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & \cdots \\ M \arrow[r, "\varepsilon"] & I_0(M) \arrow[r, "\delta_1"] & I_1(M) \arrow[r, "\delta_2"] & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & I_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] & I_{n+1}(M) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

由链同态的同伦性可知 $g_*f_* \simeq 1_{I_*(M)}$, $f_*g_* \simeq 1_{J_*(M)}$. 所以 $(I_*(M),d) \simeq (J_*(M),d)$.

定义3.5.10 对于右模 M 和左模 N, 定义

$$\operatorname{Tor}^R_*(M,N) = H_*(P_*(M)\otimes_R N, d\otimes_R 1_N),$$

其中 $(P_*(M),d)$ 为 M 的任一投射模链复形. 由上定理可知该同调群不依赖于投射模的选取.

对于模 M 和 N (同为左模, 右模, 或者双模), 定义

$$\operatorname{Ext}^*_R(M,N) = H^*(\operatorname{Hom}_R(P_*(M),N), \operatorname{Hom}_R(d,1_N)),$$

其中 $(P_*(M),d)$ 为 M 的任一投射模链复形. 由上定理可知该上同调群不依赖于投射模的选取.

例3.5.11 对于任意(包括非交换)群 π, 是否可以定义它的同调群和上同调群呢? 一个自然的想法就是定义Eilenberg-Maclane空间 $K(\pi,1)$ 的(上)同调群为 π 的(上)同调群. 那么这个空间的(上)同调群的计算和以上同调代数定义的 Tor 和 Ext 群又是什么关系呢? 首先考虑 $K(\pi,1)$ 的泛覆盖空间 E. 由于群 π 自由地作用在 E 上, 所以 E 的约化胞腔链复形 $(\widetilde{C}_*(E),d)$ 满足对于 $n \geqslant 0$, 每个 $\widetilde{C}_n(E)$ 为一个自由 π-群模. 定义 (-1)-维胞腔(记成 1)生成的自由Abel群 $\mathbb{Z}$ 的 π 作用为 $g1 = 1$ 对所有 $g \in \pi$. 称 π 在 $\mathbb{Z}$ 的这个作用为平凡作用, 也称

这个群模为平凡群模(是个双模). 则 E 的约化胞腔链复形

$$\cdots \xrightarrow{d_3} \widetilde{C}_2(E) \xrightarrow{d_2} \widetilde{C}_1(E) \xrightarrow{d_1} \widetilde{C}_0(E) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

就是平凡群模 $\mathbb{Z}$ 的一个自由分解. 而 $K(\pi,1)$ 的胞腔链复形就是以下链复形

$$\cdots \xrightarrow{d_3\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}1_{\mathbb{Z}}} \widetilde{C}_2(E)\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}\mathbb{Z} \xrightarrow{d_2\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}1_{\mathbb{Z}}} \widetilde{C}_1(E)\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}\mathbb{Z} \xrightarrow{d_2\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}1_{\mathbb{Z}}} \widetilde{C}_0(E)\otimes_{\mathbb{Z}(\pi)}\mathbb{Z}$$

所以 $H_*(K(\pi,1)) = \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}(\pi)}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, $H^*(K(\pi,1)) = \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}(\pi)}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

定理3.5.12 对于右模 M 和左模 N, 我们有群同构

$$\mathrm{Tor}_*^R(M,N) \cong H_*(M\otimes_R Q_*(N), 1_M\otimes_R d),$$

其中 $(Q_*(N),d)$ 为 N 的任一投射模链复形.

对于模 M 和 N (同为左模, 右模或者双模), 我们有群同构

$$\mathrm{Ext}^*_R(M,N) \cong H^*(\mathrm{Hom}_R(M, I_*(N)), \mathrm{Hom}_R(1_M,\delta)),$$

其中 $(I_*(N),\delta)$ 为 N 的任一内射模链复形.

证 由于所有的投射模链复形都是同伦等价的, 所以我们取 M 和 N 的自由模链复形来计算. 记 M 的自由模链复形为 (P_*,d), 记 N 的自由模链复形为 (Q_*,d). 则我们得到以下张量积复形

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & P_2\otimes_R Q_2 & \to & P_1\otimes_R Q_2 & \to & P_0\otimes_R Q_2 & \to & M\otimes_R Q_2 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & P_2\otimes_R Q_1 & \to & P_1\otimes_R Q_1 & \to & P_0\otimes_R Q_1 & \to & M\otimes_R Q_1 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & P_2\otimes_R Q_0 & \to & P_1\otimes_R Q_0 & \to & P_0\otimes_R Q_0 & \to & M\otimes_R Q_0 & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & P_2\otimes_R N & \to & P_1\otimes_R N & \to & P_0\otimes_R N & \to & M\otimes_R N & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于 $R\otimes_R K = K$ 对任何左模 K, $L\otimes_R R = L$ 对任何右模 L, 以下两个恰当序列

$$\cdots \to P_2\otimes_R Q_n \to P_1\otimes_R Q_n \to P_0\otimes_R Q_n \to M\otimes_R Q_n \to 0$$

$$\cdots \to P_n\otimes_R Q_2 \to P_n\otimes_R Q_1 \to P_n\otimes_R Q_1 \to P_n\otimes_R N \to 0$$

都是若干自由分解的直和, 因而还是恰当的. 这就说明以上张量积链复形中除了最下一行和最右一列外, 每一行和每一列都是恰当的. 下面证明最下一行的同调群和最右一列的同调群同构, 即 $\mathrm{Tor}_*^R(M,N) = H_*(M\otimes_R Q_*(N), 1_M\otimes_R d)$.

为了节省空间, 把所有 $\otimes_R$ 简写成 $\otimes$, 所有恒等同态记为 1. 则张量积复形上有三个微分, 一个是竖着的微分 $1\otimes d$ 满足 $(1\otimes d)(x\otimes y) = (-1)^{|y|}x\otimes(dy)$, 一个是横着的微分 $d\otimes 1$ 满足 $(d\otimes 1)(x\otimes y) = (dx)\otimes y$, 另

一个是张量积微分 $d=(d\otimes 1)+(1\otimes d)$. 对于 $x\in P_n\otimes N$, $dx=(d\otimes 1)(x)=0$, 由 $P_n\otimes N$ 在竖的序列的恰当性, 存在 $y_1\in P_n\otimes Q_0$ 使得 $(1\otimes d)y_1=x$. 于是 $dy_1=(1\otimes d)y_1+(d\otimes 1)y_1=x+x_1$, $x_1\in P_{n-1}\otimes Q_0$. 所以 $0=d^2y_1=dx_1=0$. 由 $P_{n-1}\otimes Q_0$ 在竖的序列的恰当性, 存在 $y_2\in P_{n-1}\otimes Q_1$ 使得 $(1\otimes d)y_2=x_1$. 于是 $dy_2=(1\otimes d)y_2+(d\otimes 1)y_2=x_1+x_2$, $x_2\in P_{n-2}\otimes Q_1$. 所以 $0=d^2y_2=dx_2=0$. 由 $P_{n-2}\otimes Q_1$ 在竖的序列的恰当性, 存在 $y_3\in P_{n-2}\otimes Q_2$ 使得 $(1\otimes d)y_3=x_2$. 于是 $dy_3=(1\otimes d)y_3+(d\otimes 1)y_3=x_2+x_3$, $x_3\in P_{n-3}\otimes Q_2$. 如此下去, 就可以得到 $y_{n+1}\in P_0(M)\otimes Q_n$ 和 $x_{n+1}\in M\otimes Q_n$ 使得 $dy_{n+1}=x_n+x_{n+1}$, $dx_{n+1}=0$.

