前　言

动力系统简单讲就是 “流” 或 “迭代”. 前者是连续 (时间) 系统, 后者是离散 (时间) 系统. 动力系统既有深厚的数学理论, 又有自然科学和工程技术的强烈背景和应用. 动力系统从 19 世纪末 H. Poincaré 创立微分方程定性论开始, 陆续形成了拓扑动力系统、遍历论、哈密顿动力系统、微分动力系统、复动力系统、随机动力系统等分支. 不过这些分支的界限并不严格, 常有交叉重叠. 微分动力系统一般是指 20 世纪 60 年代以来围绕结构稳定性、双曲性、通有性等问题发展起来的一个分支.

本书是一本关于微分动力系统的研究生教材. 为简单起见本书只讨论离散系统, 即微分同胚的迭代. 主要线索围绕**结构稳定性**和**双曲性**这两个概念展开. 如所周知, 一个周期轨道是结构稳定的当且仅当满足双曲性条件 (特征值模不为 1). 有限个周期轨道的情形类似. 但具有无穷多个周期轨道的系统是否可以结构稳定, 却一直很受怀疑. 20 世纪 60 年代初的一个历史性发现是 Smale 马蹄. 这个系统有无穷多个周期轨道, 却是结构稳定的. 这一重要发现成为现代动力系统兴起的标志. 连同随后发现的 Anosov 环面同构等重要系统, 这揭示了一个令人惊讶的事实: 动力行为高度复杂的、“混沌” 的系统也可以是结构

稳定的. 保证这种复杂集合为结构稳定的分析条件将仍被称作 “双曲性”. 这就引发了**双曲集**的理论. Smale 的 Ω-稳定性定理则是基于这一理论的一个早期的整体性结果. 本课程试图循这一脉络展开, 于是含有如下五章内容.

第一章介绍动力系统的一些基本概念, 如极限集、非游荡集、极小集、传递集等, 以及拓扑共轭和结构稳定性的概念. 作为对这些概念的一个综合说明, 简要介绍了圆周自同胚的经典理论.

第二章对一个不动点的情形讨论双曲性. 内容有双曲不动点的稳定性, 双曲性在扰动下的保持, Hartman-Grobman 定理, 双曲不动点的稳定流形定理等. 这一章的内容是经典的, 但处理方式考虑到了第四章关于双曲集的一般情形的需要.

第三章介绍两个有历史意义的系统, Smale 马蹄和 Anosov 环面同构. 这两个系统引发了现代动力系统理论的诞生.

第四章将双曲性的概念, 从一个不动点的情形, 推广到一般的不变集的情形. 内容有双曲集的双曲性在扰动下的保持、双曲集的稳定流形族定理、双曲集的结构稳定性、伪轨跟踪等. 这一章构成了结构稳定性理论的分析基础, 也是整个课程技术上最复杂的部分.

第五章在双曲集理论的基础上介绍结构稳定性理论的一个方面: 双曲性蕴含结构稳定性. 高潮是 Smale 的 Ω-稳定性定理.

第一、三、五章是拓扑式的, 比较直观, 有各种各样的概念和例子, 内容比较广泛. 第二、四两章则是分析式的, 聚焦于稳定流形、结构稳定性等少数几个课题, 内容相当集中. 但就篇幅来讲, 第二章和第四章合起来却占了全书的五分之三以上. 这是因为, 这两章技术上比较复杂, 而本书又做了自给自足、原原本本的处理.

关于双曲集的第四章无疑是最值得说明的. 这一章与关于双曲不动点的第二章有许多平行之处, 但技术上复杂得多, 通常是课程的难点. 关于双曲集有两种处理方式. 一种是将问题转化为无限维空间的不动点问题而**应用**无限维情形关于不动点的**结论**. 另一种是直接处理

双曲集问题而**重复**有限维情形关于不动点的**证明**. 两者各有优点, 后一种方式对证明双曲集的稳定流形族定理特别方便. 本书采取后一种处理方式. 在这种方式下, 第四章的许多陈述在形式上与第二章十分相近. 第四章如果遇到什么困难, 最好的办法是查看第二章. 那里有相同的数学实质, 却简单易懂得多. 为便于查看对照, 本书对第四章的表述, 包括具体的符号乃至语句, 尽量做得与第二章相同. 这大概是本书一个很特别的地方. 作者相信, 数学的表述不同于文学艺术, 不需要避免形式上的雷同, 反倒是需要揭示表面差异之下的、本质上的一致. 第四章关于双曲集的内容重要而困难. 本书的愿望是, 用最简单、平实的方式, 把这些内容严格、彻底地讲述出来, 使读者迅速进入微分动力系统的核心.

阅读本书所需要的基础知识是数学分析、线性代数、点集拓扑, 以及泛函分析的一些原理. 微分流形的一些基本概念如切丛、切映射是需要的, 但并不深. 也许反而可以说, 本课程提供了理解和运用这些概念的一个适当的场所. 本书取材较少, 但在解说上却常常不吝篇幅. 本书附有若干插图, 虽然简单, 对课堂教学却颇有帮助.

本书末尾的参考文献中列举了与本书内容密切相关的一些著作. 其中两本大型专著 Katok-Hasselblatt [KH] 和 Robinson [R] 对动力系统做了全景式的介绍. 这些著作各有特点, 可以给读者许多启发. 作者个人还特别受益于张筑生的中文专著 [Z], 这本书在很长一段时间里是作者讲授这一课程所使用的主要参考书.

本书篇幅较小, 固然是作者本来希望的, 但也带来了一些缺点. 特别是未能对本书涉及的大量结果指明原始文献. 这方面 Robinson 的书 [R] 做了许多努力, 为读者提供了方便.

本书是作者在北京大学多次讲授微分动力系统研究生课程所使用的讲义, 课程为一学期, 每周 3 课时, 听众是有关方向的研究生和高年级本科生. 除北京大学外, 作者还在台湾大学 (2003) 和台湾静宜大学 (2004) 讲授过这一课程, 部分内容还在南开大学 (1989)、中山大学

(1990)、福州大学 (1995)、南京大学 (1998)、台湾理论科学中心 (1999)、中国科学技术大学 (2001)、吉林大学 (2007)、台湾交通大学 (2011)、韩国忠南大学 (2014) 作为短期课程讲授. 讲义也就一直在修改, 直到读者今天见到的样子. 作者借此机会对上述课程的听众表示感谢. 作者要特别感谢甘少波教授多年来的友好协作, 课程的许多微妙之处, 像图像变换的压缩性等, 都与他做过详细的讨论. 作者还要感谢文晓教授和杨大伟教授, 帮作者制作了精美的插图和很多有启发意义的习题. 文晓教授还与作者一起对本书一些新写的部分做了反复的推敲和修改. 这些年来不少同学帮作者找出了讲义中的笔误, 也借此机会一并致谢.

文兰　谨识

2014 秋于北京大学

目 录

第一章

动力系统初步

动力系统就是抽象的“流”. 点的流动就形成了“轨道”. 动力系统经典的例子是常微分方程 (或者说向量场) 给出的点随时间沿解曲线的流动. 为简单起见我们假定每条解曲线都定义在整个时间轴 $(-\infty, \infty)$ 上, 从而点流动起来不必担心“出界”. 最特殊的轨道由一个点组成, 即向量场的“奇点”, 也就是“流”的不动点, 比如常见的汇点、源点、鞍点. 如果附近的点以指数速度趋近或远离, 则称之为“双曲”奇点. 还有比较特殊的就是周期轨道. 如果附近的点以指数速度趋近或远离, 则称之为“双曲”周期轨道. 奇点和周期轨道是最简单且最重要的轨道.

每一个学科发展的背后都有许多故事. 动力系统也是这样. 上世纪 60 年代初 Peixoto 在 *Topology* 杂志上发表了一个定理. 这个定理说: 在可定向闭曲面上, 一个向量场为结构稳定当且仅当它是简单的. (这里“简单”是指只有有限个奇点和周期轨道, 每个是双曲的; 每个点正向或负向都趋于一个奇点或一个周期轨道; 没有鞍点连线.) 而且, 结构稳定向量场在全体向量场的空间里稠密.

这里, 称一个向量场为**结构稳定**的, 如果它“附近”的所有向量场

的轨道拓扑结构都与它相同. 不论从哪个角度看, 结构稳定性都是一个重要的概念. 但这个概念比较抽象, 涉及 "附近" 的所有向量场, 较难把握. 而上述定理提出的判别条件却只涉及一个向量场, 而且只涉及很少几条有关奇点和周期轨道的信息, 具体直观. 这个漂亮的整体性定理立刻吸引了众多数学家的注意, 其中就有年轻的 S. Smale. 他后来在一篇回忆文章 [Sm2] 中记下了下面这个有趣的故事.

Smale 起初猜测 Peixoto 定理对高维空间也成立, 但微分方程专家 Levinson 写信告诉他这不对, 说自己研究过一个 3 维的常微分方程, 有无穷多个周期轨道, 而且扰动不掉. Smale 半信半疑找出 Levinson 的文章来仔细揣摩, 天天带着一打纸和一支笔, 到里约热内卢的海滩上思索, 累了就游游泳. 他终于确信 Levinson 是对的. 实际上, Smale 从 Levinson 的文章中抽象出了如下的关键机理, 如图 1.1:

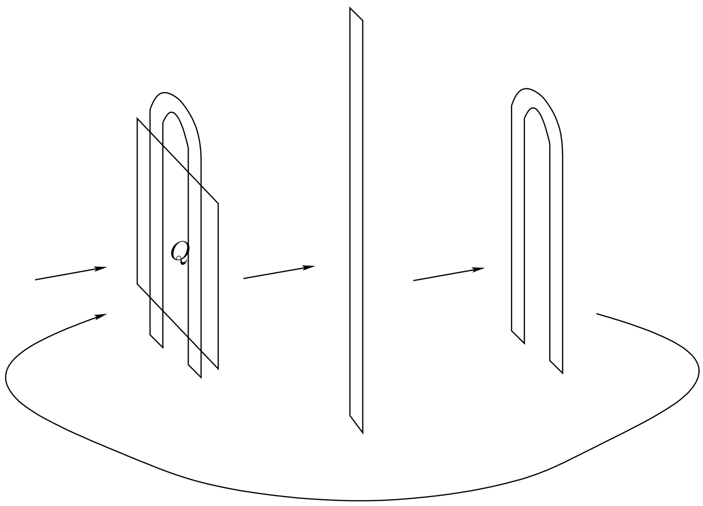

图 1.1　关键几何机理

这里 Q 是一个方形, 与流线方向横截. 在流动中, Q 渐渐变瘦变长, 并弯成马蹄的样子, 又转回来, 与 Q 自己相交, 如图 (这里把故事做了点简化). Smale 发现, 就是这个简单的机理, 蕴含了扰动不掉的无穷多个

周期轨道. 为了更简洁地说明问题, 他把这个 3 维流的问题约化为一个 2 维映射的问题, 即把流 "转一圈" 的过程记为一个映射 $f: Q \to \mathbb{R}^2$, 如图 1.2:

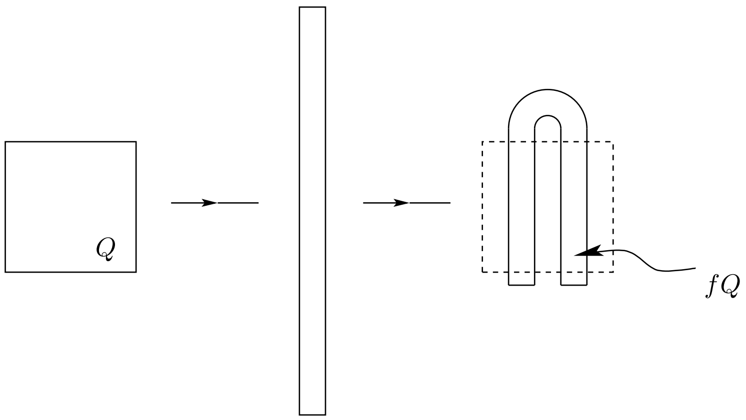

图 1.2　Smale 马蹄

这样, f 的一个不动点就对应于流的一个周期轨道. f 的一个 2-周期点也对应于流的一个周期轨道, 只是 "转了两圈". Smale 证明了 f 有无穷多个周期点, 而且扰动不掉. 这说明 Peixoto 定理在高维确实不成立. 也就是说, 在高维, 结构稳定性并不总表现为有限个周期轨道的简单形态, 而可能与高度的复杂形态 (后来被称为 "混沌") 共存. 这个重要的发现成为现代动力系统兴起的标志. 本书第三章将讲到这个 "马蹄" 映射.

Smale 很快发现, 这个问题有很深的历史渊源, 与 19 世纪末 Poincaré 研究天体力学时发现的 "横截同宿点" 现象有关, 也与 20 世纪前期 Birkhoff 的一些工作有关. 基于马蹄映射和随后 Anosov 的重要工作, Smale 提出了 "双曲集"的概念, 并和 Palis 一起提出了相当于 Peixoto 判别条件的高维形式, 即对整个学科产生很大影响的 "稳定性猜测". 这一猜测引发了包括他们自己和 Robinson, 廖山涛, Mañé 在内的许多学者的重要工作, 推出了动力系统的一个全盛期. 至于稠密

性, 则情况很不相同. Smale 以及后来的许多学者发现, 在高维, 结构稳定系统不稠密. 也就是说, 在高维系统组成的空间里, 存在这样的开集, 里面每个系统都不是结构稳定的. Bonatti 和 Diaz 甚至发现, 存在这样的开集, 里面每个系统的任意邻近, 可以在差一迭代的意义下出现任何系统! 世界的奥秘和神奇, 就这样被一代一代的探索者们一步步揭开 ⋯⋯

本书讲述上述精彩领域的一个较为基础的部分. 为简单起见我们只讨论离散时间的系统, 即同胚的迭代.

§1.1 基本概念

命 X 为一紧致度量空间, $f: X \to X$ 为一同胚. f 生成一族**自复合**, 或称**迭代**

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}, \quad f^0 = id, \quad f^{-n} = (f^n)^{-1}.$$

显然, 对任意整数 n 和 m,

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}.$$

称这一族迭代 $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 f 生成的**动力系统**, 或简称 f 为一动力系统.

对任一 $x \in X$, 称集合 $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 x 在 f 下的**轨道** (见图 1.3), 记为 $\mathrm{Orb}(x, f)$ 或 $\mathrm{Orb}(x)$. 任二轨道或全同, 或不相交. 称集合 $\{x, fx, f^2x, \cdots\}$ 和 $\{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \cdots\}$ 分别为 x 的**正半轨**和**负半轨**, 记为 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 和 $\mathrm{Orb}^-(x)$. 称 x 为一**周期点**, 如果存在 $n \geq 1$, 使得

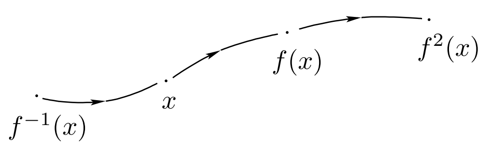

图 1.3 f 的轨道

$f^n(x)=x$. 使该等式成立的最小的正整数 n 称为 x 的**周期**. 周期为 1 的周期点即为不动点. 易见 x 为一周期点当且仅当 x 的轨道由有限个点组成. 记 f 的周期点的集合为 $\mathrm{P}(f)$, 不动点的集合为 $\mathrm{Fix}(f)$.

称 $\Lambda\subset X$ 为 f 的一个**不变集**, 如果 $f(\Lambda)=\Lambda$. 任一轨道为不变集. 易见 Λ 为不变集当且仅当 Λ 为一些 (有限个或无穷多个) 轨道的并集. $\mathrm{P}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 为不变集, 空集 $\emptyset$ 和全空间 X 总是不变集.

定理 1.1 若 Λ 为不变集, 则 $\overline{\Lambda}$, $\partial(\Lambda)$, $\mathrm{int}(\Lambda)$ 也是不变集.

证明 因 f 为同胚, 有 $f(\overline{\Lambda})=\overline{f(\Lambda)}=\overline{\Lambda}$. 另两式的证明留给读者. 定理 1.1 证完. ■

动力系统注重轨道的极限状态, 因而便于研究的是 (非空) 紧不变集. 全空间 X 总非空且紧致; 不动点集 $\mathrm{Fix}(f)$ 不一定非空, 但总紧致; 周期点集 $\mathrm{P}(f)$ 不一定非空, 也不一定紧致. 由此产生了许多复杂的动力现象.

一个点 $x\in X$ 的正半轨

$$x, fx, f^2x, \cdots$$

一般说来不收敛 (若收敛, 其极限必为不动点), 但总有许多子序列收敛. 称 $y\in X$ 为 x 的一个 ω-**极限点**, 如果有正整数的一个子序列 $n_i\to+\infty$ 使得 $f^{n_i}(x)\to y$. 称 x 的全体 ω-极限点的集合为 x 的 ω-**极限集**, 记为 $\omega(x)$ (见图 1.4). 反转时间则可定义 x 的 α-极限集. 确切地, 称 $y\in X$ 为 x 的一个 α-**极限点**, 如果有正整数的一个子序列

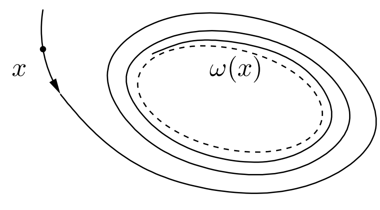

图 1.4 ω-极限集

$n_i \to +\infty$ 使得 $f^{-n_i}(x) \to y$. 称 x 的全体 α-极限点的集合为 x 的 **α-极限集**, 记为 $\alpha(x)$. 显然 $\alpha(x) = \omega(x, f^{-1})$. 故一般只陈述关于 $\omega(x)$ 的结果. 若 x 为周期点, 则

$$\omega(x) = \alpha(x) = \mathrm{Orb}(x).$$

定理 1.2 对任意 $x \in X$, $\omega(x)$ 为非空紧不变集, 且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f^n(x), \omega(x)) = 0.$$

证明 因 X 紧致, 知 $\omega(x)$ 非空且紧. 任取 $y \in \omega(x)$. 存在子序列 $n_i \to +\infty$ 使得 $f^{n_i}(x) \to y$. 故 $f^{n_i+1}(x) \to f(y)$. 因此 $f(y) \in \omega(x)$. 这证明 $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. 类似地, $f^{n_i-1}(x) \to f^{-1}(y)$, 故 $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$, 即 $f(\omega(x)) \supset \omega(x)$. 这证明 $\omega(x)$ 为不变集.

假设

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

不成立. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及一子序列 $n_i \to +\infty$, 使得对所有 i,

$$\mathrm{d}(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geq \varepsilon_0.$$

适当取子序列 n_{i_k} 可得 $f^{n_{i_k}}(x) \to z \notin \omega(x)$, 矛盾. 定理 1.2 证完. ■

周期轨道是最简单且最重要的轨道. 比周期性放宽一些的, 是各种 “回归性” 的概念. 比如称 $x \in X$ 为一个**正向回复点**, 如果 $x \in \omega(x)$. 换句话说, x 为正向回复的, 如果 x 的正半轨逼近到 x 自身. 类似地, 称 $x \in X$ 为一**负向回复点**, 如果 $x \in \alpha(x)$. 正向回复点和负向回复点统称为**回复点**. 可以证明回复点集一定非空, 但不一定闭. 更一般地有所谓 “非游荡” 的概念. 称 $x \in X$ 为一**非游荡点** (见图 1.5), 如果对 x 在 X 中的任意邻域 V, 存在 $n \geq 1$ 使得 $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. 换句话说, 对 x 在 X 中的任意邻域 V, 都有某个轨道穿过 V 至少两次. 非游荡点的集合称为**非游荡集**, 记为 $\Omega(f)$. 易见 $\Omega(f)$ 为非空紧不变集, 包含 f 的所有的周期点、回复点、ω- 和 α-极限点、以及它们的闭包点.

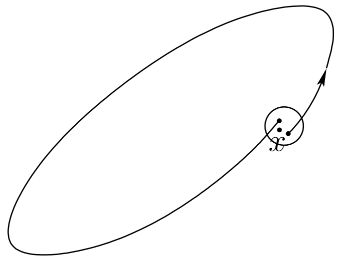

图 1.5 非游荡点

称 $\Lambda \subset X$ 为 f 一**极小集**, 如果 Λ 为 f 的非空紧不变集, 但 Λ 没有任何真子集是非空紧不变的. 一个不动点或一条周期轨道是极小集.

定理 1.3 任一非空紧不变集中必包含一个极小集.

证明 设 Γ 为 f 的任一非空紧不变集. 记 $\mathcal{C}$ 为 Γ 中 f 的所有非空紧不变集的集合. 包含关系 "$\subset$" 为 $\mathcal{C}$ 上一偏序. 易见在这一偏序下, $\mathcal{C}$ 的任一全序子集有下界. 由 Zorn 引理, $\mathcal{C}$ 有极小元 Λ, 即为 f 的一个极小集. 定理 1.3 证完. ■

下一定理说明, 极小性导致很强的 "回归性".

定理 1.4 Λ 为极小集当且仅当每一 $x \in \Lambda$ 的轨道在 Λ 中稠密.

证明 设 Λ 为 f 的极小集. 任取 $x \in \Lambda$. 则 $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$ 是 f 的非空紧不变集. 由极小性, $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = \Lambda$. 反之, 设 Λ 不是 f 的极小集, 则 Λ 有一真子集 Λ_1 为 f 的非空紧不变集. 取 $x \in \Lambda_1$. 则 $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$. 定理 1.4 证完. ■

注 定理陈述中的 "轨道" 可以换成 "正半轨" 或 "负半轨".

定理 1.5 设 X 连通. 则 f 的任意极小集或为全空间 X, 或在 X 中无处稠密.

证明 设 Λ 为 f 的极小集. $\partial\Lambda$ 总是 f 的紧不变集. 若 $\partial\Lambda = \emptyset$, 则 $\Lambda = \mathrm{int}(\Lambda)$. 故 Λ 为 X 的开子集. 那么 Λ 既开又闭. 因 X 连通,

$\Lambda = X$. 若 $\partial\Lambda \neq \emptyset$, 则 $\partial\Lambda$ 为 f 的非空紧不变集. 但 Λ 为 f 的极小集, 故 $\partial\Lambda = \Lambda$, 即 Λ 在 X 中无处稠密. 定理 1.5 证完. ■

称 f 的紧不变集 $\Lambda \subset X$ 为**拓扑传递**的, 或简称**传递**的, 若存在 $x \in \Lambda$, 使得 $\omega(x) = \Lambda$. 显然一个传递集不能分解为两个互不相交的紧不变集的并. (当然有些不传递的集合也不能分解为两个互不相交的紧不变集的并. 例如由两个不动点和 "连接" 这两个不动点的一条轨道所组成的紧不变集.)

定理 1.6 (Birkhoff) *设 Λ 为 f 的紧不变集. 以下三条件等价:*

(1) Λ 为传递;

(2) 对 Λ 的任意两个开子集 U 和 V, 存在 $n \geq 1$, 使得

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset;$$

(3) 存在 $x \in \Lambda$, 其正半轨在 Λ 中稠密.

证明 (1)$\Rightarrow$ (2) 的证明甚为简单, 略去. 我们来证 (2) $\Rightarrow$ (3). 取 Λ 一可数基 $V_1, V_2, \cdots$. 对每一 $i \geq 1$, 集合

$$\bigcup_{n\geq 1} f^{-n}V_i$$

为 Λ 的开子集. 不难看出也是稠子集. (实际上, 任取 Λ 一开子集 U, 由 (2), 存在 $n \geq 1$ 使得 $f^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$. 从而 $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \emptyset$.) 由 Baire 定理,

$$B = \bigcap_{i\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} f^{-n}V_i$$

非空 (实际上 B 在 Λ 中稠密). 任取 $x \in B$. 则对任意 $i \geq 1$, 存在 $n \geq 1$, 使得 $x \in f^{-n}V_i$, 即 $f^n x \in V_i$. 这证明 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 在 Λ 中稠密.

再证 (3) $\Rightarrow$ (1). 设存在 $x \in \Lambda$ 使得 $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. 则 $f^{-1}(x) \in \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. 若 $f^{-1}(x) \in \mathrm{Orb}^+(x)$, 则 x 为周期点, 故 $\Lambda = \omega(x)$. 若 $f^{-1}(x) \notin \mathrm{Orb}^+(x)$, 则易见 $f^{-1}(x) \in \omega(x)$. 故 $\mathrm{Orb}(x) \subset \omega(x)$. 故 $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \subset \omega(x)$. 从而 $\Lambda = \omega(x)$. 定理 1.6 证完. ■

注 条件 (3) 中的 "正半轨" 可以换成 "负半轨", 但不能换成 "轨道". 一个简单的反例是由两个不动点和 "连接" 这两个不动点的一条轨道所组成的紧不变集.

§1.2 拓扑共轭与结构稳定性

称两个同胚 $f: X \to X$ 和 $g: X \to X$ 彼此**拓扑共轭**, 如果存在一个同胚 $h: X \to X$, 使得 $hf = gh$. 粗略地说, 拓扑共轭的两个同胚 f 和 g 差一连续的坐标变换. 称上述起关联作用的同胚 h 为 f 与 g 间的一个**拓扑共轭**. 拓扑共轭是 X 上所有同胚的集合上的一个等价关系. 易见 $hf^n = g^n h$. 从而一个拓扑共轭保持轨道, 即对任意 $x \in X$,

$$h(\mathrm{Orb}(x, f)) = \mathrm{Orb}(h(x), g).$$

特别地, 一个拓扑共轭保持周期点集、ω-极限集、非游荡集, 即

$$h(\mathrm{P}(f)) = \mathrm{P}(g), \quad h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g), \quad h(\Omega(f)) = \Omega(g).$$

将所有同胚按拓扑共轭分类, 一般说来不现实. 不过对最简单的空间, 这样的分类倒也不难. 让我们考虑 X 为一闭区间 $[a, b]$ 的情形. 一个同胚 $f: [a, b] \to [a, b]$ 或者为严格递增且 $fa = a$, $fb = b$, 或者为严格递减且 $fa = b$, $fb = a$. 在前一情形, 称 f 为**保持定向**的; 在后一情形, 称 f 为**反转定向**的. 一个保持定向的同胚和一个反转定向的同胚不可能拓扑共轭, 因为不然的话, 限制在边界上它们也将拓扑共轭, 但限制在边界上, 一个有不动点, 而另一个没有. 下面这个定理是显然的, 证明略去.

定理 1.7 *若 f 为闭区间上一个保向同胚, 则*

$$\Omega(f) = \mathrm{Fix}(f).$$

下面考虑一种最简单的情形, 即除端点外无不动点的保向同胚. 一般说来, 任一保向同胚 f 限制在它的不动点集 $\mathrm{Fix}(f)$ 的余集的一个

连通分支 (的闭包) 上, 就是这样一个同胚. 这时 f 的图像或者在对角线以上, 或者在对角线以下. 在前一种情形, 除端点外, 所有的点在 f 的作用下向右走; 在后一种情形, 除端点外, 所有的点在 f 的作用下向左走.

定理 1.8 $[a,b]$ 上任意两个内部无不动点的保向同胚都拓扑共轭.

证明 设 f 和 g 是 $[a,b]$ 上两个内部无不动点的保向同胚. 我们就 $f(x)>x$ 且 $g(x)>x$, $\forall x\in(a,b)$ 的情形进行证明. 其他情形证明类似. 取定一点 $p\in(a,b)$ 及一同胚

$$h_0:[p,f(p)]\longrightarrow[p,g(p)]$$

使得 $h_0p=p, h_0(fp)=gp$. 对任意整数 n, 定义

$$h_n:[f^n(p),f^{n+1}(p)]\longrightarrow[g^n(p),g^{n+1}(p)]$$

为

$$h_n=g^n\circ h_0\circ f^{-n}.$$

不难看出这些 h_n 粘成一个同胚 $h:[a,b]\to[a,b]$ (见图 1.6), 使得 $hf=gh$. 定理 1.8 证完. ■

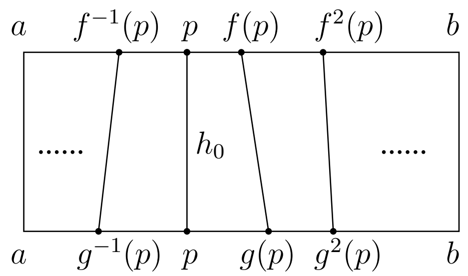

图 1.6 构造拓扑共轭 h

定理 1.8 说明, 在游荡域上构造拓扑共轭相当随意. 换个角度来说, 游荡域上的动力形态对 “扰动” 不十分敏感.

与拓扑共轭的概念紧密联系的是结构稳定性的概念. 这是在微分动力系统的框架下讨论的.

设 M 为一紧致无边 C^∞ 流形. 记 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 为 M 到自身的 C^r 微分同胚的集合, 赋 C^r 拓扑. 这一拓扑可以简单地由局部坐标给出如下. 固定 M 的允许坐标邻域的一个有限覆盖 (U_i, ϕ_i), $i = 1, \cdots, N$ (称一个坐标邻域 (U, ϕ) 为**允许的**, 如果存在另一个坐标邻域 (V, ψ), 使得 $\overline{U} \subset V$ 且 $\phi = \psi|_U$). 称一列 C^r 微分同胚 f_n **在 C^r 意义下收敛**到一个 C^r 微分同胚 f, 如果对所有 $1 \le i, j \le N$, 局部表示 $\phi_j f_n \phi_i^{-1}$ 连同其直到 r 阶偏导数, 在使这些局部表示有意义的所有点上, 一致收敛到 $\phi_j f \phi_i^{-1}$ 及其对应的偏导数. 由此产生 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 上的一个 C^r 拓扑. 不难看出, 不同有限覆盖产生的 C^r 拓扑彼此等价.

称 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 为 C^r **结构稳定**, 如果存在 f 的一个 C^r 邻域 $\mathcal{U}$ 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 与 f 拓扑共轭.

换言之, f 为 C^r 结构稳定的意思是, C^r 扰动不改变 f 的轨道的拓扑结构. 显然, 如果 f 为 C^r 结构稳定, 则为 C^{r+1} 结构稳定. 因此, C^1 结构稳定性是最强的结构稳定性. 这里不谈 C^0 结构稳定性, 是因为 C^0 扰动破坏性太强, 以至没有任何系统可以是 C^0 结构稳定的. 比如, 用 C^0 扰动, 很容易把一个孤立的不动点变成一段区间的不动点, 从而摧毁任何结构稳定性. 总之, f 及其扰动 g 必须是微分同胚, 而不只是同胚. 但另一方面, 共轭 h 却必须允许是一般的同胚, 而不能局限于微分同胚. 这是因为可微共轭限制太严. 比如, 由于链法则, 可微共轭必须保持不动点处的导数值. 但用 C^r 扰动却很容易改变不动点处的导数值. 因此, 如果限于可微共轭就不能有结构稳定的系统. 这样看来, 结构稳定性的概念相当有分寸. 它局限于 "破坏性较轻" 的可微扰动, 同时允许较强有力的拓扑共轭来做 "修复".

结构稳定系统的刻画问题是上世纪后半叶微分动力系统的中心问题. 但对最简单的空间 $[a, b]$ 这个问题倒不难解答. 下面的简单定理就给出了这样一个刻画. 注意 $f \in \mathrm{Diff}^1[a, b]$ 不止意味着 f 为同胚且可

微, 而且意味着 f^{-1} 可微. (例如 $f(x)=x^3$ 不是微分同胚.) 特别地, f' 的绝对值在 $[a,b]$ 上有正下界. 易见若 f 是微分同胚, 则 C^1 临近 f 的 g 也是.

定理 1.9　设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为内部无不动点的保向微分同胚. 对任意 $r\geq 1$, f 为 C^r 结构稳定当且仅当 $f'(a)\neq 1$ 且 $f'(b)\neq 1$.

证明　设 $f'(a)\neq 1$ 且 $f'(b)\neq 1$. 我们来证明, 对任意 $r\geq 1$, f 为 C^r 结构稳定. 只需对 $r=1$ 证明. 易见存在 f 在 $\mathrm{Diff}^1([a,b])$ 中的一个 C^1 邻域 $\mathcal{U}_1$, 以及 a 在 $[a,b]$ 中的一个邻域 U 和 b 在 $[a,b]$ 中的一个邻域 V, 使得任意 $g\in\mathcal{U}_1$ 保持定向, 且在 U 中有且只有一个不动点 a, 在 V 中有且只有一个不动点 b (见图 1.7). 因 f 在紧集 $[a,b]-U-V$ 上没有不动点, $|f(x)-x|$ 在 $[a,b]-U-V$ 上有正下界. 故存在 f 的一个 C^0 邻域 $\mathcal{U}_2$, 使得任一 $g\in\mathcal{U}_2$ 在 $[a,b]-U-V$ 上没有不动点. 命 $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$. 则任一 $g\in\mathcal{U}$ 保持定向, 且在 (a,b) 上没有不动点. 由定理 1.8, g 与 f 拓扑共轭.

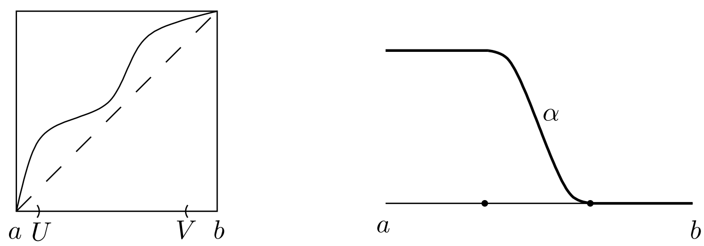

图 1.7　定理 1.9 的证明

反之, 设 $f'(a)=1$ 或 $f'(b)=1$. 为确定起见设 $f'(a)=1$. 任取 $r\geq 1$. 我们来构造 f 的一个任意小 C^r 扰动 g, 使得 g 至少有 3 个不动点, 从而 f 不是 C^r 结构稳定的. 为简单起见, 设 $a=0, b=1$. 固定一个 C^∞ 冲击函数 α: $[0,1]\to[0,1]$, 使得 $\alpha(x)=1$ 对 $x\in[0,1/3]$, $\alpha(x)=0$ 对 $x\in[2/3,1]$, $0\leq\alpha(x)\leq 1$ 对 $x\in[0,1]$. 不失一般性, 可设

f 的图像在对角线上方. 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$g(x) = g_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon\alpha(x)x.$$

如果 ε 足够小, 则 g 为保向微分同胚. 随着 $\varepsilon \to 0$, g 与 f 可任意 C^r 接近. 显然 $x = 0$ 和 $x = 1$ 是 g 的不动点. 因为在 $x = 0$ 附近有 $g(x) = f(x) - \varepsilon x$, 故 $g'(0) = f'(0) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. 因此 f 的图像在 $x = 0$ 附近被稍稍向下转了一点, 再向上穿过对角线, 因而 g 在 $x = 0$ 附近还有一个不动点. 故 g 至少有 3 个不动点. 定理 1.9 证完. ■

定理 1.9 很简单, 却很有教益. 它说明, 与游荡点的情形不同, 非游荡点 (这里是不动点) 对扰动比较敏感. 为了经得起扰动, 它们需要像 $f'(a) \neq 1$ 一类的条件, 即所谓 "双曲性" 条件. 因此, 非游荡集之所以重要, 不仅因为它吸收了所有轨道的长期行为, 而且因为从扰动观点来看, 它更敏感, 需要更多的关注. 另一个有趣的现象是, 对区间微分同胚, 由定理 1.9, 对任意 i 和 j, C^i 结构稳定性等价于 C^j 结构稳定性. 这一现象对 2 维流也成立 (Peixoto 定理), 对高维流则尚未知.

§1.3 圆周同胚

命 S^1 为单位圆周, $f: S^1 \to S^1$ 为一同胚. 称 f **保持定向**, 如果 f 到覆叠空间 $\mathbb{R}$ 上的任何提升为严格递增的. 称 f **反转定向**, 如果 f 到覆叠空间 $\mathbb{R}$ 上的任何提升为严格递减的. (后面 §3.3 中有关于映射提升的一个简单说明.) 任意同胚 $f: S^1 \to S^1$ 或为保持定向, 或为反转定向. 两个保向同胚的复合仍为保向同胚. 两个反向同胚的复合也为保向同胚. 一个保向同胚和一个反向同胚的复合为反向同胚.

这些概念也可通过圆周上的有向区间来描述. 任意两点 $a, b \in S^1$ 决定两段开区间, 即 $S^1 - \{a, b\}$ 的两个连通分支. 记 (a, b) 为沿反时针方向 (这里借助平面的定向) 从 a 到 b 的那一个开区间. 于是另一个开区间表为 (b, a), 因为它沿反时针方向是从 b 到 a. 注意这里符号 (a, b) 和 (b, a) 的用法与直线上不同. 那里是指对于直线的不同定向而言的同一区间, 而这里是指对于圆周的同一定向而言的不同区间. 对

任意开区间 $(a,b)\subset S^1$, $f(a,b)$ 也是开区间, 以 fa 和 fb 为端点. 故或者 $f(a,b)=(fa,fb)$, 或者 $f(a,b)=(fb,fa)$. f 保持定向当且仅当对任意 $a,b\in S^1$ 有 $f(a,b)=(fa,fb)$, 反转定向当且仅当对任意 $a,b\in S^1$ 有 $f(a,b)=(fb,fa)$.

命 $\Lambda\subset S^1$ 为一紧集. 称 $S^1-\Lambda$ 的连通分支为 Λ 的**余区间**. 于是 Λ 的一个余区间为一个开区间 (a,b), 满足 $(a,b)\cap\Lambda=\emptyset$ 但 $a,b\in\Lambda$. 命 $f:S^1\to S^1$ 为一同胚. 下一引理是显然的, 证明从略.

引理 1.10　对任意紧不变集 $\Lambda\subset S^1$, f 将 Λ 的余区间映为余区间. 确切地, 对 Λ 的任一余区间 I, 存在 Λ 的唯一余区间 J, 使得 $f(I)=J$. 并且, 这个对应是余区间集合上的一一对应.

例 1　如图 1.8 所示的保向同胚 f. $\mathrm{Fix}(f)$ 由 3 个点构成. f 把 $\mathrm{Fix}(f)$ 的每个余区间映入自身. 在每个余区间上, 点的移动方向如箭头所示. 更一般地, $\mathrm{Fix}(f)$ 可以是 S^1 上的任意紧集, 有可数多个余区间, 其上的箭头可以任意标注.

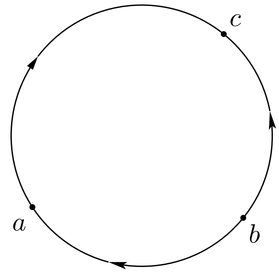

图 1.8　例 1

例 2　有理刚体旋转 f, 旋转角 $2\pi m/n$, $(m,n)=1$. 易见 f 保持定向, $\mathrm{P}(f)=S^1$, 且所有周期点有相同的周期 n.

例 3　无理刚体旋转 f, 旋转角 $2\pi\alpha$, α 为无理数. 易见 f 保持定向, $\mathrm{P}(f)=\emptyset$. 我们来证明全空间 S^1 为 f 的极小集. 任取一点 $x\in S^1$. 我们来证 $\overline{\mathrm{Orb}(x)}=S^1$. 任取开区间 (a,b). 只需证明 $\mathrm{Orb}(x)$

与 (a,b) 相交. 因 x 不是周期点, 知 $\mathrm{Orb}(x)$ 含有无穷多个点. 故必有两点 $f^n(x)$ 和 $f^m(x)$, $m \neq n$, 满足 $l[f^n(x), f^m(x)] \leq l[a,b]/3$, 这里 $l[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 的长度 (见图 1.9). 为简单起见, 记 $f^n(x) = y$, $f^m(x) = z$, $f^{m-n} = g$. 于是 $g(y) = z$. 故 g 为一角度很小的刚体旋转. 故 $g[y,z]$, $g^2[y,z]$, $\cdots$ 构成一列首尾相接的长度为 $l[y,z]$ 的区间. 故必有一 $k \geq 1$ 满足 $g^k[y,z] \subset (a,b)$. 这证明 $\mathrm{Orb}(x)$ 与 (a,b) 相交.

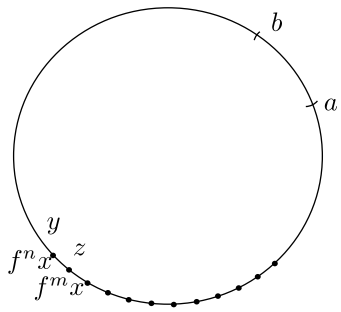

图 1.9 例 3

例 4 反向同胚 f. 如图 1.10 所示: $\mathrm{Fix}(f)$ 由两点 $a, b \in S^1$ 构成, f 将 $\{a,b\}$ 的两个余区间互换. f^2 限制在 $[a,b]$ 和 $[b,a]$ 上为一保向同胚. 特别地, 由定理 1.7 易见 $\Omega(f)$ 由这两个不动点 a, b 和一些 2-周期点构成.

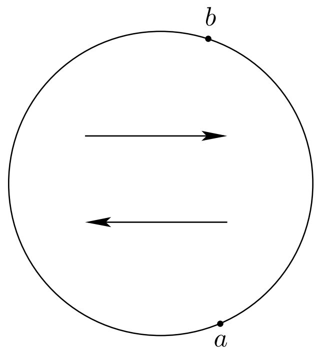

图 1.10 例 4

由于 S^1 上的反向同胚的动力形态很简单, 这一节余下的部分只讨论保向同胚. 我们将保向同胚分为两大类: 有周期点的和无周期点的.

定理 1.11 设 $f: S^1 \to S^1$ 为一保向同胚且 $\mathrm{P}(f) \neq \emptyset$. 则 f 的所有周期点有相同的周期, 且 $\mathrm{P}(f) = \Omega(f)$.

证明 任取 $x \in \mathrm{P}(f)$. 设 x 的周期为 n. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $\mathrm{Orb}(x)$ 的 n 个点, 在圆周上依反时针排列 (见图 1.11). 注意这不一定是点的迭代顺序. 于是

$$(x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \quad \cdots, \quad (x_n, x_1)$$

为 $\mathrm{Orb}(x)$ 的 n 个余区间. 因 $f^m(x_i, x_{i+1}) = (f^m x_i, f^m x_{i+1})$, 若 m 为 n 的倍数, 则 $f^m(x_i, x_{i+1}) = (x_i, x_{i+1})$, 若 m 不是 n 的倍数, 则 $f^m(x_i, x_{i+1}) \cap (x_i, x_{i+1}) = \emptyset$.

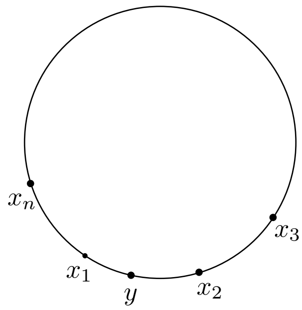

图 1.11 定理 1.11 的证明

任取 $y \in S^1 - \mathrm{Orb}(x)$. 只需证 y 或为 n-周期点, 或为游荡点. 不失一般性, 设 $y \in (x_1, x_2)$. f^n 限制在 (x_1, x_2) 上为到自身的一个保向同胚. 若 $f^n(y) = y$, 则 y 为 n-周期点. 若 $f^n(y) \neq y$, 则存在 y 一邻域 $V \subset (x_1, x_2)$, 使得对任意 $k \geq 1$, 有 $f^{nk}(V) \cap V = \emptyset$. 如上述, 对任意 $1 \leq j \leq n-1$, $f^{nk+j}(V) \cap V = \emptyset$. 于是对任意 $i \geq 1$, 有 $f^i(V) \cap V = \emptyset$. 即 y 为游荡点. 定理 1.11 证完. ■

现转向讨论圆周上无周期点的保向同胚. 这里其实可以省略 “保

向" 二字, 因为反向同胚必有不动点. 回顾一下, 一个**康托集**是指一个紧致的、完全的、完全不连通的集.

定理 1.12 设 $f: S^1 \to S^1$ 为同胚且 $\mathrm{P}(f)=\emptyset$. 则整个非游荡集 $\Omega(f)$ 为一极小集. 且 $\Omega(f)$ 或等于全圆周 S^1, 或为一康托集.

证明 为证 $\Omega(f)$ 为极小集, 只需证 f 的任意非空紧不变集 Λ 包含 $\Omega(f)$. 任取 Λ 一余区间 (a,b). 对任意 $n \geq 1$, 或者 $f^n(a,b)=(a,b)$, 或者 $f^n(a,b) \cap (a,b)=\emptyset$. 因 f 保向, 前一情形蕴含 a 和 b 为周期点, 与 $\mathrm{P}(f)=\emptyset$ 矛盾. 故 $f^n(a,b) \cap (a,b)=\emptyset$. 这证明 $\Omega(f) \subset \Lambda$.

由定理 1.5, 或者 $\Omega(f)=S^1$, 或者 $\Omega(f)$ 在 S^1 中无处稠密. 我们来证明, 在第二种情形下, $\Omega(f)$ 为一康托集. 在 1 维情形, 无处稠密即为完全不连通. 因 $\Omega(f)$ 紧致, 只需证明 $\Omega(f)$ 不含孤立点. 任取 $x \in \Omega(f)$. 因 $\Omega(f)$ 为极小集, 知 $\omega(x)=\Omega(f)$. 故存在 $n_i \to \infty$, 使得 $f^{n_i}(x) \to x$. 但 $\mathrm{P}(f)=\emptyset$, 故序列 $\{f^{n_i}(x)\} \subset \Omega(f)$ 中各项两两不同. 那么 x 不是 $\Omega(f)$ 的孤立点. 定理 1.12 证完. ■

称一同胚 $f: S^1 \to S^1$ 为**例外**的, 如果 $\mathrm{P}(f)=\emptyset$ 且 $\Omega(f)$ 为一康托集.

例 5 S^1 上一例外同胚.

我们来粗略描述一下怎样构造一个例外同胚. 取一无理刚体旋转 $f: S^1 \to S^1$. 任取一点 $p \in S^1$. 将轨道

$$\cdots, f^{-1}p,\ p,\ fp,\ f^2p, \cdots$$

的点对应代之以总长度有限的可数多个闭区间

$$\cdots, I_{-1},\ I_0,\ I_1,\ I_2, \cdots.$$

这样得到一个 (新的) 圆周 Σ. 定义同胚 $g: \Sigma \to \Sigma$, 使得 $gx=fx$ 对所有 $x \in \Sigma - \cup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$, 而 g 将 I_n 同胚地映满 I_{n+1}, 并保持它们在 Σ 中的定向. 则 g 无周期点, 且有游荡点, 故为一例外同胚.

应该指出, 例 5 中的同胚只是 C^0 的. 用更精细的估计, 可以将 g 做成一个 C^1 微分同胚. 但不可能将 g 做成 C^2 的. 据 Denjoy 的经典结果, S^1 上不存在 C^2 的例外微分同胚. 这是一个奇妙的发现.

习　题

下面的问题中, X 表示紧致度量空间, $f: X \to X$ 为一同胚.

1. 证明: $x \in X$ 为周期点当且仅当 x 的轨道为有限集.

2. 证明: $x \in X$ 为周期点当且仅当 x 的轨道为紧致集.

3. 构造一个同胚 f 使得 $\mathrm{P}(f)$ 不紧致.

4. 证明: 对任意 $x \in X$,

$$\omega(x) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{f^n(x) \mid n \geq N\}}.$$

5. 设 $x \in X$. 证明:

(1) $\omega(x)$ 不能表为两个互不相交的闭不变子集的并;

(2) 若 $\omega(x)$ 为有限个周期轨道的并, 则 $\omega(x)$ 其实为一个周期轨道;

(3) 若 $\omega(x)$ 为可数个周期轨道的并, 则 $\omega(x)$ 其实为一个周期轨道.

若 $\omega(x)$ 为不可数个周期轨道的并会如何?

6. 证明: 回复点集一定非空. 举例说明回复点集不一定闭.

7. 证明: $x \in X$ 为 f 的非游荡点当且仅当对 x 在 X 中的任意邻域 U, 存在 $n \neq 0$, 使得 $(f^n U) \cap U \neq \emptyset$, 也当且仅当对 x 在 X 中的任意邻域 U 和任意正整数 N, 存在 $n \geq N$ 使得 $(f^n U) \cap U \neq \emptyset$.

8. 证明: $\Omega(f)$ 为非空紧不变集, 且

$$\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)} \subset \Omega(f).$$

9. 证明: 若 $\Omega(f) = X$, 则 $\{x : x \in \omega(x)\}$ 在 X 中稠密.

10. 证明: 定理 1.4 陈述中的 "轨道" 可以换成 "正半轨" 或 "负半轨".

11. 设 $\Lambda \subset X$ 为 f 的紧不变集. 证明: Λ 为极小集当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \geq 0$, 使得对任意 $x \in \Lambda$, 每一点 $y \in \Lambda$ 都在 $\{f^n(x)\}_{n=-N}^{N}$ 的 ε-邻域内.

12. 设 $\Lambda \subset X$ 为 f 的极小集. 证明: 若 Λ_1 为 Λ 的开不变子集, 则 $\Lambda_1 = \Lambda$.

13. 设 $f: X \to X$ 为拓扑传递. 证明: 任意 f-不变的连续函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 为常值函数. (称 φ 为**不变**的, 如果 $\varphi f = \varphi$.)

称 f 的紧不变集 $\Lambda \subset X$ 为**拓扑混合**的, 如果对 Λ 的任意两个开子集 U 和 V, 存在 $N = N(U, V) \geq 1$, 使得对任意 $n \geq N$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

14. 构造一个传递但不混合的同胚.

15. 设 $f: X \to X$ 和 $g: X \to X$ 为同胚, $h: X \to X$ 为从 f 到 g 的拓扑共轭. 证明: 对任意 $x \in X$ 有 $h(\mathrm{Orb}(x, f)) = \mathrm{Orb}(h(x), g)$. 又, $h(\mathrm{Per}(f)) = \mathrm{Per}(g)$, $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

16. 设 $f: S^1 \to S^1$ 为微分同胚, $\mathrm{P}(f)$ 为非空, 且由有限个双曲周期点组成. 证明: f 为 C^1 结构稳定. (一个周期为 n 的周期点 $x \in S^1$ 称为**双曲**的, 如果 $|(f^n)'(x)| \neq 1$.)

17. (C^r 封闭引理) 设 $f: S^1 \to S^1$ 为 C^r 微分同胚, $r \geq 1$, $\mathrm{P}(f) = \emptyset$. 证明: 对 f 的任意 C^r 邻域 $\mathcal{U}$, 存在 $g \in \mathcal{U}$ 使得 $\mathrm{P}(g) \neq \emptyset$.

18. 证明: 对任意 $r \geq 1$, 若微分同胚 $f: S^1 \to S^1$ 为 C^r 结构稳定, 则 $\mathrm{P}(f)$ 非空, 且由有限个双曲周期点组成.

第二章

双曲不动点

上一章初步讨论了 1 维动力系统. 高维动力系统有许多新特点. 本章讨论高维空间一个双曲不动点的邻域上的局部动力形态, 所采用的方法将直接应用到第四章双曲集的讨论.

§2.1 双曲线性同构

在本章中, E 自始至终表示一个欧氏空间. 称 E 的两个范数 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ **等价**, 如果存在常数 $K \geq 1$, 使得对所有 $v \in E$,

$$K^{-1}|v| \leq \|v\| \leq K|v|.$$

称 K 为 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 之间的一个**关联常数**. 下面的定理是经典的.

定理 2.1 一个欧氏空间 E 的所有范数两两等价.

称线性同构 $A: E \to E$ 为**双曲**的 (见图 2.1), 如果 E 有直和分解

$$E = E^s \oplus E^u,$$

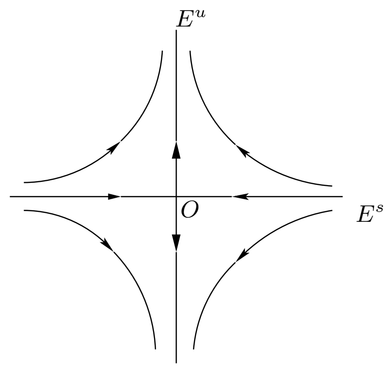

图 2.1　双曲线性同构

在 A 下不变:

$$A(E^s) = E^s, \quad A(E^u) = E^u,$$

并且存在两个常数 $C \geq 1$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得

$$|A^n v| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall v \in E^s,\ n \geq 0,$$
$$|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall v \in E^u,\ n \geq 0.$$

这时称 E^s 为 A 的**压缩子空间**, E^u 为 A 的**扩张子空间**. 称 $\dim E^s$ 为 A 的**指标**.

注　(1) 由于欧氏空间的所有范数等价, A 的双曲性不依赖于范数的选择.

(2) 压缩子空间 E^s 或扩张子空间 E^u 可以是 $\{0\}$, 这时分别称 A 为**扩张型**的或**压缩型**的, 否则称为**鞍型**的. 本课程关于双曲线性同构的结论都包括压缩型或扩张型的情形, 一般不另做陈述.

(3) 若 A 是双曲线性同构, 则 A^{-1} 也是.

(4) 由于 E^s 在 A 下不变, 定义中的不等式所涉及的其实不只是 v 的正向迭代, 而是 v 的所有迭代. 也就是说,

$$|A^n(A^m v)| \leq C\lambda^n |A^m v|, \quad \forall v \in E^s,\ m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

(见图 2.2) 特别地, 命 $m = -n$ 即给出

$$|A^{-n}v| \geq C^{-1}(\lambda^{-1})^n |v|, \quad \forall v \in E^s,\ n \geq 0.$$

E^u 的情形类似.

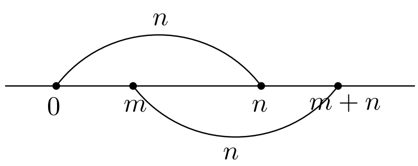

图 2.2　n 次迭代

线性同构 A 为双曲的一个简单的等价定义是 A 的所有特征值的模都不等于 1. 这里给出的定义比较复杂, 但适用于更一般的双曲集的情形 (第四章). 因此, 本章对双曲线性同构, 将按这里的定义进行讨论, 以使本章的结果和方法, 能够直接移植到第四章去.

对 $\gamma > 0$, 记

$$C_\gamma(E^s) = \{v \in E \mid |v_u| \leq \gamma |v_s|\},$$
$$C_\gamma(E^u) = \{v \in E \mid |v_s| \leq \gamma |v_u|\}$$

分别为关于 E^s 和 E^u 的 γ-**锥**. 这里 v_s 和 v_u 分别表示向量 v 在 E^s 和 E^u 中的分量.

定理 2.2 ($\boldsymbol{E^s}$ 的刻画)　*设 $A : E \to E$ 为一双曲线性同构, $E = E^s \oplus E^u$ 为其双曲分解. 则子空间 E^s 有如下等价刻画:*

$$\begin{aligned} E^s &= \{v \in E \mid A^n v \to 0,\ n \to +\infty\} \\ &= \{v \in E \mid \text{存在 } r > 0 \text{ 使得 } |A^n v| \leq r,\ \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in E \mid \text{存在 } \gamma > 0 \text{ 使得 } A^n v \in C_\gamma(E^s),\ \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} E^u &= \{v \in E \mid A^{-n}v \to 0,\ n \to +\infty\} \\ &= \{v \in E \mid \text{存在 } r > 0 \text{ 使得 } |A^{-n}v| \le r,\ \forall n \ge 0\} \\ &= \{v \in E \mid \text{存在 } \gamma > 0 \text{ 使得 } A^{-n}v \in C_\gamma(E^u),\ \forall n \ge 0\}. \end{aligned}$$

特别地, 双曲分解是唯一的, 即如果 $E = G^s \oplus G^u$ 为 A 的另一双曲分解, 则 $G^s = E^s$, $G^u = E^u$.

证明 我们来对 E^s 依次证明这四个集间的包含关系. 显然, 第一个被包含在第二个中, 第二个被包含在第三个中. 下面证明第三个被包含在第四个中. 事实上, 若

$$v \notin \{v \in E \mid \text{存在 } \gamma > 0 \text{ 使得 } A^n v \in C_\gamma(E^s),\ \forall n \ge 0\},$$

则存在 $m \ge 0$ 使得 $w = A^m v \notin C_1(E^s)$. 特别地, $w_u \neq 0$. 那么当 $n \to +\infty$ 时有

$$|A^n(w_u)| \to \infty, \quad |A^n(w_s)| \to 0.$$

故

$$|A^n w| \ge |A^n(w_u)| - |A^n(w_s)| \to \infty.$$

从而 $\{|A^n v|\}_{n=0}^{+\infty}$ 无界.

最后证明

$$\{v \in E \mid \text{存在 } \gamma > 0 \text{ 使得 } A^n v \in C_\gamma(E^s),\ \forall n \ge 0\} \subset E^s.$$

实际上, 如果 $v \notin E^s$, 则 $v_u \neq 0$. 那么当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$|A^n(v_u)| \to \infty, \quad |A^n(v_s)| \to 0.$$

故对任意 $\gamma > 0$, 当 n 足够大时, $A^n v \notin C_\gamma(E^s)$.

关于 E^u 的证明类似. 因为 E^s 和 E^u 已经刻画出来, 立得双曲分解的唯一性. 定理 2.2 证完. ■

于是, 在一个双曲线性同构的迭代下, 每个非零向量呈现极端的动力形态: 或指数地趋于零, 或指数地趋于无穷.

定理 2.3 设 A 为双曲线性同构, 双曲分解为 $E = E^s \oplus E^u$. 则存在 E 的一个范数 $\|\cdot\|$ 及一常数 $0 < \tau < 1$, 使得

$$\|Av\| \leq \tau\|v\|, \quad \forall v \in E^s,$$
$$\|A^{-1}v\| \leq \tau\|v\|, \quad \forall v \in E^u.$$

简略地说, 适当选取范数可使双曲性表现为一次到位的压缩和扩张.

证明 设 $|\cdot|$ 为原来的范数. 取一正整数 N 足够大, 使得

$$C\lambda^N < 1.$$

定义

$$\|v\| = \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v|, \quad \forall\ v \in E.$$

则 $\|\cdot\|$ 为 E 一范数. 命

$$a = \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n.$$

则

$$\|v\| \leq a|v|, \quad \forall\ v \in E^s,$$
$$\|v\| \leq a|A^{N-1}v|, \quad \forall\ v \in E^u.$$

我们来验证 $\|\cdot\|$ 满足定理要求的两个不等式. 实际上, 对任意 $v \in E^s$,

$$\begin{aligned}\|Av\| &= \|v\| - |v| + |A^N v| \\ &\leq \|v\| - (1 - C\lambda^N)|v| \\ &\leq \|v\| - a^{-1}(1 - C\lambda^N)\|v\|.\end{aligned}$$

类似地, 对任意 $v \in E^u$,

$$\begin{aligned}\|A^{-1}v\| &= \|v\| + |A^{-1}v| - |A^{N-1}v| \\ &\le \|v\| - (1 - C\lambda^N)|A^{N-1}v| \\ &\le \|v\| - a^{-1}(1 - C\lambda^N)\|v\|.\end{aligned}$$

命

$$\tau = 1 - a^{-1}(1 - C\lambda^N),$$

则只需验证 $0 < \tau < 1$. 但这是显然的, 因为 $a \ge 1$. 定理 2.3 证完. ■

称满足定理 2.3 的两个一次到位的不等式的范数为一个对 A **适配**的范数. 这时称

$$\tau(A) = \max\{\|A|_{E^s}\|,\ \|A^{-1}|_{E^u}\|\} < 1$$

为 A 关于这个适配范数的**双曲度**.

称 E 的一个范数 $|\cdot|$ 关于一个直和 $E = E_1 \oplus E_2$ 为**盒型**, 如果

$$|v| = \max\{|v_1|, |v_2|\}, \quad \forall\ v \in E.$$

对任一范数 $|\cdot|$, 由 $\|v\| = \max\{|v_1|, |v_2|\}$ 定义的范数 $\|\cdot\|$ 关于该直和总是盒型的, 称作 $|\cdot|$ 对 $E_1 \oplus E_2$ 的**盒型化**. 显然, 对双曲线性同构 A 适配的一个范数对该直和的盒型化仍是对 A 适配的, 且双曲度不变.

§2.2 双曲不动点在扰动下的保持

设 $O \subset E$ 为开集, $f : O \to E$ 为 C^1 映射. 称 f 的一个不动点 $p \in O$ 为**双曲的**, 如果导算子 $Df(p) : E \to E$ 为双曲线性同构. 称 $Df(p)$ 的指标为 p 的**指标**.

本章的目的是考察一个双曲不动点 p 附近的动力行为. 由反函数定理, f 在 p 点附近是到像集的微分同胚. 故可取开集 U 使得 $p \in U \subset \overline{U} \subset O$, $\overline{U}$ 紧致, 且 $f : U \to E$ 是到像集的微分同胚. 本章的几个主要

定理都是对这样一个三元组 f, p, U 陈述的, 并直接以 "设 $p \in U$ 为 f 的双曲不动点" 开头.

设 $f,\ g : U \to E$ 为 C^r 映射. 定义 f 和 g 之间的 C^r 距离为

$$\mathrm{d}^r(f,g) = \sup_{x\in U}\{|f(x)-g(x)|, |Df(x)-Dg(x)|, \cdots, |D^r f(x) - D^r g(x)|\}.$$

本课程将主要考虑 C^1 度量. 记 $\mathcal{B}^1(f,\delta) = \mathcal{B}^1(f,\delta;U)$ 为满足 $\mathrm{d}^1(g,f) \leq \delta$ 的到像微分同胚 $g : U \to E$ 的集合. 如通常, 记 $B(p,r)$ 为以 p 为中心的半径为 $r > 0$ 的闭球. 若 $|\cdot|'$ 是另一个范数, 易见对任意 $\delta > 0$, 存在 $\delta' > 0$ 使得 $\mathcal{B}^1(f,\delta';|\cdot|') \subset \mathcal{B}^1(f,\delta;|\cdot|)$. 类似地, 对任意 $r > 0$, 存在 $r' > 0$ 使得 $B(p,r';|\cdot|') \subset B(p,r;|\cdot|)$.

回顾一下, 称映射 $\phi : E \to E$ 为**李普希茨**的, 如果存在常数 $k \geq 0$, 使得

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k|x-y|, \quad \forall\ x, y \in E.$$

这时称满足此式的最小的常数 k 为 ϕ 的**李普希茨常数**, 记为 $\operatorname{Lip}\phi$.

本课程的主要内容是关于 C^1 扰动的. 但许多结果对更为一般的李普希茨扰动也成立, 而且处理起来更简单些. 在这种情况下, 我们将对李普希茨扰动进行证明, 将结果陈述为引理, 而将 C^1 扰动的定理作为直接推论陈述在后. 下面的经典结果 [Ru] 提供了二者之间的桥梁.

广义中值定理 设 $B \subset E$ 为凸开集, $\phi : B \to E$ 为 C^1 映射, 使得对任意 $x \in B$ 有 $|D\phi(x)| \leq k$. 则对任意 $x, y \in B$, $|\phi(x) - \phi(y)| \leq k|x-y|$.

也就是说, 在凸开集上, 李普希茨常数不超过各点导算子范数的上界. 一个直接的推论是

引理 2.4 设 $f : U \to E$ 为 C^1 映射, $p \in U$ 为一点 (见图 2.3). 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$, 使得任意 $g \in \mathcal{B}^1(f,\delta)$ 在 $B(p,r)$ 上有 $\operatorname{Lip}(g - Df(p)) \leq \varepsilon$.

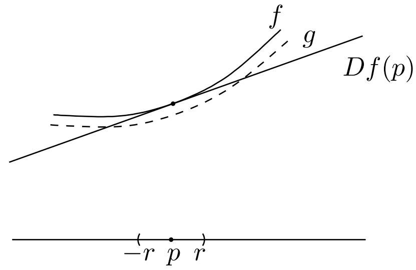

图 2.3　引理 2.4 的陈述

证明　设 $\varepsilon > 0$ 给定. 存在 $\delta > 0$ 和 $r > 0$, 使得对任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta)$ 和任意 $x \in B(p, r)$, 有

$$|D(g - Df(p))(x)| = |Dg(x) - Df(p)| \leq \varepsilon.$$

于是结论由广义中值定理直接给出. 引理 2.4 证完. ■

设 $E = E^s \oplus E^u$ 为一直和. 记

$$\pi_s : E \to E^s, \quad \pi_u : E \to E^u$$

为直和投影. 对任意映射 $\phi : E \to E$, 记

$$\phi_s = \pi_s \circ \phi, \quad \phi_u = \pi_u \circ \phi.$$

如果 $A : E \to E$ 为线性, 则进一步记

$$A_{ss} = A_s|_{E^s}, \quad A_{uu} = A_u|_{E^u}.$$

如果 E^s 和 E^u 在 A 下不变, 易验证对任意 $v \in E$,

$$\begin{aligned} A_s v &= A_s v_s = A_{ss} v_s, \\ A_u v &= A_u v_u = A_{uu} v_u. \end{aligned}$$

为简便, 以后用

$$E(r) = \{v \in E \mid |v| \leq r\}$$

表示以原点为中心半径为 r 的闭球, 即 $E(r) = B(0, r)$.

由引理 2.4, f 及其 C^1 邻近的 g 在 f 的一个双曲不动点 $p \in U$ 附近可以表为

$$A + \phi$$

的形式, 其中 A 为双曲线性同构, 而 $\operatorname{Lip}\phi$ 小. 这将是我们常常使用的表述形式, 可以称为**双曲线性同构的李普希茨扰动**.

引理 2.5 设 $A : E \to E$ 为双曲线性同构, 在 E 的一个与其双曲分解 $E^s \oplus E^u$ 适配且盒型的范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $r > 0$. 如果 $\phi : E(r) \to E$ 为李普希茨, 满足

$$\operatorname{Lip}\phi < 1 - \tau,$$

则 $A + \phi$ 在 $E(r)$ 中至多有一个不动点. 如果进一步满足

$$|\phi(0)| \leq (1 - \tau - \operatorname{Lip}\phi)r,$$

则 $A + \phi$ 在 $E(r)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不动点 p_ϕ, 且

$$|p_\phi| \leq \frac{|\phi(0)|}{1 - \tau - \operatorname{Lip}\phi}.$$

证明 我们来解关于 $v \in E(r)$ 的方程

$$(A + \phi)v = v.$$

在

$$E = E^s \oplus E^u$$

下写成分量形式, 这等价于解

$$A_s v + \phi_s v = v_s, \quad A_u v + \phi_u v = v_u,$$

或

$$A_{ss} v_s + \phi_s v = v_s, \quad A_{uu} v_u + \phi_u v = v_u,$$

或

$$A_{ss}v_s + \phi_s v = v_s, \quad A_{uu}^{-1}v_u - A_{uu}^{-1}\phi_u v = v_u.$$

考虑映射

$$T = T_\phi : E(r) \to E$$

$$T(v) = (A_{ss}v_s + \phi_s v,\ A_{uu}^{-1}v_u - A_{uu}^{-1}\phi_u v).$$

则 T 与 $A+\phi$ 有相同的不动点集. 因此, 为证明 $A+\phi$ 在 $E(r)$ 中至多有一个不动点, 只需证明 T 为压缩映射. 因

$$\begin{aligned}|T(v) - T(v')| &\le \max\{\tau|v_s - v_s'| + \operatorname{Lip}\phi \cdot |v - v'|,\\ &\qquad \tau|v_u - v_u'| + \tau \operatorname{Lip}\phi \cdot |v - v'|\}\\ &\le (\tau + \operatorname{Lip}\phi)|v - v'|,\end{aligned}$$

且

$$\operatorname{Lip}\phi < 1 - \tau,$$

故 T 确为压缩映射. 这证明 $A+\phi$ 在 $E(r)$ 中至多有一个不动点.

现在进一步假设

$$|\phi(0)| \le (1 - \tau - \operatorname{Lip}\phi)r.$$

我们来证明 T 将 $E(r)$ 映入自身. 任取 $v \in E(r)$. 因

$$|T(0)| = |(\phi_s(0),\ -A_{uu}^{-1}\phi_u(0))| \le |\phi(0)|,$$

得

$$|T(v)| \le |T(0)| + |T(v) - T(0)| \le |\phi(0)| + (\tau + \operatorname{Lip}\phi)|v| \le r.$$

故 T 确实将 $E(r)$ 映入自身, 因而在 $E(r)$ 中有 (唯一) 不动点 p_ϕ (见图 2.4). 并且, 在上面的不等式

$$|T(v)| \le |\phi(0)| + (\tau + \operatorname{Lip}\phi)|v|$$

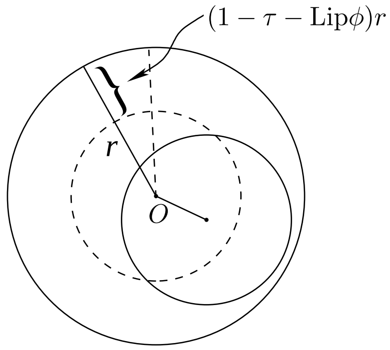

图 2.4　引理 2.5 的证明

中命 $v = p_\phi$ 即得

$$|p_\phi| \le |\phi(0)| + (\tau + \mathrm{Lip}\,\phi)|p_\phi|.$$

故

$$|p_\phi| \le \frac{|\phi(0)|}{1-\tau-\mathrm{Lip}\,\phi}.$$

引理 2.5 证完. ■

下面是引理 2.5 在可微映射中的应用.

定理 2.6 (双曲不动点在扰动下的保持) 设 $p \in U$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 $\delta_0 > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$, 使得任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta_0)$ 在 $B(p, \varepsilon_0)$ 中至多有一个不动点. 又对任一 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, 存在 $0 < \delta \le \delta_0$, 使得任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta)$ 在 $B(p, \varepsilon)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不动点 p_g.

注 简略地说, 若 g C^1 逼近 f, 则 $p_g \to p$. 即不动点 p_g 随 g 连续变化.

证明 定理只要对 E 的一个范数成立, 就对所有范数成立. 故只需在一个与 $Df(p)$ 适配的盒型范数 $|\cdot|$ 下证明. 不失一般性可设 $p = 0$. 简记 $Df(0) = A$. 设 $0 < \tau < 1$ 为 A 在 $|\cdot|$ 下的双曲度. 取定

$$\tau < \lambda < 1.$$

由引理 2.4, 存在 δ_0 和 ε_0 充分小使得对任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta_0)$,

$$\phi = g - A : E(\varepsilon_0) \to E$$

在 $E(\varepsilon_0)$ 上满足

$$\operatorname{Lip} \phi \leq \lambda - \tau.$$

由引理 2.5, $g = A + \phi$ 在 $E(\varepsilon_0)$ 中至多有一个不动点.

设 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 给定. 命

$$\delta = \min\{\delta_0, (1-\lambda)\varepsilon\}.$$

对任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta)$,

$$\begin{aligned} |\phi(0)| &= |g(0)| = |g(0) - f(0)| \\ &\leq \mathrm{d}^1(g, f) \leq (1-\lambda)\varepsilon. \end{aligned}$$

由引理 2.5, g 在 $E(\varepsilon_0)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不动点 p_g, 并且

$$|p_g| \leq \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{1 - \tau - \operatorname{Lip} \phi_g} \leq \varepsilon.$$

定理 2.6 证完. ■

称 g 在 $B(p, \varepsilon_0)$ 中的唯一不动点 p_g 为 p 在 g 下的**延拓**. 这个概念对充分 C^1 接近 f 的 g 有定义.

§2.3 双曲性在扰动下的保持

这一节证明双曲线性同构附近的线性映射也是双曲线性同构. 双曲性的定义, 除了压缩性和扩张性之外, 首先是可逆性. 故此我们首先要回顾经典的反函数定理的线性形式, 即可逆线性映射附近的线性映射也可逆. 为了更一般的需要, 下面给出反函数定理的一种李普希茨形式, 即可逆线性映射附近的李普希茨映射也可逆. 我们对定义域和值域不是同一空间的一般情形陈述.

设 $(E,|\cdot|)$ 和 $(E',|\cdot|')$ 是两个维数相同的欧氏空间. 称一个同胚 $f:E\to E'$ 为**李氏同胚**, 如果 f 和 f^{-1} 都是李普希茨的. 对线性映射 $A:E\to E'$, 称

$$m(A)=\inf\{|Av|' \mid v\in E,\ |v|=1\}$$

为 A 的**小模**. 如果 A 可逆, 则 $m(A)=|A^{-1}|^{-1}$.

定理 2.7 (李普希茨反函数定理) 设 $A:E\to E'$ 为一线性同构, $\phi:E\to E'$ 为李普希茨. 如果

$$\operatorname{Lip}\phi<m(A),$$

则 $A+\phi:E\to E'$ 为一李氏同胚, 且

$$\operatorname{Lip}((A+\phi)^{-1})\le\frac{1}{m(A)-\operatorname{Lip}\phi}.$$

证明 先证明 $A+\phi$ 为单且满, 也就是对任意 $z\in E'$, 要证明方程

$$(A+\phi)x=z$$

有唯一解 $x\in E$, 即

$$x=A^{-1}z-A^{-1}\phi(x)$$

有唯一解 $x\in E$. 这也就是要证明映射

$$T:E\to E$$
$$T(x)=A^{-1}z-A^{-1}\phi(x)$$

有唯一不动点. 由压缩映射原理, 只需验证 T 为压缩映射. 对任意 x, $y\in E$,

$$\begin{aligned}|Tx-Ty|&=|A^{-1}\phi x-A^{-1}\phi y|\\&\le|A^{-1}|\cdot\operatorname{Lip}\phi\cdot|x-y|,\end{aligned}$$

由定理假设, $|A^{-1}|\cdot\mathrm{Lip}\,\phi<1$. 故 T 确为压缩映射. 这就证明了 $A+\phi$ 为单且满.

显然 $A+\phi$ 为李普希茨. 我们来验证 $(A+\phi)^{-1}$ 为李普希茨, 且有定理所述的李氏常数. 对任意 $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}|(A+\phi)x-(A+\phi)y| &\geq |A(x-y)|-|\phi x-\phi y|\\ &\geq (m(A)-\mathrm{Lip}\,\phi)|x-y|.\end{aligned}$$

命 $x=(A+\phi)^{-1}x'$, $y=(A+\phi)^{-1}y'$, 即得

$$\mathrm{Lip}((A+\phi)^{-1})\leq\frac{1}{m(A)-\mathrm{Lip}\,\phi}.$$

定理 2.7 证完. ■

注 一个特殊情形是 ϕ 为 C^1. 结合反函数定理, 易见 $A+\phi:E\to E'$ 为微分同胚. 一个更特殊的情形是 ϕ 为线性. 这时 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 就是 ϕ 的算子范数, 而结论是 $A+\phi:E\to E'$ 为线性同构.

设 A 和 X 为度量空间, 对乘积空间 $A\times X$ 我们总使用 “max 度量”

$$\mathrm{d}((a,x),(b,y))=\max\{\mathrm{d}(a,b),\ \mathrm{d}(x,y)\}.$$

这里把 A, X, $A\times X$ 三个空间的度量都用 d 来表示. 这一般不会造成混淆. 下一定理讨论压缩映射的不动点对参数的依赖.

定理 2.8 设 A 和 X 为度量空间, 其中 X 完备, $F:A\times X\to X$ 为一映射. 设存在常数 $0<\lambda<1$, 使得对任意 $a\in A$ 和 $x,y\in X$, 有

$$\mathrm{d}(F(a,x),\ F(a,y))\leq\lambda\mathrm{d}(x,y).$$

记 $p(a)$ 为映射 $F(a,\cdot)$ 的 (唯一) 不动点, 这给出一个映射 $p:A\to X$ (见图 2.5). 则

(1) 若 F 连续, 则 p 也连续.

(2) 若 F 为李普希茨, 则 p 也为李普希茨.

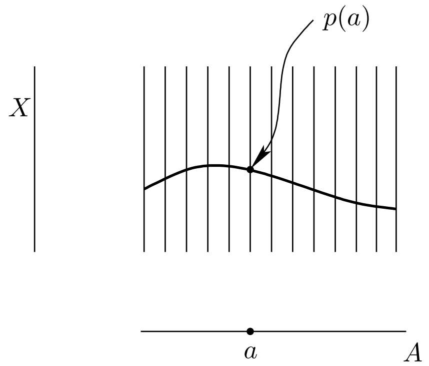

图 2.5 定理 2.8 的陈述

证明 因

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(p(a),p(b)) &= \mathrm{d}(F(a,p(a)),\ F(b,p(b)))\\
&\le \mathrm{d}(F(a,p(a)),\ F(a,p(b))) + \mathrm{d}(F(a,p(b)),\ F(b,p(b)))\\
&\le \lambda \mathrm{d}(p(a),p(b)) + \mathrm{d}(F(a,p(b)),\ F(b,p(b))),
\end{aligned}$$

有

$$\mathrm{d}(p(a),p(b)) \le \frac{1}{1-\lambda}\mathrm{d}(F(a,p(b)),\ F(b,p(b))).$$

由此立得 (1) 和 (2). 定理 2.8 证完. ■

现在来证明双曲线性同构 A 附近的线性映射 B 也是双曲线性同构. 设 A 的双曲分解为 $E^s \oplus E^u$. 我们来证明, B 也有一个双曲分解 $G^s \oplus G^u$ (见图 2.6).

我们来寻找 G^u. (类似地可寻找 G^s.) 证明的思想从锥来看十分直观. A 压缩不稳定锥 $C_1(E^u)$ 的张角, E^u 则是逐次压缩的 “核”

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n(C_1(E^u)).$$

B 也压缩不稳定锥 $C_1(E^u)$ 的张角, 故要找的 G^u 应该是

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B^n(C_1(E^u)).$$

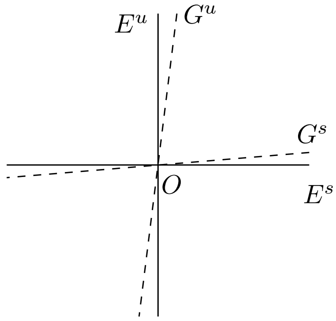

图 2.6　A 和 B 对应的分解

特别地, 要证明这一交集是一个线性子空间. 一个更直接的办法是考虑从 E^u 到 E^s 的范数 ≤ 1 的线性映射的图像. 一个这样的图像就是 E 的一个线性子空间, 含于锥 $C_1(E^u)$ 之中. B 将一个图像变为另一个图像, 我们要找的 G^u 则是在 B 下不变的图像, 也就是这一 "图像变换" 的不动点. B 压缩不稳定锥的张角, 也就是压缩两个图像间的(角) 距离, 这就成为压缩映射问题 (见图 2.7). 下面的引理 2.9 把这一想法实现出来. 引理跳过了 A 而直接对 B 陈述.

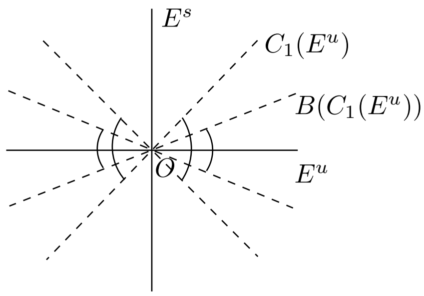

图 2.7　锥的压缩

设 $E = E_1 \oplus E_2$ 为一直和. 记 $L(E_1, E_2)$ 为从 E_1 到 E_2 的全体线性映射所成的空间, $L(E_1, E_2)(1)$ 为其以原点为中心的闭单位球.

引理 2.9　设 $B : E \to E$ 为一线性同构, 在直和 $E = E_1 \oplus E_2$ 下

表为

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{ij} = \pi_i \circ B|_{E_j}$. 如果存在 E 的一个范数 $|\cdot|$ 和两个常数 $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ 使得

$$\max\{|B_{11}^{-1}|, |B_{22}|\} < \lambda, \quad \max\{|B_{12}|, |B_{21}|\} < \varepsilon, \quad \lambda + \varepsilon < 1,$$

则存在唯一线性映射 $P = P_B : E_1 \to E_2$, $|P| \le 1$, 使得线性子空间 $\mathrm{gr}(P)$ 在 B 下不变, 而且 P_B, 从而 $\mathrm{gr}(P_B)$, 随 B 连续变化.

注 $\lambda + \varepsilon < 1$ 蕴含 $\lambda^{-1} - \varepsilon > 1$.

证明 设 $P : E_1 \to E_2$ 为线性映射, $|P| \le 1$. 对任意 $v \in E_1$,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}v + B_{12}Pv \\ B_{21}v + B_{22}Pv \end{pmatrix}.$$

故

$$B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P)$$

当且仅当

$$P(B_{11}v + B_{12}Pv) = B_{21}v + B_{22}Pv, \quad \forall v \in E_1.$$

即

$$P(B_{11} + B_{12}P) = B_{21} + B_{22}P.$$

因

$$m(B_{11}) \ge \lambda^{-1}, \quad |B_{12}P| \le \varepsilon,$$

由定理 2.7,

$$B_{11} + B_{12}P : E_1 \to E_1$$

可逆. 从而

$$P = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}.$$

这给出一个映射

$$T = T_B : L(E_1, E_2)(1) \to L(E_1, E_2)$$
$$T(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1},$$

称为由 B 导出的**图像变换**. 寻求满足

$$B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P)$$

的线性映射 P, 就转化为寻求 T 的不动点.

我们来验证 T 将 $L(E_1, E_2)(1)$ 映入自身且为压缩映射. 实际上, 对任意 $P \in L(E_1, E_2)(1)$,

$$\begin{aligned} |T(P)| &\leq |B_{21} + B_{22}P| \cdot |(B_{11} + B_{12}P)^{-1}| \\ &\leq \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon} < 1. \end{aligned}$$

故 T 将 $L(E_1, E_2)(1)$ 映入自身. 又对任意 $P, P' \in L(E_1, E_2)(1)$,

$$T(P)(B_{11} + B_{12}P) = B_{21} + B_{22}P,$$
$$T(P')(B_{11} + B_{12}P') = B_{21} + B_{22}P'.$$

故

$$\begin{aligned} (T(P) - T(P'))B_{11} + T(P)B_{12}P - T(P')B_{12}P \\ + T(P')B_{12}P - T(P')B_{12}P' = B_{22}(P - P'), \end{aligned}$$
$$(T(P) - T(P'))(B_{11} + B_{12}P) = (B_{22} - T(P')B_{12})(P - P'),$$
$$T(P) - T(P') = (B_{22} - T(P')B_{12})(P - P')(B_{11} + B_{12}P)^{-1}.$$

因此

$$|T(P) - T(P')| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon}|P - P'|.$$

故 $T = T_B$ 为压缩映射. 由压缩映射原理, T 有唯一不动点 $P = P_B \in L(E_1, E_2)(1)$. 也就是说, 存在唯一 $P \in L(E_1, E_2)(1)$, 使得

$$B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P).$$

因 $B: E \to E$ 为线性同构, 故这一包含式其实是一个等式

$$B(\mathrm{gr}(P)) = \mathrm{gr}(P).$$

命 $\mathcal{B}$ 表示满足引理 2.9 条件的线性同构 B 的集合. 上面讨论的实际上是一个带参数 B 的压缩映射问题

$$T: \mathcal{B} \times L(E_1, E_2)(1) \to L(E_1, E_2)(1)$$
$$T(B, P) = T_B(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}.$$

易见 T 连续. 上面的计算表明 T_B 的压缩率与 $B \in \mathcal{B}$ 无关. 由定理 2.8, 不动点 P_B, 从而其图像 $\mathrm{gr}(P_B)$, 随 B 连续变化. 引理 2.9 证完. ■

定理 2.10 设 $A: E \to E$ 为双曲线性同构. 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要线性映射 $B: E \to E$ 满足 $|B - A| < \delta_0$, 则 B 也是双曲的. 并且, $E^s(B)$ 和 $E^u(B)$ 随 B 连续变化.

证明 定理只要对 E 的一个范数成立, 就对所有范数成立. 故只需在一个与 A 适配的范数 $|\cdot|$ 下证明. 设 $E = E^u \oplus E^s$ 为 $A: E \to E$ 的双曲分解, 在 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 于是

$$|A_{uu}^{-1}| \leq \tau, \quad |A_{ss}| \leq \tau, \quad A_{us} = A_{su} = 0.$$

由定理 2.7, 可取 $\delta_0 > 0$ 使得只要线性映射 $B: E \to E$ 满足 $|B - A| < \delta_0$, 则 B 可逆. 取定 $\tau < \lambda < 1$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得 $\lambda + \varepsilon < 1$. 缩小 $\delta_0 > 0$ 使得, 只要 $|B - A| < \delta_0$, 则 B 对直和 $E^u \oplus E^s$ 满足引理 2.9 的条件. 由恒等式

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1},$$

知 B 接近 A 蕴含 B^{-1} 接近 A^{-1}. 必要时进一步缩小 $\delta_0 > 0$ 可使得, 只要 $|B - A| < \delta_0$, 则 B^{-1} 对直和 $E^s \oplus E^u$ 也满足引理 2.9 的条件. 从而存在 $P_B \in L(E^u, E^s)(1)$ 和 $Q_B \in L(E^s, E^u)(1)$, 使得 $G^u = \mathrm{gr}(P_B)$ 和 $G^s = \mathrm{gr}(Q_B)$ 都在 B 下不变. 由引理 2.9, 子空间 G^u 和 G^s 随 B 连续变化. 故若 $\delta_0 > 0$ 足够小, 则 G^u 和 G^s 关于 B 分别扩张和压缩.