对于上述的 $x,x_1,\cdots,x_{n+1}$ 和 $y_1,\cdots,y_{n+1}$, 若存在 $u\in P_{n+1}\otimes N$ 使得 $dy=(d\otimes 1)y=x$, 由 $P_{n+1}\otimes N$ 在竖的序列的恰当性, 存在 $v\in P_{n+1}\otimes Q_0$ 使得 $(d\otimes 1)v=u$. 于是 $dv=(d\otimes 1)v+(1\otimes d)v=u+u_1$, $u_1\in P_n\otimes Q_0$. 所以 $0=d^2v=x+du_1$. 这说明 $(d\otimes 1)u_1=0$, $(1\otimes d)u_1=-x$. 因此, $(1\otimes d)(u_1+y_1)=0$. 由 $P_{n-1}\otimes Q_0$ 在竖的序列的恰当性, 存在 $v_1\in P_{n-1}\otimes Q_1$ 使得 $(d\otimes 1)v_1=u_1+y_1$. 于是 $dv_1=(d\otimes 1)v_1+(1\otimes d)v_1=u_1+y_1+u_2$, $u_2\in P_{n-2}\otimes Q_1$. 所以 $0=d^2v_1=x_1+du_2$. 这说明 $(d\otimes 1)u_2=0$, $(1\otimes d)u_2=-x_2$. 因此, $(1\otimes d)(u_2+y_2)=0$. 于是 $dv_2=(d\otimes 1)v_2+(1\otimes d)v_2=u_2+y_2+u_3$, $u_3\in P_{n-3}\otimes Q_2$. 所以 $0=d^2v_2=x_2+du_3$. 这说明 $(d\otimes 1)u_3=0$, $(1\otimes d)u_3=-x_3$. 如此下去, 就可以得到 $u_{n+1}\in M\otimes Q_{n+1}$ 使得 $du_{n+1}=-x_{n+1}$.

这说明对应 $[x]\to[x_{n+1}]$ 是由 $\mathrm{Tor}_*^R(M,N)$ 到 $H_*(M\otimes_R Q_*(N),1_M\otimes_R d)$ 的群同态. 而由 x_{n+1} 反构造可以又得到 x. 这就说明两个同调群是同构的.

对偶地, 取 M 的投射模链复形 (P_*,d) 和 N 内射模上链复形 $(I_*(N),\delta)$ 做以下同态群链复形, 其中为了节省空间, 我们把 $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ 简记为 $(-,-)_R$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & (P_2(M),N)_R & \to & (P_2(M),I_0(N))_R & \to & (P_2(M),I_1(N))_R & \to & (P_2(M),I_2(N))_R & \to & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & (P_1(M),N)_R & \to & (P_1(M),I_0(N))_R & \to & (P_0(M),I_1(N))_R & \to & (P_1(M),I_2(N))_R & \to & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & (P_0(M),N)_R & \to & (P_0(M),I_0(N))_R & \to & (P_0(M),I_1(N))_R & \to & (P_0(M),I_2(N))_R & \to & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & (M,N)_R & \to & (M,I_0(N))_R & \to & (M,I_1(N))_R & \to & (M,I_2(N))_R & \to & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

由定理3.5.7, 对于任何模同态的长恰当序列 $\cdots\to A_{n+1}\xrightarrow{i_{n+1}}A_n\xrightarrow{i_n}A_{n-1}\to 0$, 投射模 P 和内射模 I, 我们都有以下模同态的短序列 (n 任意)

$$0\to\mathrm{Hom}_R(P,\ker i_{n+1})\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P,i)}\mathrm{Hom}_R(P,A_n)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P,j)}\mathrm{Hom}_R(P,\ker i_{n-1})\to 0,$$

$$0\to\mathrm{Hom}_R(\ker i_{n-1},\,I\,)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(j,1_I)}\mathrm{Hom}_R(A_n,\,I\,)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(i,1_I)}\mathrm{Hom}_R(\ker i_{n+1},\,I\,)\to 0.$$

再把这些短恰当序列连接起来, 就得到了以下的长恰当序列

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_R(P,A_{n+1})\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P,i_{n+1})}\mathrm{Hom}_R(P,A_n)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(1_P,i_n)}\mathrm{Hom}_R(P,A_{n-1})\to\cdots,$$

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_R(A_{n-1},\,I\,)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(i_n,1_I)}\mathrm{Hom}_R(A_n,\,I\,)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(i_{n+1},1_I)}\mathrm{Hom}_R(A_{n+1},\,I\,)\to\cdots.$$

由上结论可知以下两个模同态的序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_n(M),N) \to \mathrm{Hom}_R(P_n(M),I_0(N)) \to \mathrm{Hom}_R(P_n(M),I_1(N)) \to \mathrm{Hom}_R(P_n(M),I_2(N)) \to \cdots$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,I_n(N)) \to \mathrm{Hom}_R(P_0(M),I_n(N)) \to \mathrm{Hom}_R(P_1(M),I_n(N)) \to \mathrm{Hom}_R(P_2(M),I_n(N)) \to \cdots$$

都是恰当的, 也就是说同态群链复形中除了最下一行和最左一列外, 每一行和每一列都是恰当的. 其它证明就和对偶情形完全类似了.

定理3.5.13 对任何左模 G 和右模的短恰当序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 我们有以下 Tor 群的长恰当序列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_{n+1}(C,G) \to \mathrm{Tor}^R_n(A,G) \to \mathrm{Tor}^R_n(B,G) \to \mathrm{Tor}^R_n(C,G) \to \mathrm{Tor}^R_{n-1}(A,G) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_1(A,G) \to A\otimes_R G \to B\otimes_R G \to C\otimes_R G \to 0.$$

对任何右模 G 和左模的短恰当序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 我们有以下 Tor 群的长恰当序列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_{n+1}(G,C) \to \mathrm{Tor}^R_n(G,A) \to \mathrm{Tor}^R_n(G,B) \to \mathrm{Tor}^R_n(G,C) \to \mathrm{Tor}^R_{n-1}(G,A) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_1(G,A) \to G\otimes_R A \to G\otimes_R B \to G\otimes_R C \to 0.$$

对任何模 G 和模的短恰当序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 我们有以下 Ext 群的长恰当序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,G) \to \mathrm{Hom}_R(B,G) \to \mathrm{Hom}_R(A,G) \to \mathrm{Ext}^1_R(C,G) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,G) \to \mathrm{Ext}^n_R(C,G) \to \mathrm{Ext}^n_R(B,G) \to \mathrm{Ext}^n_R(A,G) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(A,G) \to \cdots,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(G,C) \to \mathrm{Hom}_R(G,B) \to \mathrm{Hom}_R(G,A) \to \mathrm{Ext}^1_R(G,C) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_R(G,A) \to \mathrm{Ext}^n_R(G,C) \to \mathrm{Ext}^n_R(G,B) \to \mathrm{Ext}^n_R(G,A) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(G,A) \to \cdots.$$

以上所有序列都是自然的, 即由短恰当序列的交换图可以得到长恰当序列的交换图.

证 首先证明 B 的投射模复形作为群可以取为 A 和 C 的投射模复形的直和, 即 $P_*(B) = P_*(A)\oplus P_*(C)$. 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & P_0(A) & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(B) & \longrightarrow & P_0(A)\oplus P_0(C) & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle g_1}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(C) & \longrightarrow & P_0(C) & \xrightarrow{\varepsilon_C} & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $K_1(-)=\ker\varepsilon_-$. 中间的 ε_B 限制在 $P_0(A)$ 上为 $f\varepsilon_A$, 限制在 $P_0(C)$ 为由满射 g 导出的模同态. 以上交换图中三行都恰当, 后两列也恰当. 不难由追图法证明第一行也恰当. 将上图中的 A, B, C 分别换为 $K_1(A)$, $K_1(B)$, $K_1(C)$, 我们又得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_2(A) & \longrightarrow & P_1(A) & \xrightarrow{\varepsilon_A} & K_1(A) & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_2(B) & \longrightarrow & P_1(A)\oplus P_1(C) & \xrightarrow{\varepsilon_B} & K_1(B) & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle g_2}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_2(C) & \longrightarrow & P_1(C) & \xrightarrow{\varepsilon_C} & K_1(C) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $K_1(-)=\ker\varepsilon_-$. 如此替换下去就得到一列短恰当序列的交换图, 把这些短恰当序列的交换图连接到一起就得到以下长恰当序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_2} & P_2(A) & \xrightarrow{d_1} & P_1(A) & \xrightarrow{d_0} & P_0(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_2} & P_2(A)\oplus P_2(C) & \xrightarrow{d_1} & P_1(A)\oplus P_1(C) & \xrightarrow{d_0} & P_0(A)\oplus P_0(C) & \xrightarrow{\varepsilon} & B & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle g_2}\downarrow & & {\scriptstyle g_1}\downarrow & & {\scriptstyle g_0}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{d_2} & P_2(C) & \xrightarrow{d_1} & P_1(C) & \xrightarrow{d_0} & P_0(C) & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

所以 $P_*(B)=P_*(A)\oplus P_*(C)$.

同样结论对内射模上链复形也成立.

由上结果定理的长恰当序列成立, 其中 $\mathrm{Tor}_0^R(A,B) = A\otimes_R B$, $\mathrm{Ext}_R^0(A,B) = \mathrm{Hom}_R(A,B)$ 对所有的模 A,B.

定理3.5.14 对任何投射右模 P 和左模的短恰当序列 $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{j} C\to 0$, 我们有Abel群的短恰当序列 $0\to P\otimes_R A\xrightarrow{1_P\otimes_R i} P\otimes_R B\xrightarrow{1_P\otimes_R j} P\otimes_R C\to 0$.

同样, 对任何投射左模 P 和右模的短恰当序列 $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{j} C\to 0$, 我们有Abel群的短恰当序列 $0\to A\otimes_R P\xrightarrow{i\otimes_R 1_P} B\otimes_R P\xrightarrow{j\otimes_R 1_P} C\otimes_R P\to 0$.

证 由 P 的投射分解 $0\to P\to P\to 0$ 可知 $\mathrm{Tor}_k^R(P,M)=0$ 对任何模 M 和 $k>0$. 于是前定理中Tor群的长恰当序列就变成本定理的短恰当序列.

例3.5.15 任何Abel群都是 $\mathbb{Z}$ 模, 而且由于任何自由 $\mathbb{Z}$-模的子模都是自由的, 所以任何Abel群的自由分解长度都不超过2. 这说明对于 $k>1$, 我们都有 $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(A,B)=0$ 和 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^k(A,B)=0$. 因此 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1$ 就简记为 Tor 和 Ext.

以上的内容, 大都是抽象的存在性的证明. 在许多具体问题当中, 更需要的是Bar复形.

定义3.5.16 左模 M 的Bar复形 $(B_*(M),d)$ 定义如下. 对于 $n=0,1,\cdots,$

$$B_n(M)=R\otimes\underbrace{R\otimes\cdots\otimes R}_{n}\otimes M.$$

记 $B_n(M)$ 中的一般元为 $r[r_1|r_2|\cdots|r_{n-1}|r_n|m]$, 其中 $r,r_i\in R$, $m\in M$, 总是用一竖杠代替张量积符号 $\otimes$ (可以节省符号空间), 而中括号则代表模的生成元, 而不是模作用, 也就是说 $B_n(M)$ 作为自由左模, 由所有形如 $[r_1|\cdots|r_n|m]$ 的元生成. 微分规定为

$$d([r_1|\cdots|r_n|m])=r_1[r_2|\cdots|r_n|m]+\Sigma_{i=2}^n(-1)^{n-1}[r_1|\cdots|r_{i-1}r_i|\cdots|r_n|m]+(-1)^n[r_1|\cdots|r_{n-1}|r_nm].$$

R 称为增广环, 如果存在环同态 $\varepsilon\colon R\to\mathbb{Z}_n$ 和直和分解 $R=\overline{R}\oplus\mathbb{Z}_n$, 其中 $\mathbb{Z}_n$ 为 R 的由恒等元 1 生成的子环, $\overline{R}=\ker\varepsilon$. 对于增广环 R, 其约化Bar复形 $(\overline{B}_*(M),d)$ 是指比以上复形链更小一些的链复形, 即把以上的 $B_n(M)$ 用以下的自由模代替

$$\overline{B}_n(M)=R\otimes\underbrace{\overline{R}\otimes\cdots\otimes\overline{R}}_{n}\otimes M.$$

还是记一般元为 $r[r_1|r_2|\cdots|r_{n-1}|r_n|m]$, 其中 $r\in R$, $r_i\in\overline{R}$, $m\in M$. 微分和上面的微分同样.

完全有右模的Bar复形的类似定义, 只不过一般元形如 $[m|r_1|\cdots|r_n]r$.

定理3.5.17 (约化)Bar复形是一个自由模链复形.

证 令 $(\widetilde{B}_*(M),d)$ 为以下链复形

$$\cdots\xrightarrow{d}B_2(M)\xrightarrow{d}B_1(M)\xrightarrow{d}B_0(M)\xrightarrow{d}M\to 0,$$

其中 $d(r[m])=rm$ 对 $r[m]\in B_0(M)$, d 在 $B_n(M)$, $n>0$, 上和 $(B_*(M),d)$ 的微分一致. 定义 $(\widetilde{B}_*(M),d)$ 的链同伦 s 如下. $s(m)=[m]$ 对所有 $m\in M$, $s(r[r_1|\cdots|r_n|m])=[r|r_1|\cdots r_n|m]$ 对所有 $r[r_1|\cdots|r_n|m]\in B_n(M)$. 则 $(ds{+}sd)(m)=m$ 对所有 $m\in M$.

$$\begin{aligned}
&(ds{+}sd)(r[r_1|\cdots|r_n|m])\\
=&\,d([r|r_1|\cdots|r_n|m])\\
&+s(rr_1[r_2|\cdots|r_n|m]+\Sigma_{i=2}^n(-1)^{n-1}r[r_1|\cdots|r_{i-1}r_i|\cdots|r_n|m]+(-1)^nr[r_1|\cdots|r_{n-1}|r_nm])\\
=&\,r[r_1|\cdots|r_n|m]\\
&-[rr_1|r_2|\cdots|r_n|m]-\Sigma_{i=2}^n(-1)^{n-1}[r|r_1|\cdots|r_{i-1}r_i|\cdots|r_n|m]-(-1)^n[r|r_1|\cdots|r_{n-1}|r_nm]\\
&+[rr_1|r_2|\cdots|r_n|m]+\Sigma_{i=2}^n(-1)^{n-1}[r|r_1|\cdots|r_{i-1}r_i|\cdots|r_n|m]+(-1)^n[r|r_1|\cdots|r_{n-1}|r_nm])\\
=&\,r[r_1|\cdots|r_n|m]
\end{aligned}$$

所以, $ds{+}sd=1_{\widetilde{B}_*(M)}$, 即 s 为连接恒等同态和零同态的链同伦, 所以 $H_*(\widetilde{B}_*(M),d)=0$. 这说明自由模链复形 $(\widetilde{B}_*(M),d)$ 是 M 的一个自由分解. 以上的 s 限制在 $(B_*(M),d)$ 上还是一个链同伦, 满足 $ds{+}sd=1{-}\varepsilon$, 其中链同态 $\varepsilon\colon B_*(M)\to B_*(M)$ 限制在 $B_n(M)$, $n>0$, 上为零同态, $\varepsilon(r[m])=[rm]$.

约化情形完全类似, 只是 s 定义为 $s(m)=[m]$ 对所有 $m\in M$, $s(r[r_1|\cdots|r_n|m])=[r|r_1|\cdots r_n|m]$ 对所有 $r[r_1|\cdots|r_n|m]\in B_n(M)$ 和 $r\in\overline{R}$, $s([r_1|\cdots|r_n|m])=0$.

Bar复形的构造体现了同调代数理论总是遵循的Abel群原则, 那就是, *所有的恰当性, (上)链复形的链同伦, (上)链复形的(上)同调群等, 都是指作为Abel群的恰当性, 链同伦和(上)同调群*. 在Bar复形中, 链复形是分次模, 微分也是模同态, 但是同伦 s 却只是Abel群同态, 不是模同态.

例3.5.18 对于群 G 和数域 F, 我们有 F 上的群环 $F(G)$, 就是由 G 张成的 F 上的线性空间. $F(G)$ 是个增广环, $\varepsilon\colon F(G)\to F$ 定义为 $\varepsilon(\Sigma_i n_i g_i)=\Sigma_i n_i$. $\overline{F(G)}=\{\Sigma_i n_i g_i\in F(G)\,|\,\Sigma_i n_i=0\}$. 于是 F 就是 $F(G)$ 双模, 模作用定义为 $(\Sigma_i n_i g_i)1=\Sigma_i n_i=1(\Sigma_i n_i g_i)$.