特别地, $G^u \cap G^s = \{0\}$. 因二者维数互补, 知 $E = G^u \oplus G^s$. 这证明 B 为双曲, 且 $E^s(B) = G^s$, $E^u(B) = G^u$. 定理 2.10 证完. ■

把定理 2.6 和定理 2.10 放在一起陈述就是

定理 2.11 设 $p \in U$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 $\delta_0 > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得任意 $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta_0)$ 在 $B(p, \varepsilon_0)$ 中有唯一不动点 p_g, 且 p_g 为双曲. 又 p_g 以及 $E^s(p_g)$ 和 $E^u(p_g)$ 随 g 连续变化.

称 f 的一个周期为 m 的周期点 $p \in U$ 为**双曲的**, 如果导算子 $Df^m(p) : E \to E$ 为双曲线性同构. 双曲周期点的问题, 常常可以转化为双曲不动点的问题.

§2.4 Hartman-Grobman 定理

本节证明 Hartman-Grobman 定理, 即微分同胚 f 限制在双曲不动点 $p \in E$ 的一个邻域上, 与其导算子 $Df(p)$ 限制在原点的一个邻域上拓扑共轭. 我们先撇开具体的邻域而考虑全空间 E. 设 $C^0(E)$ 为 E 到自身的全体连续映射的集合. 记

$$C_b^0(E) = \left\{ \phi \in C^0(E) \;\middle|\; \sup_{x \in E} |\phi(x)| < \infty \right\},$$

赋 C^0 范数

$$|\phi| = \sup_{x \in E} |\phi(x)|.$$

这是一个 Banach 空间. 下一引理为 Hartman-Grobman 定理的李普希茨形式.

引理 2.12 (Pugh) 设 $A : E \to E$ 为双曲线性同构, 在与其适配的一个盒型范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $\phi,\ \psi \in C_b^0(E)$ 满足

$$\max\{\mathrm{Lip}\,\phi,\ \mathrm{Lip}\,\psi\} < \min\{1 - \tau,\ m(A)\}.$$

则存在唯一 $\eta \in C_b^0(E)$, 使得 $id + \eta : E \to E$ 为同胚, 且

$$(id + \eta)(A + \phi) = (A + \psi)(id + \eta).$$

证明 我们来解关于 $\eta \in C_b^0(E)$ 的共轭方程

$$(id+\eta)(A+\phi) = (A+\psi)(id+\eta). \tag{$*$}$$

这等价于

$$A+\phi+\eta(A+\phi) = A+A\eta+\psi(id+\eta),$$

或

$$\phi+\eta(A+\phi) = A\eta+\psi(id+\eta).$$

在 A 的双曲直和

$$E = E^s \oplus E^u$$

下写成分量形式, 得

$$\phi_s+\eta_s(A+\phi) = A_{ss}\eta_s+\psi_s(id+\eta),$$
$$\phi_u+\eta_u(A+\phi) = A_{uu}\eta_u+\psi_u(id+\eta),$$

或

$$\eta_s = (A_{ss}\eta_s+\psi_s(id+\eta)-\phi_s)(A+\phi)^{-1},$$
$$\eta_u = A_{uu}^{-1}(\phi_u+\eta_u(A+\phi)-\psi_u(id+\eta)).$$

注意据定理 2.7 $A+\phi$ 确为可逆. 考虑映射

$$T: C_b^0(E) \to C_b^0(E)$$
$$T(\eta) = ((A_{ss}\eta_s+\psi_s(id+\eta)-\phi_s)(A+\phi)^{-1},$$
$$A_{uu}^{-1}(\phi_u+\eta_u(A+\phi)-\psi_u(id+\eta))).$$

由于 ϕ, ψ, η 都属于 $C_b^0(E)$, 易见 $T(\eta)$ 确实属于 $C_b^0(E)$. 显然, 方程 $(*)$ 的解即为 T 的不动点. 我们来验证 T 为压缩映射. 实际上,

$$\begin{aligned}
&|T_s(\eta)-T_s(\eta')| \\
&= |(A_{ss}(\eta_s-\eta_s')+\psi_s(id+\eta)-\psi_s(id+\eta'))(A+\phi)^{-1}| \\
&= \sup_{x\in E} |(A_{ss}(\eta_s-\eta_s')+\psi_s(id+\eta)-\psi_s(id+\eta'))(A+\phi)^{-1}(x)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{y\in E} |(A_{ss}(\eta_s - \eta'_s) + \psi_s(id+\eta) - \psi_s(id+\eta'))(y)| \\
&\le \sup_{y\in E} (\tau \cdot |\eta_s(y) - \eta'_s(y)| + \operatorname{Lip}\psi \cdot |\eta(y) - \eta'(y)|) \\
&\le (\tau + \operatorname{Lip}\psi)|\eta - \eta'|.
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
|T_u(\eta) - T_u(\eta')| &\le (\tau + \tau \operatorname{Lip}\psi)|\eta - \eta'| \\
&\le (\tau + \operatorname{Lip}\psi)|\eta - \eta'|.
\end{aligned}
$$

故 T 确为压缩映射, 从而有唯一不动点 $\eta \in C_b^0(E)$, 即存在唯一 $\eta \in C_b^0(E)$ 满足

$$(id+\eta)(A+\phi) = (A+\psi)(id+\eta).$$

将 ϕ 和 ψ 对换位置即得唯一 $\xi \in C_b^0(E)$ 满足

$$(id+\xi)(A+\psi) = (A+\phi)(id+\xi).$$

这两个交换式合起来即得 $A+\phi$ 的一个自交换式 (见图 2.8)

$$(id+\xi)(id+\eta)(A+\phi) = (A+\phi)(id+\xi)(id+\eta).$$

易见 $(id+\xi)(id+\eta)$ 属于 $id+C_b^0$. 因为 id 已经是 $A+\phi$ 在 $id+C_b^0$ 中

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "A+\phi"] \arrow[d, "id+\eta"'] & \cdot \arrow[d, "id+\eta"] \\
\cdot \arrow[r, "A+\psi"] \arrow[d, "id+\xi"'] & \cdot \arrow[d, "id+\xi"] \\
\cdot \arrow[r, "A+\phi"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

图 2.8　拓扑共轭

的一个自共轭, 由唯一性,

$$(id+\xi)(id+\eta)=id.$$

类似可得

$$(id+\eta)(id+\xi)=id.$$

这证明 $id+\eta$ 为同胚. 引理 2.12 证完. ■

定理 2.13 (Hartman-Grobman) 设 $0\in U$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 0 在 U 中的一个邻域 V 和一个到像集的同胚 $h:V\cup f(V)\to E$, 使得 $h\circ f|_V=Df(0)\circ h|_V$.

注意 h 并非严格意义上的拓扑共轭, 因为 f 限制在 V 上和 $Df(0)$ 限制在 hV 上都不是自映射从而不是动力系统.

证明 定理只要对 E 的一个范数成立, 就对所有范数成立. 故只需在一个与 $Df(0)$ 适配的盒型范数 $|\cdot|$ 下证明. 设 $0<\tau<1$ 是 $Df(0)$ 在这一范数下的双曲度. 取定一 C^∞ 冲击函数 $\alpha:E\to\mathbb{R}$, 使对 $|x|\le 1/3$ 满足 $\alpha(x)=1$, 对 $|x|\ge 2/3$ 满足 $\alpha(x)=0$, 并对所有 $x\in E$ 满足 $0\le\alpha(x)\le 1$. 设对某一$B>0$, 所有 $x\in E$ 满足 $|D\alpha(x)|\le B$.

简写 $A=Df(0)$. 令

$$\phi=f-A:U\to E.$$

则

$$\phi(0)=0,\quad D\phi(0)=0.$$

定义

$$\overline{\phi}:E\to E$$
$$\overline{\phi}(x)=\alpha(x/r)\phi(x),$$

其中 $r>0$ 满足

$$E(r)\subset U,$$

具体待定 (见图 2.9). 则 $\overline{\phi} \in C_b^0(E)$ 为 C^1, 在 $E(r/3)$ 上等于 ϕ, 在 $E(2r/3)$ 外等于 0.

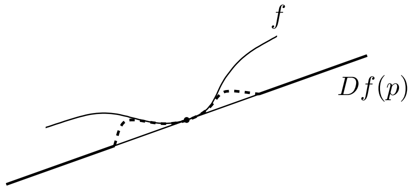

图 2.9　$A+\phi$

断言　$\operatorname{Lip}\overline{\phi} \to 0$, 当 $r \to 0$.

由广义中值定理, 只需证明 $\sup_{x\in E}|D\overline{\phi}(x)| \to 0$, 当 $r \to 0$. 由求导法则,

$$|D\overline{\phi}(x)| \leq |D\alpha(x/r)| \cdot \frac{1}{r} \cdot |\phi(x)| + |\alpha(x/r)| \cdot |D\phi(x)|.$$

因

$$\phi(0) = 0, \quad D\phi(0) = 0,$$

知 $\phi(x)$ 为 $o(|x|)$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使得 $|x| \leq \delta$ 时有 $|\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2B}|x|$ 和 $|D\phi(x)| \leq \varepsilon/2$. 因 $\overline{\phi}$ 在 $E(r)$ 外为 0, 在计算 $|D\overline{\phi}(x)|$ 时可设 $|x| \leq r$. 于是, 若 $r < \delta$, 则

$$\begin{aligned}|D\overline{\phi}(x)| &\leq B \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\varepsilon}{2B}|x| + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

断言证完.

因此, 只要 $r > 0$ 足够小, 可保证

$$\operatorname{Lip}\overline{\phi} < \min\{1-\tau,\ m(A)\}.$$

由引理 2.12, 存在同胚 $h: E \to E$ 满足

$$h \circ (A + \overline{\phi}) = A \circ h.$$

命 $V = E(r/3)$, 则

$$h \circ f|_V = Df(0) \circ h|_V.$$

定理 2.13 证完. ■

§2.5 双曲不动点的局部稳定流形

设 $p \in U$ 为 f 的不动点. 对 $r > 0$, 定义 p 点的尺寸为 r 的**局部稳定流形**和**局部不稳定流形**分别为

$$W_r^s(p, f) = \left\{ v \in U \;\middle|\; |f^n v - p| \le r, \forall n \ge 0,\ \text{且}\ \lim_{n \to +\infty} f^n v = p \right\},$$

$$W_r^u(p, f) = \left\{ v \in U \;\middle|\; |f^{-n} v - p| \le r, \forall n \ge 0,\ \text{且}\ \lim_{n \to +\infty} f^{-n} v = p \right\}.$$

当然这里的 r 要满足 $B(p, r) \subset U$. 显然,

$$f(W_r^s(p)) \subset W_r^s(p), \quad f(W_r^u(p)) \supset W_r^u(p).$$

局部稳定流形 $W_r^s(p, f)$ 有几种等价的刻画. 必要时做一平移, 可假定 $p = 0$.

引理 2.14 (W_r^s 的刻画, 适配形式) 设 $A : E \to E$ 为双曲线性同构, 在一个适配的盒型范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $r > 0$. 设 $\phi : E(r) \to E$ 为李普希茨, 满足

$$\operatorname{Lip} \phi < 1 - \tau, \quad \phi(0) = 0.$$

则

$$\begin{aligned} W_r^s(0, A + \phi) &= \{ v \in E(r) \mid (A + \phi)^n v \in E(r),\ \forall n \ge 0 \} \\ &= \{ v \in E(r) \mid (A + \phi)^n v \in E(r) \cap C_1(E^s),\ \forall n \ge 0 \} \\ &= \{ v \in E(r) \mid |(A + \phi)^n v| \le (\tau + \operatorname{Lip} \phi)^n |v|,\ \forall n \ge 0 \}. \end{aligned}$$

类似对 W^u.

证明 证明比定理 2.2 复杂. 先证两个简单的断言.

断言 1 若 $v, v' \in E(r)$, 则

$$|(A+\phi)_s v - (A+\phi)_s v'| \le (\tau + \operatorname{Lip}\phi)|v - v'|.$$

证明简单, 从略.

断言 2 若 $v, v' \in E(r)$ 且 $v-v' \notin C_1(E^s)$, 则 $(A+\phi)v-(A+\phi)v' \notin C_1(E^s)$, 且 $|(A+\phi)_u v - (A+\phi)_u v'| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}\phi)|v - v'|$.
(注意 $\tau^{-1} - \operatorname{Lip}\phi > 1$.)

断言 2 粗略地说就是, 若 $E(r)$ 内两点成 “竖向”, 则它们的像点也成 “竖向”, 而且距离扩张.

实际上,

$$\begin{aligned}|(A+\phi)_u v - (A+\phi)_u v'| &= |A_{uu}(v_u - v'_u) + \phi_u(v) - \phi_u(v')| \\ &\ge \tau^{-1}|v_u - v'_u| - \operatorname{Lip}\phi|v - v'|.\end{aligned}$$

但 $v - v' \notin C_1(E^s)$, 故 $|v_u - v'_u| = |v - v'|$. 那么

$$|(A+\phi)_u v - (A+\phi)_u v'| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}\phi)|v - v'|.$$

又因 $v - v' \notin C_1(E^s)$, 故 $v - v' \neq 0$. 结合断言 1 便得

$$|(A+\phi)_u v - (A+\phi)_u v'| > |(A+\phi)_s v - (A+\phi)_s v'|.$$

那么 $(A+\phi)v - (A+\phi)v' \notin C_1(E^s)$. 断言 2 证完.

现在依次证明引理中 4 种刻画的等价性. 显然第 1 个含于第 2 个中. 我们来证明第 2 个含于第 3 个中. 我们要用到上述断言的 $v' = 0$ 的特殊情形 (一般情形将在后面引理 2.17 的证明中用到). 假设存在 $v \in E(r)$ 使得对所有 $n \ge 0$ 有 $(A+\phi)^n v \in E(r)$, 但存在 $m \ge 0$ 使得 $w = (A+\phi)^m v \notin C_1(E^s)$. 由断言 2,

$$|(A+\phi)w| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}\phi)|w|,$$

且 $(A+\phi)w \notin C_1(E^s)$. 归纳地, 对任意 $n \ge 1$ 有

$$|(A+\phi)^n w| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}\phi)^n |w|.$$

注意因 $w \notin C_1(E^s)$ 有 $w \neq 0$. 故 $\{(A+\phi)^n w\}_{n=0}^{+\infty}$ 无界, 矛盾.

然后证明第 3 个含于第 4 个中. 设对任意 $n \geq 0$, 有 $(A+\phi)^n v \in E(r) \cap C_1(E^s)$. 由断言 1 ($v' = 0$ 的特殊情形),

$$|(A+\phi)v| = |(A+\phi)_s v| \leq (\tau + \mathrm{Lip}\,\phi)|v|.$$

归纳地, 对任意 $n \geq 1$, 有

$$|(A+\phi)^n v| \leq (\tau + \mathrm{Lip}\,\phi)^n |v|.$$

至于第 4 个含于第 1 个中是显然的. 引理 2.14 证完. ■

注 引理 2.14 中的 $E(r)$ 可以是整个 E. 这时引理的陈述稍有一点变化, 比如第二个集合 $\{v \in E(r) \mid (A+\phi)^n v \in E(r),\ \forall n \geq 0\}$ 当然要改为 $\{v \in E \mid$ 存在 $r > 0$ 使得 $(A+\phi)^n v \in E(r),\ \forall n \geq 0\}$. 证明和 r 固定的情形相同, 不赘.

下面是引理 2.14 在可微映射中的表现.

定理 2.15 (W_r^s 的刻画, 一般形式) *设 $p \in U$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 $r > 0$, $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$, 使得*

$$\begin{aligned} W_r^s(p) &= \{v \in U \mid |f^n v - p| \leq r,\ \forall\, n \geq 0\} \\ &= \{v \in U \mid |f^n v - p| \leq r,\ \text{且}\ |f^n v - p| \leq C\lambda^n |v-p|,\ \forall\, n \geq 0\}. \end{aligned}$$

类似地, 存在 $r > 0$, $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$, 使得

$$\begin{aligned} & W_r^u(p) \\ &= \{v \in U \mid |f^{-n} v - p| \leq r,\ \forall\, n \geq 0\} \\ &= \{v \in U \mid |f^{-n} v - p| \leq r,\ \text{且}\ |f^{-n} v - p| \leq C\lambda^n |v-p|,\ \forall\, n \geq 0\}. \end{aligned}$$

证明 定理只要对 E 的一个范数成立, 就对所有范数成立. 故只需在一个与 $Df(p)$ 适配的盒型范数 $|\cdot|$ 下证明. 只对 W^s 证明. 只需证明存在 $r > 0$, $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$ 使得第二个集合被包含在第三个之中.

无妨设 $p = 0$. 简写 $Df(0) = A$ 和

$$\phi = f - A : E(r) \to E.$$

设 $0 < \tau < 1$ 为 A 在 $|\cdot|$ 下的双曲度. 取定 $C = 1$ 和 $\tau < \lambda < 1$.

由引理 2.4, 存在 $r > 0$ 足够小使得在 $E(r)$ 上有

$$\operatorname{Lip}\phi \le \lambda - \tau.$$

设

$$|f^n v| \le r, \quad \forall\, n \ge 0.$$

则

$$|f^n v| = |(A + \phi)^n v| \le (\tau + \operatorname{Lip}\phi)^n |v| \le \lambda^n |v|,$$

其中第一个不等号是由于引理 2.14. 定理 2.15 证完. ■

定理 2.16 (双曲不动点的孤立性) *设 $p \in U$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 $r > 0$ 使得如果*

$$|f^n w - p| \le r, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

则 $w = p$.

证明 取 $r > 0, C \ge 1, 0 < \lambda < 1$ 使得定理 2.15 对 f 和 f^{-1} 同时成立. 设 $w \in U$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 满足 $|f^n w - p| \le r$. 由定理 2.15, 对任意 $n \ge 0$,

$$|w - p| = |f^{-n}(f^n w) - p| \le C\lambda^n |f^n w - p| \le C^2 \lambda^{2n} |w - p|.$$

(这里的第一个 "$\le$" 是由于 $f^n w$ 在负向迭代下与 p 的距离永远 $\le r$, 而第二个 "$\le$" 是由于 w 在正向迭代下与 p 的距离永远 $\le r$.) 取 n 足够大使得 $C^2\lambda^{2n} < 1$ 即给出 $w = p$. 定理 2.16 证完. ■

现在来证明双曲不动点的局部稳定流形定理. 这是本章技术上最复杂的一个定理. 我们将像证明 Hartman-Grobman 定理那样, 先撇开

具体邻域的选择, 在全空间 E 的框架下就一个适配盒型范数完成证明, 写成引理. 原来的局部问题将通过一个冲击函数 "嵌入" 全空间的框架里作为引理的推论.

于是我们考虑 $A+\phi: E\to E$, 其中 A 为一双曲线性同构, ϕ 在全空间 E 上定义且 $\mathrm{Lip}\phi$ 小. 定义 $0\in E$ 的 (整体) **不稳定流形**为

$$W^u(0,A+\phi)=\left\{v\in E \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty}(A+\phi)^{-n}v=0\right\}.$$

下一引理说, 如果 $\mathrm{Lip}\phi$ 足够小, $W^u(0,A+\phi)$ 将是 E^u 的一个李普希茨拷贝. 并且, 若 ϕ 为 C^1, 则 $W^u(0,A+\phi)$ 也为 C^1.

引理 2.17 设 $A: E\to E$ 为双曲线性同构, 双曲分解为 $E=E^u\oplus E^s$, $|\cdot|$ 为 E 的一个与其适配且盒型的范数. 则存在 $\delta>0$, 使得

(1) 如果李普希茨映射 $\phi: E\to E$ 满足

$$\mathrm{Lip}\,\phi<\delta,\quad \phi(0)=0,$$

则存在李普希茨映射 $\sigma: E^u\to E^s$, $\sigma(0)=0$, $\mathrm{Lip}\,\sigma\le 1$, 使得 $W^u(0,A+\phi)=\mathrm{gr}(\sigma)$.

(2) 如果 C^1 映射 $\phi: E\to E$ 满足

$$\mathrm{Lip}\,\phi<\delta,\quad \phi(0)=0,$$

则由陈述 (1) 保证的映射 $\sigma: E^u\to E^s$ 为 C^1, 且 C^1 子流形 $W^u(0,A+\phi)$ 在原点的切空间恰为双曲线性同构 $A+D\phi(0)$ 的扩张子空间 G^u.

注 若 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 足够小, 则 $A+D\phi(0)$ 和 $(A+D\phi(0))^{-1}$ 都满足引理 2.9 的条件, 从而 $A+D\phi(0)$ 确为双曲线性同构.

证明 先证陈述 (1). 设 A 在 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0<\tau<1$. 先设

$$\delta=\min\left\{\frac{1-\tau}{2},\ m(A)\right\}.$$

(后面要一再缩小 δ.) 设李普希茨映射 $\phi: E\to E$ 满足

$$\mathrm{Lip}\,\phi<\delta,\quad \phi(0)=0.$$

我们来证明存在李普希茨映射 $\sigma : E^u \to E^s$, $\sigma(0) = 0$, $\operatorname{Lip}\sigma \le 1$, 其图像在 $A + \phi$ 下不变, 然后证明 $\operatorname{gr}(\sigma)$ 恰为 $W^u(0, A + \phi)$.

图像不变条件

$$(A + \phi)\operatorname{gr}(\sigma) \subset \operatorname{gr}(\sigma)$$

等价于对任意 $v \in E^u$ 有

$$\sigma((A + \phi)_u(v + \sigma v)) = (A + \phi)_s(v + \sigma v).$$

因 $A_u(\sigma v) = 0$, $A_s v = 0$, 得

$$\sigma(A_{uu}v + \phi_u(v + \sigma v)) = A_{ss}(\sigma v) + \phi_s(v + \sigma v).$$

即

$$\sigma(A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma)) = A_{ss}\sigma + \phi_s(I_u + \sigma).$$

因

$$m(A_{uu}) \ge \tau^{-1}, \quad \operatorname{Lip}(\phi_u(I_u + \sigma)) \le 2\operatorname{Lip}\phi < 2\delta = 1 - \tau,$$

由定理 2.7, $A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma)$ 可逆. 从而

$$\sigma = (A_{ss}\sigma + \phi_s(I_u + \sigma))(A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma))^{-1}.$$

这给出一个映射

$$T(\sigma) = (A_{ss}\sigma + \phi_s(I_u + \sigma))(A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma))^{-1},$$

称为由 $A + \phi$ 导出的**图像变换** (见图 2.10). 寻求满足

$$(A + \phi)\operatorname{gr}(\sigma) \subset \operatorname{gr}(\sigma)$$

的映射 σ, 就转化为寻求 T 的不动点.

我们希望能为 T 确定一个适当的定义空间, 使得 T 在其上为压缩映射. 这是一个微妙的问题. 记

$$\Sigma(E^u, E^s; 0) = \{\sigma : E^u \to E^s \mid \sigma(0) = 0,\ |\sigma|_* < \infty\},$$

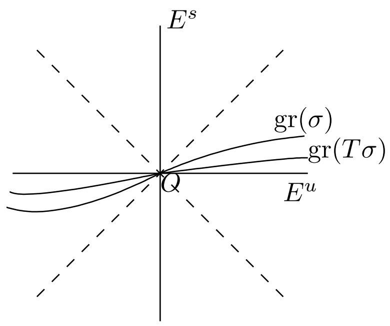

图 2.10 图像变换

其中

$$|\sigma|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|\sigma(v)|}{|v|}.$$

若 σ 为线性, 这就是通常的算子范数. 在这一范数下, $\Sigma(E^u, E^s; 0)$ 成一 Banach 空间, 而

$$\Sigma(E^u, E^s; 0)[1] = \{\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0) \mid \sigma \text{ 为李普希茨且 } \mathrm{Lip}\,\sigma \leq 1\}$$

为 $\Sigma(E^u, E^s; 0)$ 的闭子集. 这是闭单位球 $\Sigma(E^u, E^s; 0)(1)$ 的一个真子集. 于是, 图像变换确切地定义为

$$T = T_\phi : \Sigma(E^u, E^s; 0)[1] \to \Sigma(E^u, E^s; 0)$$
$$T(\sigma) = (A_{ss}\sigma + \phi_s(I_u + \sigma))(A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma))^{-1}.$$

注 为证明不变图像为 C^1, 一个自然的想法是对 C^1 映射的集合采用 C^1 范数, 去证明图像变换对于 C^1 范数为压缩映射. 但有反例说明, 图像变换对于 C^1 范数不是压缩映射. 这是稳定流形定理证明中一个微妙而严重的困难. 这里介绍的方法是: 第一步, 选择适当的范数, 用压缩原理证明不变图像为李普希茨; 第二步, 用其他办法证明该图像其实为 C^1. 即使在第一步中, 选择适当的空间、范数和定义域也是一个微妙的问题. 这里, 我们按照文献 [HPS] 的方式, 采用了上述特别的空间 $\Sigma(E^u, E^s; 0)$, 范数 $|\cdot|_*$, 以及定义域 $\Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$.

我们来验证 T 将 $\Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ 映入自身. 因 $\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$, 易见 $(T\sigma)(0) = 0$, $T(\sigma)$ 为李普希茨且

$$\operatorname{Lip}(T\sigma) \le \frac{\tau + 2\operatorname{Lip}\phi}{\tau^{-1} - 2\operatorname{Lip}\phi} < 1.$$

因此 T 将 $\Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ 映入自身.

再来验证 T 对范数 $|\cdot|_*$ 而言为压缩映射. 对任意 $\sigma, \sigma' \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$, 简记

$$F = A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma) : E^u \to E^u,$$
$$F' = A_{uu} + \phi_u(I_u + \sigma') : E^u \to E^u,$$

即

$$T(\sigma)F = A_{ss}\sigma + \phi_s(I_u + \sigma), \quad T(\sigma')F' = A_{ss}\sigma' + \phi_s(I_u + \sigma').$$

因 $F : E^u \to E^u$ 为保持原点的同胚, 故当 v 跑遍 $E^u - \{0\}$ 时,

$$\begin{aligned}|T(\sigma) - T(\sigma')|_* &= \sup_{v\neq 0} \frac{|(T\sigma)(v) - (T\sigma')(v)|}{|v|} \\ &= \sup_{v\neq 0} \frac{|(T\sigma)(Fv) - (T\sigma')(Fv)|}{|Fv|}.\end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}&|(T\sigma)(Fv) - (T\sigma')(Fv)| \\ &\quad \le |(T\sigma)(Fv) - (T\sigma')(F'v)| + |(T\sigma')(F'v) - (T\sigma')(Fv)| \\ &\quad \le |A_{ss}(\sigma(v) - \sigma'(v))| + |\phi_s(v + \sigma(v)) - \phi_s(v + \sigma'(v))| \\ &\qquad + \operatorname{Lip}(T\sigma')|F'v - Fv| \\ &\quad \le \tau|\sigma(v) - \sigma'(v)| + \operatorname{Lip}\phi|\sigma(v) - \sigma'(v)| + \operatorname{Lip}\phi|\sigma(v) - \sigma'(v)| \\ &\quad \le (\tau + 2\operatorname{Lip}\phi)|\sigma(v) - \sigma'(v)|.\end{aligned}$$

另一方面, 因 $\phi(0) = 0$ 和 $\sigma(0) = 0$, 有

$$\begin{aligned}|Fv| &= |A_{uu}v + \phi_u(v + \sigma(v)) - \phi_u(0 + \sigma(0))| \\ &\ge \tau^{-1}|v| - \operatorname{Lip}\phi(|v| + \operatorname{Lip}\sigma|v|) \\ &\ge (\tau^{-1} - 2\operatorname{Lip}\phi)|v|.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|T(\sigma)-T(\sigma')|_* &\le \frac{\tau+2\operatorname{Lip}\phi}{\tau^{-1}-2\operatorname{Lip}\phi}\sup_{v\neq 0}\frac{|\sigma(v)-\sigma'(v)|}{|v|}\\ &= \frac{\tau+2\operatorname{Lip}\phi}{\tau^{-1}-2\operatorname{Lip}\phi}|\sigma-\sigma'|_*.\end{aligned}$$

但

$$\frac{\tau+2\operatorname{Lip}\phi}{\tau^{-1}-2\operatorname{Lip}\phi}<1,$$

故 $T=T_\phi$ 在范数 $|\cdot|_*$ 下为压缩映射. 由压缩映射原理, T 有唯一不动点 $\sigma=\sigma_\phi\in\Sigma(E^u,E^s;0)[1]$, 满足

$$(A+\phi)\operatorname{gr}(\sigma)\subset\operatorname{gr}(\sigma).$$

又注意到, 对任意 $(v,\sigma(v))\in\operatorname{gr}(\sigma)$, 令 $u=(A_{uu}+\phi_u(I_u+\sigma))^{-1}v$, 即给出 $(A+\phi)(u,\sigma(u))=(v,\sigma(v))$. 因此其实有

$$(A+\phi)\operatorname{gr}(\sigma)=\operatorname{gr}(\sigma).$$

现在来证明

$$\operatorname{gr}(\sigma)=W^u(0,A+\phi).$$

我们对 $(A+\phi)^{-1}$ 就 $E(r)=E$ 的情形 (见引理 2.14 后的注) 应用引理 2.14. 实际上, 因 $\operatorname{Lip}\phi<\delta\le m(A)$, $A+\phi$ 确实可逆. 而且, 写 $(A+\phi)^{-1}=A^{-1}+\psi$, 则易见 $\operatorname{Lip}\phi$ 小蕴含 $\operatorname{Lip}\psi$ 小. 故必要时进一步缩小 δ, 可设 $(A+\phi)^{-1}$ 满足引理 2.14 的条件. 现在, 因 $\sigma(0)=0$ 且 $\operatorname{Lip}\sigma\le 1$, 知 $\operatorname{gr}(\sigma)$ 含于锥 $C_1(E^u)$ 之中. 但 $\operatorname{gr}(\sigma)$ 在 $(A+\phi)^{-1}$ 下不变, 故由引理 2.14,

$$\operatorname{gr}(\sigma)\subset W^u(0,A+\phi).$$

为证相反的包含式, 设存在 $v\in W^u(0,A+\phi)-\operatorname{gr}(\sigma)$. 则存在 $w\in\operatorname{gr}(\sigma)$, 使得 $v_u=w_u$. 那么 $v-w\notin C_1(E^u)$. 由引理 2.14 证明中的断言 2,

$$|(A+\phi)^{-n}(v)-(A+\phi)^{-n}(w)|\to\infty.$$

但 v 与 w 同属 $W^u(0, A+\phi)$, 故应

$$|(A+\phi)^{-n}(v) - (A+\phi)^{-n}(w)| \to 0,$$

矛盾. 这就证明了 $\mathrm{gr}(\sigma) = W^u(0, A+\phi)$. 陈述 (1) 证完.

陈述 (2) 涉及可微性, 比较微妙. 一个办法是运用**双曲集**的概念. 这一优美的想法似乎属于 Pugh. 双曲集是本书第四章最重要的概念, 值得做一个详尽的而不是匆忙的介绍, 因此我们将把陈述 (2) 的证明推迟到 §4.3. 引理 2.17 的证明暂告结束. ■

定理 2.18 (双曲不动点的局部稳定流形定理) 设 $f: U \to E$ 为 C^k, $k \geq 1$, $0 \in U$ 为 f 的双曲不动点, 双曲分解为 $E = E^s \oplus E^u$. 则存在 $r > 0$ 使得 $W_r^s(0, f)$ 是 E 的一个维数为 $\dim E^s$ 的 C^k 嵌入子流形, 在 0 点与 E^s 相切. 确切地, 存在 0 在 E^s 中的一个邻域 V 和 C^k 映射 $\sigma: V \to E^u$, $\sigma(0) = 0$, $D\sigma(0) = 0$, 使得 $W_r^s(0, f) = \mathrm{gr}(\sigma)$. 类似对 W_r^u.

定理 2.18 (见图 2.11) 的证明也推迟到 §4.3.

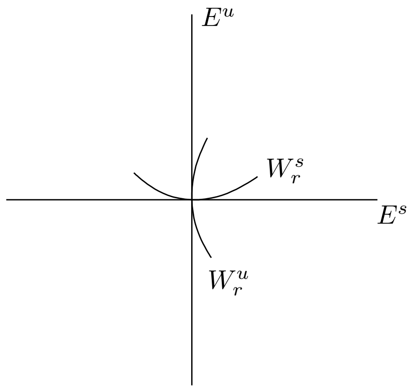

图 2.11 局部稳定流形和局部不稳定流形

注 定理 2.18 与 2.15 常常合在一起陈述, 统称双曲不动点的局部稳定流形定理.

在本章的最后, 我们给出一个判别法 (见 [KH]), 用以判别一个李

普希茨映射在什么情况下可微, 以备 §4.3 之用. 这个判别法只用到割线和切线的概念.

设 $E = E^u \oplus E^s$, $\sigma : E^u \to E^s$ 为一个李普希茨映射. 简记 $G = \mathrm{gr}(\sigma)$. 设 $v \in E^u$ 给定. 简记 $z = (v, \sigma(v))$. 任意 $h \in E^u$, $h \neq 0$, 决定了 G 的过点 z 和 $(v+h, \sigma(v+h))$ 的一条**割线**. 称过点 z 的直线 $l \subset T_zE$ 为 G 的一条**广义切线**, 如果存在序列 $h_n \in E^u$, $h_n \neq 0$, $h_n \to 0$, 使得由 z 和 $z_n = (v+h_n, \sigma(v+h_n))$ 决定的割线序列 l_n 收敛于 l. 微分同胚 $f : E \to E$ 在 z 点的导映射 $Df(z)$ 把 G 在 z 点的广义切线映为 fG 在 fz 点的广义切线. 称 G 的过 z 的所有广义切线的并为 G 在点 z 处的**切集**, 记为 T_zG. (例如, 对于函数 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x\sin(1/x)$, $T_{(0,0)}\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 就是 $\mathbb{R}^2$ 上过原点的斜率的绝对值 ≤ 1 的所有直线的并.) 对任意单位向量 $e \in E^u$, 在 e 的方向上适当取 h_n 即可得一条广义切线 l. 因 σ 为李普希茨, 知 l 不与 E^s 平行. 故投影 $\pi_u : T_zE \to E^u$ 把 l 映满 e 所张成的直线. 这说明 $\pi_u(T_zG) \supset E^u$.

判别法 设 $E = E^u \oplus E^s$. 一个李普希茨映射 $\sigma : E^u \to E^s$ 在 $v \in E^u$ 处可微当且仅当切集 T_zG 落在 T_zE 的一个维数为 $\dim E^u$ 的线性子空间中, 这里 $z = (v, \sigma(v))$, $G = \mathrm{gr}(\sigma)$. 并且, 这时切集 T_zG 即为 G 在 z 处的切平面.

证明 证明其实就是用割线和广义切线的语言解释可微性. “仅当” 部分是显然的. 我们来证明 “当” 部分. 设存在 T_zE 的一个维数为 $\dim E^u$ 的线性子空间 $V \supset T_zG$. 设 $\pi_u : E \to E^u$ 为投影. 由上述, $\pi_u(T_zG) \supset E^u$. 故 $\pi_u(V) \supset E^u$. 但 V 和 E^u 是维数相同的 (有限维) 线性空间, 故 $\pi_u|_V$ 作为 V 到 E^u 的线性满射必为线性同构. 但 $\pi_u|_V$ 把 V 的子集 T_zG 映满 E^u, 那么 $T_zG = V$. 特别地, 对每一 $e \in E^u$, $e \neq 0$, 有且只有一条广义切线在 π_u 下含有 e. 我们把这简单说成 e 的 “上方” 有且只有一条广义切线. 命

$$L : E^u \to E^s$$

为唯一的 (线性) 映射使得 $\mathrm{gr}(L) = T_zG$. 也即

$$L = \pi_s(\pi_u|_{T_zG})^{-1}.$$

则 $e \in E^u$ 上方的广义切线就是 $z + t(e, Le)$.

我们来证明 σ 在 v 点可微, 且 $D\sigma(v) = L$. 即证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(v+h) - \sigma(v) - Lh}{|h|} = 0.$$

反设存在序列 $0 \neq h_n \to 0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(v+h_n) - \sigma(v) - Lh_n}{|h_n|} \neq 0. \tag{$*$}$$

不妨设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{|h_n|} = e \neq 0.$$

因 σ 为李普希茨, 还不妨设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(v+h_n) - \sigma(v)}{|h_n|} = u.$$

也就是说, 由 z 和 $z_n = (v + h_n, \sigma(v + h_n))$ 决定的割线序列收敛到广义切线 $z + t(e, u)$. 但 e 上方的广义切线只能是 $z + t(e, Le)$, 而由 (*), $u \neq Le$, 矛盾. 判别法证完. ■

习　题

下面 E 始终表示一个欧氏空间.

1. 证明: 欧氏空间 E 的所有范数两两等价.

2. 设 $A : E \to E$ 为线性同构. 证明: $m(A) = |A^{-1}|^{-1}$.

3. 证明: 双曲线性同构 $A : E \to E$ 的两个定义等价.

4. 证明: 线性同构 $A : E \to E$ 为双曲的当且仅当

$$B^s \cap B^u = \{0\},$$

其中

$$B^s = \{v \in E \mid \exists r > 0,\ 使得\ |A^n(v)| \leq r,\ \forall\ n \geq 0\},$$

$$B^u = \{v \in E \mid \exists r > 0,\ 使得\ |A^{-n}(v)| \leq r,\ \forall\ n \geq 0\};$$

也当且仅当

$$D^s + D^u = E,$$

其中

$$D^s = \{v \in E \mid |A^n(v)| \to 0,\ n \to \infty\},$$

$$D^u = \{v \in E \mid |A^{-n}(v)| \to 0,\ n \to \infty\}.$$

5. 证明: E 上的全体双曲线性同构是全体线性同构的空间的一个开稠子集.

6. 用 $H(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的双曲线性同构的集合.

(a) 设 $A \in H(\mathbb{R}^n)$. 证明: 存在曲线 $\{A_t \in H(\mathbb{R}^n) : 0 \le t \le 1\}$ 使得 (i) $A_0 = A$, (ii) A_1 为实对角矩阵.

(b) 设 $A \in H(\mathbb{R}^n)$. 证明: 存在曲线 $\{A_t \in H(\mathbb{R}^n) : 0 \le t \le 1\}$ 使得 (i) $A_0 = A$, (ii)

$$A_1|_{E^s} = \begin{cases} \mathrm{diag}(1/2, \cdots, 1/2), & \text{如果}\ \det(A|_{E^s}) > 0, \\ \mathrm{diag}(1/2, \cdots, 1/2, -1/2), & \text{如果}\ \det(A|_{E^s}) < 0; \end{cases}$$

且

$$A_1|_{E^u} = \begin{cases} \mathrm{diag}(2, \cdots, 2), & \text{如果}\ \det(A|_{E^u}) > 0, \\ \mathrm{diag}(2, \cdots, 2, -2), & \text{如果}\ \det(A|_{E^u}) < 0. \end{cases}$$

7. 设 $B : E \to E$ 为线性同构, 在直和

$$E_1 \oplus E_2 = E$$

下表为

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

使得

$$\max\{|B_{11}^{-1}|, |B_{22}|\} < 1.$$

证明: B 为双曲线性同构.

8. 详细证明定理 2.11.

9. 设 $A_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 表示线性映射

$$A_\alpha(x) = \alpha x.$$

(a) 证明: 若 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, 则 A_α 和 A_β 拓扑共轭.

(b) 证明: 若 $\alpha \neq \beta$, 则不存在李氏同胚 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $hA_\alpha = A_\beta h$.

(Hartman-Grobman 定理中的拓扑共轭一般不能是李氏同胚.)

10. 设 $p \in U$ 为 f 的一个双曲周期点. 任给正整数 m, 证明: 存在 p 的邻域 V 使得 f 在 $V - \{p\}$ 中的任意周期点的周期大于 m.

第三章

Smale 马蹄与 Anosov 环面同构

本章介绍两个重要的系统, Smale 马蹄和 Anosov 环面同构. 这两个系统的发现引发了现代动力系统的诞生. 首先介绍一下符号动力系统. 它将提供 Smale 马蹄的一个可计算模型.

§3.1 符号动力系统

定义两个符号的**符号空间** Σ_2 为

$$\Sigma_2 = \prod_{n=-\infty}^{\infty} A_n,$$

赋乘积拓扑, 这里 $A_n = \{0, 1\}$. 于是, 一个点 $a \in \Sigma_2$ 即为一个双向序列

$$\cdots\ a_{-2}\ a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2\ \cdots,$$

其中 $a_n \in \{0, 1\}$. 点 $a \in \Sigma_2$ 的一个邻域基由形如

$$C_j(a) = \{b \in \Sigma_2 \mid b_n = a_n,\ \forall\ -j \leq n \leq j\}$$

的集组成, $j = 0, 1, 2, \cdots$. 简言之, 两个点 $a, b \in \Sigma_2$ 彼此接近当且仅当它们在一个很长的以 0 为中心的区间 $[-j, j]$ 上吻合. 这一拓扑可度量化, 一个度量是

$$\mathrm{d}(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{|n|}}.$$

定理 3.1 Σ_2 为康托集.

证明 由吉洪诺夫定理, Σ_2 为紧致. 任给 $a \in \Sigma_2$ 和 $j \geq 1$, 存在点 $b \in C_j(a)$ 不同于 a. 故 Σ_2 为完全集. 我们来证明 Σ_2 完全不连通. 在 Σ_2 中任取两点 $a \neq b$. 则存在 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $a_m \neq b_m$. 命

$$V(a) = \{c \in \Sigma_2 \mid c_m = a_m\}.$$

则 $V(a)$ 为开子集. 同样, 其余集 $\Sigma_2 - V(a)$ 也是开子集. 因 $a \in V(a)$, $b \in \Sigma_2 - V(a)$, 知 a 和 b 不在同一连通分支内. 于是 Σ_2 完全不连通. 定理 3.1 证完. ■

定义**左移位映射**

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

为

$$(\sigma(a))_n = a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

于是 σ 将每一双向序列向左移动一个单位. 显然 σ 为同胚. 称 (Σ_2, σ) 为一**符号动力系统**. 符号动力系统是动力系统的一个重要分支, 这里我们只介绍它的一些最基本的性质. 显然 σ 的一个不动点即为一常值双向序列, 一个周期为 k 的周期点即为一双向序列, 其中的长度为 k 的段落重复出现. 很容易计算 σ 的给定周期的周期点的个数.