取数域 $F=\mathbb{Z}_p$, p 为一素数, 取群 $G=\mathbb{Z}_p$. 记 $G=\mathbb{Z}_p$ 的生成元为 t, 则 $F(G)=\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)$ 的一般元形如 $a_0+a_1t+\cdots+a_{p-1}t^{p-1}$, 其中 $a_i\in F=\mathbb{Z}_p$, 而 $t^p=1$. 不管是通过Bar复形还是约化Bar复形, 其实还是不容易出来 $H_*(G;F)=\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$. 而实际上我们可以直接构造平凡模 $\mathbb{Z}_p$ 的最小的自由分解(并不是所有情况都这么容易构造出来的!)如下.

$$\cdots\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)(e_2)\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)(e_1)\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)(e_0)\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p\to 0,$$

其中 $de_0=1$, $de_{2n-1}=(1+t+\cdots+t^{p-1})e_{2n}$, $de_{2n}=(1-t)e_{2n-1}$, $n=1,2,\cdots$. 显然以上链复形的自由模部分和平凡模 $\mathbb{Z}_p$ 张量积后就得到链复形(微分 $d\otimes_{\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}_p}$ 仍简记为 d)

$$\cdots\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(e_2)\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(e_1)\xrightarrow{d}\mathbb{Z}_p(e_0)\xrightarrow{d}0,$$

其中 $de_i=0$ 对所有 e_i. 所以 $\mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$ 对所有 $k=0,1,\cdots$.

下面考虑例3.4.2中的 T_p 的 $\mathbb{Z}_p$ 系数的同调群. T_p 可以作为Eilenberg-MacLane空间 $K(\mathbb{Z}_p,1)$ 的 $p-2$ 维骨架, 因而 $H_k(T_p;\mathbb{Z}_p)=H_k(K(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}_p)$ 对于 $k=1,\cdots,p-3$. $H_{p-2}(T_p;\mathbb{Z}_p)$ 不难直接计算为 $\mathbb{Z}_p$. 而不难由定义得 $H_*(K(\mathbb{Z}_p,1);\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}_p(\mathbb{Z}_p)}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$. 所以 $H_k(T_p;\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$ 对 $k=0,1,\cdots,p-2$.

以上例子只是从一个侧面说明了一个事实, 即使Bar复形这么具体的链复形也很少能够作为实际计算的工具.

同调代数在代数拓扑中的最重要的应用是将以上建立在不分次环的模论的基础上的Tor和Ext群推广到建立在分次代数或者分次Hop代数的模论基础上的Tor群或者Ext群, 对偶地, 也有推广到建立在分次上代数或者Hopf代数上的上模论的Tor群或者Ext群. 在这些同调代数理论中, 对偶概念一般没有这么完整, 投射和内射(上)模也可能不都存在, 所以可能只有 Tor 群或者只有 Ext 群的定义. 而这些推广的同调代数理论是目前计算同伦群的唯一工具. 比如, 球面稳定同伦群 $\pi_*^S(S^0)$ 的 p 局部化群的计算就是用Steenrod代数 A_p(是一个分次Hopf代数) 的上同调群 $\mathrm{Ext}_{A_p}^{*,*}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ 来逼近的.

3.6 (上)同调群的(上)乘法

单纯(上)同调群可以推广到奇异(上)同调群, 同样所有单纯(上)同调群的(上)乘法都可以推广到奇异(上)同调群上去. 但这些都是理论上的推广, 在实际计算中奇异(上)同调群基本上无用. 这和用胞腔链复形计算奇异(上)同调群比用单纯剖分计算单纯(上)同调群要简单得多的情况完全不一样! 所以本节首先介绍有限单纯复形的单纯(上)同调群上的各种乘法和上乘法.

在本节中, 我们总是采用以下的符号记法和隐含规则.

由于单纯(上)链复形的各种乘法的定义都与每个单形事先取定的定向有关, 所以对于有限单纯复形 K, 我们总是在它的顶点集上取定一个全序, 并且只考虑保序单形, 也就是说本节中所有的单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$ 都是保序单形, 即 $v_0<\cdots<v_k$. 所以单纯链复形 $(C_*(K),d)$ 的生成元虽然还是记为 $\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor$ 的形式, 但却不允许换序, 因为它对应的单形 $\{v_0,\cdots,v_k\}$ 是保序单形. 对于Abel群 G, 把张量积复形 $(C_*(K)\otimes G,d\otimes 1_G)$ 简记为 $(C_*(K;G),d)$, 其生成元还是记为 $\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor$ 的形式, 只不过线性组合的系数是取 G 中的元.

对偶地, 单纯上链复形 $(C^*(K),\delta)=(\mathrm{Hom}(C_*(K),\mathbb{Z}),\mathrm{Hom}(d,1_{\mathbb{Z}}))$ 的生成元记为 $\lceil v_0,\cdots,v_k\rceil$ 的形式而不是抽象的函数的形式, 也不允许换序. 把同态群复形 $(\mathrm{Hom}(C_*(K),G),\mathrm{Hom}(d,1_G))=(C^*(K)\otimes G,\delta\otimes 1_G)$ 简记为 $(C^*(K;G),\delta)$, 其生成元还是记为 $\lceil v_0,\cdots,v_k\rceil$ 的形式, 只不过线性组合的系数是取 G 中的元.

由于我们既需要讨论两个链复形的张量积复形 $(C_*,d)\otimes(D_*,d)$, 也需要讨论两个上链复形的张量积复形 $(C^*,\delta)\otimes(D^*,\delta)$, 也需要讨论链复形和上链复形的张量积复形 $(C_*,d)\otimes(D^*,\delta)$ 和 $(C^*,\delta)\otimes(D_*,d)$, 所以我们统一记以上张量积复形的微分为 ∂, 总是满足 $\partial(x\otimes y)=(d_1x)\otimes y+(-1)^{|x|}x\otimes(d_2y)$.

定理3.6.1 设 K 为有限单纯复形, R 为一交换环. 则群同态

$$\Delta\colon (C_*(K;R),d)\to(C_*(K;R)\otimes_R C_*(K;R),\partial),$$

$$\Delta(\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor)=\Sigma_{i=0}^k\lfloor v_0,\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,v_k\rfloor$$

为链同态. 它的对偶同态

$$\times\colon (C^*(K;R)\otimes_R C^*(K;R),\partial)\to(C^*(K;R),\delta)$$

$$\lceil v_0,\cdots,v_s\rceil\times\lceil u_0,\cdots,u_t\rceil=\begin{cases}\lceil v_0,\cdots,v_s,u_1,\cdots,u_t\rceil & \text{如果 } v_s=u_0\\ 0 & \text{如果 } v_s\neq u_0\end{cases}$$

也是链同态.

设 L 为 K 的子复形. 则群同态

$$/\colon (C^*(K;R)\otimes_R C_*(L;R),\partial)\to(C^*(K,L;R),\delta)$$

$$\lceil v_0,\cdots,v_s\rceil/\lfloor u_0,\cdots,u_t\rfloor=\begin{cases}\lceil v_0,\cdots,v_{s-t}\rceil & \text{如果 } \{v_{s-t},\cdots,v_s\}=\{u_0,\cdots,u_t\}\in K\backslash L\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$$

和

$$\backslash\colon (C^*(L;R)\otimes_R C_*(K;R),\partial)\to(C_*(K,L;R),\delta)$$

$$\lceil u_0,\cdots,u_t\rceil\backslash\lfloor v_0,\cdots,v_s\rfloor=\begin{cases}(-1)^t\lfloor v_0,\cdots,v_{s-t}\rfloor & \text{如果 } \{v_{s-t},\cdots,v_s\}=\{u_0,\cdots,u_t\}\in L\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$$

都是链同态.

证 我们有

$$\begin{aligned}&\Delta(d(\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor))\\ =\;&\Delta(\Sigma_{i=0}^k(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,v_{k-1}\rfloor)\\ =\;&\Sigma_{s<i}(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,v_s\rfloor\otimes\lfloor v_s,\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,v_k\rfloor+\Sigma_{i<t}(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v}_i,\cdots,v_t\rfloor\otimes\lfloor v_t,\cdots,v_k\rfloor\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \partial(\Delta(\lfloor v_0,\cdots,v_k\rfloor)) \\
= \quad & \partial(\Sigma_{i=0}^k\lfloor v_0,\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,v_k\rfloor) \\
= \quad & \Sigma_{s<i}(-1)^s\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_s},\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,v_k\rfloor+(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,v_{i-1}\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,v_k\rfloor \\
& +\Sigma_{i<t}(-1)^t\lfloor v_0,\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,\widehat{v_t},\cdots,v_k\rfloor+(-1)^i\lfloor v_0,\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_{i+1},\cdots,v_k\rfloor \\
= \quad & \Sigma_{s<i}(-1)^s\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_s},\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,v_k\rfloor+\Sigma_{i<t}(-1)^t\lfloor v_0,\cdots,v_i\rfloor\otimes\lfloor v_i,\cdots,\widehat{v_t},\cdots,v_k\rfloor
\end{aligned}
$$

所以 $\Delta d=\partial\Delta$, Δ 为链同态. 所以 Δ 的对偶同态 $\times$ 也是链同态.

我们有

$$
\begin{aligned}
& (\delta\lceil v_0,\cdots,v_{k+l}\rceil)/\lfloor v_k,\cdots,v_{k+l}\rfloor+\lceil v_0,\cdots,v_{k+l}\rceil/(d\lfloor v_k,\cdots,v_{k+l}\rfloor) \\
= \quad & \Sigma_v\lceil v,v_0,\cdots,\cdots,v_k\rceil \\
= \quad & \delta(\lceil v_0,\cdots,v_{k+l}\rceil/\lfloor v_k,\cdots,v_{k+l}\rfloor)
\end{aligned}
$$

所以 / 为链同态. 同样,

$$
\begin{aligned}
& (\delta\lceil v_k,\cdots,v_{k+l}\rceil)\setminus\lfloor v_0,\cdots,v_{k+l}\rfloor+\lceil v_k,\cdots,v_{k+l}\rceil\setminus(d\lfloor v_0,\cdots,v_{k+l}\rfloor) \\
= \quad & (-1)^l\lfloor v_0,\cdots,v_{k-1}\rfloor+\Sigma_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+l}\lfloor v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_k\rfloor \\
= \quad & d(\lceil v_k,\cdots,v_{k+l}\rceil\setminus\lfloor v_0,\cdots,v_{k+l}\rfloor)
\end{aligned}
$$

所以 \ 也为链同态.

以上定理中的链同态能引起(上)同调群上的什么运算呢? 首先考虑张量积复形的(上)同调群.

定理3.6.2 (Künneth定理) 设 (C_*,d) 和 (D_*,d) 为链复形, 其中至少有一个为自由链复形, 则我们有以下分次群的短恰当序列

$$0\to\Sigma^{-1}\mathrm{Tor}_*(H_*(C_*),H_*(D_*))\to H_*(C_*\otimes D_*)\to H_*(C_*)\otimes H_*(D_*)\to 0,$$

其中 $\mathrm{Tor}_n(H_*(C_*),H_*(D_*))=\oplus_{s+t=n}\mathrm{Tor}(H_s(C_*),H_t(D_*))$.

如果 (C_*,d) 和 (D_*,d) 都是自由链复形, 则以上短恰当序列分裂, 但直和结构不是自然的, 即如果有链同态 $f\colon(C_*,d)\to(C'_*,d)$ 和 $g\colon(D_*,d)\to(D'_*,d)$, 则 $f\otimes g$ 导出的同调群同态一般地不是两个直和群的直和同态.

证 为简化符号, 所有恒等同态都记为1.

假设 (D_*,d) 为自由链复形. 记 $Z_*=\ker d\subset D_*$, $B_*=\operatorname{im}d\subset Z_*$. 则由自由Abel群的短恰当序列 $0\to Z_t\xrightarrow{i}D_t\xrightarrow{d}B_{t-1}\to 0$ 可得短恰当序列 $0\to C_s\otimes Z_t\xrightarrow{1\otimes i}C_s\otimes D_t\xrightarrow{1\otimes d}C_s\otimes B_{t-1}\to 0$. 再对这些短恰当序列作直和后就得到张量积分次群的短恰当序列

$$0\to C_*\otimes Z_*\xrightarrow{1\otimes i}C_*\otimes D_*\xrightarrow{1\otimes d}C_*\otimes B_{*-1}\to 0.$$

不难验证以上分次群的短恰当序列还是链复形和链同态的短恰当序列, 其中把 Z_*,B_* 都看成微分为零的链复形. 所以我们有以下同调群的长恰当序列

$$\cdots\to H_n(C_*\otimes Z_*)\xrightarrow{(1\otimes i)_n}H_n(C_*\otimes D_*)\xrightarrow{(1\otimes d)_n}H_{n-1}(C_*\otimes B_*)\xrightarrow{(1\otimes j)_{n-1}}H_{n-1}(C_*\otimes Z_*)\to\cdots,$$

其中 $j\colon B_*\to Z_*$ 为内射同态. 由以上长恰当序列得短恰当序列

$$0\to \operatorname{coker}(1\otimes j)_n\to H_n(C_*\otimes D_*)\to \ker(1\otimes j)_{n-1}\to 0.$$

由 $H_t(D_*)$ 的自由分解 $0\to B_t\xrightarrow{j} Z_t\xrightarrow{q} H_t(D_*)\to 0$ 得短恰当序列

$$0\to \operatorname{Tor}(H_s(C_*),H_t(D_*))\to H_s(C_*)\otimes B_t\xrightarrow{1\otimes j} H_s(C_*)\otimes Z_t\xrightarrow{1\otimes q} H_s(C_*)\otimes H_t(D_*)\to 0.$$

由于 Z_* 和 B_* 都为自由群, 所以有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} H_n(C_*\otimes B_*) & \xrightarrow{(1\otimes j)_*} & H_n(C_*\otimes Z_*) \\ \|\wr & & \|\wr \\ \oplus_{s+t=n} H_s(C_*)\otimes B_t & \xrightarrow{1\otimes j} & \oplus_{s+t=n} H_s(C_*)\otimes Z_t\,. \end{array}$$

所以 $\operatorname{coker}(1\otimes j)_n=\Sigma_{s+t=n} H_s(C_*)\otimes H_t(D_*)$, $\ker(1\otimes j)_n=\Sigma_{s+t=n}\operatorname{Tor}(H_s(C_*),H_t(D_*))$.

以下用 $Z_*(X_*)$ 和 $B_*(X_*)$ 表示链复形 (X_*,d) 的 $\ker d$ 和 $\operatorname{im} d$. 如果 C_* 和 D_* 都是自由的, 则存在群同态 $\kappa\colon C_*\to Z_*(C_*)$, $\kappa'\colon D_*\to Z_*(D_*)$. $\kappa\otimes\kappa'\colon C_*\otimes D_*\to Z_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)$ 并不是链复形同态(后者的微分为零). 但是由于限制同态 $\lambda=\kappa\otimes\kappa'|_{Z_*(C_*\otimes D_*)}$ 满足

$$\lambda(B_*(C_*\otimes D_*))\subset B_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)+Z_*(C_*)\otimes B_*(D_*),$$

所以导出群同态

$$\overline{\lambda}\colon H_*(C_*\otimes D_*)\to \frac{Z_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)}{B_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)+Z_*(C_*)\otimes B_*(D_*)}.$$

而由以下恰当序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} B_s(C_*)\otimes B_t(D_*) & \to & Z_s(C_*)\otimes B_t(D_*) & \to & H_*(C_*)\otimes B_t(D_*) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B_s(C_*)\otimes Z_t(D_*) & \to & Z_s(C_*)\otimes Z_t(D_*) & \to & H_*(C_*)\otimes Z_t(D_*) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B_s(C_*)\otimes H_t(D_*) & \to & Z_s(C_*)\otimes H_t(D_*) & \to & H_*(C_*)\otimes H_t(D_*) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

可知序列 $B_s(C_*)\otimes Z_t(D_*)+Z_s(C_*)\otimes B_t(D_*)\to Z_s(C_*)\otimes Z_t(D_*)\to H_s(C_*)\otimes H_t(D_*)\to 0$ 恰当, 即

$$H_*(C_*)\otimes H_*(D_*)\cong \frac{Z_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)}{B_*(C_*)\otimes Z_*(D_*)+Z_*(C_*)\otimes B_*(D_*)}.$$

所以 $\overline{\lambda}$ 为定理中的恰当序列的左逆.