定理 3.2 σ 的周期点在 Σ_2 中稠密, 且 σ 在 Σ_2 上传递.

证明 任给 $a \in \Sigma_2$ 和 $j \geq 1$. 令 $b \in \Sigma_2$ 为将段落 $a_{-j} \cdots a_j$ 向两个方向无限重复所成的双向序列. 则 b 为周期点, 且 $b \in C_j(a)$. 这证明周期点稠密. 为证传递性, 只需构造一个点 $c \in \Sigma_2$, 其正半轨在 Σ_2

中稠密. 对所有 $n \leq -1$ 令 $c_n = 0$. 从 $n = 0$ 开始, 相继写出 $0, 1$ 的所有可能的有限组合. 确切地, 从 $n = 0$ 开始, 先写出所有的 1 元组, $0, 1$, 有两个. 然后写出所有的 2 元组, $00, 01, 10, 11$, 有 4 个, 然后是所有的 3 元组, 有 8 个, 如此等等. 这就定义了一个点 $c \in \Sigma_2$. 易验证其正半轨在 Σ_2 中稠密. 定理 3.2 证完. ■

定理 3.2 所述的两个性质彼此形成鲜明对照. 每个周期轨道都是一个紧致子系统, 故一个有很多周期轨道的系统似乎结构比较松散. 而一个传递系统则似乎是一个紧密的整体. 如果一个系统同时具有这两个性质, 该系统应该不太平凡. 下面的定理即说明了这一点. 称一拓扑动力系统 $f : X \to X$ **对初值敏感依赖**, 如果存在 $r > 0$, 使得对任意 $x \in X$ 和任意 $\delta > 0$, 存在 $y \in B(x, \delta)$ 和 $m \geq 1$ 使得 $\mathrm{d}(f^m x, f^m y) \geq r$. 换句话说, 以一致的幅度 r, 在每一 $x \in X$, f 不是正向李雅普诺夫稳定的. (回顾一下, 称 f 在 x 点**正向李雅普诺夫稳定**, 如果对任意 $r > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $y \in B(x, \delta)$ 和任意 $m \geq 1$, $\mathrm{d}(f^m x, f^m y) < r$.)

定理 3.3 (Banks 等) *设 X 为紧致度量空间, $f : X \to X$ 为一同胚. 设 f 的周期点在 X 中稠密且 f 在 X 上传递. 若 X 不退化为一条周期轨道, 则 f 对初值敏感依赖.*

证明 因周期点在 X 中稠密, 且 X 不退化为一条周期轨道, 故至少存在两个周期点 $p, q \in X$, 使得

$$a = \mathrm{d}(\mathrm{Orb}(p), \mathrm{Orb}(q)) > 0.$$

我们来证明 f 对初值敏感依赖, 其中常数 r 可取成 $a/8$.

任取 $x \in X$ 和 $\delta > 0$. 不妨设 $\delta < a/8$. 因 x 到 $\mathrm{Orb}(p)$ 和 $\mathrm{Orb}(q)$ 的距离至少有一个不小于 $a/2$, 为确定起见, 设

$$\mathrm{d}(x, \mathrm{Orb}(p)) \geq \frac{a}{2}.$$

因周期点稠密, 存在周期点 $y \in B(x, \delta)$. 设 y 的周期为 $k \geq 1$. 取 $\eta > 0$

足够小, 使得对任意 $0 \le i \le k$,

$$f^i(B(p,\eta)) \subset B\left(\mathrm{Orb}(p), \frac{a}{8}\right).$$

因 f 为传递, 存在 $z \in B(x,\delta)$ 和 $n \ge 1$, 使得 $f^n z \in B(p,\eta)$. 那么

$$\{f^n z, f^{n+1} z, \cdots, f^{n+k} z\} \subset B\left(\mathrm{Orb}(p),\ \frac{a}{8}\right).$$

但在 $\{f^n y, f^{n+1} y, \cdots, f^{n+k} y\}$ 中必定有一个, 比如说 $f^m y$, 恰为 y. 故

$$\mathrm{d}(f^m y, f^m z) \ge \frac{a}{4}.$$

那么

$$\mathrm{d}(f^m y, f^m x) \ge \frac{a}{8} \quad 或 \quad \mathrm{d}(f^m z, f^m x) \ge \frac{a}{8}.$$

定理 3.3 证完. ■

§3.2 Smale 马蹄

命 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 为边长为 1 的正方形. 定义一个微分同胚 f, 使得 Q 横向被压缩, 纵向被扩张, 再放回去穿过自己, 如图 3.1 所示.

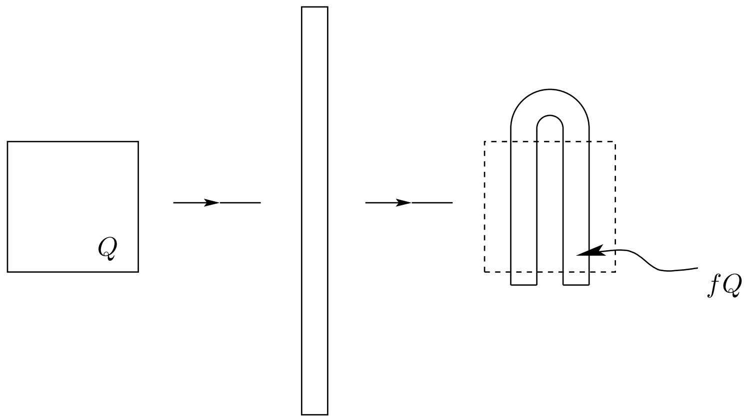

图 3.1 马蹄映射

因为 fQ 越出了 Q, Q 有一些点不能做第二次迭代. 可以将 f 扩张为一个整体定义的微分同胚 $f: S^2 \to S^2$, 使得下半球面的南极为一源点, 上半球面被映入自身, 如图 3.2 所示.

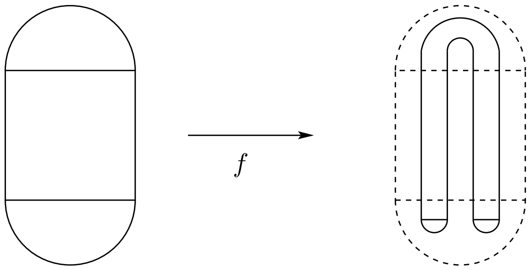

图 3.2 (整体) 马蹄映射

我们集中考察 Q 这一部分, 并特别抽出横条 H_0, H_1 和纵条 V_0, V_1 使得

$$fH_0 = V_0, \quad fH_1 = V_1,$$

如图 3.3 所示. 为简单起见, 设 f 在 H_i $(i = 0, 1)$ 上为仿射, 横向压缩 1/5, 纵向扩张 5 倍. 以下称横穿 H_0 或 H_1 的长方形为一个**横带**, 称纵穿 V_0 或 V_1 的长方形为一个**纵带**.

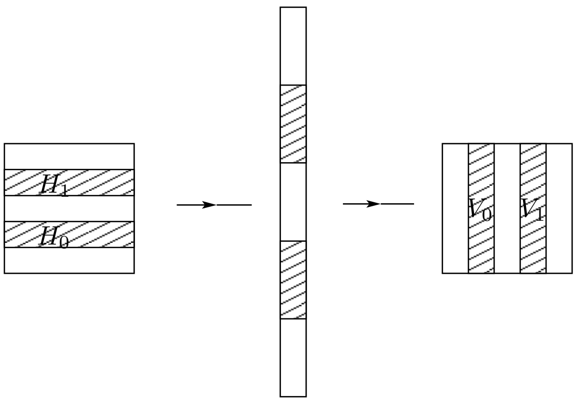

图 3.3 H_0, H_1; V_0, V_1

断言 1 对任意纵带 V, $(fV) \cap V_i$ 为一纵带, 宽度缩小 1/5. 对任意横带 H, $(f^{-1}H) \cap H_i$ 为一横带, 高度缩小 1/5.

纵带的情形是显然的. 对一横带 H, 有

$$(f^{-1}H) \cap H_i = f^{-1}(H \cap fH_i) = f^{-1}(H \cap V_i).$$

因 $H \cap V_i$ 为一横穿 V_i 的长方形, 其 f^{-1}-像恰为一横穿 H_i 的长方形, 即一横带. 断言 1 证完.

命

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n Q.$$

换句话说, Λ 为 Q 中所包含的最大的 f-不变集.

定理 3.4 (Smale) $f : \Lambda \to \Lambda$ 与 $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 拓扑共轭.

证明 若 $x \notin H_0 \cup H_1$, 则 $fx \notin Q$. 故 Λ 又可表为

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n (H_0 \cup H_1).$$

因 $H_0 \cap H_1 = \emptyset$, 对任意 $x \in \Lambda$, 存在唯一 $a \in \Sigma_2$, 使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$f^n x \in H_{a_n}.$$

称这一 $a \in \Sigma_2$ 为 $x \in \Lambda$ 的**旅程序列**. 这给出一个映射

$$h : \Lambda \to \Sigma_2$$

$$h(x) = x \text{ 的旅程序列}.$$

因 $f(x)$ 的旅程序列为 x 的旅程序列的左移位, 立即有

$$hf = \sigma h.$$

我们来证明 h 为单满射. 也就是证明对任意 $a \in \Sigma_2$, 存在唯一 $x \in \Lambda$, 使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $f^n x \in H_{a_n}$. 换句话说, 也就是证明对任意 $a \in \Sigma_2$,

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(H_{a_n})$$

为单点集. 这一交集具体写出来就是

$$\cdots\cap f^3H_{a_{-3}}\cap f^2H_{a_{-2}}\cap fH_{a_{-1}}\cap H_{a_0}\cap f^{-1}H_{a_1}\cap f^{-2}H_{a_2}\cap\cdots,$$

或

$$\cdots\cap \underbrace{f^2V_{a_{-3}}\cap \underbrace{fV_{a_{-2}}\cap \underbrace{V_{a_{-1}}}_{J_0}}_{J_1}}_{J_2}\cap \underbrace{\underbrace{\underbrace{H_{a_0}}_{I_0}\cap f^{-1}H_{a_1}}_{I_1}\cap f^{-2}H_{a_2}}_{I_2}\cap\cdots.$$

显然,

$$I_{n+1}\subset I_n,\quad J_{n+1}\subset J_n.$$

断言 2 I_n 为一横带, 高度 $\le 1/5^n$. J_n 为一纵带, 宽度 $\le 1/5^n$.

实际上, 因 J_0 为一纵带, 由断言 1,

$$J_1=f(V_{a_{-2}})\cap V_{a_{-1}}$$

为一纵带. 故

$$J_2=f(f(V_{a_{-3}})\cap V_{a_{-2}})\cap V_{a_{-1}}$$

为一纵带, 如此等等. 对 I_n 证明类似. 断言 2 证完.

于是

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(H_{a_n})$$

为单点集, 也即 h 为单满射.

易见 h 连续. 事实上, 任给 $j\ge 1$, 若 $x,y\in\Lambda$ 足够接近, 则对所有 $-j\le n\le j$, 有 $\mathrm{d}(f^nx,f^ny)<1/10$. 从而对所有 $-j\le n\le j$, f^nx 和 f^ny 或者同时落在 H_0 中, 或者同时落在 H_1 中; 因而其旅程序列 $h(x)$ 和 $h(y)$ 在 $[-j,j]$ 上吻合. 这证明 h 连续. 因 Λ 紧致, h 为同胚. 定理 3.4 证完. ■

推论 3.5 马蹄集 Λ 为一康托集. 马蹄映射 $f:\Lambda\to\Lambda$ 的周期点在 Λ 中稠密, 且 f 在 Λ 上传递.

我们来简略地说明一下马蹄映射是结构稳定的. 实际上, 定理 3.4 中的、导致了拓扑共轭 h 的几何式构造, 即拉伸和挤压正方形 Q, 弯过来穿过 Q 自己, 等等, 是十分粗糙的. 因此, 任何 C^1 接近 f 的微分同胚 g 有同样的行为, 从而同样产生一个紧不变集 Λ_g, 拓扑共轭于 2-移位. 故 $g|_{\Lambda_g}$ 拓扑共轭于 $f|_{\Lambda}$.

本节中的马蹄模型是人为的 (仿射的), 但在差一拓扑共轭的意义下, 马蹄在真实世界中自然地、经常地出现. 比如马蹄与所谓横截同宿点同时出现. 设 $p \in M$ 为 f 一双曲不动点. p 点的 (整体) **稳定流形**和**不稳定流形**分别定义为

$$W^s(p) = W^s(p, f) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} f^n x = p \right\},$$
$$W^u(p) = W^u(p, f) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} f^{-n} x = p \right\}.$$

易见对任意 $r > 0$,

$$W^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n} W^s_r(p),$$
$$W^u(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{n} W^u_r(p).$$

当 $p \in M$ 是双曲不动点时, 由定理 2.18, p 点的局部稳定流形是一可微嵌入圆盘. 故作为嵌入子流形的单调并, 这时的整体稳定流形是 M 的一个可微浸入子流形.

称 $x \in M$ 为 p 的一个**同宿点**, 如果

$$x \in W^s(p) \cap W^u(p) - \{p\}.$$

称 p 的一个同宿点 x 为**横截的**, 如果

$$T_x W^s(p) \oplus T_x W^u(p) = T_x M.$$

这些概念当 p 是一个双曲周期点时类似定义. 马蹄模型中有许多横截同宿点. 事实上, 马蹄模型中有一个双曲不动点, 其稳定流形和不稳定

流形各自来回卷绕无穷多次, 使得其横截同宿点在马蹄集中稠密. 横截同宿点是现代动力系统理论的一个重要而精彩的概念, 这里我们只不加证明地提及下面一个定理, 是说只要 f 有一个横截同宿点, 则对某一 $m \geq 1$, 就会出现 f^m 的马蹄现象.

定理 3.6 (Birkhoff-Smale) 设 $p \in M$ 为 f 的双曲不动点, x 为 p 的一个横截同宿点. 则对 $\{x, p\}$ 的任意邻域 U, 存在 $m \geq 1$ 和 f^m 的紧不变集 $\Lambda \subset U$, 使得 $\{p, x\} \subset \Lambda$, 且 $f^m : \Lambda \to \Lambda$ 拓扑共轭于 $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

§3.3 Anosov 环面同构

这一节介绍环面 $\mathbb{T}^2$ 上一类特别的微分同胚. 首先回忆有关 $\mathbb{T}^2$ 及其万有覆叠空间 $\mathbb{R}^2$ 的一些基本事实. 记

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$$
$$\pi(a) = (e^{2\pi i a_1},\ e^{2\pi i a_2})$$

为覆叠映射, 其中 $a = (a_1, a_2)$. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}^2$,

$$\pi a = \pi b \quad \text{当且仅当} \quad a - b \in \mathbb{Z}^2.$$

我们取 $\mathbb{T}^2$ 的自然度量 d 使得 π 是一个局部等距映射, 从而为 C^∞.

设 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 连续. 称连续映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 f 的一个**提升**(见图 3.4), 如果

$$\pi F = f\pi.$$

定理 3.7 任意连续映射 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 有提升. 一个连续映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{T}^2$ 的某一连续映射的提升的充要条件是, 对任意 $a \in \mathbb{R}^2$ 和任意 $k \in \mathbb{Z}^2$ 有 $F(a+k) - F(a) \in \mathbb{Z}^2$. 只要 F 是 f 的一个提升, 则 $\{F + k\}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, 给出 f 的全部提升.

证明 设 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 连续. 因 $\mathbb{R}^2$ 为单连通, 映射

$$f\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "f\pi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

图 3.4 f 的提升 F

存在提升 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, 使得

$$\pi F = f\pi.$$

(参见 [M].) 这也是 $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 的一个提升.

设 F 为 $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 的一个提升. 则对任意 $a\in\mathbb{R}^2$ 和任意 $k\in\mathbb{Z}^2$,

$$\pi(F(a+k)) = f\pi(a+k) = f\pi(a) = \pi F(a).$$

故 $F(a+k)-F(a)\in\mathbb{Z}^2$. 反之, 设对任意 $a\in\mathbb{R}^2$ 和任意 $k\in\mathbb{Z}^2$ 有 $F(a+k)-F(a)\in\mathbb{Z}^2$. 定义

$$f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$$
$$f(x)=\pi F(a),$$

其中 a 为 $\pi^{-1}(x)$ 中任一点. 易见 $f(x)$ 不依赖于 a 的选择从而是定义好的, 且 $\pi F = f\pi$. 又因 π 为局部同胚, 易见 f 连续.

设 F 为 f 的提升. 则

$$\pi(F+k) = \pi F = f\pi.$$

这证明 $F+k$ 为 f 一提升. 反之, 设 G 为 f 一提升. 我们来证明存在 $k\in\mathbb{Z}^2$, 使得 $G=F+k$. 注意对任意 $a\in\mathbb{R}^2$ 有

$$\pi G(a) = f\pi(a) = \pi F(a),$$

故

$$G(a) - F(a) \in \mathbb{Z}^2.$$

但 $G - F$ 连续, 故必为常值 $k \in \mathbb{Z}^2$. 定理 3.7 证完. ■

称线性映射

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

为一 **Anosov 线性同构**, 如果 A 为双曲线性同构, 分量为整数, 且 $\det A = \pm 1$. 一个典型的例子是

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

定理 3.8 设 $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为一 Anosov 线性同构. 则 A 的两个特征值为无理数, 满足 $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, 并且两个相应特征方向的斜率也为无理数.

证明 由 $\det A = \pm 1$ 知, 若 A 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 为共轭复根或重实根, 则绝对值必为 1. 这将与 A 为双曲矛盾. 故 λ_1 和 λ_2 为实数且不相等. 因 $|\lambda_1 \lambda_2| = 1$, 可设 $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$.

设有一个特征值 λ 为有理数 p/q, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$, 且 $(p, q) = 1$. 则

$$p^2 - (a_{11} + a_{22})pq \pm q^2 = 0,$$

其中 a_{ij} 为 A 的分量. 故 $p|q$, $q|p$. 那么 $|\lambda| = 1$, 与 A 为双曲矛盾. 故 λ 为无理数.

设 $v \in \mathbb{R}^2$ 为属于 λ 的一个特征向量. 则 $v \neq (0, 1)$. 这是因为, 不然的话有 $a_{22} = \lambda$, 与 a_{22} 为整数矛盾. 故可设 $v = (1, b)$. 那么

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda b \end{pmatrix},$$

从而

$$a_{11} + a_{12} b = \lambda.$$

那么 b 为无理数. 定理 3.8 证完. ■

设 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为一 Anosov 线性同构. 因 A 的分量为整数, A 将 $\mathbb{Z}^2$ 映入自身. 故对任意 $a\in\mathbb{R}^2$ 和任意 $k\in\mathbb{Z}^2$, 有 $A(a+k)-A(a)=A(k)\in\mathbb{Z}^2$. 由定理 3.7, A 导出映射

$$f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$$

满足

$$\pi A=f\pi.$$

易见 f 为 C^∞. 因 $\det A=\pm1$, 知 A^{-1} 的分量也为整数, 故也导出 $\mathbb{T}^2$ 上一个 C^∞ 映射, 恰为 f^{-1}. 故 f 为微分同胚, 称为一个 **Anosov 环面同构**.

一个 Anosov 环面同构的最显著的外表也许是它的两族稳定和不稳定流形. 一般地, 设 X 为一度量空间, $f:X\to X$ 为一同胚. 对任意 $x\in X$ (不限于周期点), 定义 x 在 f 下的**稳定流形**和**不稳定流形**为

$$W^s(x,f)=\left\{y\in X\ \middle|\ \lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(f^ny,f^nx)=0\right\},$$
$$W^u(x,f)=\left\{y\in X\ \middle|\ \lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(f^{-n}y,f^{-n}x)=0\right\}.$$

两点共处于同一稳定流形中是一个等价关系, 一个稳定流形就是一个等价类, 因而两个稳定流形或不相交, 或全同. 不稳定流形也是如此. 显然,

$$f(W^s(x))=W^s(fx),\quad f(W^u(x))=W^u(fx).$$

若 x 为周期点, 这里给出的定义与过去的定义一致.

下面的定理说, 对 Anosov 环面同构, $W^s(x)$ 和 $W^u(x)$ 构成两族优美的 C^∞ 浸入子流形, 填满了 $\mathbb{T}^2$. 实际上, $\mathbb{R}^2$ 上的 Anosov 线性同构就是如此 (见图 3.5).

定理 3.9 设 $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 为由 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 导出的 Anosov 环面同构.

(1) 对任意 $a\in\mathbb{R}^2$, $W^s(a,A)=a+E^s$, 其中 $E^s\oplus E^u=\mathbb{R}^2$ 为 A 的双曲分解.

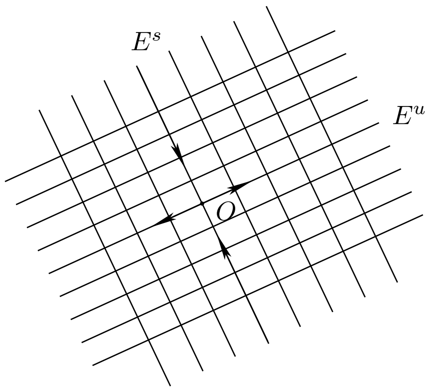

图 3.5 A 的稳定流形和不稳定流形

(2) 对任意 $x \in \mathbb{T}^2$, $W^s(x,f) = \pi(W^s(a,A))$, 其中 a 为 $\pi^{-1}(x)$ 任一点.

(3) $W^s(x,f)$ 为 $\mathbb{T}^2$ 一 C^∞ 浸入子流形, 在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密. $W^u(x)$ 的情形类似. 对任意 $x, y \in \mathbb{T}^2$, $W^s(x,f)$ 和 $W^u(y,f)$ 横截地相交于 $\mathbb{T}^2$ 的一个稠密子集.

证明 (1) 设 $b \in W^s(a,A)$. 则当 $n \to +\infty$ 时有

$$|A^n b - A^n a| \to 0, \quad |A^n(b-a)| \to 0,$$

也即 $b - a \in E^s$, $b \in a + E^s$. 这证明 $W^s(a,A) \subset a + E^s$. 这几步推理的每一步都可逆, 故有 $W^s(a,A) = a + E^s$.

(2) 设 $\pi a = x$. 先证明 $\pi(W^s(a,A)) \subset W^s(x,f)$. 任取 $b \in W^s(a,A)$. 则

$$|A^n b - A^n a| \to 0.$$

因 π 一致连续, 有

$$\mathrm{d}(\pi(A^n b),\ \pi(A^n a)) \to 0, \quad \mathrm{d}(f^n(\pi b),\ f^n(x)) \to 0.$$

故 $\pi b \in W^s(x,f)$. 这证明 $\pi(W^s(a,A)) \subset W^s(x,f)$.

我们来证明 $\pi(W^s(a,A)) \supset W^s(x,f)$. 因为 π 是覆叠映射, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $z \in \mathbb{T}^2$, $\pi^{-1}(B(z,\varepsilon_0))$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一些互不相交的开集的并, 使得 π 将每一个这样的开集等距地映为 $B(z,\varepsilon_0)$. 特别地, 只要 $a,b \in \mathbb{R}^2$ 满足 $|a-b| \le \varepsilon_0$, 则有 $\mathrm{d}(\pi a, \pi b) = |a-b|$. 取定 $\delta > 0$, 使得对任意 $a,b \in \mathbb{R}^2$, 只要 $|a-b| \le \delta$, 则有 $|Aa - Ab| \le \varepsilon_0$.

现在设 $y \in W^s(x,f)$. 我们来证明存在 $b \in W^s(a,A)$, 使得 $\pi b = y$. 取 $m \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得对任意 $n \ge m$, 有

$$\mathrm{d}(f^n y, f^n x) \le \delta.$$

因 $\pi(A^m a) = f^m x$, 存在唯一 $c \in B(A^m a, \varepsilon_0)$ 使得 $\pi c = f^m y$. 命 $b = A^{-m} c$ (见图 3.6). 则

$$\pi b = \pi(A^{-m} c) = f^{-m}(\pi c) = f^{-m} f^m y = y.$$

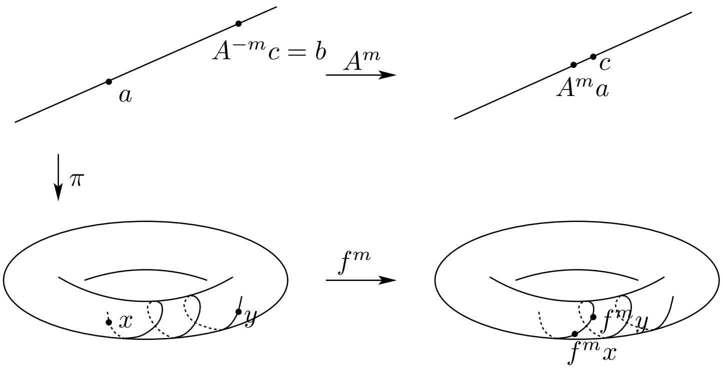

图 3.6　b 点

只需证明 $b \in W^s(a,A)$, 即证明 $c \in W^s(A^m a, A)$. 提醒一下, c 和 $A^m a$ 及它们的正向迭代分别覆盖 $f^m y$ 和 $f^m x$ 及它们的正向迭代. 我们来证明这一覆盖始终保持距离. 用归纳法. 因 $|c - A^m a| \le \delta$, 知

$$|Ac - A^{m+1} a| \le \varepsilon_0.$$

因 π 在 ε_0 距离之内是等距映射, 故

$$|Ac - A^{m+1}a| = |\pi Ac - \pi A^{m+1}a| = \mathrm{d}(f^{m+1}y, f^{m+1}x) \leq \delta.$$

归纳地, 对任意 $n \geq 1$,

$$|A^n c - A^n(A^m a)| = \mathrm{d}(f^{m+n}y, f^{m+n}x) \leq \delta.$$

但

$$\mathrm{d}(f^{m+n}y, f^{m+n}x) \to 0,$$

故

$$|A^n c - A^n(A^m a)| \to 0.$$

即 $c \in W^s(A^m a, A)$. 这证明 $\pi(W^s(a, A)) \supset W^s(x, f)$.

(3) 因 $W^s(a, A)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的直线, 而 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为 C^∞ 局部嵌入, 故 $W^s(x, f)$ 为 $\mathbb{T}^2$ 的 C^∞ 浸入子流形. 我们来证明 $W^s(x, f)$ 在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密. 为简单起见设 $x = \pi(0)$. 这时 $W^s(0, A) = E^s$. 由定理 3.8, $W^s(0, A)$ 为过原点的斜率为无理数 b 的一条直线. 这里提醒一下, 通过 $\mathbb{Z}^2$ 的每一点的竖直线代表 $\mathbb{T}^2$ 的一个经圆 S^1. E^s 与这些竖直线的交点的高度为 $\{nb\}_{n\in\mathbb{Z}}$. 如 §1.3 的例 3 所证, 模掉整数部分, 这是 S^1 的一个稠密子集. 故 $W^s(x, f)$ 在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密. 其余结论显然. 定理 3.9 证完. ■

定理 3.10 设 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为 Anosov 环面同构. 则 f 的周期点在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密, 且 f 在 $\mathbb{T}^2$ 上传递.

证明 为证明 f 的周期点在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密, 只需证任意 “有理点” $x \in \mathbb{T}^2$ 为 f 的周期点. 设 $a = (p_1/q_1,\ p_2/q_2) \in \mathbb{R}^2$. 对任意 $n \geq 1$, A^n 为整数矩阵, 故 $A^n a$ 的两个分量皆为有理数, 分母不超过 $[q_1, q_2]$. 故必有 $n > m \geq 0$, 使得

$$A^n a - A^m a \in \mathbb{Z}^2.$$

从而

$$\pi A^n a = \pi A^m a.$$

记 $x=\pi a$. 则

$$f^n x = f^m x, \quad f^{n-m}(x) = x.$$

故 x 为 f 的周期点. 这证明 f 的周期点在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密.

为证明 f 在 $\mathbb{T}^2$ 上传递, 我们用定理 1.6. 设 U 和 V 为 $\mathbb{T}^2$ 的任意两个开子集. 因 f 的周期点在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密, 存在周期点 $p\in U$ 和 $q\in V$. 由定理 3.9,

$$W^u(p)\cap W^s(q)\neq\emptyset.$$

必要时考虑某一迭代, 可假设 p, q 为 f 的不动点. 设 $z\in W^u(p)\cap W^s(q)$. 则存在 $m,n\geq 1$, 使得 $f^{-m}z\in U$, $f^n z\in V$. 那么 $f^{m+n}(U)\cap V\neq\emptyset$. 由定理 1.6, f 在 $\mathbb{T}^2$ 上传递 (见图 3.7). 定理 3.10 证完. ■

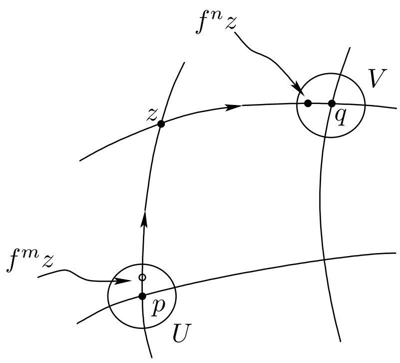

图 3.7　f 的传递性的证明

Anosov 环面同构为结构稳定. 事实上, Anosov 本人证明, 一般的 **Anosov 微分同胚** (见下一章) 为结构稳定. 这是双曲集和结构稳定性的现代理论的重要篇章.

习　题

1. 设 Σ_2 上给一度量

$$\mathrm{d}_*(a,b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|a_n-b_n|}{n^2}.$$

证明: 这一度量与 §3.1 中定义的度量 $\mathrm{d}(a,b)$ 等价 (决定同一拓扑).

2. 设 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 为移位映射. 计算 σ^n 的不动点的个数.

3. 设 $A=(a_{ij})$ 为 2×2 矩阵, 元素为 0 或 1. 设

$$\Sigma_A=\{s\in\Sigma_2 \mid a_{s_n s_{n+1}}=1,\ \forall\, n\in\mathbb{Z}\}.$$

证明: Σ_A 在 σ 下不变. 称子系统 $\sigma_A=\sigma|_{\Sigma_A}$ 为一个**有限型子移位**.

4. 设 A 为一个 $0,1$ 矩阵. 若存在正整数 m 使得 A^m 的所有分量都是正的, 则称矩阵 A 为**最终正**的. 证明: 如果 A 为最终正矩阵, 则有限型子移位 σ_A 为拓扑混合的, 并且 σ_A 的周期点在 Σ_A 中稠密.

5. 证明: 移位映射 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 有不可数多个极小集.

6. 设 $f:S^2\to S^2$ 为 §3.2 中整体定义的马蹄映射. 找到 f 的一个不动点 p, 并尽可能仔细地画出 $W^u(p)$ 是如何来回缠绕的. 类似地画出 $W^s(p)$.

7. 设 Λ 为上题中的 f 的马蹄康托集. 证明: $\Lambda=\overline{W^u(p)}\cap\overline{W^s(p)}$, 其中 p 为 Λ 中的任何一个周期点.

8. 证明:

(1) Smale 马蹄是拓扑混合的.

(2) Anosov 自同构

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

是拓扑混合的.

(关于拓扑混合的概念见第一章习题)

9. 设 f 为 $\mathbb{T}^2$ 上的 Anosov 环面同构, 由 $\mathbb{R}^2$ 上的 Anosov 线性同构 A 导出. 证明: f 的不动点的个数为 $|\det(A-I)|$.

10. 设 f 为 $\mathbb{T}^2$ 上的 Anosov 环面同构. 设 g 为 $\mathbb{T}^2$ 上一连续映射, 与 f 同伦. 证明: 存在连续满射 $h:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 使得 $h\circ g=f\circ h$.

第四章

双曲集

双曲集理论是结构稳定性理论的分析基础. 双曲集的经典例子是上一章介绍的 Smale 马蹄和 Anosov 环面同构. 其主要性态是, 在迭代下, 一个方向上的向量以一致的数率压缩, 另一个方向上的向量以一致的数率扩张. 集合中的每个点都像是一个鞍点, 但可以移动, 甚至非周期地移动. 出现有限多个鞍型周期轨道是常见的现象. 但像 Smale 马蹄和 Anosov 环面同构那样, 无穷多个鞍型周期轨道, 带有一致的压缩率和扩张率, 协调地、结构稳定地共处在一个紧致不变集内, 这种令人惊讶的现象直到 20 世纪 60 年代初才被发现. 这种现象只能是 “鞍型” 的. 实际上, 在所有方向上一致压缩 (汇型) 或扩张 (源型) 的紧不变集不会这样复杂, 而只能是有限个周期轨道 (定理 4.1).

§4.1 双曲集的概念

设 M 为一紧致无边 C^∞ 黎曼流形. 设 $f: M \to M$ 为一微分同胚. 由定义, f 为同胚, 且 f 和 f^{-1} 都为 C^1.

称 f 的一个不变集 $\Lambda \subset M$ 为**双曲集**, 如果对任意 $x \in \Lambda$, 切空间

T_xM 有直和分解

$$T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

作为子空间族在 Tf 下不变:

$$Tf(E^s(x)) = E^s(f(x)), \quad Tf(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

并且存在两个常数 $C \geq 1$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得

$$|Tf^n(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall x \in \Lambda, v \in E^s(x), n \geq 0,$$
$$|Tf^{-n}(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall x \in \Lambda, v \in E^u(x), n \geq 0.$$

特别地, 若 Λ 是单独一个轨道, 则称之为一个**双曲轨道**.

双曲集大概是本课程最重要的概念. 我们做些注解.

注 (1) 定义中使用了切映射 Tf 的符号, 省略了基点. 与带有基点 x 的导算子符号 $Df(x)$ 相比, 二者的关系是

$$Tf(v) = T_xf(v) = Df(x) \cdot v,$$

其中 $x = \pi v$. 这里 π 表示丛投射, 即 $x = \pi v$ 当且仅当 $v \in T_xM$. 因为基点 x 由向量 v 自动给出, 从而可以略去. 因 $T(f^n) = (Tf)^n$, 故写成 Tf^n 不致引起误解. 这里 $|\cdot|$ 表示由给定的黎曼度量所导出的范数 (芬斯勒构造). 范数符号也略去了基点, $|v|$ 自动表示 $|v|_x$, 其中 $x = \pi v$. 类似地, $|Tf^n(v)|$ 自动采用 $f^n x$ 点处的范数 $|\cdot|_{f^n x}$.

(2) 因 M 紧致, Λ 的双曲性不依赖于 M 的黎曼度量的选取.

(3) 维数 $\dim E^s(x)$ 沿 x 的轨道为常值, 称为该轨道的**指标**.

(4) $E^s(x)$ 或 $E^u(x)$ 可以为 $\{0\}$. 这时称 Λ 为**扩张型**或**压缩型**的.

(5) 若 Λ 是 f 的双曲集, 则也是 f^{-1} 的双曲集.

(6) 由不变性, 定义中关于 E^s 的不等式, 所涉及的其实不只是 v 的正向迭代, 而是 v 的所有迭代. 也就是说, 对任意 $x \in \Lambda$, 有

$$|Tf^n(Tf^m v)| \leq C\lambda^n |Tf^m v|, \quad \forall v \in E^s(x),\ m \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

特别地, 命 $m=-n$ 即给出

$$|Tf^{-n}v| \geq C^{-1}(\lambda^{-1})^n|v|, \quad \forall v \in E^s(x),\ n \geq 0.$$

E^u 的情形类似.

(7) 双曲集的不变子集是双曲集. 有限个双曲集的并是双曲集.

(8) 一个双曲不动点或双曲周期轨道为双曲集. 若 x 为双曲不动点 p 的一个横截同宿点, 则 $\mathrm{Orb}(x)$ 为一双曲集. Smale 马蹄和 Anosov 环面同构为更复杂的双曲集. 以全空间为双曲集的微分同胚称为 **Anosov 微分同胚**. Anosov 环面同构即为例子.

TM 的黎曼度量诱导出 M 上一个度量, 即 $\mathrm{d}(x,y)$ 定义为连接 x 和 y 的分段可微曲线的长度的下确界. 如通常, 定义

$$B(x,r)=\{y\in M \mid \mathrm{d}(y,x)\leq r\}.$$

首先证明压缩型双曲集是平凡的, 意即只含有限个点. 扩张型双曲集亦然.

定理 4.1 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的压缩型双曲集. 则 Λ 由有限个周期轨道组成.

证明 设 $C\geq 1$ 和 $0<\lambda<1$ 是 Λ 的双曲常数. 于是对每一 $x\in\Lambda$,

$$|Df^n(x)|\leq C\lambda^n, \quad \forall\ n\geq 1.$$

这一不等式对每一 $z\in\overline{\Lambda}$ 都成立. 实际上, 设 $x_k\in\Lambda$, $x_k\to z$. 则

$$|Df^n(x_k)|\leq C\lambda^n, \quad \forall\ n\geq 1.$$

固定 n 令 $k\to\infty$ 即可. 因此, 不妨设 Λ 紧致.

取定 μ, N 使得

$$C\lambda^N<\mu<1.$$

命 $g=f^N$. 则 $g(\Lambda)=\Lambda$, 且对每一 $x\in\Lambda$ 有

$$|Dg(x)|\leq C\lambda^N.$$

只需证明, Λ 由 g 的有限个 (压缩型) 周期轨道组成.

断言 *存在 $r>0$ 使得, 对任意 $x\in\Lambda$, 在 $B(x,r)$ 上有 $\mathrm{Lip}(g)\le\mu$.*

实际上, 存在 $r>0$ 使得对任一 $x\in\Lambda$ 和任一 $z\in B(x,r)$ 有 $|Dg(z)|\le\mu$. 故断言由广义中值定理保证.

注 由此易见, 压缩型周期点是非游荡集的孤立点. 特别地, 是周期点集的孤立点.

因此, 只需证明每一 $x\in\Lambda$ 为 g 的 (压缩型) 周期点. 因为, 那样的话, 因 Λ 紧致, Λ 必为有限集, 也就由 g 的有限个 (压缩型) 周期轨道组成.

任取 $x\in\Lambda$. 首先证明, 任一 $y\in\alpha(x,g)$ 为 g 的压缩型周期点. 取 $n_i\to\infty$ 使 $z_i=g^{-n_i}(x)\to y$. 记 $m_i=n_{i+1}-n_i$. 由上述断言, g^{m_i} 在 $B(z_{i+1},r)$ 上为 μ^{m_i}-压缩映射. 因 r 不依赖于 i 而 $\mathrm{d}(z_i,z_{i+1})\to0$, 存在一个充分大的 i, 使得 $y\in B(z_{i+1},r)$ 并且 $B(z_i,\mu^{m_i}r)\subset B(z_{i+1},r)$. 故 g^{m_i} 在 $B(z_{i+1},r)$ 中有唯一不动点 p, 为压缩型. 因 g 在 $B(z_{i+1},r)$ 中只能有 p 这一个非游荡点, 知 $y=p$. 这证明 y 为 g 的压缩型周期点.

容易看出, 任何点不可能在反向迭代下逼近一个压缩型周期点, 除非是该周期轨道本身的点 (见本章习题 4). 故 $x\in\mathrm{Orb}(y,g)$. 这证明 x 为 g 的压缩型周期点. 定理 4.1 证完. ■

本课程关于双曲集的所有结果对压缩型和扩张型双曲集都平凡地成立, 故不另做陈述.

设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 对任意 $x\in\Lambda$, $\gamma>0$, 记

$$C_\gamma(E^s(x))=\{v\in T_xM\mid |v_u|\le\gamma|v_s|\},$$
$$C_\gamma(E^u(x))=\{v\in T_xM\mid |v_s|\le\gamma|v_u|\}$$

分别为 x 处关于 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 的 γ-**锥**. 下一定理对应于定理 2.2.

定理 4.2 ($\boldsymbol{E^s}$ 的刻画) *设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 对任意 $x\in\Lambda$,*

子空间 $E^s(x)$ 有如下等价刻画

$$\begin{aligned} E^s(x) &= \{v \in T_xM \mid |Tf^n v| \to 0, n \to +\infty\} \\ &= \{v \in T_xM \mid \exists r > 0 \text{ 使得 } |Tf^n v| \le r, \forall n \ge 0\} \\ &= \{v \in T_xM \mid \exists \gamma > 0 \text{ 使得 } Tf^n v \in C_\gamma(E^s(f^n x)), \forall n \ge 0\}. \end{aligned}$$

类似对 $E^u(x)$. 特别地, 双曲分解是唯一的, 即如果 $T_xM = G^s(x) \oplus G^u(x)$ 为 Tf 的另一双曲分解, 则 $G^s(x) = E^s(x)$, $G^u(x) = E^u(x)$.

证明 证明与定理 2.2 类似, 只是隐含向量基点的移动. 比如我们来证明第三个集包含在第四个之中. 反设

$$v \in T_xM - \{v \in T_xM \mid \exists \gamma > 0 \text{ 使得 } Tf^n v \in C_\gamma(E^s(f^n x)), \forall n \ge 0\},$$

则存在 $m \ge 0$ 使得 $w = Tf^m v \in T_{f^m x}M - C_1(E^s(f^m x))$. 特别地, $w_u \neq 0$. 那么当 $n \to +\infty$ 时有

$$|Tf^n(w_u)| \to \infty, \quad |Tf^n(w_s)| \to 0.$$

故

$$|Tf^n w| \ge |Tf^n(w_u)| - |Tf^n(w_s)| \to \infty.$$

这就证明了第三个集包含在第四个之中.

因为 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 已经作为集合刻画出来, 立得双曲分解的唯一性. 定理 4.2 证完. ■

给定一整数 $m \ge 1$. 设 $x \in M$ 为一点, $E(x)$ 为 T_xM 的一个 m 维线性子空间. 又设 $x_k \in M$ 为一序列, $E(x_k)$ 为 $T_{x_k}M$ 的一个 m 维线性子空间. 称 $E(x_k)$ **收敛到** $E(x)$, 记作 $E(x_k) \to E(x)$, 如果对每一 k, 存在 $E(x_k)$ 的一个基 $\{e^1_{x_k}, \cdots, e^m_{x_k}\}$, 以及 $E(x)$ 的一个基 $\{e^1_x, \cdots, e^m_x\}$, 使得 $e^1_{x_k} \to e^1_x, \cdots, e^m_{x_k} \to e^m_x$ (如图 4.1). 由此给出 M 的 m-Grassman 空间

$$G^m(M) = \{V \mid V \text{ 为 } T_xM \text{ 的一个 } m \text{ 维线性子空间}, \ x \in M\}$$

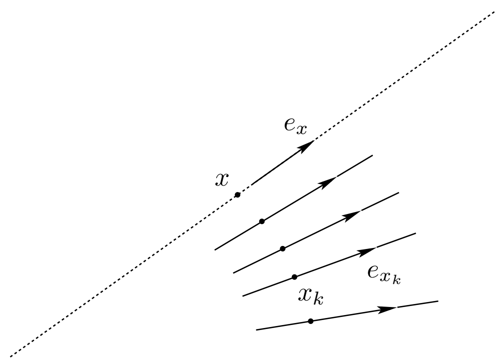

图 4.1 线性子空间的收敛

的一个拓扑. 易见 $G^m(M)$ 紧致. 注意 $E(x_k) \to E(x)$ 蕴含 $x_k \to x$, 而且对任意 $v \in E(x)$, 存在 $v_k \in E(x_k)$, 使得 $v_k \to v$.

定理 4.3 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 则 $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 随 $x \in \Lambda$ 连续变化. 特别地, $\dim E^s(x)$ 和 $\dim E^u(x)$ 局部为常值. 又, 闭包 $\overline{\Lambda}$ 也是 f 的双曲集.

证明 设 $x \in \Lambda$ 给定. 我们来证明 E^s 在 x 点连续. 只需证明, 只要序列 $E^s(x_k)$, $x_k \in \Lambda$, 收敛于 T_xM 的一个线性子空间 $G^s(x)$, 则 $G^s(x) = E^s(x)$. 为此任取 $v \in G^s(x)$. 则存在 $v_k \in E^s(x_k)$, 使得 $v_k \to v$. 因对所有 $n \geq 0$ 和 $k \geq 1$ 有

$$|Tf^n(v_k)| \leq C\lambda^n |v_k|,$$

固定 n, 命 $k \to \infty$ 即得

$$|Tf^n(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall\, n \geq 0.$$

由定理 4.2, $G^s(x) \subset E^s(x)$. 必要时取子序列, 可设 $E^u(x_k)$ 收敛于 T_xM 的一个线性子空间 $G^u(x)$. 同样可证 $G^u(x) \subset E^u(x)$. 因 $G^s(x)$ 与 $G^u(x)$ 维数互补, 知 $G^s(x) = E^s(x)$ (且 $G^u(x) = E^u(x)$). 这证明了 E^s 在 x 点连续.

再证 $\overline{\Lambda}$ 为双曲. 只需证不变集 $\overline{\Lambda}-\Lambda$ 为双曲. 设 $x\in\overline{\Lambda}-\Lambda$. 与上一段不同的是, x 点上没有事先给定的双曲直和 $E^s(x)\oplus E^u(x)$. 我们先来建立 x 处的一个直和. 取一序列 $x_k\in\Lambda$, 使得 $E^s(x_k)$ 和 $E^u(x_k)$ 分别收敛于 T_xM 的两个线性子空间 $G^s(x)$ 和 $G^u(x)$. 如上可证

$$|Tf^n(v)|\le C\lambda^n|v|,\quad \forall\ v\in G^s(x),\ n\ge 0,$$
$$|Tf^{-n}(v)|\le C\lambda^n|v|,\quad \forall\ v\in G^u(x),\ n\ge 0.$$

这两个不等式还不能确定 $G^s(x)\cap G^u(x)=\{0\}$. 但同样又可证

$$|Tf^{-n}(v)|\ge C^{-1}(\lambda^{-1})^n|v|,\quad \forall\ v\in G^s(x),\ n\ge 0.$$

故 $G^s(x)\cap G^u(x)=\{0\}$. 因 $G^s(x)$ 和 $G^u(x)$ 维数互补, 知 $T_xM=G^s(x)\oplus G^u(x)$. 这就建立了 x 处的一个直和.

现在来建立 $\mathrm{Orb}(x)$ 上的一个不变直和. 用 Tf 做一次迭代, 则 $E^s(fx_k)$ 和 $E^u(fx_k)$ 分别收敛于 $T_{fx}M$ 的两个线性子空间 $G^s(fx)=Tf(G^s(x))$ 和 $G^u(fx)=Tf(G^u(x))$. 由于线性同构保持直和, 知 $T_{fx}M=G^s(fx)\oplus G^u(fx)$. 由于常数 C 和 λ 不依赖于 Λ 中的点, $G^s(fx)$ 和 $G^u(fx)$ 的向量同样满足 $G^s(x)$ 和 $G^u(x)$ 的向量所满足的上面的不等式. 如此做所有的正负向迭代, 便得到 $\mathrm{Orb}(x)$ 上的一个不变直和. 同样可得 $\overline{\Lambda}-\Lambda$ 的所有轨道上的一个不变直和. 这显然是 $\overline{\Lambda}-\Lambda$ 上的一个双曲分解. 定理 4.3 证完. ■

设 $\Lambda\subset M$ 为一集. 设对任意 $x\in\Lambda$ 给定一个线性子空间 $E(x)\subset T_xM$. 如通常, 称

$$E=\bigcup_{x\in\Lambda}E(x)$$

为 $T_\Lambda M$ 的一个 m 维 C^r **子丛**, 或 Λ 上的一个 m 维 C^r **分布**, 如果对每一 $x\in\Lambda$, 存在 x 在 Λ 中的邻域 U 及 U 上的 m 个线性无关的 C^r 向量场 $e_1,\cdots,e_m$, 使得对每一 $x\in U$, 向量 $e_1(x),\cdots,e_m(x)$ 张成 $E(x)$. 这时称 $E(x)$ 为 E 在 x 点处的**纤维**. 称 $T_\Lambda M$ 的两个 C^0 子丛 E_1

和 E_2 构成**直和**, 或 **Whitney 和**, 记为 $E_1 \oplus E_2$, 如果在每一点 $x \in \Lambda$, $E_1(x)$ 和 $E_2(x)$ 构成直和 $E_1(x) \oplus E_2(x)$.

可以证明 E 为 $T_\Lambda M$ 的一个 C^0 子丛当且仅当 $E(x)$ 随 x 连续变化 (见本章习题 5). 于是, 由定理 4.3, 双曲集 Λ 的稳定和不稳定子空间的并

$$E^s = \bigcup_{x\in\Lambda} E^s(x) \quad 和 \quad E^u = \bigcup_{x\in\Lambda} E^u(x)$$

是 $T_\Lambda M$ 的 C^0 子丛. 值得注意的是, 一个双曲集的稳定子丛 E^s 和不稳定子丛 E^u 一般只是 C^0 而不是 C^1 的, 即使当 f 为 C^r 且 r 很大时也是如此 (见 [A]). 这使得双曲集理论具有一种特别的 C^0 色彩.

设对每一 $x \in M$, 在 T_xM 上定义了一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$. 如通常, 这些内积合起来称作 TM 的一个**黎曼度量** $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 称一个黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 C^r 的, 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在每两个 C^∞ 局部向量场上取值为 C^r 函数. 设对每一 $x \in M$, 在 T_xM 上定义了一个范数 $|\cdot|_x$. 如通常, 这些范数合起来称作 TM 的一个**范数** $|\cdot|$ (或**芬斯勒构造**). 称一个范数 $|\cdot|$ 为 C^r 的, 如果 $|\cdot|^2$ 在每一 C^∞ 局部向量场上取值为 C^r 函数. 由黎曼度量诱导的范数称为**黎曼范数**.

如通常, 称 TM 的两个 C^0 范数 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ **等价**, 如果存在常数 $K \geq 1$, 使得对所有 $v \in TM$,

$$K^{-1}|v| \leq \|v\| \leq K|v|.$$

称 K 为 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 之间的一个**关联常数**. 紧致流形上的所有 C^0 范数两两等价.

定理 4.4　设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 双曲分解为 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. 则存在 M 的一个 C^∞ 黎曼度量 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 和一个常数 $0 < \tau < 1$ 使得其诱导范数满足

$$\|Tf(v)\| \leq \tau\|v\|, \quad \forall\ v \in E^s,$$
$$\|Tf^{-1}(v)\| \leq \tau\|v\|, \quad \forall\ v \in E^u.$$

简略地说, 适当选取黎曼度量可使双曲性表现为一次到位的压缩和扩张.

证明 设 M 原来的黎曼度量为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 取一正整数 N 足够大, 使得

$$C\lambda^N < 1.$$

定义

$$\langle\langle v,u\rangle\rangle = \sum_{n=0}^{N-1}\langle Tf^n(v), Tf^n(u)\rangle, \quad v,u\in T_xM,\ x\in M.$$

则 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 为 M 一黎曼度量. 命

$$a = \sum_{n=0}^{N-1} C^2\lambda^{2n}.$$

则

$$\|v\|^2 \le a|v|^2, \quad \forall\ v\in E^s,$$
$$\|v\|^2 \le a|Tf^{N-1}(v)|^2, \quad \forall\ v\in E^u.$$

我们来验证 $\|\cdot\|$ 满足定理要求的两个不等式. 实际上, 对任意 $v\in E^s$,

$$\begin{aligned}\|Tf(v)\|^2 &= \|v\|^2 - |v|^2 + |Tf^N(v)|^2 \le \|v\|^2 - (1-C^2\lambda^{2N})|v|^2\\ &\le \|v\|^2 - a^{-1}(1-C^2\lambda^{2N})\|v\|^2.\end{aligned}$$

类似地, 对任意 $v\in E^u$,

$$\begin{aligned}\|Tf^{-1}(v)\|^2 &= \|v\|^2 + |Tf^{-1}(v)|^2 - |Tf^{N-1}(v)|^2\\ &\le \|v\|^2 - (1-C^2\lambda^{2N})|Tf^{N-1}(v)|^2\\ &\le \|v\|^2 - a^{-1}(1-C^2\lambda^{2N})\|v\|^2.\end{aligned}$$

命

$$\tau' = \sqrt{1-a^{-1}(1-C^2\lambda^{2N})},$$

则只需验证 $0<\tau'<1$. 但这是显然的, 因为 $a\geq 1$.

这个黎曼度量 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 一般只是 C^0 的, 因为 Tf 一般只是 C^0 的. 取一 C^∞ 逼近, 便得 M 的一个 C^∞ 黎曼度量, 其范数限制在 E^s 和 E^u 上对某个数 $\tau\in(\tau',1)$ 满足两个一次到位的不等式. 定理 4.4 证完. ■

称满足定理 4.4 的两个一次到位的不等式的黎曼度量 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ (C^0 即可, 不必 C^∞) 为对 Λ **适配**的. 这时称

$$\tau(\Lambda)=\sup_{x\in\Lambda}\{\|Tf|_{E^s(x)}\|,\ \|Tf^{-1}|_{E^u(x)}\|\}$$

为 Λ 在其诱导范数 $\|\cdot\|$ 下的**双曲度**.

§4.2　双曲性在扰动下的保持

先陈述一些简单自然的定义. 设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的不变集. 又设 E_1,E_2 为 $T_\Lambda M$ 的两个 C^0 子丛. 称映射 $F:E_1\to E_2$ 为**关于** f **保纤维**的, 或**覆盖** f 的, 如果

$$\pi F=f\pi,$$

其中 $\pi:TM\to M$ 为丛投射. 因此, 对任意 $x\in\Lambda$, F 将 $E_1(x)$ 映入 $E_2(fx)$. 这里不要求 $F|_{E_1(x)}$ 为线性. 在后面的 §4.4 中我们将遇到一个重要的、限制在纤维上非线性的保纤维映射. 覆盖同一 f 的两个映射 F 和 G 的和 $F+G$ 仍覆盖 f. 一个覆盖 f 的映射 F 和一个覆盖 f^{-1} 的映射 G 的复合 GF 覆盖 id.

设 $F:E_1\to E_2$ 连续, 关于 f 保纤维. 若对任意 $x\in\Lambda$, $F|_{E_1(x)}$ 为线性, 则称 F 为一 C^0 **丛同态**. 记

$$|F|=\sup\{|F(v)|\mid v\in E_1,\ |v|=1\}.$$

若 $|F|<\infty$, 则称 F **有界**. 若 Λ 紧致, 则其上的 C^0 丛同态总有界. 记 $L(E_1,E_2;f)$ 为从 E_1 到 E_2 的覆盖 f 的所有有界丛同态的集合. 在这一范数下, $L(E_1,E_2;f)$ 构成一 Banach 空间. 若对任意 $x\in\Lambda$, $F|_{E_1(x)}$ 为线性同构, 则称 F 为覆盖 f 的一个**丛同构**. 例如, 由于 f 是微分同胚, $Tf:T_\Lambda M\to T_\Lambda M$ 是覆盖 f 的一个 C^0 丛同构.

设 $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$ 为一 C^0 直和. 记 $L(E_1, E_2; id)$ 为从 E_1 到 E_2 的、覆盖 id 的有界 C^0 丛同态所成的 Banach 空间, $L(E_1, E_2; id)(1)$ 为其以原点为中心的闭单位球. 若 $P \in L(E_1, E_2; id)$, 则

$$\mathrm{gr}(P) = \bigcup_{x \in \Lambda} \mathrm{gr}(P_x)$$

为 $T_\Lambda M$ 的一个 C^0 子丛.

现在讨论双曲集的双曲性在扰动下的保持. 下一引理对应于引理 2.9.

引理 4.5 设 $g: M \to M$ 为微分同胚, Δ 为 g 的不变集, $B: T_\Delta M \to T_\Delta M$ 为覆盖 g 的一个有界 C^0 丛同构, 在一个 C^0 直和 $T_\Delta M = E_1 \oplus E_2$ 下表为

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{ij} = \pi_i \circ B|_{E_j}$. 如果存在 $T_\Delta M$ 的一个 C^0 范数 $|\cdot|$ 和两个常数 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ 使得

$$\max\{|B_{11}^{-1}|, |B_{22}|\} < \lambda, \quad \max\{|B_{12}|, |B_{21}|\} < \varepsilon, \quad \lambda + \varepsilon < 1,$$

则存在唯一覆盖 id 的有界 C^0 丛同态 $P = P_B : E_1 \to E_2$, $|P| \leq 1$, 使得 C^0 子丛 $\mathrm{gr}(P)$ 在 B 下不变, 即 $B_x(\mathrm{gr}(P_x)) = \mathrm{gr}(P_{gx})$, $\forall\, x \in \Delta$. 而且 P_B, 从而 $\mathrm{gr}(P_B)$, 随 B 连续变化.

注 这里的符号略去了基点. 比如, 由于 B 覆盖 g, B_{12} 自动地是从 $E_2(x)$ 到 $E_1(gx)$ 的.

证明 证明和引理 2.9 相同, 只是多了基点的移动. 引理 2.9 是解一个不变子空间, 现在是解一族子空间, 作为族在迭代下不变. 让我们把引理 2.9 的证明复制过来, 添上基点.

设 $P: E_1 \to E_2$ 为一覆盖 id 的 C^0 丛同态, $|P| \leq 1$. 对任意 $x \in \Delta$

和任意 $v \in E_1(x)$,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}_x \begin{pmatrix} v \\ P_x v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B_{11})_x v + (B_{12})_x P_x v \\ (B_{21})_x v + (B_{22})_x P_x v \end{pmatrix}.$$

故

$$B_x(\mathrm{gr}(P_x)) \subset \mathrm{gr}(P_{gx}), \quad \forall\ x \in \Delta$$

当且仅当

$$P_{gx}((B_{11})_x v + (B_{12})_x P_x v) = (B_{21})_x v + (B_{22})_x P_x v, \quad \forall x \in \Delta, \forall v \in E_1(x).$$

即

$$P_{gx}((B_{11})_x + (B_{12})_x P_x) = (B_{21})_x + (B_{22})_x P_x, \quad \forall x \in \Delta.$$

因

$$m((B_{11})_x) \geq \lambda^{-1}, \quad |(B_{12})_x P_x| \leq \varepsilon,$$

由定理 2.7,

$$(B_{11})_x + (B_{12})_x P_x : E_1(x) \to E_1(gx)$$

可逆. 从而

$$P_{gx} = ((B_{21})_x + (B_{22})_x P_x)((B_{11})_x + (B_{12})_x P_x)^{-1}, \quad \forall x \in \Delta.$$

这给出一个映射

$$T = T_B : L(E_1, E_2; id)(1) \to L(E_1, E_2; id)$$
$$(T(P))_{gx} = ((B_{21})_x + (B_{22})_x P_x)((B_{11})_x + (B_{12})_x P_x)^{-1}, \quad \forall\ x \in \Delta,$$

称为由 B 导出的**图像变换**. 寻求满足

$$B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P)$$

的丛同态 P, 就转化为寻求 T 的不动点.

我们来验证 T 将 $L(E_1,E_2;id)(1)$ 映入自身且为压缩映射. 实际上, 对任意 $P\in L(E_1,E_2;id)(1)$, $x\in\Delta$,

$$
\begin{aligned}
|(T(P))_{gx}| &\le |(B_{21})_x+(B_{22})_xP_x|\cdot|((B_{11})_x+(B_{12})_xP_x)^{-1}|\\
&\le \frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}<1.
\end{aligned}
$$

故 T 将 $L(E_1,E_2;id)(1)$ 映入自身. 又对任意 $P,P'\in L(E_1,E_2;id)(1)$, 任意 $x\in\Delta$,

$$
\begin{aligned}
(T(P))_{gx}((B_{11})_x+(B_{12})_xP_x)&=(B_{21})_x+(B_{22})_xP_x,\\
(T(P'))_{gx}((B_{11})_x+(B_{12})_xP'_x)&=(B_{21})_x+(B_{22})_xP'_x.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&((T(P))_{gx}-(T(P'))_{gx})(B_{11})_x+(T(P))_{gx}(B_{12})_xP_x\\
&\qquad -(T(P'))_{gx}(B_{12})_xP_x+(T(P'))_{gx}(B_{12})_xP_x\\
&\qquad -(T(P'))_{gx}(B_{12})_xP'_x\\
&\quad=(B_{22})_x(P_x-P'_x),\\
&((T(P))_{gx}-(T(P'))_{gx})((B_{11})_x+(B_{12})_xP_x)\\
&\quad=((B_{22})_x-(T(P'))_{gx}(B_{12})_x)(P_x-P'_x),\\
&(T(P))_{gx}-(T(P'))_{gx}\\
&\quad=((B_{22})_x-(T(P'))_{gx}(B_{12})_x)(P_x-P'_x)((B_{11})_x+(B_{12})_xP_x)^{-1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
|(T(P))_{gx}-(T(P'))_{gx}|\le\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}|P_x-P'_x|,\quad \forall x\in\Delta.
$$

也即

$$
|T(P)-T(P')|\le\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}|P-P'|.
$$

故 $T=T_B$ 为压缩映射. 由压缩映射原理, T 有唯一不动点 $P=P_B\in L(E_1,E_2;id)(1)$. 也就是说, 存在唯一 $P\in L(E_1,E_2;id)(1)$ 使得

$$
B_x(\mathrm{gr}(P_x))\subset\mathrm{gr}(P_{gx}),\quad \forall\ x\in\Delta.
$$

也即

$$B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P).$$

因 $B: T_\Delta M \to T_\Delta M$ 限制在每一纤维上为线性同构, 故这一包含式其实是一个等式

$$B(\mathrm{gr}(P)) = \mathrm{gr}(P).$$

命 $\mathcal{B}$ 表示满足引理 4.5 条件的 C^0 丛同构 B 的集合. 上面讨论的实际上是一个带参数 B 的压缩映射问题

$$T: \mathcal{B} \times L(E_1, E_2; id)(1) \to L(E_1, E_2; id)(1)$$
$$T(P, B) = T_B(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}.$$

易见 T 连续. 上面的计算表明 T_B 的压缩率与 $B \in \mathcal{B}$ 无关. 由定理 2.8, 不动点 P_B, 从而其图像 $\mathrm{gr}(P_B)$, 随 B 连续变化. 引理 4.5 证完. ■

注　引理 4.5 的证明是由引理 2.9 的证明机械地添加基点而来. 当然添加基点并不真正必要. 作为保纤维映射, B 自动处理基点问题, 因而完全可以略去基点. 这样引理 4.5 的证明将和引理 2.9 的证明看上去几乎相同, 从而整个证明都可以略去. 从数学上讲这当然是对的. 但作为主要定理之一, 我们仍然逐一添加基点, 给出证明. 以后读者可视情况跳过这样的证明.

§4.3　可微性 —— 引理 2.17 和定理 2.18 证明的完成

我们的流形 M 总假定是紧致的, 这是课程的整体需要. 为了完成引理 2.17 和定理 2.18 的证明, 这里对非紧流形的双曲集 (定义与 §4.1 相同, 只增加导算子范数有界的要求, 因而从略) 做一点讨论. 实际上我们只考虑一种非常特殊的情形, 即非紧流形为欧氏空间 E, 而微分同胚是一个双曲线性同构 $A: E \to E$ 的 C^1 扰动的情形. 不难验证定理 4.2, 4.3 和引理 4.5 对这种情形仍然成立. 定理 4.3 的证明中提到 Grassman 空间 $G^m(M)$ 紧致. 现在 $G^m(E)$ 虽不紧致, 但局部紧, 对定

理 4.3 的证明来说已经够用. 一个重要的观察将是: **双曲线性同构的 C^1 扰动以整个空间 E 为双曲集, 即为 "Anosov".**

现在来证明引理 2.17 的陈述 (2). 回顾一下, E 为欧氏空间, $A: E \to E$ 为双曲线性同构, 双曲分解为 $E = E^u \oplus E^s$, E 的范数 $|\cdot|$ 与之适配且盒型. 设映射 $\phi: E \to E$ 为李普希茨, $\phi(0) = 0$. 在陈述 (1) 中已经证明, 若 $\operatorname{Lip}\phi$ 足够小, 则 $W^u(0, A+\phi)$ 恰为一个李普希茨映射 $\sigma: E^u \to E^s$ 的图像 $\operatorname{gr}(\sigma)$, $\operatorname{Lip}\sigma \leq 1$. 现在设 $\phi: E \to E$ 为 C^1. 我们来证, 若 $\operatorname{Lip}\phi$ 足够小, 则 σ 为 C^1, 且 C^1 子流形 $W^u(0, A+\phi)$ 在原点的切空间恰为 $A + D\phi(0)$ 的扩张子空间 G^u.

简记

$$g = A + \phi : E \to E.$$

只要 $\operatorname{Lip}\phi$ 小, 由定理 2.7 后面的注, g 就是 E 的微分同胚. 我们来证明, 只要 $\operatorname{Lip}\phi$ 足够小, 全空间 E 就是 g 的双曲集, 即 g 为 "Anosov".

首先指出, A 为 Anosov 微分同胚. 事实上, 对每一 $x \in E$, 命

$$E^u(x) = \{x\} \times E^u, \quad E^s(x) = \{x\} \times E^s,$$

则

$$T_x E = E^u(x) \oplus E^s(x).$$

因

$$TA(v) = DA(x) \cdot v = Av,$$

其中 $x = \pi v$, $\pi: TE \to E$ 为丛投射, 易见这一直和是 A 的双曲分解. 即全空间 E 是 A 的双曲集, 也即 A 为 Anosov.

我们来验证, 只要 $\operatorname{Lip}\phi$ 足够小, g 也为 Anosov. 事实上, 关于上面的直和分解 $E^u(x) \oplus E^s(x)$, $x \in E$, 有

$$Tg = \begin{pmatrix} A_{uu} + (T\phi)_{uu} & (T\phi)_{us} \\ (T\phi)_{su} & A_{ss} + (T\phi)_{ss} \end{pmatrix},$$

其中

$$|A_{uu}^{-1}| \leq \tau, \quad |A_{ss}| \leq \tau.$$

这里 $0 < \tau < 1$ 为 A 的双曲度. 只要 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 足够小, $|T\phi|$ 就任意小, 于是 Tg 和 Tg^{-1} 就满足引理 4.5 的条件, 从而 E 是 g 的双曲集, 即 g 为 Anosov. 记

$$T_xE = G^u(x) \oplus G^s(x), \quad x \in E$$

为 Tg 的双曲分解. 提醒一下,

$$\dim G^u(x) = \dim E^u.$$

现在证明 σ 为 C^1. 任取 $v \in E^u$. 我们先来证 σ 在 v 点可微. 为简便, 记 $z = (v, \sigma(v)) \in \mathrm{gr}(\sigma)$. 由第二章末尾的判别法, 只需证明切集 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 落在 T_zE 的一个维数为 $\dim(E^u)$ 的线性子空间中. 具体地, 我们来证明

$$T_z\,\mathrm{gr}(\sigma) \subset G^u(z).$$

因 $\mathrm{Lip}\,\sigma \le 1$, 对每一 $x \in \mathrm{Orb}(z)$, $T_x\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 中的所有广义切线都含在关于直和 $E^u(x) \oplus E^s(x)$ 的 1-锥 $C_1(E^u(x))$ 中 (见图 4.2). 只要 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 充分小, $G^u(x)$ 和 $G^s(x)$ 就分别充分接近 $E^u(x)$ 和 $E^s(x)$, 从而 $T_x\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 中的所有广义切线都含在关于直和 $G^u(x) \oplus G^s(x)$ 的 2-锥 $C_2(G^u(x))$ 中. 又 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 在 g 下不变, 故 Tg 把 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 的广义切线映成 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 的广义切线. 特别地, 对 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 中的每条广义切线 l, 有

$$Tg^{-n}(l) \subset C_2(G^u(g^{-n}z)), \quad \forall n \ge 0.$$

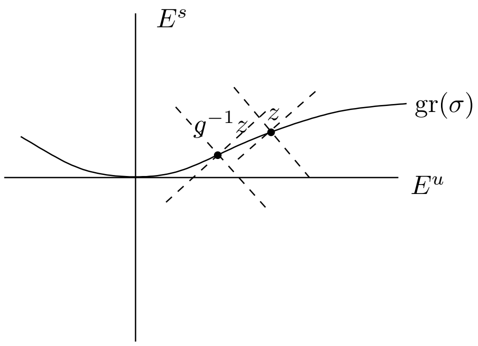

图 4.2 各点处的、包含着广义切线的锥 $C_1(E^u(x))$

由定理 4.2,

$$l \subset G^u(z).$$

这就证明了 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma) \subset G^u(z)$.

由判别法, σ 在 v 处可微, 且 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 在 z 点的切空间就是 Tg 的扩张子空间 $G^u(z)$. 特别地, 在原点处, $\mathrm{gr}(\sigma)$ 的切空间就是 $A + D\phi(0)$ 的扩张子空间 G^u. 由定理 4.3, $G^u(z)$ 随 $z \in \mathrm{gr}(\sigma)$ 连续变化. 故 σ 为 C^1. 这就证明了陈述 (2). 引理 2.17 证完.

* * * * * * *

下面证明定理 2.18. 设 $f : U \to E$ 为 C^k, $0 \in U$ 为 f 的双曲不动点, 双曲分解为 $E = E^s \oplus E^u$. 我们来证明, 存在 $r > 0$ 使得 $W_r^s(0, f)$ 是 E 的一个维数为 $\dim E^s$ 的 C^k 嵌入子流形, 在 0 点与 E^s 相切.

先证 $k = 1$ 的情形. 先设 E 的范数 $|\cdot|$ 对 $E^s \oplus E^u$ 适配且盒型. 我们把局部定义的 f 扩充到整个 E 上去, 应用引理 2.17 的陈述 (2) 得到整体稳定流形, 再截断成局部稳定流形.

取定一 C^∞ 冲击函数 $\alpha : E \to \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$, 使得 $\alpha(v) = 1$ 对 $|v| \le 1/3$, $\alpha(v) = 0$ 对 $|v| \ge 2/3$. 简记 $A = Df(0)$. 令

$$\phi_f = f - A : U \to E.$$

则 ϕ_f 为 C^1, 且

$$\phi_f(0) = 0, \quad D\phi_f(0) = 0.$$

(这里的 ϕ_f 比引理 2.17 中的 ϕ 多一个 "相切" 性质.) 定义

$$\overline{\phi}_f : E \to E$$
$$\overline{\phi}_f(v) = \alpha\left(\frac{v}{3r}\right)\phi_f(v),$$

其中 $r > 0$ 满足

$$E(3r) \subset U,$$

下面还要缩小. 则 $\overline{\phi}_f$ 为 C^1, 且在 $E(r)$ 上有 $\overline{\phi}_f = \phi_f$. 由定理 2.13 证明中的断言, 存在 $r > 0$ 足够小使得 $\operatorname{Lip}\overline{\phi}_f$ 在全空间 E 上关于范数 $|\cdot|$ 满足引理 2.14 和 2.17 的要求. (特别地, $\overline{f} = A + \overline{\phi}_f$ 为 Anosov. 因此 f **在其双曲不动点的附近总与一个 Anosov 微分同胚 $\overline{f}$ 相同**.) 由引理 2.17, 存在 C^1 映射

$$\sigma : E^s \to E^u,$$

$\sigma(0) = 0$, $\operatorname{Lip}\sigma \le 1$, 使得

$$W^s(0, A + \overline{\phi}_f) = \operatorname{gr}(\sigma),$$

且 C^1 子流形 $W^s(0, A + \overline{\phi}_f)$ 在 $0 \in E$ 处与双曲线性同构 $A + D\phi_f(0)$ 的压缩子空间相切. 因

$$D\phi_f(0) = 0,$$

知这一压缩子空间即为 E^s. 也就是说,

$$D\sigma(0) = 0.$$

因范数 $|\cdot|$ 为盒型, 故

$$E(r) = E^s(r) \times E^u(r).$$

记

$$i : E^s \to E$$

为

$$i(v) = (v, \sigma(v)).$$

则 i 把 E^s C^1 嵌入为 E 的子流形 $\operatorname{gr}(\sigma)$, 在 0 点与 E^s 相切. 因 $\operatorname{Lip}\sigma \le 1$, 故

$$i(E^s(r)) = W^s(0, A + \overline{\phi}_f) \cap E(r).$$

我们来证明

$$W^s_r(0, f) = W^s(0, A + \overline{\phi}_f) \cap E(r).$$

因在 $E(r)$ 上有 $\overline{\phi}_f = \phi_f$, 显然有 " $\subset$ ". 我们来证 " $\supset$ ". 任取 $v \in W^s(0, A + \overline{\phi}_f) \cap E(r)$. 只需证明对所有 $n \geq 1$ 有 $(A + \overline{\phi}_f)^n v \in E(r)$. 但这是显然的, 因为由引理 2.14 (全空间 E 的情形),

$$W^s(0, A + \overline{\phi}_f) = \{v \in E \mid |(A + \overline{\phi}_f)^n v| \leq (\tau + \mathrm{Lip}\, \overline{\phi}_f)^n |v|, \ \forall n \geq 0\}.$$

这就证明了 " $\supset$ ". 故

$$W_r^s(0, f) = i(E^s(r)),$$

从而是 E 的 C^1 子流形.

以上是在一个适配盒型范数下证明的. 现在回到 E 的原来的范数 $\|\cdot\|$. 取 $0 < a < r$ 使得

$$W_a^s(0, f; \|\cdot\|) \subset W_r^s(0, f; |\cdot|).$$

则 $W_a^s(0, f; \|\cdot\|)$ 为 E 的 C^1 子流形. 命

$$V = i^{-1}(W_a^s(0, f; \|\cdot\|)),$$

则 V 是 0 在 E^s 中的一个邻域, 被 σ 的图像映为 $W_a^s(0, f; \|\cdot\|)$. 这就证明了 $k = 1$ 的情形.

下面证明 $k \geq 2$ 的情形. 因切平面已在 $k = 1$ 的情形决定, 故只证可微性. 证法取自 [R]. 用归纳法. 设 $k - 1$ 的情形已经证明. 我们来证 k 的情形. 设 f 为 C^k. 考虑映射

$$F : U \times E \to E \times E$$
$$F(x, v) = (f(x),\ Df(x)v).$$

这里如通常, $E \times E$ 取 max 度量. 则 F 为 C^{k-1}. 只要迭代有意义, 就有

$$F^n(x, v) = (f^n(x),\ Df^n(x)v).$$

显然

$$F(0, 0) = (0, 0),$$

且

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} Df(0) & 0 \\ 0 & Df(0) \end{pmatrix}.$$

故 $(0,0)$ 为 F 的双曲不动点. 由归纳假设, 存在 $r>0$ 使得 $W_r^s((0,0), F)$ 为 $U \times E$ 的 C^{k-1} 子流形.

另一方面, 由定理 2.15, 不妨设 $r>0$ 满足

$$W_r^s((0,0),F) = \{(x,v) \in U \times E \mid |f^n x| \le r,\ |Df^n(x)v| \le r,\ \forall n \ge 0\},$$

其中 $Df^n(x)v$ 也就是 $Tf^n(v)$. 由上述, f 在其双曲不动点的附近总与一个 Anosov 微分同胚 $\overline{f}$ 相同. 记 $\overline{f}$ 的双曲分解为

$$G^s(x) \oplus G^u(x), \quad x \in E.$$

若 $r>0$ 足够小, 则向量 $v \in T_xE$ 满足

$$|Tf^n(v)| \le r, \quad \forall n \ge 0$$

当且仅当

$$v \in G^s(x)(r).$$

因此上式也可写为

$$W_r^s((0,0),F) = \{(x,v) \in U \times E \mid x \in W_r^s(0,f),\ v \in G^s(x)(r)\}.$$

前已证明, $G^s(x) = T_x(W^s(0,f))$. 故 $W_r^s((0,0),F)$ 恰为 $W_r^s(0,f)$ 的切丛 (的零集的 r-邻域). 因 $W_r^s((0,0),F)$ 为 C^{k-1}, 知 $W_r^s(0,f)$ 为 C^k. 这就证明了 k 的情形. 定理 2.18 证完.

§4.4 双曲集的稳定流形族

现在回到紧致流形 M. 由定理 4.3, 必要时取闭包, 以后假定 M 的所有双曲集都是紧致的.

记 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 为 M 上的 C^r 微分同胚的集合, 赋 C^r 拓扑 (见第一章). 如通常, 记

$$B(\Lambda, a) = \{x \in M \mid \mathrm{d}(x, \Lambda) \le a\}.$$

下面是引理 4.5 的直接推论:

定理 4.6 (双曲性在扰动下的保持) 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和一个数 $a_0 > 0$ 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 都是双曲集. 并且, 若 g C^1 逼近 f 且 $y \in \Delta$ 逼近 $x \in \Lambda$, 则稳定子空间 $E^s(y, g)$ 逼近稳定子空间 $E^s(x, f)$. 类似对不稳定子空间.

证明 设 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ 为 Λ 的双曲直和. 不妨设 M 的黎曼范数 $|\cdot|$ 与 Λ 适配. 设 Λ 对 $|\cdot|$ 的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 则 Tf 在 $T_\Lambda M$ 上的表示

$$\begin{pmatrix} (Tf)_{uu} & 0 \\ 0 & (Tf)_{ss} \end{pmatrix}$$

满足

$$|(Tf)_{uu}^{-1}| \le \tau, \quad |(Tf)_{ss}| \le \tau.$$

因 Λ 紧致, C^0 直和 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ 可连续扩充为 Λ 的一个邻域 U 上的一个 (对 Tf 不一定不变的) C^0 直和 $T_U M = E_U^s \oplus E_U^u$ (参见 [Z]).

取定 $\tau < \lambda < 1$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得 $\lambda + \varepsilon < 1$. 如果 $\mathcal{U}_0$ 和 a_0 充分小, 则对任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0) \subset U$, Tg 和 Tg^{-1} 在 $T_\Delta M = E_U^s \oplus E_U^u|_\Delta$ 下的分块表示中的四个丛同态, 关于该黎曼范数 $|\cdot|$, 都将满足引理 4.5 的条件. 其余的证明与定理 2.10 和 2.11 类似, 从略. 定理 4.6 证完. ■

设 $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$ 为一 C^0 直和. 称 $T_\Lambda M$ 的一个范数 $|\cdot|$ 对 $E_1 \oplus E_2$ 为**盒型**, 如果

$$|v| = \max\{|v_1|, |v_2|\}, \quad \forall\ v \in T_\Lambda M.$$

对任一范数 $|\cdot|$, 命

$$\|v\| = \max\{|v_1|, |v_2|\}, \quad \forall\ v \in T_\Lambda M,$$

所得的 $T_\Lambda M$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 对 $E_1 \oplus E_2$ 总是盒型的, 称为 $|\cdot|$ 对 $E_1 \oplus E_2$ 的**盒型化**. 一个对双曲集 Λ 适配的范数关于该直和的盒型化仍是对 Λ 适配的, 且双曲度不变.

一个盒型范数一般只是 C^0 的, 一般不能定义在整个流形上, 而且一定不是由某个黎曼度量诱导的 (不满足平行四边形法则). 这使得盒型范数在本章所起的作用与第二章有些不同. 实际上, 本章只在一个证明的某一部分使用某个盒型范数作为辅助工具. 为此需要控制该盒型范数与原来的黎曼范数的关联常数. 而这与直和的角度有关.

对 $x \in \Lambda$, 定义 $E_1(x)$ 和 $E_2(x)$ 的**夹角**为

$$\angle(E_1(x), E_2(x)) = \inf\{|\angle(u, v)| \mid u \in E_1(x) - \{0\}, v \in E_2(x) - \{0\}\}.$$

定义

$$\angle(E_1, E_2) = \inf_{x\in\Lambda} \angle(E_1(x), E_2(x)).$$

若 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 双曲分解为 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, 则由定理 4.3, $E^s(x)$ 和 $E^u(x)$ 随 $x \in \Lambda$ 连续变化. 因 Λ 紧致, 知 $\angle(E^s, E^u) > 0$.

引理 4.7 *对任一 $\delta > 0$, 存在 $K \geq 1$, 使得对任一欧氏空间 E, 任一直和 $E = E_1 \oplus E_2$, 以及 E 的任一内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 若关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的角度 $\angle(E_1, E_2) > \delta$, 则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的诱导范数 $|\cdot|$ 对直和 $E_1 \oplus E_2$ 的盒型化以关联系数 K 与 $|\cdot|$ 等价.*

证明是初等的, 作为本章习题 8.

设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 我们用 $|\cdot|_\Lambda$ 表示 $|\cdot|$ 限制在 $T_\Lambda M$ 上对 Λ 的双曲分解 $E^s \oplus E^u$ 的盒型化. 于是 $|\cdot|_\Lambda$ 只定义在 $T_\Lambda M$ 上而不是在整个 TM 上. 为简单起见符号 $|\cdot|_\Lambda$ 没有标明直和 $E^s \oplus E^u$, 但参照上下文可以明确其含义.

下一引理为定理 4.6 补充一些细节.

引理 4.8 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, $|\cdot|$ 为 M 的一个黎曼范数. 则存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和两个数 $a_0 > 0, K \geq 1$ 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 为双曲集, 且 $|\cdot|$ 对 Δ 的双曲直和 $G^s \oplus G^u$ 的盒型化 $|\cdot|_\Delta$ 与 $|\cdot|$ 在 $T_\Delta M$ 上的限制以系数 K 关联. 又若 $|\cdot|$ 与 Λ 适配且 Λ 在 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $\tau(\Lambda)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ 和 $0 < a \leq a_0$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a)$ 的关于 $|\cdot|$ 的双曲度满足 $\tau(\Delta) \leq \tau(\Lambda) + \varepsilon$.

证明 证明是通常的, 故只做简述. 由定理 4.6, 若 g C^1 接近 f 且 Δ 在 Λ 的小邻域内, 则 Δ 的双曲分解 $G^s \oplus G^u$ 与 Λ 的双曲分解 $E^s \oplus E^u$ C^0 接近, 故 $G^s \oplus G^u$ 的夹角接近 $E^s \oplus E^u$ 的夹角. 由引理 4.7, 存在与 Δ 无关的 $K \geq 1$, 使得盒型化 $|\cdot|_\Delta$ 与 $|\cdot|$ 在 $T_\Delta M$ 上的限制以系数 K 关联. 另外, 若 g C^1 接近 f 且 Δ 在 Λ 的小邻域内, 则 $|\cdot|$ 与 Δ 也适配. 其余证明显然. 引理 4.8 证完. ■

回顾第二章在欧氏空间里的一个基本做法, 是考虑差

$$\phi = f - Df(0),$$

使得 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 很小. 但在流形上, $f - Tf$ 一般没有意义. 为此我们要用指数映射把 f “提升” 到切丛 TM 上, 使得与 Tf 之间可以做差.

设 $x \in M$. 回顾一下, M 在 x 处的**指数映射** (见图 4.3)

$$\exp_x : T_x M \to M$$

定义为

$$\exp_x(v) = \sigma_v(1),$$

其中 $\sigma_v(t)$ 表示由 M 的给定的黎曼度量所决定的、在 $t = 0$ 时经过点 x 点的、速度向量为 v 的测地线. 这里 M 紧致, 故 $\exp_x$ 可以定义在整个 $T_x M$ 上.)

下一定理可在一般的微分几何书中找到.

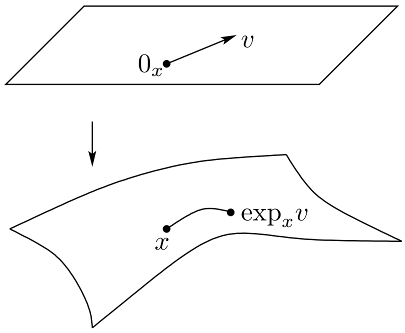

图 4.3 指数映射

定理 4.9 (1) $\exp_x(0_x) = x$, 其中 0_x 表示 T_xM 的原点.

(2) $D(\exp_x)(0_x) : T_xM \to T_xM$ 为恒同映射.

(3) 存在 $\rho > 0$, 使得对任意 $x \in M$, 映射 $\exp_x : T_xM(\rho) \to M$ 为 C^∞ 嵌入, 且 $\mathrm{d}(\exp_x(v), x) = |v|$, $\forall\, v \in T_xM(\rho)$, 其中 d 和 $|\cdot|$ 都由 M 的给定的黎曼度量导出.

(4) 映射 $\exp : TM \to M$, $\exp(v) = \exp_{\pi v}(v)$, 为 C^∞, 其中 $\pi : TM \to M$ 为丛投射.

于是, 以 x 为基点, 附近任一点 $y \in B(x, \rho)$ 给出一个向量 $\exp_x^{-1} y \in T_xM$, 满足 $|\exp_x^{-1} y| = \mathrm{d}(x, y)$. 在欧氏空间, 这就是从 x 到 y 的向量 $y - x$.