Künneth定理有对偶的结论, 是针对链复形 $(\operatorname{Hom}_*(C_*,D_*),\operatorname{Hom}(d,d))$ 的短恰当序列

$$0\to\Sigma^{-1}\operatorname{Ext}_*(H_*(C_*),H_*(D_*))\to H_*(\operatorname{Hom}(C_*,D_*))\to \operatorname{Hom}(H_*(C_*),H_*(D_*))\to 0,$$

由于不涉及, 所以省略.

Künneth定理包含定理3.6.1中当 $R=\mathbb{Z}$ 时的所有四种情况的张量积链复形(只需把上链复形看成负次数的链复形). 而对于一般的环 R, 再利用泛系数定理就可以得出张量积链复形的(上)同调群和分量链复

形的(上)同调群的关系. 比如, 由于单纯链复形都是自由链复形, 所以我们自然有 $(C_*(K)\otimes_R C_*(L),\partial) = ((C_*(K)\otimes C_*(L))\otimes R,\partial\otimes 1_R)$. 对于后者, 先应用Künneth定理, 再利用泛系数定理就能算出张量积链复形的(上)同调群.

通过Künneth定理我们可以了解张量积复形的(上)同调群远比直和或者直积群的(上)同调群要复杂. 所以我们实际上不是通过计算张量积链复形的复杂(上)同调群来研究问题, 而是通过张量积复形得到(上)同调群一些更细致的代数结构, 从而用这些更细致的代数结构来解决问题.

定义3.6.3 设 R 为一(不分次)交换环. 一个分次 R-模 A_* 是指一个分次Abel群, 其每个分量群 A_n 都是 R-模. R-模的所有概念自然推广到分次 R-模的所有概念. 特别地, R 自身总是看成特殊的分次 R-模 R_* 满足 $R_0 = R$, $R_k = 0$ 如果 $k \neq 0$. 为了节省文字, 如不产生误解, 省略所有 R, 即分次模都是指分次 R-模, 分次模同态指分次 R-模同态.

一个分次代数 A_* 是指一个分次模, 存在模同态的乘法 $\mu\colon A_*\otimes_R A_* \to A_*$ 满足以下性质.

(1) (结合性) $\mu(1_{A_*}\otimes_R \mu) = \mu(\mu\otimes_R 1_{A_*})$.

(2) (单位性) 存在单位分次模同态 $\varepsilon\colon R\to A_*$ 满足 $\mu(\varepsilon\otimes_R 1_{A_*}) = \mu(1_{A_*}\otimes_R\varepsilon) = \nu$, 其中 ν 为 R 对 A_* 的模作用, 既表示 $R\otimes_R A_*\to A_*$ 也表示 $A_*\otimes_R R\to A_*$ 的群同态.

A_* 称为交换分次代数, 如果 $\mu T = \mu$, 其中 $T\colon A_*\otimes_R A_*\to A_*\otimes_R A_*$ 定义为 $T(a\otimes b) = b\otimes a$ 对 $a, b\in A_*$.

一个分次上代数 A^* 是指一个分次模, 存在模同态的上乘法 $\mu'\colon A^*\to A^*\otimes_R A^*$ 满足以下性质.

(1) (结合性) $(1_{A^*}\otimes_R \mu')\mu' = (\mu'\otimes_R 1_{A^*})\mu'$.

(2) (单位性) 存在单位分次模同态 $\varepsilon\colon A^*\to R$ 满足 $\nu(\varepsilon\otimes 1_{A_*})\mu' = \nu(1_{A^*}\otimes\varepsilon)\mu' = 1_{A^*}$, 其中 ν 为 R 对 A^* 的模作用.

A_* 称为交换分次代数, 如果 $T\mu' = \mu'$.

一个分次Hopf代数 A_* 是指一个既是代数又是上代数的分次模, 其乘法 μ 和上乘法 μ' 满足

$$\mu'\mu = (\mu\otimes_R\mu)(1_{A_*}\otimes_R T\otimes_R 1_{A_*})(\mu'\otimes_R\mu').$$

如果我们把 $\mu(a\otimes b)$ 记为 ab 的话, 则以上公式等价于 $\mu'(ab) = \Sigma_{i,j} a'_i b'_j\otimes a''_i b''_j$ 对所有 $a, b\in A_*$, 其中 $\mu'(a) = \Sigma_i a'_i\otimes a''_i$, $\mu'(b) = \Sigma_j b'_j\otimes b''_j$.

Hopf代数 A_* 称为交换的, 如果 $\mu T = \mu$, 称为上交换的, 如果 $T\mu' = \mu'$.

当取 R 为域 F 时, $(C_*(K;F), d)$ 是 F 上的线性空间, 而 $\mathrm{Tor}(F,G)$, $\mathrm{Ext}(G,F)$ 和 $\mathrm{Ext}(F,G)$ 都是零群. 因而由Künneth定理和泛系数定理,

$$H_*(C_*(K;F)\otimes_F C_*(L;F)) = H_*(K;F)\otimes_F H_*(L;F),$$

$$H^*(C^*(K;F)\otimes_F C^*(L;F)) = H^*(K;F)\otimes_F H^*(L;F),$$

$$H_*(C^*(K;F)\otimes_F C_*(L;F)) = H^*(K;F)\otimes_F H_*(L;F),$$

$$H^*(K;F) = \mathrm{Hom}_F(H_*(K;F),F)$$

对所有的 K, L. 所以由定理3.6.1直接有以下结果.

定理3.6.4 设 K 为有限单纯复形, F 为一数域. 则 $H_*(K;F)$ 为分次上代数, $H^*(K;F)$ 为分次代数.

设 L 为 K 的子复形. 则存在分次模同态

$$\backslash\colon H^*(L;F)\otimes_F H_*(K;F)\to H_*(K,L;F),$$

$$/\colon H^*(K;F)\otimes_F H_*(L;F)\to H^*(K,L;F).$$

证 由定理3.6.1中的链同态自然导出(上)同调群的同态.

例3.6.5 我们计算代数 $H^*(RP^n;\mathbb{Z}_2)$ 和上代数 $H_*(RP^n;\mathbb{Z}_2)$.

记 ε_i 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的第 i 个坐标为1, 其它坐标都为零的点. 则球面 S^n 为 $2n{+}2$ 个点 $\pm\varepsilon_1,\cdots,\pm\varepsilon_{n+1}$ 的闭包集的边点集, 自然构成单纯复形以这些点为顶点. 定义这个单纯复形 S^n 上的等价关系为 $\{\pm\varepsilon_{i_0},\cdots,\pm\varepsilon_{i_k}\}\sim\{\mp\varepsilon_{i_0},\cdots,\mp\varepsilon_{i_k}\}$. 则 S^n 的重心重分自然给出了 $RP^n=S^n/_\sim$ 的一个剖分, 记这个剖分单纯复形为 K_n, 其单形形如 $\{\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}$, 其中每个 σ_{i-1} 为 σ 的真子集, σ_k 为顶点集 $\{\pm\varepsilon_i\}$ 的子集. 而 K_n 的单形有等价关系 $\{\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}=\{\overline{\sigma}_0,\overline{\sigma}_1,\cdots,\overline{\sigma}_k\}$, 其中如果 $\sigma=\{\pm\varepsilon_{i_0},\cdots,\pm\varepsilon_{i_k}\}$, 则 $\overline{\sigma}=\{\mp\varepsilon_{i_0},\cdots,\mp\varepsilon_{i_k}\}$. 我们还是用 $\lfloor\sigma_0,\cdots,\sigma_k\rfloor$ 和 $\lceil\sigma_0,\cdots,\sigma_k\rceil$ 来区分 $C_*(K_n)$ 和 $C^*(K_n)$ 中的生成元, 但是不允许 $\sigma_0,\cdots,\sigma_k$ 换序.