通过指数映射, f 被局部地提升为切丛上的一个覆盖 f 的保纤维映射, 沿纤维为非线性. 确切地, 取定 $0 < r_\rho < \rho$ 使得对任意两点 $x, y \in M$, 只要 $\mathrm{d}(x, y) < r_\rho$, 就有 $\mathrm{d}(fx, fy) < \rho$. 定义 f 的**自提升** (见图 4.4)

$$F_f : TM(r_\rho) \to TM$$

为

$$F_f(v) = \exp_{f(x)}^{-1}\ f\ \exp_x(v), \quad \text{其中 } x = \pi v,$$

这里的定义域 $TM(r_\rho)$ 表示 TM 中的、长度 $\le r_\rho$ 的向量的集合. 显然

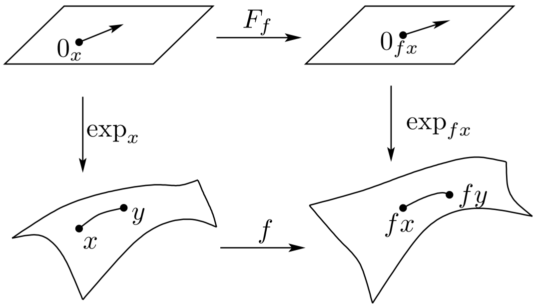

图 4.4 f 的自提升 F_f

F_f 对 f 保纤维. 因 f 为 C^1, 知 F_f 为 C^1. 简单地说, F_f 以 f 的一条轨道为移动原点, 展现 f 在这些原点附近的行为. 显然,

$$F_f(\exp_x^{-1} y) = \exp_{fx}^{-1}(fy),$$

即 F_f 把 "从 x 到 y" 的向量映为 "从 fx 到 fy" 的向量. 归纳地,

$$F_f^n(\exp_x^{-1} y) = \exp_{f^n x}^{-1}(f^n y).$$

特别地,

$$|F_f^n(\exp_x^{-1} y)| = \mathrm{d}(f^n x, f^n y).$$

这就把流形上的距离 $\mathrm{d}(f^n x, f^n y)$ 的问题提升为切丛上的向量长度的问题. 当然, 为使这些迭代 $F_f^n(v)$ 有意义, 其中 $v = \exp_x^{-1} y$, 需假定

$$\mathrm{d}(f^i x, f^i y) < r_\rho, \quad \forall\ 0 \le i \le n-1.$$

一般说来, 对一个向量 $v \in TM(r_\rho)$, 迭代 $F_f^n(v)$ 并非对所有 $n \ge 0$ 都有定义. 正如在第二章中, 对一个向量 $v \in E(r)$ 来说, 迭代 $(A+\phi)^n(v)$ 并非对所有 $n \ge 0$ 都逗留在 $E(r)$ 中. 那里的邻域 $E(r)$ 就像一个以 $0 \in E$ 为中心的、尺寸为 r 的窗口, 展示着 $A+\phi$ 在 $n \ge 0$ 时的动力形态. 我们只考虑那些向量 v, 其所有正向迭代 $(A+\phi)^n v$ 不超出窗口 $E(r)$. 现在, 对每一 $x \in M$, 在 x 的切空间上也有一个以 $0_x \in T_x M$

为中心的、尺寸为常数 r_ρ 的窗口 $T_xM(r_\rho)$, 展示着 F_f 在 $n \geq 0$ 时的动力形态. 这些窗口按定义互不相交. 我们只考虑那些向量 v, 其所有正向迭代 $F_f^n(v)$ 不超出这一族窗口

$$TM(r_\rho) = \bigcup_{x \in M} T_xM(r_\rho).$$

区别仅仅在于, 我们观察动力形态时, 是从一个窗口移动到下一个窗口.

一个保纤维映射 $F : TM(r) \to TM$ 限制在纤维上是两个欧氏空间之间的映射:

$$F|_{T_xM(r)} : T_xM(r) \to T_{fx}M,$$

故可像通常那样讨论其可微性, 即定义 F 在 $v \in TM(r)$ 处的**纤维导算子**为

$$D_2F(v) = D(F|_{T_xM(r)})(v) : T_xM \to T_{fx}M,$$

其中 $x = \pi v$. 在局部坐标下, $TM(r)$ 表现为 $B_1 \times B_2$, 其中 B_1 和 B_2 都是 $\mathbb{R}^d$ 中的球, $d = \dim M$, B_1 代表基点部分, B_2 代表纤维部分. 故 D_2F 就是 F 对第二个变元的偏导算子.

引理 4.10 设 $f : M \to M$ 为 C^1 微分同胚.

(1) $F_f(0_x) = 0_{fx}, \forall\, x \in M$.

(2) $D_2(F_f)(0_x) = T_xf, \forall\, x \in M$.

(3) $D_2(F_f)$ 在 $TM(r_\rho)$ 上连续.

注 在上述局部坐标下, 这里的 (3) 就是说, F_f 对第二个变元的偏导数在 $B_1 \times B_2$ 上 (二元) 连续.

证明

$$F_f(0_x) = \exp_{fx}^{-1}\ f\ \exp_x(0_x) = \exp_{fx}^{-1}(fx) = 0_{fx}.$$

$$\begin{aligned} D_2(F_f)(0_x) &= D(\exp_{fx}^{-1}\ f\ \exp_x)(0_x) \\ &= id|_{T_{fx}M} \circ Df(x) \circ id|_{T_xM} = T_xf. \end{aligned}$$

设 $x=\pi v$. 则

$$\begin{aligned}D_2(F_f)(v)&=D(\exp_{fx}^{-1}\ f\ \exp_x)(v)\\&=D(\exp_{fx}^{-1})(f(\exp_x v))\circ Df(\exp_x v)\circ D(\exp_x)(v).\end{aligned}$$

因 f 为 C^1, 知 $D_2(F_f)$ 在 $TM(r_\rho)$ 上连续. 这证明引理 4.10. ■

命

$$\phi_f=F_f-Tf:TM(r_\rho)\to TM.$$

于是 ϕ_f 对 f 保纤维, 且由引理 4.10,

$$\phi_f(0_x)=0_{fx},\quad D_2\phi_f(0_x)=0,\quad \forall\, x\in M.$$

如上所述, F_f 为 C^1. 但 ϕ_f 仅为 C^0 (因 Tf 仅为 C^0), ϕ_f 限制在每一纤维 $T_xM(r_\rho)$ 上为 C^1. 实际上更多些, $D_2\phi_f$ 不仅在每一纤维 $T_xM(r_\rho)$ 上连续, 而且在整个 $TM(r_\rho)$ 上连续. 用局部坐标来说就是, ϕ_f 在 $B_1\times B_2$ 上连续, 且对第二个变元的偏导数存在并在 $B_1\times B_2$ 上 (二元) 连续. 后面在描写双曲集的点的稳定流形族时 (引理 4.15 和定理 4.16), 所用的映射 σ 也具有这样一种 "混合" 式的可微性.

对一个沿纤维为李普希茨的保纤维连续映射 $F:TM(r)\to TM$, 定义 F 的**纤维李氏常数**为

$$\mathrm{Lip}_2\,F=\sup\nolimits_{x\in M}\mathrm{Lip}(F|_{T_xM(r)}).$$

以下对保纤维映射, 我们将仅考虑这种形式的李氏常数.

引理 4.11 设 $f:M\to M$ 为一微分同胚. 记 $\phi_g=F_g-Tg$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $r>0$ 和 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$, 使得任意 $g\in\mathcal{U}$, 在 $TM(r)$ 上有 $\mathrm{Lip}_2\,\phi_g<\varepsilon$.

证明 因 $D_2\phi_f$ 在 $TM(r_\rho)$ 上连续, 又因 $D_2\phi_f(0_x)=0$ 而 M 紧致, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $r>0$, 使得对任意 $v\in TM(r)$ 有 $|D_2\phi_f(v)|<\varepsilon$. 又因 $TM(r)$ 紧致, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 使得任意 $g\in\mathcal{U}$ 对任意

$v \in TM(r)$ 有 $|D_2\phi_g(v)| < \varepsilon$. 应用广义中值定理到纤维, 则在 $TM(r)$ 上有 $\mathrm{Lip}_2\,\phi_g < \varepsilon$. 引理 4.11 证完. ∎

现在来讨论双曲集的稳定流形族. 我们先在切丛上讨论形如 $Tf+\phi$ 的保纤维映射. 这时的情形比较简单, 因为每一纤维是线性空间, 正是第二章的框架. 设

$$\phi : TM(r) \to TM, \quad 0 < r \leq \infty$$

关于 f 保纤维, 满足

$$\phi(0_x) = 0_{fx}, \quad \forall\, x \in M.$$

设 $|\cdot|$ 为 TM 上的一个范数. 定义 0_x 在 $Tf+\phi$ 下的关于这一范数的尺寸为 r 的**局部纤维稳定流形**和**局部纤维不稳定流形**分别为

$$\begin{aligned} W_r^s(0_x, Tf+\phi) = &\Big\{ v \in T_xM \;\Big|\; |(Tf+\phi)^n v| \leq r,\ \forall n \geq 0, \\ &\text{且} \lim_{n\to+\infty} |(Tf+\phi)^n v| = 0 \Big\}, \\ W_r^u(0_x, Tf+\phi) = &\Big\{ v \in T_xM \;\Big|\; |(Tf+\phi)^{-n} v| \leq r,\ \forall n \geq 0, \\ &\text{且} \lim_{n\to+\infty} |(Tf+\phi)^{-n} v| = 0 \Big\}. \end{aligned}$$

这里我们使用了 “纤维稳定” 这样的术语, 是因为这里的 v 要求与 0_x 在同一纤维中. 以下对保纤维映射, 我们将仅考虑这种形式的稳定和不稳定流形.

设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 由引理 4.11, 只要 $r>0$ 小, f 在切丛 $T_\Lambda M(r)$ 上的自提升 F_f 就可以表为

$$F_f = Tf + \phi$$

的形式, 其中 Tf 为双曲丛同构, 而 $\mathrm{Lip}_2\,\phi$ 小. 这将是我们常常使用的表述形式, 可以称为**双曲丛同构的纤维李普希茨扰动**.

下一引理对应于引理 2.14.

引理 4.12 (纤维上 W_r^s 的刻画) 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 在 $T_\Lambda M$ 的一个与其双曲分解 $E^s \oplus E^u$ 适配且盒型的 C^0 范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $r > 0$. 设 $\phi : T_\Lambda M(r) \to T_\Lambda M$ 连续, 关于 f 保纤维, 限制在纤维上为李普希茨, 满足

$$\operatorname{Lip}_2 \phi < 1 - \tau, \quad \phi(0_x) = 0_{fx}, \quad \forall\, x \in \Lambda.$$

则对任意 $x \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}
&W_r^s(0_x, Tf + \phi)\\
&= \{v \in T_xM(r) \mid |(Tf + \phi)^n v| \le r,\ \forall n \ge 0\}\\
&= \{v \in T_xM(r) \mid (Tf + \phi)^n v \in T_{f^n x}M(r) \cap C_1(E^s(f^n x)),\ \forall n \ge 0\}\\
&= \{v \in T_xM(r) \mid |(Tf + \phi)^n v| \le (\tau + \operatorname{Lip}_2 \phi)^n |v|,\ \forall n \ge 0\}.
\end{aligned}$$

证明 这里的 $T_\Lambda M(r)$, Tf, ϕ 和 $\operatorname{Lip}_2 \phi$, 对应于引理 2.14 的 $E(r)$, A, ϕ 和 $\operatorname{Lip} \phi$. 我们只写一下证明的前一部分.

断言 1 若 $x \in \Lambda$, $v, v' \in T_xM(r)$, 则 $|(Tf + \phi)_s(v) - (Tf + \phi)_s(v')| \le (\tau + \operatorname{Lip}_2 \phi)|v - v'|$.

证明简单, 从略.

断言 2 若 $v, v' \in T_xM(r)$ 且 $v - v' \notin C_1(E^s(x))$, 则 $(Tf + \phi)v - (Tf + \phi)v' \notin C_1(E^s(fx))$, 且 $|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}_2\phi)|v - v'|$.

实际上,

$$\begin{aligned}
|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'| &= |(Tf)_{uu}(v_u - v'_u) + \phi_u(v) - \phi_u(v')|\\
&\ge \tau^{-1}|v_u - v'_u| - \operatorname{Lip}_2\phi|v - v'|.
\end{aligned}$$

但 $v - v' \notin C_1(E^s(x))$, 故 $|v_u - v'_u| = |v - v'|$. 那么

$$|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'| \ge (\tau^{-1} - \operatorname{Lip}_2\phi)|v - v'|.$$

又因 $v-v'\notin C_1(E^s(x))$, 故 $v-v'\neq 0$. 结合断言 1 便得

$$|(Tf+\phi)_u v-(Tf+\phi)_u v'|>|(Tf+\phi)_s v-(Tf+\phi)_s v'|.$$

那么 $(Tf+\phi)v-(Tf+\phi)v'\notin C_1(E^s(fx))$. 断言 2 证完.

显然, 这与引理 2.14 的证明完全相同, 故以下省略. 引理 4.12 证完. ■

注 如同引理 2.14 后的注, 这里 $T_\Lambda M(r)$ 可以是整个 $T_\Lambda M$.

现在过渡到流形 M. 对任意 $x\in M$ 和 $r>0$, 定义 x 的在 f 下的尺寸为 r 的**局部稳定流形**和**局部不稳定流形**分别为

$$\begin{aligned}W_r^s(x)=&\Big\{y\in M\ \Big|\ \mathrm{d}(f^n y,f^n x)\leq r,\ \forall\ n\geq 0,\\ &\text{且}\lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(f^n y,f^n x)=0\Big\},\\ W_r^u(x)=&\Big\{y\in M\ \Big|\ \mathrm{d}(f^{-n} y,f^{-n} x)\leq r,\ \forall\ n\geq 0,\\ &\text{且}\lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(f^{-n} y,f^{-n} x)=0\Big\}.\end{aligned}$$

显然对任意 $x\in M$ 有

$$f(W_r^s(x))\subset W_r^s(fx),\quad f(W_r^u(x))\supset W_r^u(fx).$$

下面应用引理 4.12 到流形 M.

定理 4.13 (流形上 $\boldsymbol{W_r^s}$ 的刻画) *设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 $r>0$, $C\geq 1$, $0<\lambda<1$, 使得对任意 $x\in\Lambda$,*

$$\begin{aligned}&W_r^s(x)\\ &=\{y\in M\mid \mathrm{d}(f^n y,f^n x)\leq r,\ \forall\ n\geq 0\}\\ &=\{y\in M\mid \mathrm{d}(f^n y,f^n x)\leq r,\ \text{且}\ \mathrm{d}(f^n y,f^n x)\leq C\lambda^n\mathrm{d}(y,x),\ \forall\ n\geq 0\}.\end{aligned}$$

类似对 W^u.

证明 不妨设 M 的黎曼范数 $|\cdot|$ 对 Λ 适配. 只需证明存在 $r>0$, $C\geq 1$, $0<\lambda<1$ 使得第二个集合被包含在第三个之中.

给定 $x \in \Lambda$. 对 x 附近的 $y \in M$, 令

$$v = \exp_x^{-1}(y).$$

则只要迭代有意义, 就有

$$\mathrm{d}(f^n y, f^n x) = |F_f^n(v)| = |(Tf + \phi_f)^n v|,$$

其中

$$\phi_f = F_f - Tf.$$

故只需证明存在 $r > 0$, $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$ 使得

$$\begin{aligned} &\{v \in T_x M(r) \mid |(Tf + \phi_f)^n v| \leq r, \ \forall\, n \geq 0\} \\ \subset\ &\{v \in T_x M(r) \mid |(Tf + \phi_f)^n v| \leq C\lambda^n |v|, \ \forall\, n \geq 0\}. \end{aligned}$$

而这只需对 $T_\Lambda M$ 的某个盒型适配范数证明.

设 $0 < \tau < 1$ 为 Λ 在 $|\cdot|$ 下的双曲度. 设 $|\cdot|$ 对 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ 的盒型化 $|\cdot|_\Lambda$ 以常数 $K \geq 1$ 与 $|\cdot|$ (在 $T_\Lambda M$ 上的限制) 关联. 命 $C = 1$, 并取定

$$\tau < \lambda < 1.$$

由引理 4.11, 存在 $r > 0$ 足够小使得在 $TM(Kr; |\cdot|)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|}\, \phi_f \leq K^{-2}(\lambda - \tau).$$

故在 $T_\Lambda M(r; |\cdot|_\Lambda)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|_\Lambda}\, \phi_f \leq \lambda - \tau.$$

(改换欧氏空间的范数, 向量长度要差关联常数倍, 而李普希茨常数要差关联常数的平方倍.) 于是结论由引理 4.12 直接给出. 定理 4.13 证完. ■

设 X 为紧度量空间. 称同胚 $f: X \to X$ **可扩**, 如果存在常数 $r > 0$, 使得对 X 中任意 $x \neq y$, 存在整数 m, 使得 $\mathrm{d}(f^m(x), f^m(y)) \geq r$. 称常数 $r > 0$ 为 f 的一个**可扩常数**. 下一定理对应于定理 2.16.

定理 4.14 (双曲集的一致可扩性) 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 则 $f|_\Lambda$ 可扩. 实际上, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 $a_0 > 0$, $r_0 > 0$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 为 r_0-可扩.

证明 不妨设 M 的黎曼范数 $|\cdot|$ 与 Λ 适配. 由定义, $g|_\Delta$ 为 r_0-可扩的意思是, 若 $x, y \in \Delta$ 满足

$$\mathrm{d}(g^n x, g^n y) \le r_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

则 $x = y$. 令 $v = \exp_x^{-1}(y)$. 因

$$\mathrm{d}(g^n x, g^n y) = |F_g^n(v)| = |(Tg + \phi)^n v|,$$

其中

$$\phi = \phi_g = F_g - Tg.$$

也就只需证明, 存在 $r_0 > 0$ 使得若向量 $v \in T_x M$ 满足

$$|(Tg + \phi)^n v| \le r_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

则 $v = 0$. 这只需对 $T_\Delta M$ 的某个盒型适配范数证明.

设 $0 < \tau(\Lambda) < 1$ 为 Λ 在 f 下关于 $|\cdot|$ 的双曲度. 取定

$$\tau(\Lambda) < \tau_0 < \lambda < 1.$$

记

$$\phi' = (F_g)^{-1} - (Tg)^{-1}.$$

于是 $(Tg)^{-1} + \phi' = (T_g + \phi)^{-1}$. 提醒一下, $g \to f$ 蕴含 $g^{-1} \to f^{-1}$.

由引理 4.8, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 $a_0 > 0$, $K \ge 1$ 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 为双曲集, 关于 $|\cdot|$ 的双曲度为

$$\tau(\Delta) \le \tau_0,$$

且盒型化范数 $|\cdot|_\Delta$ 以系数 K 与 $|\cdot|$ 关联. 由引理 4.11, 存在 $r_0 > 0$ 和 f 的 C^1 邻域, 不妨仍记作 $\mathcal{U}_0$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 在 $TM(Kr_0; |\cdot|)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|}\, \phi \le K^{-2}(\lambda - \tau_0), \quad \mathrm{Lip}_{2,|\cdot|}\, \phi' \le K^{-2}(\lambda - \tau_0).$$

故在 $T_\Delta M(r_0; |\cdot|_\Delta)$ 上有

$$\operatorname{Lip}_{2,|\cdot|_\Delta} \phi \le \lambda - \tau_0, \quad \operatorname{Lip}_{2,|\cdot|_\Delta} \phi' \le \lambda - \tau_0.$$

设向量 $v \in T_xM$, $x \in \Delta$, 满足

$$|(Tg+\phi)^n v|_\Delta \le r_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

则由引理 4.12,

$$\begin{aligned} |v|_\Delta &= |(Tg^{-1}+\phi')(T_g+\phi)(v)|_\Delta \\ &\le (\tau + \operatorname{Lip}_2 \phi')|(Tg+\phi_g)(v)|_\Delta \\ &\le (\tau + \operatorname{Lip}_2 \phi')(\tau + \operatorname{Lip}_2 \phi)|v|_\Delta \le \lambda^2 |v|_\Delta. \end{aligned}$$

这里第一个 "$\le$" 是由于向量 $(Tg+\phi)(v)$ 在反向迭代下长度永远 $\le r_0$, 第二个 "$\le$" 是由于向量 v 在正向迭代下长度永远 $\le r_0$. 因 $\lambda < 1$, 得 $v = 0$. 定理 4.14 证完. ■

注 定理 4.14 的陈述有一种很强的一致性. 其实, 有关双曲集的结果, 大抵都可以这样陈述. 但为简单起见, 我们将只对定理 4.14 和 4.19 陈述到这样强的一致的程度, 以备证明定理 4.23 之用.

对一个保纤维映射 $\sigma : E^u \to E^s$, 定义 σ 在 $v \in E^u$ 处的**纤维导算子**为

$$D_2\sigma(v) = D(\sigma|_{E^u(x)})(v),$$

其中 $x = \pi v$. 定义 σ 的**纤维李氏常数**为

$$\operatorname{Lip}_2 \sigma = \sup_{x\in\Lambda} \operatorname{Lip}(\sigma|_{E^u(x)}).$$

前面在引理 4.10 之后曾提过, $D_2\phi$ 在 $T_\Lambda M$ 上连续比 ϕ 限制在每一纤维 T_xM 上为 C^1 要多一些. 同样, $D_2\sigma$ 在 E^u 上连续比 σ 限制在每一纤维 $E^u(x)$ 上为 C^1 要多一些.

下面证明双曲集 Λ 的稳定流形定理. 关于这一课题, 以及比双曲集更一般的集合的不变流形理论, 参见 [HPS].

我们先在 Λ 的切丛上考虑一种理想的形式 $Tf+\phi : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$, 其中 $\phi : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$ 连续, 对 f 保纤维, 且 $\mathrm{Lip}_2\phi$ 在整个 $T_\Lambda M$ 上足够小. 下一引理说, 在这种情况下, 对每一 $x \in \Lambda$, 纤维不稳定流形 $W^u(0_x, Tf+\phi) \subset T_xM$ 将是 $E^u(x)$ 的一个李普希茨拷贝. 并且, 若 ϕ 限制在纤维上为 C^1, 则 $W^u(0_x, Tf+\phi)$ 也为 C^1. 这一引理对应于引理 2.17, 建议读者仔细对照.

引理 4.15 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 双曲分解为 $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$, $|\cdot|$ 为 $T_\Lambda M$ 的一个与其适配且盒型的 C^0 范数. 则存在 $\delta > 0$ 使得

(1) 如果 $\phi : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$ 连续, 关于 f 保纤维, 限制在每一纤维 T_xM 上为李普希茨, 满足

$$\mathrm{Lip}_2\, \phi < \delta, \quad \phi(0_x) = 0_{fx}, \quad \forall\, x \in \Lambda,$$

则存在关于 id 保纤维的、限制在每一纤维 $E^u(x)$ 上为李普希茨的连续映射 $\sigma : E^u \to E^s$, $\sigma(0_x) = 0_x$, $\mathrm{Lip}_2\, \sigma \le 1$, 使得对任意 $x \in \Lambda$, $W^u(0_x, Tf+\phi)$ 恰为 $\sigma_x : E^u(x) \to E^s(x)$ 的图像, 这里 $\sigma_x = \sigma|_{E^u(x)}$.

(2) 如果 $\phi : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$ 连续, 关于 f 保纤维, 限制在每一纤维 T_xM 上为 C^1, 满足

$$\mathrm{Lip}_2\, \phi < \delta, \quad \phi(0_x) = 0_{fx}, \quad \forall\, x \in \Lambda,$$

则由陈述 (1) 保证的映射 σ 在每一纤维上的限制 σ_x 为 C^1, 且 C^1 子流形 $W^u(0_x, Tf+\phi) \subset T_xM$ 在 0_x 处的切空间恰为双曲丛同构 $Tf+D_2\phi$ 在 x 点的扩张子空间 $G^u(x)$. 如果进一步, $D_2\phi$ 在 $T_\Lambda M$ 上连续, 则 $D_2\sigma$ 在 E^u 上连续.

证明 先证陈述 (1). 记

$$\begin{aligned}&\Sigma(E^u, E^s; 0)\\ &= \{\sigma : E^u \to E^s \mid \sigma \text{ 连续, 对 } id \text{ 保纤维, } \sigma(0_x) = 0_x,\ |\sigma|_* < \infty\},\end{aligned}$$

其中

$$|\sigma|_* = \sup_{x\in\Lambda} |\sigma_x|_*,$$

而 $|\sigma_x|_*$ 如第二章引理 2.17 的证明中所定义. 在这一范数下, $\Sigma(E^u, E^s; 0)$ 成一 Banach 空间, 而

$$\Sigma(E^u, E^s; 0)[1] = \{\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0) \mid \sigma \text{ 为纤维李普希茨且 } \mathrm{Lip}_2\, \sigma \leq 1\}$$

为 $\Sigma(E^u, E^s; 0)$ 的闭子集.

设 Λ 在 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 先设

$$\delta = \min\left\{\frac{1-\tau}{2},\ m(Tf,\ \Lambda)\right\},$$

其中

$$m(Tf,\ \Lambda) = \inf\{m(T_x f) \mid x \in \Lambda\}.$$

因 Λ 紧致, 这是一个正数. (后面还要缩小 δ.)

设连续映射 $\phi : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$ 关于 f 保纤维, 限制在纤维上为李普希茨, 满足

$$\mathrm{Lip}_2\, \phi < \delta, \quad \phi(0_x) = 0_{fx}, \quad \forall\ x \in \Lambda.$$

我们来证明存在 $\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$, 其图像

$$\mathrm{gr}(\sigma) = \bigcup_{x\in\Lambda} \mathrm{gr}(\sigma_x)$$

在 $Tf + \phi$ 下不变, 即对任意 $x \in \Lambda$ 有

$$(Tf + \phi)\, \mathrm{gr}(\sigma_x) = \mathrm{gr}(\sigma_{fx}).$$

然后证明 $\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 恰为 $W^u(0_x, Tf + \phi)$. 以下直到引理 4.15 证明结束, 简记

$$Tf = A.$$

图像不变条件

$$(A + \phi)\, \mathrm{gr}(\sigma_x) \subset \mathrm{gr}(\sigma_{fx})$$

等价于对任意 $v \in E^u(x)$ 有

$$\sigma_{fx}((A+\phi)_u(v+\sigma_x v)) = (A+\phi)_s(v+\sigma_x v).$$

因 $A_u(\sigma_x v)=0$, $A_s v=0$, 得

$$\sigma_{fx}((A_{uu})_x v + \phi_u(v+\sigma_x v)) = A_{ss}(\sigma_x v) + \phi_s(v+\sigma_x v).$$

即

$$\sigma_{fx}((A_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x}+\sigma_x)) = A_{ss}(\sigma_x) + \phi_s(I_{u,x}+\sigma_x).$$

因

$$m((A_{uu})_x) \geq \tau^{-1}, \quad \operatorname{Lip}(\phi_u(I_{u,x}+\sigma_x)) \leq 2\operatorname{Lip}_2\phi < 2\delta = 1-\tau,$$

由定理 2.7, $(A_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x}+\sigma_x)$ 可逆. 从而

$$\sigma_{fx} = (A_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x}+\sigma_x))((A_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x}+\sigma_x))^{-1}.$$

这给出一个映射

$$T = T_\phi : \Sigma(E^u, E^s; 0)[1] \to \Sigma(E^u, E^s; 0)$$
$$(T(\sigma))_{fx} = (A_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x}+\sigma_x))((A_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x}+\sigma_x))^{-1},$$
$$\forall\, x \in \Lambda,$$

称为由 $A+\phi$ 导出的**图像变换**. 寻求满足

$$(A+\phi)\operatorname{gr}(\sigma) \subset \operatorname{gr}(\sigma)$$

的覆盖 id 的连续映射 σ, 就转化为寻求 T 的不动点.

我们来验证 T 将 $\Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ 映入自身, 且对范数 $|\cdot|_*$ 而言为压缩映射. 这只是对引理 2.17 的证明添加基点. 已有经验的读者可以直接跳到陈述 (2) 的证明.

因 $\sigma_x \in \Sigma(E^u(x), E^s(x); 0_x)[1]$, 易见 $(T\sigma)_{fx}(0_{fx}) = 0_{fx}$, $(T\sigma)_{fx}$ 为李普希茨且

$$\operatorname{Lip}((T\sigma)_{fx}) \leq \frac{\tau + 2\operatorname{Lip}_2\phi}{\tau^{-1} - 2\operatorname{Lip}_2\phi} < 1.$$

因此 T 将 $\Sigma(E^u,E^s;0)[1]$ 映入自身.

再来验证 T 对范数 $|\cdot|_*$ 而言为压缩映射. 对任意 $\sigma,\sigma'\in\Sigma(E^u(x),E^s(x);0_x)[1]$, 简记

$$\begin{aligned}F_x&=(A_{uu})_x+\phi_u(I_{u,x}+\sigma_x):E^u(x)\to E^u(fx),\\ F'_x&=(A_{uu})_x+\phi_u(I_{u,x}+\sigma'_x):E^u(x)\to E^u(fx),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}(T(\sigma))_{fx}F_x&=A_{ss}\sigma_x+\phi_s(I_{u,x}+\sigma_x),\\ (T(\sigma'))_{fx}F'_x&=A_{ss}\sigma'_x+\phi_s(I_{u,x}+\sigma'_x).\end{aligned}$$

因 $F_x:E^u(x)\to E^u(fx)$ 为保持原点的同胚, 故当 v 跑遍 $E^u(x)-\{0_x\}$ 时,

$$\begin{aligned}|T(\sigma)-T(\sigma')|_*&=\sup_{x\in\Lambda}\sup_{v\neq 0_x}\frac{|(T\sigma)_x(v)-(T\sigma')_x(v)|}{|v|}\\ &=\sup_{x\in\Lambda}\sup_{v\neq 0_x}\frac{|(T\sigma)_{fx}(F_xv)-(T\sigma')_{fx}(F_xv)|}{|F_xv|}.\end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}&|(T\sigma)_{fx}(F_xv)-(T\sigma')_{fx}(F_xv)|\\ &\leq|(T\sigma)_{fx}(F_xv)-(T\sigma')_{fx}(F'_xv)|+|(T\sigma')_{fx}(F'_xv)-(T\sigma')_{fx}(F_xv)|\\ &\leq|A_{ss}(\sigma_x(v)-\sigma'_x(v))|+|\phi_s(v+\sigma_x(v))-\phi_s(v+\sigma'_x(v))|\\ &\quad+\operatorname{Lip}((T\sigma')_{fx})|F'_xv-F_xv|\\ &\leq\tau|\sigma_x(v)-\sigma'_x(v)|+\operatorname{Lip}\phi_x|\sigma_x(v)-\sigma'_x(v)|+\operatorname{Lip}\phi_x|\sigma_x(v)-\sigma'_x(v)|\\ &\leq(\tau+2\operatorname{Lip}\phi_x)|\sigma_x(v)-\sigma'_x(v)|.\end{aligned}$$

另一方面, 因 $\phi_x(0_x)=0_{fx}$ 和 $\sigma_x(0_x)=0_x$, 有

$$\begin{aligned}|F_xv|&=|(A_{uu})_xv+\phi_u(v+\sigma_xv)-\phi_u(0_x+\sigma(0_x))|\\ &\geq\tau^{-1}|v|-\operatorname{Lip}\phi_x(|v|+\operatorname{Lip}\sigma_x|v|)\\ &\geq(\tau^{-1}-2\operatorname{Lip}\phi_x)|v|.\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
|T(\sigma)-T(\sigma')|_* &\le \frac{\tau+2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}{\tau^{-1}-2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}\sup_{x\in\Lambda}\sup_{v\ne 0_x}\frac{|\sigma_x(v)-\sigma'_x(v)|}{|v|} \\
&= \frac{\tau+2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}{\tau^{-1}-2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}|\sigma-\sigma'|_*.
\end{aligned}
$$

但

$$
\frac{\tau+2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}{\tau^{-1}-2\,\mathrm{Lip}_2\,\phi}<1,
$$

故 $T=T_\phi$ 在范数 $|\cdot|_*$ 下为压缩映射. 由压缩映射原理, T 有唯一不动点 $\sigma=\sigma_\phi\in\Sigma(E^u,E^s;0)$[1], 满足

$$
(A+\phi)\,\mathrm{gr}(\sigma)\subset\mathrm{gr}(\sigma).
$$

至此已经复制了引理 2.17 陈述 (1) 的证明的主体部分. 和那里一样, 易见这里其实有

$$
(A+\phi)\,\mathrm{gr}(\sigma)=\mathrm{gr}(\sigma).
$$

而且, 必要时进一步缩小 δ, 对每一 $x\in\Lambda$, 有

$$
\mathrm{gr}(\sigma_x)=W^u(0_x,A+\phi)=W^u(0_x,Tf+\phi).
$$

这就证明了陈述 (1).

在证明陈述 (2) 之前我们插入一个定义. 设 $\{H_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 为一列 d 维欧氏空间, 记

$$
H=\bigsqcup_{m\in Z}H_m.
$$

这里 $\bigsqcup$ 表示 "离散并" (见图 4.5), 即 H_m 彼此孤立, 故 H 为一 d 维流形. 设

$$
A:H\to H
$$

为一映射满足

$$
A|_{H_m}:H_m\to H_{m+1}
$$

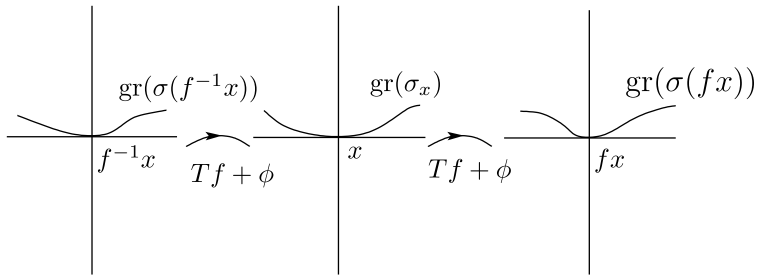

图 4.5　线性空间的离散并 H

为线性同构. 称 A 为一**双曲列**, 如果 $\{|A_m|,\ |A_m^{-1}|\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 有界, 且对每一 $m\in\mathbb{Z}$ 有直和分解

$$H_m = E_m^s \oplus E_m^u,$$
$$A(E_m^s) = E_{m+1}^s, \quad A(E_m^u) = E_{m+1}^u,$$

并且存在两个常数 $C \geq 1$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得

$$|A^n(v)| \leq C\lambda^n|v|, \quad \forall v \in E_m^s,\ m\in\mathbb{Z},\ n \geq 0,$$
$$|A^{-n}(v)| \leq C\lambda^n|v|, \quad \forall v \in E_m^u,\ m\in\mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

下面证明陈述 (2). 设 ϕ 限制在 $T_\Lambda M$ 的每一纤维 T_xM 上为 C^1, 我们来证 σ_x 为 C^1, 且 C^1 子流形 $W^u(0_x, Tf+\phi) \subset T_xM$ 在 0_x 处的切空间恰为双曲丛同构 $Tf + D_2\phi$ 在 x 点的扩张子空间 $G^u(x)$. 取定 $x \in \Lambda$. 我们对 x 的轨道采取如下 "离散的" 看法, 即记

$$H_m = T_{f^m x}M, \quad A = Tf.$$

这样就把 $T_{\mathrm{Orb}(x)}M$ 上的 Tf 抽取出来, 成了一个双曲列. (这里我们假定 x 不是周期点. 如果 x 是周期点, 则与第二章的情形更为接近, 更为简单.) 在陈述 (2) 的证明中, 我们将采取这种离散的看法. 这是因为将要在 $f^m x$ 处的纤维里对 $Tf+\phi$ 取导数. 这一过程如果夹杂基点集的度量的考虑, 将会变得不必要的复杂. 之所以可以采取这样一种看

法, 是因为 σ_x 的光滑性反正是纤维 T_xM 内部的一个问题. 由于 H_m 是彼此分离开的, 可将 $\mathrm{Lip}_2\,\phi$ 或 $D_2\phi(0)$ 径直写为 $\mathrm{Lip}\phi$ 或 $D\phi(0)$.

简记

$$g = Tf + \phi = A + \phi : H \to H.$$

只要 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 足够小, g 就是 H 的微分同胚 (将 H_m 映为 H_{m+1}). 一个重要的观察是, **双曲列的 C^1 扰动是 Anosov 微分同胚**. 具体到这里的 g, 对每一 $y \in H_m$, 命

$$E^u(y) = \{y\} \times E^u(f^m x), \quad E^s(y) = \{y\} \times E^s(f^m x).$$

则

$$T_yH = E^u(y) \oplus E^s(y), \quad y \in H$$

是 A 的双曲分解. 即 H 为 A 的双曲集, 也即 A 为 Anosov. 如果 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 足够小, 则和 §4.3 一样容易证明 H 为 g 的双曲集, 即 g 为 Anosov. 记

$$T_yH = G^u(y) \oplus G^s(y), \quad y \in H$$

为 Tg 的双曲分解. 提醒一下,

$$\dim G^u(y) = \dim(E^u(y)).$$

现在证明 σ_x 为 C^1. 证法与引理 2.17 相同. 任取 $v \in E^u(x)$. 我们先来证 σ_x 在 v 点可微. 为简便, 记 $z = (v, \sigma_x(v)) \in \mathrm{gr}(\sigma_x)$. 由第二章末尾的判别法, 只需证明切集 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 落在 T_zH 的一个维数为 $\dim E^u(x)$ 的线性子空间中. 具体地, 我们来证明

$$T_z\,\mathrm{gr}(\sigma_x) \subset G^u(z).$$

因 $\mathrm{Lip}\,\sigma \le 1$, 对每一 $y \in \mathrm{gr}(\sigma)$, $T_y\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 中的所有广义切线都含在关于直和 $E^u(y) \oplus E^s(y)$ 的 1-锥 $C_1(E^u(y))$ 中. 只要 $\mathrm{Lip}\,\phi$ 充分小, $G^u(y)$ 和 $G^s(y)$ 就分别充分接近 $E^u(y)$ 和 $E^s(y)$, 从而 $T_y\,\mathrm{gr}(\sigma)$ 中的所有广义切线都含在关于直和 $G^u(y) \oplus G^s(y)$ 的 2-锥 $C_2(G^u(y))$ 中. 又

$\mathrm{gr}(\sigma)$ 在 g 下不变, 故 Tg 把 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 的广义切线映成 $\mathrm{gr}(\sigma)$ 的广义切线. 特别地, 对 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 中的每条广义切线 l, 有

$$Tg^{-n}(l) \subset C_2(G^u(g^{-n}z)), \quad \forall n \geq 0.$$

由定理 4.2,

$$l \subset G^u(z).$$

这就证明了 $T_z\,\mathrm{gr}(\sigma_x) \subset G^u(z)$.

由判别法, σ_x 在 v 处可微, 且 $\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 在 z 点的切空间就是 Tg 的扩张子空间 $G^u(z)$. 特别地, 在原点 0_x 处, $\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 的切空间就是 $A + D_2\phi(0_x)$ 的扩张子空间 $G^u(x)$. 由定理 4.3, $G^u(z)$ 随 $z \in \mathrm{gr}(\sigma_x)$ 连续变化. 故 σ_x 为 C^1.

最后, 进一步设 $D_2\phi$ 在 $T_\Lambda M$ 上连续, 我们来证明 $D_2\sigma$ 在 E^u 上连续. 为此必须离开上述离散的看法, 回到切丛 $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$. 注意到以上 "离散" 框架只是一种表述方式, 所证明的其实都是切丛里的事实. 我们实际上已经证明, 对任意 $x \in \Lambda$, $W^u(0_x, Tf + \phi) = \mathrm{gr}(\sigma_x)$ 为 T_xM 的 C^1 子流形, 且对任一 $z \in \mathrm{gr}(\sigma_x)$, $\mathrm{gr}(\sigma_x)$ 在 z 点的切空间恰是 $G^u(z)$. 现在 $D_2\phi$ 在 $T_\Lambda M$ 上连续, 故 $Tf + D_2\phi$ 是 $T_\Lambda M$ 的连续丛同构. 故和定理 4.3 一样易证, 作为 $Tf + D_2\phi$ 的双曲直和的加项, $G^u(z)$ 随 $z \in \mathrm{gr}(\sigma_x)$ 和 $x \in \Lambda$ 二者一同连续变化. 表 $z = (v, \sigma v)$, $v \in E^u$, 即知 $G^u(z)$ 随 $v \in E^u$ 连续变化, 即 $D_2\sigma(v)$ 对 $v \in E^u$ 连续. 这就证明了陈述 (2). 引理 4.15 证完. ■

称 M 中的一族嵌入子流形 $\{D_i\}_{i\in I}$ 为**自相容**的, 如果对任意 $i, j \in I$, 交集 $\mathrm{int}\,D_i \cap \mathrm{int}\,D_j$ 在 D_i 和 D_j 中都是开集. 特别地, $\mathrm{int}\,D_i$ 和 $\mathrm{int}\,D_j$ 不能横截相交. 例如, 一个自治 C^1 常微系统的局部解曲线构成一族自相容的 1 维嵌入子流形. 下一定理对应于定理 2.18, 建议读者仔细对照.

定理 4.16 (双曲集的稳定流形族) 设 $f: M \to M$ 为 C^k 微分同胚, $k \geq 1$, $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 双曲分解为 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. 则存

在 $r > 0$ 使得对任一 $x \in \Lambda$,

(1) $W_r^s(x)$ 是 M 的一个维数为 $\dim E^s$ 的 C^k 嵌入子流形, 在 x 点与 E_x^s 相切, 且 $W_r^s(x)$ 在 C^k 拓扑下随 $x \in \Lambda$ 连续变化. 确切含义是, 存在零集 0_Λ 在 E^s 中的一个邻域 V 和一个对 id 保纤维的连续映射 $\sigma : V \to E^u$, 限制在纤维上的直到 k 阶的偏导数在 V 上连续, $\sigma(0_x) = 0_x$, $D_2\sigma(0_x) = 0$, 使得 $W_r^s(x) = \exp_x \mathrm{gr}(\sigma|_{V \cap E^s(x)})$.

(2) 嵌入子流形族 $\{W_r^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ 为自相容的.

(3) 整体稳定流形 $W^s(x)$ 是 M 的一个 C^k 浸入子流形.

注 整体稳定流形 $W^s(x)$ 的定义见第三章. 定理 4.16 与 4.13 常常合在一起陈述, 统称双曲集的稳定流形族定理.

我们称陈述 (1) 中的映射 $\sigma : V \to E^u$ 为稳定流形族 $\{W_r^s(x)\}_{x\in\Lambda}$ 的**生成映射**. 它通过图像, 对每一 $x \in \Lambda$, 把原点 0_x 在 $E^s(x)$ 中的邻域 $V \cap E^s(x)$ C^k 嵌入为 $W_r^s(x)$.

证明 先证陈述 (1). 我们先来证存在 $r > 0$ 使得对每一 $x \in \Lambda$, $W_r^s(x)$ 是 M 的 C^k 子流形, 在 x 点与 E_x^s 相切. 由于

$$W_r^s(x, f) = \exp_x(W_r^s(0_x, F_f)),$$

只需证纤维稳定流形 $W_r^s(0_x, F_f)$ 是 T_xM 的 C^k 子流形, 在 0_x 点与 E_x^s 相切.

先证 $k = 1$ 的情形. 设 f 为 C^1. 我们先在 $T_\Lambda M$ 的一个与 $E^s \oplus E^u$ 适配且盒型的范数 $|\cdot|$ 下工作, 把局部定义的 F_f 扩充到整个 $T_\Lambda M$ 上去, 应用引理 4.15 得到整体纤维稳定流形, 再截断成局部纤维稳定流形, 最后再回到原来的黎曼范数.

取定一 C^∞ 冲击函数 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$, 满足 $\alpha(t) = 1$ 对 $|t| \le 1/3$, $\alpha(t) = 0$ 对 $|t| \ge 2/3$. 令

$$\phi_f = F_f - Tf : TM(r_\rho) \to TM.$$

则 ϕ_f 为 C^0, 限制在纤维上为 C^1, 且

$$\phi_f(0_x) = 0_{fx}, \quad D_2\phi_f(0_x) = 0, \quad \forall\, x \in M.$$

(这里的 ϕ_f 比引理 4.15 中的 ϕ 多一个 "相切" 性质.) 定义

$$\begin{gathered}\overline{\phi}_f : TM \to TM \\ \overline{\phi}_f(v) = \alpha\left(\frac{|v|}{3r}\right)\phi_f(v),\end{gathered}$$

其中 $0 < r < r_\rho/3$ (下面还要缩小). 则 $\overline{\phi}_f$ 为 C^0, 限制在纤维上为 C^1, 且在 $TM(r)$ 上有 $\overline{\phi}_f = \phi_f$. 由定理 2.13 证明中的断言, 存在 $r > 0$ 足够小使得 $\mathrm{Lip}_2\,\overline{\phi}_f$ 在整个切丛 TM 上关于范数 $|\cdot|$ 满足引理 4.12 和 4.15 的要求. 由引理 4.15, 存在关于 id 保纤维的连续映射

$$\sigma : E^s \to E^u,$$

限制在纤维上为 C^1, $\sigma(0_x) = 0_x$, $\mathrm{Lip}_2\,\sigma \le 1$, 使得对任意 $x \in \Lambda$,

$$W^s(0_x, Tf + \overline{\phi}_f) = \mathrm{gr}(\sigma|_{E^s(x)}),$$

且 C^1 子流形 $W^s(0_x, Tf + \overline{\phi}_f) \subset T_xM$ 在 0_x 处与双曲线性同构 $Tf + D_2\overline{\phi}_f(0_x)$ 的压缩子空间相切. 因

$$D_2\phi_f(0_x) = 0,$$

知这一压缩子空间即为 E^s_x. 也就是说,

$$D_2\sigma(0_x) = 0.$$

因范数 $|\cdot|$ 为盒型, 故对任一 $x \in \Lambda$,

$$T_xM(r) = E^s_x(r) \times E^u_x(r).$$

记

$$i : E^s \to T_\Lambda M$$

为

$$i(v) = (v, \sigma(v)).$$

则对任一 $x \in \Lambda$, i 把 E_x^s C^1 嵌入为 T_xM 的子流形 $\mathrm{gr}(\sigma|_{E^s(x)})$, 在 0_x 点与 E_x^s 相切. 因 $\mathrm{Lip}_2\, \sigma_x \leq 1$, 故

$$i(E_x^s(r)) = W^s(0_x,\ Tf + \overline{\phi}_f) \cap T_xM(r).$$

我们来证明

$$W_r^s(0_x, F_f) = W^s(0_x,\ Tf + \overline{\phi}_f) \cap T_xM(r).$$

因在 $T_\Lambda M(r)$ 上有 $\overline{\phi}_f = \phi_f$, 显然有 "$\subset$". 我们来证 "$\supset$". 任取 $v \in W^s(0_x,\ Tf+\overline{\phi}_f) \cap T_xM(r)$. 只需证明对所有 $n \geq 1$ 有 $(Tf+\overline{\phi}_f)^n v \in T_{f^n x}M(r)$. 但这是显然的, 因为由引理 4.12 (全子丛 $T_\Lambda M$ 的情形),

$$\begin{aligned} &W^s(0_x,\ Tf + \overline{\phi}_f) \\ &= \{v \in T_xM \mid |(Tf + \overline{\phi}_f)^n v| \leq (\tau + \mathrm{Lip}_2\, \overline{\phi}_f)^n |v|,\ \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

这就证明了 "$\supset$". 故

$$W_r^s(0_x, F_f) = i(E_x^s(r)),$$

从而是 T_xM 的 C^1 子流形.

以上是在一个适配盒型范数下证明的. 现在回到 TM 的原来的黎曼范数 $\|\cdot\|$. 取 $0 < a < r$ 使得对任一 $x \in \Lambda$,

$$W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|) \subset W_r^s(0_x, F_f; |\cdot|).$$

则 $W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)$ 为 T_xM 的 C^1 子流形. 命

$$V_x = i^{-1}(W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)),$$

则 V_x 是 0_x 在 E_x^s 中的一个邻域, 被 σ 的图像映为 $W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)$. 命

$$V = \bigcup_{x \in \Lambda} V_x.$$

则 V 是零集 0_Λ 在 E^s 中的一个邻域, 满足定理要求. 这就证明了 $k=1$ 的情形.

下面证明 $k \geq 2$ 的情形. 设 f 为 C^k. 取定 $x \in \Lambda$. 我们来证 $W_r^s(0_x, F_f)$ 为 T_xM 的 C^k 子流形. 由于下面要在 $T_{f^m x}M$ 里取导数, 为表述清晰起见我们采用双曲列的离散写法, 即简记

$$H_m = T_{f^m x}M, \quad U_m = T_{f^m x}M(r_\rho), \quad 0_m = 0_{f^m x},$$
$$g = F_f = Tf + \phi_f : U_m \to H_{m+1}.$$

于是

$$g(0_m) = 0_{m+1},$$

且

$$Dg(0_m) = Df(f^m x) : H_m \to H_{m+1}$$

为双曲列. 在这种离散框架下, 只需证明**若 g 为 C^k, $g(0_m) = 0_{m+1}$, 且导算子 $\{Dg(0_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 为双曲列, 则存在 $r>0$ 使得 $W_r^s(0_x,\ g)$ 为 H_0 的 C^k 子流形**.

用归纳法. $k=1$ 的情形刚刚证明 (没有用双曲列的离散语言, 而是在切丛上直接证明的). 设 $k-1$ 的情形已经证明. 我们来证 k 的情形. 设 g 为 C^k. 考虑映射

$$G : U_m \times H_m \to H_{m+1} \times H_{m+1}$$
$$G(y,v) = (g(y),\ Dg(y)v).$$

则 G 为 C^{k-1}. 只要迭代有意义, 就有

$$G^n(y,v) = (g^n(y),\ Dg^n(y)v).$$

显然

$$G(0_m, 0_m) = (0_{m+1}, 0_{m+1}),$$

且

$$DG(0_m, 0_m) = \begin{pmatrix} Dg(0_m) & 0 \\ 0 & Dg(0_m) \end{pmatrix}.$$

故 $\{DG(0_m, 0_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 为双曲列. 由归纳假设, 存在 $r > 0$ 使得 $W_r^s((0_x, 0_x), G)$ 为 $H_0 \times H_0$ 的 C^{k-1} 子流形.

另一方面, 由定理 4.13, 不妨设 $r > 0$ 满足

$$\begin{aligned} &W_r^s((0_x, 0_x),\ G) \\ &= \{(y, v) \in H_0 \times H_0 \mid |g^n y| \le r,\ |Dg^n(y)v| \le r,\ \forall n \ge 0\}. \end{aligned}$$

其中 $Dg^n(y)v$ 也就是 $Tg^n(v)$. 由前述, g 在原点集 0_m 附近总与 H 的一个 Anosov 微分同胚 $\overline{g}$ 相同. 记 $\overline{g}$ 的双曲分解为

$$T_yH = G^u(y) \oplus G^s(y), \quad y \in H.$$

若 $r > 0$ 足够小, 则向量 $v \in T_yH$ 满足

$$|Tg^n(v)| \le r, \quad \forall n \ge 0$$

当且仅当

$$v \in G^s(y)(r).$$

因此上式也可写为

$$W_r^s((0_x, 0_x), G) = \{(y, v) \in H_0 \times H_0 \mid y \in W_r^s(0_x, g),\ v \in G^s(y)(r)\}.$$

前已证明, $G^s(y) = T_y(W^s(0_x, g))$. 故 $W_r^s((0_x, 0_x), G)$ 恰为 $W_r^s(0_x, g)$ 的切丛 (的零集的 r-邻域). 因 $W_r^s((0_x, 0_x), G)$ 为 C^{k-1}, 知 $W_r^s(0_x, g)$ 为 C^k. 这就证明了 k 的情形.

至此证明了, 若 f 为 C^k, 则 $W_r^s(0_x, F_f)$ 是 T_xM 的 C^k 子流形, 即 σ 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数在每一纤维上连续. 现在还剩定理的最后一步, 即证明 σ 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数在 E^s 上 (而不仅是在每一纤维上) 连续. 因为纤维里的问题已经解决, 这也就是要证明这些偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 连续 (这里所有的丛有共同的基集 Λ). 为此必须离开上述离散的框架, 回到切丛 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. 不过在离

开之前让我们借助这一离散框架定义映射

$$\Sigma : E^s_x(r) \times E^s_x(r) \to E^u_x \times E^u_x$$
$$\Sigma(y, v) = (\sigma(y),\ D\sigma(y)v),$$

并给出下述断言.

断言 Σ 是 $W^s_r((0_x, 0_x), G)$ 的生成映射, 即

$$W^s_r((0_x, 0_x), G) = \mathrm{gr}(\Sigma).$$

实际上, 由定义, $(y, v) \in \mathrm{gr}(\Sigma)$ 当且仅当

$$y^u = \sigma(y^s) \quad 且 \quad v^u = D\sigma(y^s)v^s, \quad v^s \in E^s_x(r).$$

即

$$y \in \mathrm{gr}(\sigma) = W^s_r(0_x, g) \quad 且 \quad v \in \mathrm{gr}(D\sigma(y^s)|_{E^s_x(r)}) = G^s(y)(r).$$

也即

$$(y, v) \in W^s_r((0_x, 0_x), G).$$

这证明断言.

回顾一下, 定理 4.16 这里的 g 是 f 的自提升

$$F_f : T_\Lambda M(\rho) \to T_\Lambda M$$

在纤维上的限制. 反过来, 通过离散框架在每一纤维里定义的 G 合起来就定义了乘积丛上的一个映射 (为简便仍用同一个符号)

$$G : T_\Lambda M(\rho) \times T_\Lambda M \to T_\Lambda M \times T_\Lambda M,$$

使得前者是后者在纤维上的限制. 类似地, 通过离散框架在每一纤维里定义的 Σ 也定义了丛里相应的对象 (为简便仍用同一个符号 Σ).

现在回到切丛 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. 设 f 为 C^k. 则 $g = F_f$ 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数在 $T_\Lambda M$ 上连续. 故只需归纳地证明: **若** g **限**

制在纤维上直到 k 阶的偏导数在 $T_\Lambda M$ 上连续, 则其稳定流形的生成映射 σ 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数在 E^s 上连续.

$k=1$ 的情形已含在引理 4.15 的陈述 (2) 中. 设 $k-1$ 的情形已经证明. 我们来证明 k 的情形. 如上述, 问题归结为这些偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 的连续性. 设 g 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 连续. 由 G 的定义式, G 限制在纤维上直到 $k-1$ 阶的偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 连续. 由断言, Σ 是 G 的稳定流形的生成映射. 由归纳假设, Σ 限制在纤维上直到 $k-1$ 阶的偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 连续. 由 Σ 的定义式, σ 限制在纤维上直到 k 阶的偏导数对基点 $x \in \Lambda$ 连续. 这就证明了定理 4.16 的陈述 (1).

现在证明陈述 (3). 局部稳定流形迭代即得整体稳定流形. 确切地, 对任意 $r>0$,

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W^s_r(f^n x),$$
$$W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{n} W^u_r(f^{-n} x).$$

现在, Λ 为双曲集, $x \in \Lambda$. 故由 (1), 存在 $r>0$ 使得 $W^s_r(x)$ 是 M 的一个 C^k 嵌入子流形, 因此对任意 $n \geq 0$, $f^{-n}W^s_r(x)$ 也是 M 的一个 C^k 嵌入子流形. 作为嵌入子流形的单调并, 整体稳定流形 $W^s(x)$ 就是 M 的一个 C^k 浸入子流形. 类似对 $W^u(x)$.

最后证明陈述 (2), 即证明嵌入子流形族 $\{W^s_r(x)\}_{x\in\Lambda}$ 是自相容的. 注意虽然对 $x \neq y$, $W^s_r(0_x) \subset T_x M$ 和 $W^s_r(0_y) \subset T_y M$ 在切丛上按定义不相交, 但只要 $\mathrm{d}(x,y)$ 小, $W^s_r(x) = \exp_x(W^s_r(0_x))$ 和 $W^s_r(y) = \exp_y(W^s_r(0_y))$ 在 M 中却可能相交. 因此确实有一个相容与否的问题.

设 $W^s_r(x) \cap W^s_r(y) \neq \emptyset$, 其中 $x, y \in \Lambda$. 则 $W^s_r(x)$ 和 $W^s_r(y)$ 都被包含在整体稳定流形 $W^s(x)$ 中. 由于三者维数相同, 立得 $\{W^s_r(x)\}_{x\in\Lambda}$ 的自相容性. 定理 4.16 证完. ■

定理 4.17 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 $r>0$ 和 $\delta>0$ 使得

对任意 $x, y \in \Lambda$, 只要 $\mathrm{d}(x, y) \leq \delta$, 则 $W_r^s(x)$ 和 $W_r^u(y)$ 非空横截相交.

证明 由定理 4.16, 存在 $r > 0$ 使得对任意 $x \in \Lambda$, $W_r^s(x)$ 和 $W_r^s(x)$ 是 M 的 C^1 嵌入子流形, 在 C^1 拓扑下随 x 连续变化. 因 $W_r^s(x)$ 和 $W_r^u(x)$ 在 x 处横截相交, 存在 $\delta(x) > 0$ 使得只要 $y \in \Lambda$ 且 $\mathrm{d}(y, x) \leq \delta(x)$, 则 $W_r^s(x)$ 和 $W_r^u(y)$ 横截相交. 因 Λ 紧致, $\delta(x)$ 可选得与 $x \in \Lambda$ 无关. 定理 4.17 证完. ■

有了局部稳定流形的几何形状, 双曲集的可扩性显得更加直观. 设 Λ 为 f 的双曲集. 因 $W_r^s(x)$ 和 $W_r^u(x)$ 在 x 处横截相交, 只要 $r > 0$ 足够小, 则对任意 $x \in \Lambda$, $W_r^s(x) \cap W_r^u(x) = \{x\}$. 若 $\mathrm{d}(f^n y, f^n x) \leq r$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$, 则由定理 4.13, $y \in W_r^s(x) \cap W_r^u(x)$. 那么 $y = x$. 这证明 f 在 Λ 上为 r-可扩.

§4.5 双曲集的结构稳定性

我们先来讨论切丛的截面. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的紧不变集. 如通常, $T_\Lambda M$ 的一个**截面**或**向量场**, 是指一个映射 $\gamma : \Lambda \to T_\Lambda M$, 使得对任意 $x \in \Lambda$ 有 $\gamma(x) \in T_x M$. 记 $\Gamma^0(T_\Lambda M)$ 为 $T_\Lambda M$ 的全体连续截面所成的 Banach 空间, 取 C^0 范数

$$|\gamma| = \sup_{x \in \Lambda} |\gamma(x)|.$$

设 $F : T_\Lambda M \to T_\Lambda M$ 为一覆盖 $f : \Lambda \to \Lambda$ 的保纤维连续映射. 称截面 $\gamma \in \Gamma^0(T_\Lambda M)$ 为 F 的一个**不变截面**, 如果

$$F(\gamma(x)) = \gamma(fx), \quad \forall\, x \in \Lambda.$$

略去基点, 可记为

$$F(\gamma) = \gamma.$$

例如, 零截面是 Tf 的不变截面.

回顾一下我们在 §4.4 开头所做的约定: M 中的双曲集总假设为紧致的. 又回顾一下, $T_\Lambda M(r)$ 表示 $T_\Lambda M$ 中长度不超过 r 的向量的集合. 下面的引理对应于引理 2.5.

引理 4.18　设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 在 $T_\Lambda M$ 的一个与其双曲分解 $E^s \oplus E^u$ 适配且盒型的 C^0 范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $r > 0$. 如果 $\phi : T_\Lambda M(r) \to T_\Lambda M$ 连续, 关于 f 保纤维, 限制在纤维上为李普希茨, 满足

$$\mathrm{Lip}_2\, \phi < 1 - \tau,$$

则 $Tf + \phi$ 在 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 中至多有一个不变截面. 如果进一步满足

$$|\phi(0_\Lambda)| = \sup\nolimits_{x\in\Lambda} |\phi(0_x)| \le (1 - \tau - \mathrm{Lip}_2\, \phi) r,$$

则 $Tf + \phi$ 在 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不变截面 γ_ϕ, 且

$$|\gamma_\phi| \le \frac{|\phi(0_\Lambda)|}{1 - \tau - \mathrm{Lip}_2\, \phi}.$$

证明　证明与引理 2.5 相同, 只是添加基点. 读者可以视情况跳过全部证明.

我们来解关于 $\gamma \in \Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 的方程

$$(Tf + \phi)\gamma = \gamma.$$

以下直到引理 4.18 证明结束, 简记

$$Tf = A.$$

这也就是解 γ 使得

$$(A + \phi)\gamma(x) = \gamma(fx), \quad \forall x \in \Lambda.$$

在

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

下写成分量形式, 这等价于解

$$A_s\gamma(x) + \phi_s\gamma(x) = \gamma_s(fx), \quad A_u\gamma(x) + \phi_u\gamma(x) = \gamma_u(fx), \quad \forall x \in \Lambda.$$

或

$$A_{ss}\gamma_s(x)+\phi_s\gamma(x)=\gamma_s(fx),\quad A_{uu}\gamma_u(x)+\phi_u\gamma(x)=\gamma_u(fx),\quad \forall x\in\Lambda.$$

或

$$A_{ss}\gamma_s(x)+\phi_s\gamma(x)=\gamma_s(fx),\ A_{uu}^{-1}\gamma_u(fx)-A_{uu}^{-1}\phi_u\gamma(x)=\gamma_u(x),\ \forall x\in\Lambda.$$

当然这里第一个式子也可以写成

$$A_{ss}\gamma_s(f^{-1}x)+\phi_s\gamma(f^{-1}x)=\gamma_s(x),$$

以和第二个式子的右端 “对齐” 基点.

考虑映射

$$T=T_\phi:\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)\to\Gamma^0(T_\Lambda M)$$
$$T(\gamma)(x)=(A_{ss}\gamma_s(f^{-1}x)+\phi_s\gamma(f^{-1}x),\ A_{uu}^{-1}\gamma_u(fx)-A_{uu}^{-1}\phi_u\gamma(x)),$$

其中 $x\in\Lambda$. 则 T 与 $A+\phi$ 有相同的不变截面的集合. 因此, 为证明 $A+\phi$ 在 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 中至多有一个不变截面, 只需证明 T 为压缩映射. 因

$$|T(\gamma)-T(\gamma')|=\sup_{x\in\Lambda}|T(\gamma)(x)-T(\gamma')(x)|,$$

其中 E^s 部分不超过

$$\sup_{x\in\Lambda}\ (\tau|\gamma_s(f^{-1}x)-\gamma'_s(f^{-1}x)|+\mathrm{Lip}_2\phi\cdot|\gamma(f^{-1}x)-\gamma'(f^{-1}x)|),$$

而 E^u 部分不超过

$$\sup_{x\in\Lambda}\ (\tau|\gamma_u(fx)-\gamma'_u(fx)|+\tau\mathrm{Lip}_2\phi\cdot|\gamma(x)-\gamma'(x)|),$$

知

$$|T(\gamma)-T(\gamma')|\le(\tau+\mathrm{Lip}_2\phi)|\gamma-\gamma'|.$$

但

$$\mathrm{Lip}_2\,\phi<1-\tau,$$

故 T 确为压缩映射. 这证明 $A+\phi$ 在 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 中至多有一个不变截面.

现在进一步假设

$$|\phi(0_\Lambda)| \leq (1-\tau-\mathrm{Lip}_2\phi)r.$$

我们来证明 T 将 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 映入自身. 任取 $\gamma \in \Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$. 因对任一 $x \in \Lambda$ 有

$$|T(0_\Lambda)(x)| = |(\phi_s(0_{f^{-1}x}),\ -A_{uu}^{-1}\phi_u(0_x))| \leq |\phi(0_\Lambda)|,$$

得

$$\begin{aligned} |T(\gamma)| &\leq |T(0_\Lambda)| + |T(\gamma) - T(0_\Lambda)| \\ &\leq |\phi(0_\Lambda)| + (\tau + \mathrm{Lip}_2\,\phi)|\gamma| \leq r. \end{aligned}$$

故 T 确实将 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 映入自身, 因而在 $\Gamma^0(T_\Lambda M)(r)$ 中有 (唯一) 不动点 γ_ϕ. 并且, 在上面的不等式

$$|T(\gamma)| \leq |\phi(0_\Lambda)| + (\tau + \mathrm{Lip}_2\,\phi)|\gamma|$$

中命 $\gamma = \gamma_\phi$ 即得

$$|\gamma_\phi| \leq |\phi(0_\Lambda)| + (\tau + \mathrm{Lip}_2\,\phi)|\gamma_\phi|.$$

故

$$|\gamma_\phi| \leq \frac{|\phi(0_\Lambda)|}{1-\tau-\mathrm{Lip}_2\,\phi}.$$

引理 4.18 证完. ■

设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的紧不变集. 称 f 在 Λ 上 C^r **嵌入式稳定**, 如果存在 f 的 C^r 邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, 存在到像集的同胚 $h = h_g : \Lambda \to M$, 使得在 Λ 上有 $hf = gh$. 显然 $h(\Lambda)$ 为 g 的不变集, 而 $g|_{h(\Lambda)}$ 与 $f|_\Lambda$ 拓扑共轭. 因为集合 $h(\Lambda)$ 由 h 而得, 而非事先指定, 我们称这种稳定性为嵌入式稳定性. 形式上更强的是所谓 ε-嵌入式稳

定性. 称 f 在 Λ 上 C^r ε-**嵌入式稳定**, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 f 的 C^r 邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, 存在到像集的同胚 $h = h_g : \Lambda \to M$, 使得 $hf = gh$ 和 $\mathrm{d}(h, id) \leq \varepsilon$.

结构稳定性理论的一个重要结果是: 双曲集是 ε-嵌入式稳定的. 这是引理 4.18 在流形上的直接应用. 这一精彩的想法属于 Moser, Mather, Hirsch, Pugh, 也许还有其他一些作者. (实际上, 引理 4.18 的陈述本身就是这一想法的产物.) 给定 f 的 C^1 扰动 g, 要解关于 h 的共轭方程

$$gh = hf,$$

其中 h 属于从 Λ 到 M 的全体连续映射所成的空间 $C^0(\Lambda, M)$. 这一空间不是线性空间, 不易处理. 但是, 通过指数映射, 一个接近恒同映射 id 的映射 $h \in C^0(\Lambda, M)$ 给出一个接近零截面 0_Λ 的截面 $\gamma \in \Gamma^0(T_\Lambda M)$, 反之亦然:

$$\gamma(x) = \exp_x^{-1} h(x), \quad h(x) = \exp_x \gamma(x), \quad \forall\, x \in \Lambda.$$

由此, 问题转化为求解关于截面 γ 的方程

$$g\ \exp_x \gamma(x) = \exp_{fx} \gamma(fx),$$

即

$$\underbrace{\exp_{fx}^{-1}\ g\ \exp_x}_{F_f^g} \gamma(x) = \gamma(fx), \quad \forall\, x \in \Lambda, \tag{$*$}$$

其中 γ 属于 $\Gamma^0(T_\Lambda M)$ 的以原点为中心的一个小球. 这也就是求解 $(*)$ 中的保纤维映射 F_f^g 的不变截面.

映射 F_f^g 的正式定义如下. 设微分同胚 $f : M \to M$ 和 $g : M \to M$ 足够接近, $r > 0$ 足够小, 使得对任意 $x, y \in M$, 只要 $\mathrm{d}(x, y) \leq r$, 则 $\mathrm{d}(fx, gy) \leq \rho$, 其中 $\rho > 0$ 为定理 4.9 中的常数. 则可定义 g **沿** f 的**提升**

$$F_f^g : TM(r) \to TM$$

为

$$F_f^g(v)=\exp_{f(\pi v)}^{-1}\ g\ \exp_{\pi v}(v),$$

其中 $\pi:TM\to M$ 为丛投射. 显然 F_f^g 为 C^1, 对 $f:M\to M$ 保纤维. 粗略地讲, F_f^g 以 f 的轨道为移动原点, 展现 g 在这些原点附近的行为.

现在, 为求解 $(*)$ 中 F_f^g 的不变截面, 由引理 4.18, 只需说明 F_f^g 在零截面附近是 Tf 的一个纤维李普希茨扰动, 而这应该是不意外的, 因为若 $g=f$, 则 F_f^f 就是 F_f. 下面定理 4.19 的证明即把这一想法确切地表达出来. 其陈述不仅涉及 f 的扰动 g, 而且涉及 g 的扰动 g'. 这样陈述是为了后面证明定理 4.23 的需要.

定理 4.19 设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和两个数 $a_0>0$, $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $g,g'\in\mathcal{U}_0$ 和 g 的任意紧不变集 $\Delta\subset B(\Lambda,a_0)$, 至多存在一个连续映射 $h:\Delta\to M$ 使得在 Δ 上满足 $hg=g'h$ 和 $\mathrm{d}(h,id)\le\varepsilon_0$. 并且, 对任意 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_0$, 使得对任意 $g,g'\in\mathcal{U}$ 和 g 的任意紧不变集 $\Delta\subset B(\Lambda,a_0)$, 至少存在一个到像集的同胚 $h:\Delta\to M$ 使得 $hg=g'h$ 和 $\mathrm{d}(h,id)\le\varepsilon$.

证明 不妨设 M 的黎曼范数 $|\cdot|$ 与 Λ 适配. 先取 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 r_0 足够小使得对任意 $g,g'\in\mathcal{U}_0$, 提升

$$F_g^{g'}:TM(r_0)\to TM$$
$$F_g^{g'}(v)=\exp_{g(\pi v)}^{-1}\ g'\ \exp_{\pi v}(v)$$

有定义. 记

$$\phi=\phi_{g,g'}=F_g^{g'}-Tg:TM(r_0)\to TM.$$

则 ϕ 对于 g 保纤维. 为简单起见这里省略了 ϕ 的下标 g,g'.

断言 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 和 $r>0$, 使得对任意 $g,g'\in\mathcal{U}$, 在 $TM(r)$ 上有 $\mathrm{Lip}_2\,\phi<\varepsilon$.

实际上, 由引理 4.11 的证明, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 和 $r>0$, 使得

对任意 $g \in \mathcal{U}$, 在 $TM(r)$ 上有

$$|D_2(F_g)(v) - Tg(v)| < \varepsilon/2.$$

又

$$D_2(F_g)(v) = D(\exp_{gx}^{-1})(g(\exp_x v)) \circ Dg(\exp_x v) \circ D(\exp_x)(v),$$
$$D_2(F_g^{g'})(v) = D(\exp_{gx}^{-1})(g'(\exp_x v)) \circ Dg'(\exp_x v) \circ D(\exp_x)(v).$$

故可设 $\mathcal{U}$ 已取得足够小使得只要 $g, g' \in \mathcal{U}$, 就在 $TM(r)$ 上有

$$|D_2(F_g^{g'})(v) - D_2(F_g)(v)| < \varepsilon/2.$$

故

$$\begin{aligned}|D_2\phi(v)| &= |D_2(F_g^{g'})(v) - Tg(v)| \\ &\le |D_2(F_g^{g'})(v) - D_2(F_g)(v)| + |D_2(F_g)(v) - Tg(v)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

应用广义中值定理到纤维, 在 $TM(r)$ 上就有 $\mathrm{Lip}_2\,\phi < \varepsilon$. 断言证完.

以下证明的实质其实和定理 2.6 相同, 只是形式复杂而已.

设 $0 < \tau(\Lambda) < 1$ 为 Λ 在 f 下关于 $|\cdot|$ 的双曲度. 取定

$$\tau(\Lambda) < \tau_0 < \lambda < 1.$$

由引理 4.8, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 $a_0 > 0$, $K \ge 1$ 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 为双曲集, 关于 $|\cdot|$ 的双曲度为

$$\tau(\Delta) \le \tau_0,$$

且盒型化范数 $|\cdot|_\Delta$ 以系数 K 与 $|\cdot|$ 关联. 由断言, 存在 $r_0 > 0$ 和 f 的 C^1 邻域, 不妨仍记作 $\mathcal{U}_0$, 使得任意 $g, g' \in \mathcal{U}_0$ 在 $TM(K^2 r_0; |\cdot|)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|}\,\phi \le K^{-2}(\lambda - \tau_0),$$

其中 $\phi = \phi_{g,g'} = F_g^{g'} - Tg$. 故在 $T_\Delta M(K r_0; |\cdot|_\Delta)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|_\Delta}\,\phi \le \lambda - \tau_0.$$

由定理 4.14, 还可设 $\mathcal{U}_0$, a_0 和 r_0 已取得足够小, 使得任意 $g \in \mathcal{U}_0$ 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ 为 r_0-可扩. 然后, 命

$$\varepsilon_0 = r_0/2.$$

至此已取定 $\mathcal{U}_0$, a_0 和 ε_0.

现在, 对任意 $g, g' \in \mathcal{U}_0$ 和 g 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$, 在 $T_\Delta M(K\varepsilon_0; |\cdot|_\Delta)$ 上有

$$\mathrm{Lip}_{2,|\cdot|_\Delta} \phi \le \lambda - \tau_0 \le \lambda - \tau(\Delta).$$

故由引理 4.18, $F_g^{g'} = Tg + \phi$ 在 $\Gamma^0(T_\Delta M)(K\varepsilon_0; |\cdot|_\Delta)$ 中至多有一个不变截面, 也就在 $\Gamma^0(T_\Delta M)(\varepsilon_0; |\cdot|)$ 中至多有一个不变截面, 记作 γ, 即

$$\exp_{gx}^{-1}\ g'\ \exp_x \gamma(x) = \gamma(gx), \quad \forall\ x \in \Delta.$$

命 $h(x) = \exp_x \gamma(x)$, 也就至多有一个连续映射 $h : \Delta \to M$ 使得 $\mathrm{d}(h, id) \le \varepsilon_0$, 且

$$g'h(x) = hg(x), \quad \forall\ x \in \Delta.$$

设 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ 给定. 取 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$ 有

$$\sup_{x \in M} \mathrm{d}(fx,\ gx) < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{2K^2}.$$

对任意 $g, g' \in \mathcal{U}$ 和 g 的任意紧不变集 $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$,

$$\begin{aligned} |\phi(0_\Delta)|_\Delta &= \sup\nolimits_{x\in\Delta} |\phi(0_x)|_\Delta = \sup_{x\in\Delta} |F_g^{g'}(0_x)|_\Delta \\ &= \sup_{x\in\Delta} |\exp_{gx}^{-1}(g'x)|_\Delta \le K \sup_{x\in\Delta} |\exp_{gx}^{-1}(g'x)| \\ &= K \sup_{x\in\Delta} \mathrm{d}(gx, g'x) \le (1-\lambda)K^{-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

故由引理 4.18, $F_g^{g'}$ 在 $\Gamma^0(T_\Delta M)(K\varepsilon_0; |\cdot|_\Delta)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不变截面 γ, 而且

$$|\gamma|_\Delta \le \frac{(1-\lambda)K^{-1}\varepsilon}{1 - \tau(\Delta) - \mathrm{Lip}_{2,|\cdot|_\Delta}\phi} \le K^{-1}\varepsilon.$$

那么

$$|\gamma| \leq \varepsilon.$$

这给出一个连续映射 $h : \Delta \to M$ 使得 $\mathrm{d}(h, id) \leq \varepsilon$, 且

$$g'h(x) = hg(x), \quad \forall\, x \in \Delta.$$

因 Δ 紧致, 为证明 h 为到像集的同胚, 只需证明 h 为单射. 事实上, 设对某两点 $x,\ y \in \Delta$ 有 $h(x) = h(y)$. 则对任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(g^n x,\ g^n y) &\leq \mathrm{d}(g^n x,\ h(g^n x)) + \mathrm{d}(h(g^n x),\ h(g^n y)) + \mathrm{d}(h(g^n y),\ g^n y) \\
&= \mathrm{d}(g^n x,\ h(g^n x)) + \mathrm{d}({g'}^n(hx),\ {g'}^n(hy)) + \mathrm{d}(h(g^n y),\ g^n y) \\
&\leq \varepsilon + 0 + \varepsilon \leq 2\varepsilon_0 = r_0.
\end{aligned}$$

因 $g|_\Delta$ 为 r_0-可扩, 得 $x = y$. 这证明 h 为单射. 定理 4.19 证完. ■

现在陈述定理 4.19 的一个简化的形式:

定理 4.20 (双曲集的嵌入式稳定性) 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}_0$, 存在唯一到像同胚 $h = h(g) : \Lambda \to M$ 满足 $hf = gh$ 和 $\mathrm{d}(h, id) \leq \varepsilon_0$. 并且, 当 $\mathrm{d}^1(g, f) \to 0$ 时有 $\mathrm{d}(h(g), id) \to 0$.

共轭像集 $h(g)(\Lambda)$ 是 g 的紧不变集, 称为 Λ 在 g 下的**延拓**, 常记为 Λ_g. 于是 Λ_g 对充分 C^1 接近 f 的 g 有定义.

回顾一下, 称微分同胚 $f : M \to M$ 为一 **Anosov 微分同胚**, 如果整个流形 M 为 f 的双曲集.

定理 4.21 Anosov 微分同胚为 C^1 结构稳定.

证明 设 $f : M \to M$ 为 Anosov. 由定理 4.19, f 在 M 上为 C^1 嵌入式稳定, 即存在 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$, 存在到像集的同胚 $h = h_g : M \to M$ 使得 $hf = gh$. 只需证明 h 映满 M. 由区域不变性定理, h 为开映射. 故 $h(M)$ 在 M 中既开又闭. 故 $h(M) = M$ (总假设 M 连通). 定理 4.21 证完. ■

对任意 $U \subset M$, 称集合

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$$

(可以为空集) 为 f 在 U 中的**极大不变集**. 称 f 的紧不变集 Λ 为**孤立**的或**局部极大**的, 若存在 Λ 在 M 中的邻域 U, 使得 Λ 为 f 在 U 中的极大不变集. 这时称 U 为 Λ 的一个**隔离邻域**. 必要时取紧集 K 使得 $\Lambda \subset \mathrm{int}(K) \subset K \subset U$, 从而

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K),$$

总可假设隔离邻域 U 为紧致. 由定理 2.16, 任一双曲不动点为孤立不变集 (比如马蹄 Λ 中的一个双曲不动点就是一个孤立不变集, 虽然它被其他周期点所逼近). 又 Smale 马蹄和 Anosov 环面同构为孤立不变集. 非孤立的不变集的一个例子是 $\Lambda = \mathrm{Orb}(x) \cup \{p\}$, 其中 p 为一个双曲不动点, x 为 p 的一个横截同宿点 (见图 4.6). 可以证明 Λ 为一双曲集 (见第四章习题 4). 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 m 足够大使得 $f^{-m}x$ 和 $f^m x$ 都充分接近 p, 从而 $W^s_\varepsilon(f^{-m}x)$ 和 $W^u_\varepsilon(f^m x)$ 相交于一点 z. 于是 z 的轨道被包含在 Λ 的 ε-邻域内, 但不在 Λ 内.

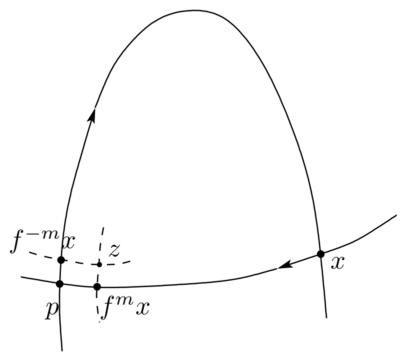

图 4.6 非孤立不变集

有趣的是, 虽然每一紧不变集都是某个孤立不变集 (比如全流形

M) 的子集, Crovisier [Cr] 却发现, 并非每一紧双曲集都是某个孤立双曲集的子集.

定理 4.22 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的孤立不变集, U 为一隔离邻域. 对任意 $a>0$, 存在 f 的 C^0 邻域 $\mathcal{U}$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 在 U 中的极大不变集 Γ 都含在 $B(\Lambda, a)$ 内.

证明 因

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = \Lambda,$$

对任意 $a>0$, 存在 N 足够大, 使得

$$\bigcap_{n=-N}^{N} f^n(U) \subset B(\Lambda, a/2).$$

取 f 的 C^0 邻域 $\mathcal{U}$ 充分小, 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$ 有

$$\bigcap_{n=-N}^{N} g^n(U) \subset B(\Lambda, a).$$

则

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} g^n(U) \subset B(\Lambda, a).$$

定理 4.22 证完. ■

定理 4.23 (孤立双曲集的结构稳定性) 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的孤立双曲集, U 为一隔离邻域. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 在 U 中的极大不变集 Γ 是以 U 为隔离邻域的孤立不变集, 且 $g|_\Gamma$ 与 $f|_\Lambda$ ε-拓扑共轭.

与 ε-嵌入式稳定性定义中的集合 $h(\Lambda)$ 不同, 这里的 Γ 是事先指定的.

证明 由定理 4.19, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}_0$ 和 $a_0>0$, $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $g, g' \in \mathcal{U}_0$ 和 g 在 $B(\Lambda, a_0)$ 中的任意紧不变集 Δ, 至多存在一

个连续映射 $h:\Delta\to M$, 使得

$$hg=g'h,\quad \mathrm{d}(h,id)\le\varepsilon_0.$$

不妨设

$$B(\Lambda,a_0+\varepsilon_0)\subset U.$$

由定理 4.22, 存在 f 的 C^0 邻域 $\mathcal{U}_1$ 使得任意 $g\in\mathcal{U}_1$ 在 U 中的极大不变集 Γ 包含在 $B(\Lambda,a_0)$ 中.

任给 $\varepsilon>0$. 不妨设 $\varepsilon\le\varepsilon_0/2$. 由定理 4.19, 存在 f 的 C^1 邻域

$$\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1$$

使得对任意 $g,g'\in\mathcal{U}$ 和 g 的任意紧不变集 $\Delta\subset B(\Lambda,a_0)$, 至少有一个到像集的同胚 $h:\Delta\to M$, 使得在 Δ 上有 $hg=g'h,\ \mathrm{d}(h,id)\le\varepsilon$. 特别地, 因 g 在 U 中的极大不变集 Γ 含在 $B(\Lambda,a_0)$ 中, 故存在到像集的同胚 $h:\Gamma\to M$, 使得在 Γ 上有

$$hg=g'h,\quad \mathrm{d}(h,id)\le\varepsilon.$$

同样, 因 g' 在 U 中的极大不变集 Γ' 含在 $B(\Lambda,a_0)$ 中, 故存在到像集的同胚 $h':\Gamma'\to M$, 使得在 Γ' 上有

$$h'g'=gh',\quad \mathrm{d}(h',id)\le\varepsilon.$$

因为

$$h(\Gamma)\subset B(\Gamma,\varepsilon)\subset B(\Lambda,a_0+\varepsilon)\subset B(\Lambda,a_0+\varepsilon_0)\subset U,$$

又因为 $h(\Gamma)$ 在 g' 下不变, 而 Γ' 为 g' 在 U 中的极大不变集, 故

$$h(\Gamma)\subset\Gamma'.$$

同样地,

$$h'(\Gamma')\subset\Gamma.$$

于是 h 和 h' 合在一起给出 $h'h:\Gamma\to\Gamma$, 使得在 Γ 上有

$$(h'h)g=g(h'h),\quad \mathrm{d}(h'h,id|_\Gamma)\le\varepsilon+\varepsilon\le\varepsilon_0.$$

但 $id|_\Gamma$ 已经是 $g|_\Gamma$ 到自身的一个 ε_0-共轭. 由证明开头所述的唯一性,

$$h'h=id|_\Gamma.$$

同样地,

$$hh'=id|_{\Gamma'}.$$

这证明 $h(\Gamma)=\Gamma'$, 从而 $g|_\Gamma$ 和 $g'|_{\Gamma'}$ ε-共轭. 特别地, $g'|_{\Gamma'}$ 可以是 $f|_\Lambda$. 定理 4.23 证完. ■

§4.6 跟踪引理

本节介绍 Anosov 的跟踪引理. 这个引理有大量精彩的应用. 设 $\delta>0$. 称 M 中一个点列 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 f 的一个 δ-**伪轨**, 如果对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 有

$$\mathrm{d}(f(x_n),\ x_{n+1})<\delta.$$

称一点 $y\in M$ ε-**跟踪**一个伪轨 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 如果对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 有

$$\mathrm{d}(f^n(y),\ x_n)<\varepsilon.$$

于是, 如果 $\delta\le\delta_0$, 则一个 δ-伪轨也是 δ_0-伪轨. 如果 $\varepsilon\le\varepsilon_0$, 则被一个点 ε-跟踪也是被这个点 ε_0-跟踪.

定理 4.24 (跟踪引理) 设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\delta_0>0$ 使得 Λ 中的任一 δ_0-伪轨至多被一个点 ε_0-跟踪. 又对任意 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, 存在 $0<\delta\le\delta_0$, 使得 Λ 中的任一 δ-伪轨至少被一个点 ε-跟踪.