现计算$H^*(K_n;\mathbb{Z}_2)$ 的代数结构. 由胞腔链复形算出 $H_k(K_n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$ 当 $k=0,1,\cdots,n$, $H_k(K_n,\mathbb{Z}_2)=0$ 当 $k\neq 0,1,\cdots,n$. 再由泛系数定理可知 $H^k(K_n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$ 当 $k=0,1,\cdots,n$, $H^k(K_n,\mathbb{Z}_2)=0$ 当 $k\neq 0,1,\cdots,n$. 由定义 $H^n(K_n;\mathbb{Z}_2)$ 的生成元由 $\lceil\sigma_0,\cdots,\sigma_n\rceil$ 代表, 其中 $\{\sigma_0,\cdots,\sigma_n\}$ 为 K_n 的任何一个 n-单形. 下面我们归纳地选取 $H^1(K_n;\mathbb{Z}_2)$ 的生成元的一个代表元 c_n. 对于 K_n 的顶点 $\sigma=\{c_{i_1}\varepsilon_{i_1},\cdots,c_{i_k}\varepsilon_{i_k}\}$, $c_{i_s}=\pm1$, 令 $l(\sigma)=c_{i_1}{+}\cdots{+}c_{i_k}$. 取 $c_1=\lceil\{\varepsilon_1\},\{\varepsilon_1,-\varepsilon_2\}\rceil$. 假设对于 $n>1$, c_{n-1} 已经取定, 则 $c_n{-}c_{n-1}$ 为如下元的和. 如果 $\lceil\sigma,\tau\rceil$ 为 c_{n-1} 的一项, 则一定有 $l(\sigma)=0$, $l(\tau)=\pm1$, 或者 $l(\sigma)=\pm1$, $l(\tau)=0$. 如果 $l(\sigma)=0$, 则 $\lceil\sigma,\sigma{\cup}\{\varepsilon_{n+1}\}\rceil+\lceil\sigma,\sigma{\cup}\{-\varepsilon_{n+1}\}\rceil+\lceil\tau,\tau{\cup}\{\pm\varepsilon_{n+1}\}\rceil$ 为 $c_n{-}c_{n-1}$ 的一项, 其中 $l(\tau{\cup}\{\pm\varepsilon_{n+1}\})=0$; 如果 $l(\tau)=0$, 则 $\lceil\sigma,\sigma{\cup}\{\pm\varepsilon_{n+1}\}\rceil+\lceil\tau,\tau{\cup}\{\varepsilon_{n+1}\}\rceil+\lceil\tau,\tau{\cup}\{-\varepsilon_{n+1}\}\rceil$ 为 $c_n{-}c_{n-1}$ 的一项, 其中 $l(\sigma{\cup}\{\pm\varepsilon_{n+1}\})=0$. 不难由归纳法则得出 $\delta c_n=0$ 并且 n 重乘积 $c_n{\times}\cdots{\times}c_n=\lceil\{\varepsilon_1,-\varepsilon_2,\cdots,(-1)^n\varepsilon_{n+1}\}\rceil$. 这个等式本身就说明上同调类 $[c_n]\neq0$ 并且 $H^*(K_n;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$ (截柱多项式代数). 由此可知上代数 $H_*(K_n;\mathbb{Z}_2)$ 满足作为线性空间有分次基 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, $x_i\in H_i(K_n;\mathbb{Z}_2)$, $\Delta(x_k)=\Sigma_{i=0}^k x_i{\otimes}x_{k-i}$. 也可以直接计算这个同调上代数, 其中每个 x_i 的代表元要取两类元而不是一个元, 而且 Δ 的计算由于是在模去 $\operatorname{im}d$ 的意义下进行的, 因而非常复杂.

通过上例可以看出乘法的具体计算是非常麻烦的事情. 实际情况目前有用的(上)同调群的(上)代数结构都是通过一些谱序列的方法从更广泛的原理计算出的. 这就需要对以上单纯的情形推广到奇异情形.

定理3.6.6 对于任何空间偶 (X,A) 和 (Y,B), 存在奇异链复形的链同伦等价

$$(S_*(X{\times}Y,(X{\times}B){\cup}(A{\times}Y)),d)\simeq(S_*(X,A){\otimes}(S_*(Y,B),d).$$

证 这个定理的证明需要将同调代数中的模的自由分解的链同伦等价意义上的唯一性推广到“模型”的自由分解的同伦等价意义上的唯一性. 不过为了避免涉及到抽象的范畴论的概念, 我们采用具体构造“模型”的方法直接证明.

定义 Δ^n 的一个广义 k-单形为一整数序列 $(i_0,\cdots,i_k)$, 满足 $0\leqslant i_0\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$. 换句话说, 广义单形就是顶点允许重复出现的单形. 令 $(\widetilde{F}_*(\Delta^n),d)$ 为 Δ^n 的所有广义单形和空单形 $(\,)$ 生成的约化广义单纯链复形, 微分形式上还是 $d(i_0,\cdots,i_k)=\Sigma_{s=0}^k(-1)^k(i_0,\cdots,\widehat{i_s},\cdots,i_k)$, $d(i_0)=(\,)$, $d(\,)=0$. 特别地,

$(\widetilde{F}_*(\Delta^0), d)$ 所有的生成元形如 $(0,\cdots,0)$ 和 $()$, 因此我们记 $(\widetilde{F}_*(n), d) \cong (\widetilde{F}_*(\Delta^0), d)$, 但 $\widetilde{F}_*(n)$ 所有的生成元形如 $(n,\cdots,n)$ 和 $()$. 则显然我们有 $(\widetilde{F}_*(\Delta^n), d) = (\widetilde{F}_*(0)\times\widetilde{F}_*(1)\otimes\cdots\otimes\widetilde{F}_*(n), d)$ 将 $(0,\cdots,0,\cdots,n,\cdots,n)$ 映到 $(0,\cdots,0)\otimes\cdots\otimes(n,\cdots,n)$, 这里包括将 $()$ 映到 $()$. 所以由Künneth定理可知 $H_*(\widetilde{F}_*(\Delta^n), d)) = 0$. 定义 Δ^n 的广义单纯链复形 $(F_*(\Delta^n), d)$ 为 $(\widetilde{F}_*(\Delta^n), d)$ 把空单形除去后的子复形. 令 $(F_*(\Delta), d) = (\cup_{n=0}^{\infty} F_*(\Delta^n), d)$. 为了简化符号, 记 $(F_*^{(2)}(\Delta), d) = (F_*(\Delta)\otimes F_*(\Delta), d)$.

定义群同态 $\psi_0\colon (F_0(\Delta), d) \to (F_0^{(2)}(\Delta), d)$ 和 $\phi_0\colon (F_0^{(2)}(\Delta), d) \to (F_0(\Delta), d)$ 如下. $\psi_0((n)) = (n)\otimes(n)$, $\phi_0((m)\otimes(n)) = (mn)$. 由于 $F_*(\Delta)$ 和 $F_*^{(2)}(\Delta)$ 都是自由群, 而且其约化同调群都是零群, 所以不难将同调代数的自由分解的链同伦等价的方法应用到这两个链复形上, 我们可以将 ψ_0 和 ϕ_0 扩张为以下的链同态

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_3(\Delta) & \xrightarrow{d_3} & F_2(\Delta) & \xrightarrow{d_2} & F_1(\Delta) & \xrightarrow{d_1} & F_0(\Delta) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\psi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbb{Z}}} \\
\cdots & \longrightarrow & F_3^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_3} & F_2^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_2} & F_1^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_1} & F_0^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_3^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_3} & F_2^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_2} & F_1^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{d_1} & F_0^{(2)}(\Delta) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\phi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbb{Z}}} \\
\cdots & \longrightarrow & F_3(\Delta) & \xrightarrow{d_3} & F_2(\Delta) & \xrightarrow{d_2} & F_1(\Delta) & \xrightarrow{d_1} & F_0(\Delta) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

并且任何不同的扩张链同态都是链同伦的, 也就是说我们由 ψ_0 和 ϕ_0 得到了两个在链同伦意义上唯一的链同态 $\psi\colon (F_*(\Delta), d) \to (F_*^{(2)}(\Delta), d)$ 和 $\phi\colon (F_*^{(2)}(\Delta), d) \to (F_*(\Delta), d)$, 并且这两个链同态是互为逆的链同伦等价. 而由 ψ 和 ϕ 我们又可以构造链同伦

$$\overline{\psi}\colon (S_*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y)), d) \to (S_*(X, A)\otimes S_*(Y, B), d),$$

$$\overline{\phi}\colon (S_*(X, A)\otimes S_*(Y, B), d) \to (S_*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y)), d)$$

如下. 对于奇异 n-单形 $u\colon \Delta^n \to X\times Y$, 设 $\psi(\Delta^n) = \Sigma_i c_i\Delta_i'\otimes\Delta_i''$, 其中 $c_i \in \mathbb{Z}$, Δ_i', Δ_i'' 都是广义单形, 则定义 $\overline{\psi}(u) = \Sigma_i c_i u_i'\otimes u_i''$, 其中 u_i', u_i'' 如下定义. 如果 $\Delta_i' = \{i_0,\cdots,i_s\}$, $\Delta_i'' = \{j_0,\cdots,j_{n-s}\}$, 则自然存在单纯映射 $\mu\colon \Delta^s \to \Delta^n$ 和 $\nu\colon \Delta^{n-s} \to \Delta^n$ 定义为 $\mu(i_p) = i_p$, $\nu(j_q) = j_q$. 于是定义 $u_i' = p_X u\mu$, $u_i'' = p_Y u\nu$, 其中 p_X, p_Y 为到 X, Y 的投射. 同样, 对于奇异 m-单形 $u\colon \Delta^m \to X$ 和奇异 n-单形 $v\colon \Delta^n \to X$, 设 $\phi(\Delta^m\otimes\Delta^n) = \Sigma_i c_i\Delta_i$, 其中 $c_i \in \mathbb{Z}$, Δ_i 为广义单形, 则定义 $\overline{\psi}(u) = \Sigma_i c_i u_i$, 其中 u_i 如下定义. 如果 $\Delta_i = \{i_0,\cdots,i_{m+n}\}$, 则自然存在单纯映射 $\mu\colon \Delta^{m+n} \to \Delta^m$ 和 $\nu\colon \Delta^{m+n} \to \Delta^n$ 定义为 $\mu(i_k) \equiv i_k \bmod m$, $\nu(i_k) \equiv i_k \bmod n$. 于是定义 $u_i(x) = (u(\mu(x)), v(\nu(x)))$. 显然 ψ 和 ϕ 在链同伦意义上的唯一性同样使得 $\overline{\psi}$ 和 $\overline{\phi}$ 在链同伦的意义上唯一, 因而两者还是链同伦等价.

定理3.6.7 对于任何空间偶 (X, A) 和 (Y, B) 以及任何的交换环 R, 我们有以下的群同态

$$\times\colon H_*(X, A; R) \otimes_R H_*(Y, B; R) \to H_*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y); R),$$

$$\times\colon H^*(X, A; R) \otimes_R H^*(Y, B; R) \to H^*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y); R),$$

$$/\colon H^*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y); R) \otimes_R H_*(X, A; R) \to H^*(Y, B; R),$$

$$\backslash\colon H^*(X, A; R) \otimes_R H_*(X\times Y, (X\times B)\cup(A\times Y); R) \to H_*(Y, B; R).$$

证 设 $\varrho\colon (S_*(X,A;R)\otimes S_*(Y,B;R),d)\to(S_*(X\times Y,(A\otimes Y)\cup(X\times B));R),d)$ 为前定理中的链同伦等价 $\overline{\phi}$, 则对 $[x]\in H_*(X,A;R)$ 和 $[y]\in H_*(Y,B;R)$, 定义 $[x]\times[y]=[\varrho(x\otimes y)]$. 易证该定义不依赖于 x 和 y 的选取, 并且导出张量积群的同态 $\times$. 上同调情形的 $\times$ 完全一样.

对于 $[\phi]\in H^*(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y);R)$ 和 $[x]\in H_*(X,A;R)$, 定义$([\phi]/[x])(y)=\phi(\varrho(x\otimes y))$ 对所有 $y\in\ker d$. 易证该定义不依赖于 x 和 y 的选取, 并且导出 $/$.

对于 $[\phi]\in H_*(X,A;R)$ 和 $[u]\in H_*(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y);R)$, 由Künneth定理可知存在由 $\times$ 的逆同态 j, 设 $j[u]=\Sigma_i[a_i]\otimes[b_i]$, 则定义 $([\phi]\backslash[u])(\psi)=\Sigma_i\phi(a_i)[b_i]$. 易证该定义不依赖于 ϕ 和 a_i,b_i 的选取, 并且导出 $\backslash$.

以上定理中的斜杠号的法则如下. 上同调群总是在左边, $/$ 对应 $(XY)/Y=X$, $\backslash$ 对应 $X\backslash(XY)=Y$.

从单纯角度我们看不出定理3.6.1中的后两个同态和前两个同态有什么关系, 但推广后我们就发现后两个同态其实都是由第一个同态决定, 而第一个同态是由对角映射 $\Delta\colon X\to X\times X$ 导出的, 确切地说, 第一个链同态 Δ 是对角映射的一个单纯逼近导出的单纯链复形的同态. 所以我们有以下的推广.

定理3.6.8 对于交换环 R, 我们有以下各种建立在以 R 为系数的(上)同调群上代数运算.

(1) 对空间偶 (X,A) 和 (X,B), 存在cup积

$$\cup\colon H^s(X,A;R)\otimes_R H^t(X,B;R)\to H^{s+t}(X,A\cup B;R),$$

和cap积

$$\cap\colon H^t(X,A;R)\otimes_R H_s(X,A\cup B;R)\to H_{t-s}(X,B;R).$$

(2)对任何空间偶 (X,A), 上同调群 $H^*(X,A;R)$ 的cup积使其成为交换分次代数. 特别地, 取 $A=\emptyset$, 则 $H^*(A;R)$ 为分次交换代数.

(3) 对任何H群 X 和数域 F, 同调群 $H_*(X;F)$ 为交换和上交换的Hopf代数, 对偶的上同调群 $H^*(X;F)=\mathrm{Hom}_F(H_*(X;F),F)$ 也为交换和上交换的Hopf 代数.

以上所有的代数结构都是自然的, 即映射导出相应的(上)代数或者乘法的同态.

证 (1) cup积由下图导出

$$\cup\colon H^*(X,A;R)\otimes_R H^*(X,B;R)\xrightarrow{\times}H^*(X\times X,(A\times X)\cup(X\times B);R)\xrightarrow{\Delta^*}H^*(X,A\cup B;R),$$

其中 Δ^* 表示由对角映射 Δ 导出的上同调群的同态.

cap积由下图导出

$$\cap\colon H^*(X,A;R)\otimes_R H_*(X,A\cup B;R)\xrightarrow{1\otimes\Delta_*}H^*(X,A;R)\otimes_R H_*(X\times X,(A\times X)\cup(X\times B);R)$$

$$\xrightarrow{\backslash}H_*(X,B;R),$$

其中 Δ_* 表示由对角映射 Δ 导出的同调群的同态.

(2),(3)由(1)的cup积自然导出. 自然性直接验证.

例3.6.9 (Borsuk-Ulam定理) 不存在映射 $f\colon S^n\to S^{n-1}$ 将对应点映到对径点, 即 $f(-x)=-x$ 对所有 $x\in S^n$.

假设存在满足条件的 f, 则 f 导出以下映射的交换图

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"] & S^{n-1} \arrow[d, "q"] \\ RP^n \arrow[r, "g"] & RP^{n-1}, \end{tikzcd}$$

其中 p, q 为把对径点粘合的商投射. f 导出的群同态 $f_1\colon H_1(RP^n)=\pi_1(RP^n) \to H_1(RP^{n-1})=\pi_1(RP^n)$ 为同构, 因此由泛系数定理可知 $f_1\colon H_1(RP^n;\mathbb{Z}_2) \to H_1(RP^{n-1};\mathbb{Z}_2)$ 仍为同构, 同样由泛系数定理可知导出的上同调群的同态 $f^1\colon H^1(RP^{n-1};\mathbb{Z}_2) \to H^1(RP^n;\mathbb{Z}_2)$ 为同构. 而 $f^*\colon H^*(RP^{n-1};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^n) \to H^*(RP^n;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$ 为代数同态, 这样的代数同态只能使 $f^1(x) = 0$. 与 f^1 为同构矛盾!

本节定义的几种积都可以推广到对应的谱空间具有乘积结构的广义(上)同调理论上, 在纤维丛理论, 对偶定理, 谱序列理论, 等等都起着非常重要的作用, 但是只是从奇异(上)同调理论的角度来看, 相关结果的证明就显得复杂而且不自然. 反而是从广义(上)同调理论的谱空间角度看, 就简单又自然得多. 因此不再做介绍.