唯一性部分可以从双曲集的可扩性直接导出. 一般说来, 跟踪引理通常化为 Banach 空间的不动点问题来证明 (见 [A], [P]). 这里我们想

说明, 沿着定理 4.19 证明的思路, 跟踪引理也可以化为有限维向量丛的不变截面问题. 想法如下: 设伪轨 $\{x_n\}$ 被点 $y \in M$ ε-跟踪, 即

$$\mathrm{d}(f^n(y),\ x_n) < \varepsilon, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

粗略地说, $f^n(y) - x_n$ 就是伪轨 $\{x_n\}$ 上的一个长度不超过 ε 的向量场. 考虑对向量 $z - x_n$ 的如下作用: 对向量的 “首端” z 用 f 作用, 即把 z 对应到 fz, 而对向量的 “尾端” x_n 用伪轨的点序作用, 即把 x_n 对应到 x_{n+1}. (下面的 f 沿伪轨的 “提升” 映射 F 就是这样一个作用.) 则向量场 $f^n(y) - x_n$ 就是该作用下的不变截面. 跟踪点 y 的存在性就是这一不变截面的存在性.

这里有一个微妙的细节: 伪轨 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是序列而不是集合, 因而不排除 $x_n = x_m$ 但 $f^n(y) \neq f^m(y)$ 的情形. 这样就可能在同一点 x_n 上定义了两个不同的向量 “$f^n(y) - x_n$” 和 “$f^m(y) - x_n$”, 也就不成其向量场. (感谢 C. S. Lin 提醒我这一点.) 克服这一点的办法是把伪轨 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ “回退” 到 $\mathbb{Z}$ 上.

确切地, 给定序列

$$\chi : \mathbb{Z} \to M$$
$$\chi(n) = x_n,$$

定义 χ 的**导出丛** (或**回退丛**) 为

$$\chi^*(TM) = \{(n, v) \in \mathbb{Z} \times TM \mid v \in T_{x_n}M\},$$

其基空间为 $\mathbb{Z}$, 赋离散拓扑, 丛投射为

$$\pi(n,\ v) = n.$$

于是 $\chi^*(TM)$ 在基点 n 处的纤维就是 $(n, T_{x_n}M)$. 回退的作用就像是给原来的纤维 $T_{x_n}M$ 贴上标签 n, 这样即使 $x_n = x_m$, 新的纤维 $(n, T_{x_n}M)$ 与 $(m, T_{x_m}M)$ 也是区分开了的. 上述不唯一问题从而得以消除.

由于基空间 $\mathbb{Z}$ 赋离散拓扑, 导出丛 $\chi^*(TM)$ 在拓扑上很简单, 是可数个欧氏空间的离散并. 因此, 一个关于移位映射 $n \to n+1$ 保纤维的丛同构 $A : \chi^*(TM) \to \chi^*(TM)$ 就是一列从欧氏空间到欧氏空间的线性同构 A_n.

回顾一下, 引理 4.18 说双曲丛同构 Tf 的纤维李普希茨扰动在零截面附近有唯一不变截面. 对应于导出丛 $\chi^*(TM)$, 就是下面的引理 4.25. 简记 Γ_χ 为 $\chi^*(TM)$ 的有界截面空间, 即

$$\Gamma_\chi = \{\gamma : \mathbb{Z} \to TM \mid \gamma \text{ 有界, 且 } \gamma(n) \in T_{x_n}M\}.$$

Γ_χ 在范数

$$|\gamma| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma(n)|$$

下成一 Banach 空间.

引理 4.25 设 $\chi : \mathbb{Z} \to M$ 为一双向序列, $A : \chi^*(TM) \to \chi^*(TM)$ 是对移位映射 $n \to n+1$ 保纤维的一个双曲丛同构, 在一个盒型适配范数 $|\cdot|$ 下的双曲度为 $0 < \tau < 1$. 设 $r > 0$. 如果 $\phi : \chi^*(TM)(r) \to \chi^*(TM)$ 关于 $n \to n+1$ 保纤维, 限制在纤维上为李普希茨, 满足

$$\mathrm{Lip}_2\,\phi < 1 - \tau,$$

则 $A + \phi$ 在 $\Gamma_\chi(r)$ 中至多有一个不变截面. 如果进一步满足

$$|\phi(0_\chi)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|\phi(0_{x_n})| \le (1 - \tau - \mathrm{Lip}_2\,\phi)r,$$

则 $A + \phi$ 在 $\Gamma_\chi(r)$ 中至少有一个 (从而唯一的) 不变截面 γ_ϕ, 且

$$|\gamma_\phi| \le \frac{|\phi(0_\chi)|}{1 - \tau - \mathrm{Lip}_2\,\phi}.$$

引理 4.25 的证明和引理 4.18 完全相同, 故从略.

定理 4.24 的证明 取 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\delta_0 > 0$ 足够小, 使对 Λ 中任意 δ_0-伪轨 $\chi = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 可以定义 f **沿** χ 的**提升**

$$F_\chi^f : \chi^*(TM)(\varepsilon_0) \to \chi^*(TM)$$

$$F_\chi^f(n, v) = (n+1,\ \exp_{x_{n+1}}^{-1}\ f\ \exp_{x_n}(v)).$$

显然 F_χ^f 对移位映射 $n \to n+1$ 保纤维, 把向量 $(n,\ \exp_{x_n}^{-1}(z))$ 变成向量 $(n+1,\ \exp_{x_{n+1}}^{-1}(fz))$. 特别地, 对 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, 若点 $y \in M$ 满足

$$\mathrm{d}(f^n(y),\ x_n) < \varepsilon, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z},$$

并从而给出 $\Gamma_\chi(\varepsilon)$ 中的一个截面

$$\gamma(n) = (n,\ \exp_{x_n}^{-1}(f^n y)),$$

则

$$F_\chi^f(\gamma(n)) = \gamma(n+1), \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

换句话说, γ 是 F_χ^f 的不变截面. 于是, ε-跟踪伪轨 χ 的点 y 的存在性就等价于 F_χ^f 在 $\Gamma_\chi(\varepsilon)$ 中的不变截面 γ 的存在性. 余下的证明与定理 4.19 相同, 此处从略. 定理 4.24 证完. ■

伪轨是一个灵活的概念. 一个真轨当然总是一个伪轨. 一个真轨的 “扰动” 也总是一个伪轨. 确切地, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得对任一 $z \in M$, 只要

$$\mathrm{d}(f^n z,\ x_n) < \eta,$$

则 $\{x_n\}$ 是一个 δ-伪轨. 更一般地, 一个伪轨的 “扰动” 也总是一个伪轨. 确切地, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得对任一 η-伪轨 $\{x_n\}$, 只要

$$\mathrm{d}(y_n,\ x_n) < \eta,$$

则 $\{y_n\}$ 是一个 δ-伪轨. 因此, 定理 4.24 中的被跟踪的伪轨其实并不一定要在 Λ 内. 只要离 Λ 足够近, 就可以换成 Λ 中的点, 成为 Λ 内的伪轨, 从而被跟踪.

跟踪引理的一个经典的应用是下面的定理 4.26. 对 f 的任意紧不变集 Λ, 定义

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M \mid \mathrm{d}(f^n x, \Lambda) \to 0, n \to +\infty\},$$
$$W^u(\Lambda) = \{x \in M \mid \mathrm{d}(f^{-n} x, \Lambda) \to 0, n \to +\infty\}.$$

由定理 1.2, $x \in W^s(\Lambda)$ 当且仅当 $\omega(x) \subset \Lambda$.

定理 4.26 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的孤立双曲集, 则

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x),$$
$$W^u(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x).$$

这个性质是说, 若一个点与一个孤立双曲集渐近, 则必与该集里的某个点渐近. 一个不孤立的双曲集不一定具有这个性质.

证明 只证

$$W^s(\Lambda) \subset \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x).$$

任取 $y \in W^s(\Lambda)$. 设 $r > 0$ 是定理 4.13 给出的数使得, 对任一 $x \in \Lambda$,

$$W^s_r(x) = \{y \in M \mid \mathrm{d}(f^n y, f^n x) \le r,\ \forall\ n \ge 0\}.$$

必要时缩小 r, 不妨设 $B(\Lambda, r)$ 含在 Λ 的一个隔离邻域中. 由定理 4.24, 存在 $\delta > 0$ 使得 Λ 中任一 δ-伪轨被 $r/2$-跟踪. 因 $y \in W^s(\Lambda)$, 可取 $m > 0$ 足够大使得当 $n \ge m$ 时有 $\mathrm{d}(f^n y, \Lambda) < \eta$, 从而存在 $x_n \in \Lambda$ 使得

$$\mathrm{d}(f^n y,\ x_n) < \eta, \quad \forall n \ge m.$$

这里的 $\eta \in (0, r/2)$ 可以假定已取得足够小, 使得 $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ 是一个 δ-伪轨 (的一段). 对所有 $n \le m$, 命

$$x_n = f^{n-m}(x_m).$$

则 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 Λ 中一 δ-伪轨, 从而被某一点 x $r/2$-跟踪. 这蕴含 $\mathrm{Orb}(x) \subset B(\Lambda, r/2)$. 由 Λ 的孤立性, 知 $x \in \Lambda$. 显然对所有 $n \ge m$ 有

$$\mathrm{d}(f^n y,\ f^n x) \le \mathrm{d}(f^n y,\ x_n) + \mathrm{d}(x_n,\ f^n x) \le \eta + r/2 \le r.$$

由定理 4.13, $f^m y \in W^s_r(f^m x)$. 这证明 $y \in W^s(x)$. 定理 4.26 证完. ■

跟踪引理主要的、大量的应用是断言周期轨道的存在. 具体说就是, 在双曲条件下, 断言 "周期伪轨" 附近必有周期轨. 这是定理 4.24 的特殊情形. 但为强调起见我们单独陈述如下. 称一个伪轨 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是**周期的**, 如果存在 $m>0$ 使得对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 有 $x_n=x_{n+m}$.

定理 4.27　*设 $\Lambda\subset M$ 为 f 的双曲集. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 Λ 中的任一周期 δ-伪轨被一周期点 ε-跟踪.*

证明　由定理 4.24, 存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\delta_0>0$ 使得 Λ 中的任一 δ_0-伪轨至多被一个点 ε_0-跟踪.

设 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ 给定. 由定理 4.24, 存在 $0<\delta\le\delta_0$ 使得 Λ 中的任一 δ-伪轨至少被一个点 ε-跟踪.

设 $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 Λ 中一周期 δ-伪轨使得对某一 $m>0$ 有 $x_n=x_{n+m}$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$. 则 $\{x_n\}$ 被一个点 p ε-跟踪, 即

$$\mathrm{d}(f^np,\ x_n)<\varepsilon,\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

即

$$\mathrm{d}(f^{n+m}p,\ x_{n+m})<\varepsilon,\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

但 $x_n=x_{n+m}$, 故

$$\mathrm{d}(f^{n+m}p,\ x_n)<\varepsilon,\quad \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

即 f^mp 也 ε-跟踪 $\{x_n\}$. 由证明开始所述的唯一性, $f^mp=p$, 即 p 为周期点. 定理 4.27 证完. ■

推论 4.28　*横截同宿点是周期点的极限点.*

证明　我们取一个特殊情形, 即 x 是一个双曲不动点 p 的一个横截同宿点. 一般情形证明类似. 于是 $\Lambda=\mathrm{Orb}(x)\cup\{p\}$ 是一个双曲集. 对任一 $\varepsilon>0$, 设 $\delta>0$ 是定理 4.24 对 Λ 保证的常数. 取 $m>0$ 足够大使得 $\mathrm{d}(f^{-m}x,\ f^mx)<\delta$. 双向无限重复从 $f^{-m}x$ 到 $f^{m-1}x$ 的轨道段, 就构成 Λ 中一周期 δ-伪轨, 从而被周期点 ε-跟踪. 推论 4.28 证完. ■

习 题

以下 M 表示一个紧致无边流形.

1. 验证 §3.2 中的马蹄集 Λ 为双曲集.

2. 证明: 如果 $x \in M$ 为双曲不动点 $p \in M$ 的一个横截同宿点, 则 $\mathrm{Orb}(x) \cup \{p\}$ 为双曲集.

3. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的一个紧不变集, $E \subset T_\Lambda M$ 为 Tf 的一个不变 C^0 子丛. 证明以下三者等价.

(a) 存在 $C \geq 1$ 和 $0 < \lambda < 1$ 使得

$$|Tf^n(v)| \leq C\lambda^n |v|, \quad \forall\, v \in E, n \geq 0.$$

(b) 存在 $0 < \mu < 1$ 和 $N \geq 0$ 使得

$$|Tf^n(v)| \leq \mu^n |v|, \quad \forall\, v \in E, n \geq N.$$

(c) 对任意 $0 \neq v \in E$, 存在 $n = n(v) \geq 0$ 使得

$$|Tf^n(v)| < |v|.$$

4. 设 $p \in M$ 为 f 的一个压缩型周期点. 证明: 若 $p \in \alpha(x)$, 则 $x \in \mathrm{Orb}(p)$.

5. 设 $\Lambda \subset M$ 为一集. 设对任意 $x \in \Lambda$ 给定了一个 m 维线性子空间 $E(x) \subset T_x M$. 证明: $E = \bigcup_{x\in\Lambda} E(x)$ 为 $T_\Lambda M$ 的 m 维 C^0 子丛当且仅当 $E(x)$ 随 $x \in \Lambda$ 连续变化.

6. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的紧不变集, $E \subset T_\Lambda M$ 为一 C^0 子丛. 设连续映射 $F : E \to E$ 对 $f : \Lambda \to \Lambda$ 保纤维, 且在纤维上一致压缩, 即存在 $0 < \lambda < 1$, 使得对任意 $u, v \in E(x)$, $x \in \Lambda$,

$$|F(u) - F(v)| \leq \lambda |u - v|.$$

证明: 存在唯一连续截面 $\gamma \in \Gamma^0(E)$ 在 F 下不变, 即

$$F\gamma(x) = \gamma(fx), \quad \forall\, x \in \Lambda.$$

7. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的紧不变集, $A = Tf$ 在 C^0 直和

$$T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$$

下表为

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

使得

$$\max\{|A_{11}^{-1}|, |A_{22}|\} < 1.$$

证明: Λ 为 f 的双曲集.

8. 证明引理 4.7.

9. 证明: 闭区间上不存在可扩同胚. 圆周上呢?

为陈述下面的一些习题, 这里插入一个定义. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的一个紧不变集. 称连续不变分解 $T_xM = G^s(x) \oplus G^u(x)$, $x \in \Lambda$, 为一**控制分解**, 如果存在 $C > 1$ 和 $\lambda \in (0,1)$ 使得对任意 $x \in \Lambda$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$|Tf^n|_{G^s(x)}| \cdot |Tf^{-n}|_{G^u(f^n(x))}| \leq C\lambda^n,$$

也即对任意 $x \in \Lambda$ 和任意单位向量 $v_s \in G^s(x)$, $v_u \in G^u(x)$ 以及任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\frac{|Tf^n(v_s)|}{|Tf^n(v_u)|} \leq C\lambda^n.$$

显然, 双曲分解是控制分解, 但反之不然.

10. 设 $T_\Lambda M = G_1^s \oplus G_1^u$ 和 $T_\Lambda M = G_2^s \oplus G_2^u$ 为 Λ 上的两个控制分解. 证明: 对任意 $x \in \Lambda$, 或者 $G_1^s(x) \subseteq G_2^s(x)$, 或者 $G_1^u(x) \subseteq G_2^u(x)$. 特别地, 如果 $\dim G_1^s(x) = \dim G_2^s(x)$, 则 $G_1^s(x) = G_2^s(x)$ 且 $G_1^u(x) = G_2^u(x)$ (也就是说, 对固定的指标, 控制分解是唯一的).

11. 设 $T_\Lambda M = G_1^s \oplus G_1^c \oplus G_1^u$ 和 $T_\Lambda M = G_2^s \oplus G_2^c \oplus G_2^u$ 为 Λ 上的两个三重控制分解. 如果 $G_1^c = G_2^c$, 证明: $G_1^s = G_2^s$, $G_1^u = G_2^u$. (称 $G^s \oplus G^c \oplus G^u$ 为一个**三重控制分解**, 如果 G^c 控制 G^s, G^u 控制 G^c.)

12. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的紧不变集, 有一控制分解. 证明: 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 和 $a > 0$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 在 $\Delta \subset B(\Lambda, a)$ 中的任意紧不变集在 g 下有控制分解.

13. 设 $\dim M = 2$. 设 $TM = G^s \oplus G^u$ 为 f 的一个控制分解. 证明: 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U}$ 使得所有 $g \in \mathcal{U}$ 的所有周期轨道都没有非实特征值.

14. 设 $\dim M = 3$. 设 Λ 为 f 的一个紧不变集, 含有两个双曲周期点 p 和 q, 其中 p 有一非实特征值, 模小于 1, $\dim W^s(p) = 2$, 而 q 有一非实特征值, 模大于 1, $\dim W^s(q) = 1$. 证明: f 在 $T_\Lambda M$ 上没有控制分解.

15. 设 $TM = G^s \oplus G^u$ 为 f 的控制分解. 设 $p \in M$ 和 $q \in M$ 为 f 的两个双曲周期鞍点, $\dim W^s(p) = \dim W^s(q) = \dim G^s$. 证明: $W^u(p)$ 与 $W^s(q)$ 横截相交.

16. 设 $T_\Lambda M = G^s \oplus G^u$ 为 Λ 上一控制分解. 证明: 若 $\dim G^u = 1$, 则存在 $T_\Lambda M$ 的一个范数 $|\cdot|$ (称为**适配**的范数), 使得

$$|Tf|_{G^s(x)}| \cdot |Tf^{-1}|_{G^u(f(x))}| < 1, \quad \forall x \in \Lambda.$$

17. 设 $\Lambda \subset M$ 为一双曲集. 证明: 存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意 $x, y \in \Lambda$, $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y)$ 至多含有一个点. 又对这一 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mathrm{d}(x, y) < \delta$, $x, y \in \Lambda$, 则 $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \neq \emptyset$.

18. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的孤立双曲集. 证明: 存在 $\epsilon > 0$ 使得对任意 $x, y \in \Lambda$ 有 $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \in \Lambda$.

19. 设 $0 = (\cdots, 0, 0, 0, \cdots) \in \Sigma_2$. 又设 $a \in \Sigma_2$ 为 $a_0 = 1$ 但 $a_n = 0$ 当 $n \neq 0$. 记 $\Lambda = \{0\} \cup \mathrm{Orb}(a)$. 证明: Λ 是 σ 的紧不变集但不是 σ 的孤立不变集.

20. 设 $\Lambda \subset M$ 为 f 的双曲集, 双曲分解为 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, 又设 $E \subset T_\Lambda M$ 为 Tf 的 1 维不变 C^0 子丛. 如果 Λ 为传递集, 证明: 或者 $E \subset E^s$, 或者 $E \subset E^u$.

21. 设 $f : M \to M$ 为一 Anosov 微分同胚, $\Gamma \subset M$ 为一光滑简单闭曲线. 证明: Γ 不是 f-不变的.

22. 设 $T_xM = E(x) \oplus F(x)$, $x \in M$ 为 Tf-不变的连续分解. 证明: 如果这一分解限制在 $\Omega(f)$ 上是双曲的, 则整个分解是双曲的 (f 为 Anosov).

23. 设 $f : M \to M$ 为 Anosov 微分同胚. 证明: 如果每个点 $x \in M$ 的不稳定流形 $W^u(x)$ 在 M 中稠密, 则 f 为拓扑混合的.

24. 设 $p \in M$ 为 f 的一个双曲周期点. 设存在 f 的一列周期点 p_k 使得 $p_k \neq p$ 但 $p_k \to p$. 证明: 存在子序列 $k_i \to \infty$ 和 $m_{k_i} \to \infty$ 使得 $f^{m_{k_i}}(p_{k_i})$ 收敛于 $W^u(p) - \{p\}$ 的一个点.

25. 设 $f : M \to M$ 为一 C^r 结构稳定的微分同胚, $r \geq 1$. 证明: f 的每个周期点都是双曲的.

第五章

公理 A 与 Ω-稳定性定理

本章讨论系统的大范围形态, 高潮是 Smale 的 Ω-稳定性定理.

§5.1 公理 A 系统及其谱分解

称微分同胚 $f: M \to M$ 为一**公理 A 系统**, 如果 $\Omega(f)$ 为双曲集, 且 $\Omega(f) = \overline{P(f)}$.

Anosov 环面同构是公理 A 系统. 马蹄微分同胚 $f: S^2 \to S^2$ 可以定义成满足 $\Omega(f) = \Lambda \cup \{N\} \cup \{S\}$, 其中 N 为上半球面的那个双曲汇点, S 为下半球面的那个双曲源点. 则 f 是公理 A 系统.

Dankner [D] 给过一个不寻常的例子, 说明 $\Omega(f)$ 为双曲集不蕴含 $\Omega(f) = \overline{\mathrm{P}(f)}$.

下面的 Palis 的 λ-引理突出了混沌动力系统的一个关键形态. 对 f 的一个双曲不动点 $p \in M$, 简记 $u = \dim W^u(p)$, 并称 M 中的一个 u 维 C^1 嵌入圆盘为一个 u-**圆盘**.

定理 5.1 (λ-引理) *设 $p \in M$ 为 f 的双曲不动点. 则对任意 u-圆盘 $B \subset W^u(p)$, 任意点 $x \in W^s(p)$, 任意在 x 点与 $W^s(p)$ 横截相交的*

u-圆盘 D, 以及任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得若 $n > N$, 则 $f^n(D)$ 包含一个 C^1 ε 接近于 B 的 u-圆盘 (见图 5.1).

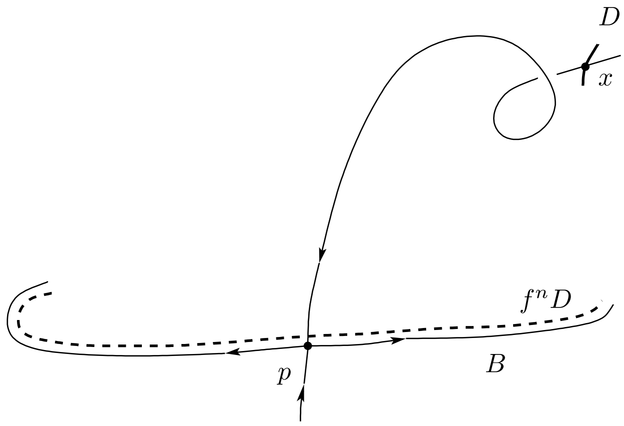

图 5.1　λ-引理

类似地, λ-引理对 s-圆盘也成立. 按照 λ-引理, 不论 B 多大, D 多小, 也不论 D 和 $W^s(p)$ 横截相交得多么弱 (张角小), 该结论都成立. 这一结论几何上看很自然, 但分析上的证明很微妙 (见 Palis 和 de Melo 的书 [PM]), 这里从略.

下面是 λ-引理的一个应用.

定理 5.2 (浮云引理)　设 p 和 q 为 f 的双曲周期点. 设 x 为 $W^s(p)$ 和 $W^u(q)$ 的一个横截交点, y 为 $W^s(q)$ 和 $W^u(p)$ 的一个横截交点. 则 $x, y \in \Omega(f)$.

证明　必要时考虑 f 的一个迭代, 可设 p 和 q 为 f 的不动点. 在 $W^u(q)$ 中以 x 为中心取 u-圆盘 D. 由 λ-引理, 存在 n_1, 使得 $f^{n_1}(D)$ 与 $W^s(q)$ 横截相交于 z, 如图 5.2 所示.

在 $f^{n_1}(D)$ 中以 z 为中心取 u-圆盘 D_1. 由 λ-引理, 存在 n_2, 使得 $f^{n_2}(D_1)$ 包含一个 u-圆盘, 与 D 任意 C^1 接近. 故 $x \in \Omega(f)$. 类似可证 $y \in \Omega(f)$. 定理 5.2 证完. ■

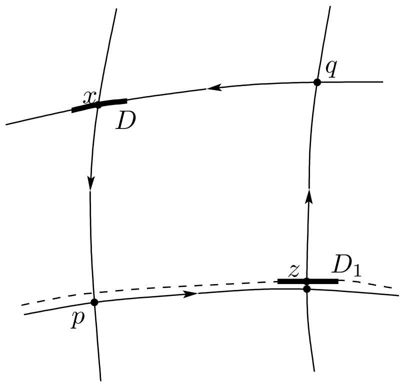

图 5.2 浮云引理的证明

浮云引理可推广到 m 个双曲周期点 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的 “环” 的情形, 条件是对每一 i, $W^s(p_i)$ 和 $W^u(p_{i+1})$ 相交于 x_i, 其中 $p_{m+1} = p_1$. 则每一 x_i 为非游荡点. 实际上, 由 λ-引理, 每一 x_i 被横截同宿点逼近.

公理 A 系统的主要形态是下面 Smale 的一个定理所描述的 “有限性”:

定理 5.3 (谱分解) *若 f 满足公理 A, 则 $\Omega(f)$ 唯一分解为有限个互不相交的传递子集的并*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k.$$

证明 首先证明分解的唯一性. 设还有分解

$$\Omega(f) = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_l$$

具有同样性质. 对每一 $i = 1, \cdots, k$, 取 $x_i \in \Omega_i$, 使得 $\omega(x_i) = \Omega_i$. 则存在唯一 j, 使得 $x_i \in \Delta_j$. 故 $\Omega_i \subset \Delta_j$. 因 $\cup\Omega_i = \cup\Delta_j$, 知 $k \geq l$. 类似地, $l \geq k$. 那么 $k = l$. 又因 $\cup\Omega_i = \cup\Delta_j$, 以上包含式 $\Omega_i \subset \Delta_j$ 实为等式. 这就证明了分解的唯一性.

由定理 4.1, f 最多有有限个压缩型和扩张型的周期轨道. 因为它们与 $\Omega(f)$ 的其他点有正距离, 不妨假设 f 的所有周期点都是鞍型的.

在周期点集 $P(f)$ 上定义二元关系: $p \sim q$ 当且仅当 $W^s(p)$ 和 $W^u(q)$ 有横截交点, 而且 $W^u(p)$ 和 $W^s(q)$ 有横截交点. 注意 $p \sim q$ 蕴含 p 和 q 的指标相同. 这一关系为反身且对称. 又由 λ-引理, 为传递. 故为一等价关系. 由定理 4.17, 存在 $\delta > 0$, 使得若 $p, q \in P(f)$ 彼此接近到 δ, 则 $p \sim q$. 故 $P(f)$ 分为至多有限个等价类

$$P_1, P_2, \cdots, P_N,$$

满足

$$\overline{P}_i \cap \overline{P}_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

注意 P_i 不一定为不变集. 但容易看出 $p \sim q$ 当且仅当 $fp \sim fq$. 因此对每一 i, 存在唯一 j, 使得 $f(P_i) = P_j$, 从而 $f(\overline{P}_i) = \overline{P}_j$. 这一对应 $i \to j$ 为 $\{1, \cdots, N\}$ 上的一个置换, 故为一些轮换的积. 故 $\Omega(f)$ 分解为有限个互不相交的紧不变集

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k,$$

其中每个 Ω_i 是一些 $\overline{P_s}$ 的循环并. 只需证明每一 Ω_i 为传递. 我们来证 Ω_1 为传递. 不妨设

$$\Omega_1 = \overline{P}_1 \cup \cdots \cup \overline{P}_r,$$

使得 $f(\overline{P}_1) = \overline{P}_2, \cdots, f(\overline{P}_r) = \overline{P}_1$.

任取 Ω_1 的 (注意不是 M 的) 两个开集 U 和 V. 由定理 1.6, 只需证明存在 $n \geq 1$, 使得 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. 不妨设 $U \subset \overline{P}_s$, $V \subset \overline{P}_t$, $1 \leq s \leq t \leq r$. 记 $W = f^{t-s}(U)$. 则 $W \subset \overline{P}_t$. 只需证明存在 $n \geq 1$ 使得 $f^n(W) \cap V \neq \emptyset$. 取 $p \in W \cap P_t$, $q \in V \cap P_t$, 则 $p \sim q$. 故存在横截交点 $z \in W^u(p) \cap W^s(q)$ 和 $z' \in W^u(q) \cap W^s(p)$. 由定理 5.2, $z \in \Omega(f)$. 故 z 属于某一 Ω_i. 因诸 Ω_i 为互不相交紧不变集而 $\mathrm{d}(f^n z, \mathrm{Orb}(q)) \to 0$, 知 z 必属于 Ω_1. 故存在 $m \geq 1$ 和 $l \geq 1$ 使得 $f^{-m}(z) \in W$, $f^l(z) \in V$. 命 $n = m + l$ 即有 $f^n(W) \cap V \neq \emptyset$. 定理 5.3 证完. ■

若 f 为公理 A 系统, 称其谱分解中的每一 Ω_i 为 f 的一个**基本集**. 下面证明, 对公理 A 系统, 任意 $x \in M$ 的正半轨或负半轨逼近且只逼近一个基本集. 这是下一定理的特殊情形. 设 X 为紧致度量空间, $f: X \to X$ 为同胚. 定义 f 的**极限集** $\mathrm{L}(f)$ 为

$$\mathrm{L}(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x) \cup \alpha(x)}.$$

显然 $\mathrm{L}(f)$ 为非空紧不变集, 且

$$\overline{P(f)} \subset \mathrm{L}(f) \subset \Omega(f).$$

定理 5.4 设 X 为紧致度量空间, $f: X \to X$ 为同胚. 设 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 为 f 的有限个互不相交的紧不变集, 满足

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i \supset \mathrm{L}(f).$$

则

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Lambda_i).$$

证明 对每一 i, 取 Λ_i 在 X 中的紧邻域 U_i, 使得对任意 $i \neq j$ 有

$$U_i \cap U_j = \emptyset, \quad f(U_i) \cap U_j = \emptyset.$$

设 $x \in X$. 则

$$\omega(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i.$$

于是存在 $N \geq 1$, 使得对所有 $n \geq N$,

$$f^n x \in \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

不妨设 $f^N x \in U_1$. 对任意 $j \neq 1$, 因 $(fU_1) \cap U_j = \emptyset$, 知 $f^{N+1} x \in U_1$. 归纳地, 对所有 $n \geq N$ 有 $f^n x \in U_1$. 那么 $\omega(x) \subset U_1$. 故 $\omega(x) \subset \Lambda_1$. 这证明 $x \in W^s(\Lambda_1)$. 类似对 W^u. 定理 5.4 证完. ■

推论 5.5 若 f 为公理 A 系统, 则

$$M=\bigcup_{i=1}^{k}W^s(\Omega_i)=\bigcup_{i=1}^{k}W^u(\Omega_i),$$

其中 $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$ 为 f 的基本集.

由跟踪引理不难证明, 公理 A 系统的每一基本集都是孤立双曲集 (见习题 23). 故由定理 4.26 和推论 5.5, 对公理 A 系统, 实际上有

$$M=\bigcup_{x\in\Omega(f)}W^s(x)=\bigcup_{x\in\Omega(f)}W^u(x).$$

§5.2 环与爆炸

称微分同胚 $f:M\to M$ 为 C^r Ω-**稳定**, 若存在 f 的 C^r 邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g\in\mathcal{U}$, $g|_{\Omega(g)}$ 与 $f|_{\Omega(f)}$ 拓扑共轭. 特别地, 称 f 为 C^r ε-Ω-**稳定**, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 f 的 C^r 邻域 $\mathcal{U}$, 使得对任意 $g\in\mathcal{U}$, $g|_{\Omega(g)}$ 与 $f|_{\Omega(f)}$ ε-拓扑共轭 (即拓扑共轭为 ε 接近 id).

仅有公理 A 不足以保证 Ω-稳定性. 下面的 Palis 的例子是 S^2 上一微分同胚 f, 非游荡集 $\Omega(f)$ 由 6 个双曲不动点组成, 如图 5.3.

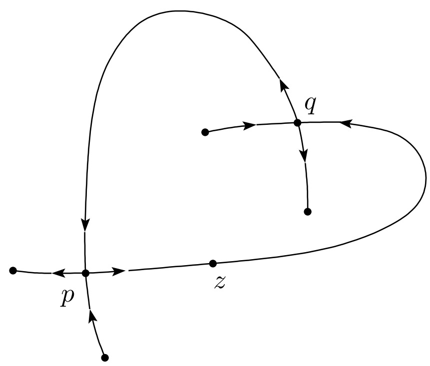

图 5.3 Ω-爆炸

易见 f 为公理 A 系统. 其中的两个鞍点构成一 “环”. 对任意 r, 可在 z 点附近做任意小 C^r 扰动, 使得稳定与不稳定流形在 z 处横截,

从而另一条 "鞍点连线" 上的点都成为非游荡点, 导致 "Ω-爆炸". 具体地, 这个扰动可以是 f 复合 z 的一个游荡邻域 (注意 z 为游荡点) 上以 z 为中心的一个小旋转. 一个重要的细节是, 原来的稳定与不稳定流形, 在 z 点附近, 只有一个跟着旋转而另一个不动, 从而造成横截.

我们来一般地定义环. 设 X 为紧度量空间, $f: X \to X$ 为同胚, $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 为 f 的有限个互不相交的紧不变集. 称 Λ_i **外走向** Λ_j, 记为 $\Lambda_i \rightharpoonup \Lambda_j$, 如果 $W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) - \Lambda_i - \Lambda_j \neq \emptyset$. 粗略地说, $\Lambda_i \rightharpoonup \Lambda_j$ 意即在 Λ_i 和 Λ_j 之外有一点 $x \in X$ 从 Λ_i 走向 Λ_j. 当 $i \neq j$ 时, $W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset$ 自动蕴含 $\Lambda_i \rightharpoonup \Lambda_j$. 但当 $i = j$ 时不然. 易见二元关系 "$\rightharpoonup$" 不反身、不反称、不传递. 称 $\Lambda_{i_1}, \cdots, \Lambda_{i_m}$ 构成一**环**, 若

$$\Lambda_{i_1} \rightharpoonup \Lambda_{i_2} \rightharpoonup \cdots \rightharpoonup \Lambda_{i_m} \rightharpoonup \Lambda_{i_1}.$$

称 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 满足**无环条件**, 若它们中的任何几个都不构成环.

设 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 为 f 的有限个互不相交的紧不变集. 一般来说, 这些集合的下标与它们之间的外走向关系没有什么联系. 下面的定理说, 若 $\{\Lambda_i\}$ 满足无环条件, 则必要时重新规定下标, 总可使下标在一定程度上反映外走向关系.

定理 5.6 *有限个互不相交的紧不变集满足无环条件当且仅当可以规定其下标, 使得 $\Lambda_i \rightharpoonup \Lambda_j$ 蕴含 $i > j$.*

证明 "当" 的部分显然. 我们来证 "仅当" 的部分. 设 $\mathcal{L} = \{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k\}$ 为有限个互不相交的紧不变集, 满足无环条件. 则 $\mathcal{L}$ 必有 "下端", 即那种 $\Lambda \in \mathcal{L}$, 使得不存在 $\Lambda' \in \mathcal{L}$ 满足 $\Lambda \rightharpoonup \Lambda'$. (否则的话, 因为只有有限个集合, 则会在 $\mathcal{L}$ 中追出一个环.) 将 $\mathcal{L}$ 所有的下端记为 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{k_1}$. 剩下的有限个紧不变集, 比如记为 $\mathcal{L}_1$, 仍满足无环条件, 故 $\mathcal{L}_1$ 也有自己的下端. 将它们接下去记成 $\Lambda_{k_1+1}, \cdots, \Lambda_{k_2}$, 如此等等. 这样规定下标之后, 显然 $\Lambda_i \rightharpoonup \Lambda_j$ 蕴含 $i > j$. 定理 5.6 证完. ■

§5.3　无环与滤子

本节的内容属于拓扑动力系统. 命 X 为紧度量空间, $f: X \to X$ 为同胚.

称一个紧集 D 为一个**内陷区域**, 如果 $f(D) \subset \operatorname{int} D$. 注意内陷的“最终结果”

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n D$$

不一定是单点集. 对称地, $\overline{X - D}$ 是 f^{-1} 的一个内陷区域.

内陷区域的概念与链回归点的概念密切相关. 称 $x \in M$ 为 f 的一个**链回归点**, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限点列 $x_0, x_1, \cdots, x_k$, 使得

$$\mathrm{d}(f(x_n),\ x_{n+1}) < \varepsilon,$$

$n = 0, 1, \cdots, k-1$, 且 $x_0 = x_k = x$. 称 f 的链回归点的集合为**链回归集**, 记为 $\mathrm{CR}(f)$. 易见 $\mathrm{CR}(f)$ 为 f 的紧不变集, 且

$$\Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f).$$

若 D 为一内陷区域, 易见

$$D - \bigcap_{n \geq 0} f^n D$$

中的点都不是链回归的. Conley [Co] 发现反之亦然.

称有限个内陷区域的单调列为一个滤子. 换句话说, 所谓 f 的一个**滤子**是指有限个紧集的单调列 (见图 5.4)

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = X$$

使得

$$f(X_i) \subset \operatorname{int} X_i$$

对任意 $i = 0, \cdots, k$.

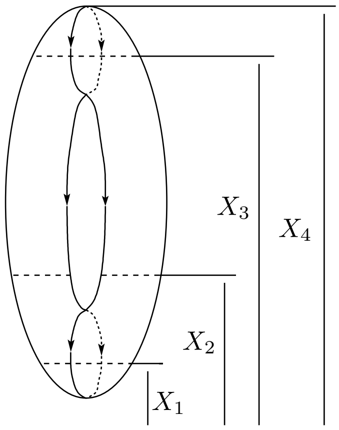

图 5.4 环面上的下行映射 f 的滤子

称 $X_i - X_{i-1}$ 为该滤子的**第 i 层**. 记

$$K_i = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i - X_{i-1})$$

为 f 在第 i 层中的极大不变集.

定理 5.7 (滤子性质定理) 设 $\{X_i\}_{i=0}^k$ 为 f 一滤子. 则 K_i 是以 $X_i - X_{i-1}$ 为隔离邻域的孤立紧不变集, 两两不相交, 满足无环条件, 且

$$\bigcup_{i=1}^{k} K_i \supset \mathrm{CR}(f).$$

证明 显然, K_i 为互不相交的不变集. 下面证明 K_i 为紧致、孤立的. 因 $f(X_i) \subset \mathrm{int}\, X_i$, 知

$$f^{n+1}(X_i) \subset f^n(\mathrm{int}\, X_i).$$

故

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\mathrm{int}\, X_i)$$

且

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\mathrm{int}\, X_i).$$

因

$$K_i = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i - X_{i-1}) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i) - \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_{i-1}),$$

故

$$\begin{aligned} K_i &= \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i - \operatorname{int} X_{i-1}) \\ &= \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\operatorname{int} X_i - X_{i-1}). \end{aligned}$$

由前一式知 K_i 为紧致. 由后一式知 K_i 为以 $X_i - X_{i-1}$ 为隔离邻域的孤立不变集.

设 $x \in X$ 的轨道跨越不同的层, 比如 $x \notin X_i$ 但 $f^m x \in X_i$. 则 $f^{m+1}x \in \operatorname{int} X_i$. 记

$$\delta = \mathrm{d}(\overline{X - X_i},\ f(X_i)) > 0.$$

易见不存在 $\delta/2$-伪轨从 x 到 x, 故 $x \notin \mathrm{CR}(f)$. 这证明

$$\bigcup_{i=1}^{k} K_i \supset \mathrm{CR}(f).$$

为证 $\{K_i\}$ 满足无环条件, 只需证明 $K_i \rightharpoonup K_j$ 蕴含 $i > j$. 显然 $K_i \rightharpoonup K_j$ 蕴含 $i \geq j$. 故只需证明不存在自己到自己的环 $K_i \rightharpoonup K_i$, 即证明 $x \in W^u(K_i) \cap W^s(K_i)$ 蕴含 $x \in K_i$. 设 $x \in W^u(K_i) \cap W^s(K_i)$. 易见 $\mathrm{Orb}^+(x) \subset X_i - X_{i-1}$, 否则 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 一旦进入 X_{i-1}, 则将永远留在 $\operatorname{int} X_{i-1}$ 中, 从而与 $x \in W^s(K_i)$ 矛盾. 类似地, $\mathrm{Orb}^-(x) \subset X_i - X_{i-1}$. 故 $\mathrm{Orb}(x) \subset X_i - X_{i-1}$. 但 K_i 为 $X_i - X_{i-1}$ 中的极大不变集, 故 $x \in K_i$. 定理 5.7 证完. ■

插入一个关于内陷区域的存在定理.

定理 5.8　设 A 为 f 的紧不变集, Q 为 A 一紧邻域, 使得

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n Q = A.$$

则存在 A 一紧邻域 $U \subset \operatorname{int} Q$ 满足 $fU \subset \operatorname{int} U$.

注 当然 $\cap_{n\geq 0} f^n U = A$.

证明 记

$$Q_k = Q \cap fQ \cap f^2Q \cap \cdots \cap f^kQ.$$

则 $Q_k \subset Q$ 是 A 的紧邻域,

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots Q_k \supset \cdots ,$$

且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = A.$$

易见存在 k_0, 使当 $k \geq k_0$ 时有

$$f(Q_k) = Q_{k+1}.$$

实际上, 因 $fA = A$, 存在 k_0, 使得对任意 $k \geq k_0$, $f(Q_k) \subset Q$. 故 $f(Q_k) = Q \cap f(Q_k) = Q_{k+1}$.

为简便, 记

$$P = Q_{k_0}.$$

显然存在 $m \geq 1$, 使得

$$f^m P \subset \operatorname{int} P.$$

让我们用 $B \to C$ 表示 $fB = C$, 用 $B \Rightarrow C$ 表示 $fB \subset \operatorname{int} C$ (这是临时的符号, 只在这个证明中使用). 那么

$$P \to fP \to f^2P \to \cdots \to f^{m-3}P \to f^{m-2}P \to f^{m-1}P \Rightarrow P.$$

由于 $B \Rightarrow C$ 是个 “开” 的条件, 可将 $f^{m-1}P$ 换成稍大的一个紧集 $B_{m-1} \subset \operatorname{int} Q$, 使得

$$P \to fP \to f^2P \to \cdots \to f^{m-3}P \to f^{m-2}P \Rightarrow B_{m-1} \Rightarrow P.$$

类似地, 可将 $f^{m-2}P$ 换成稍大的一个紧集 $B_{m-2}\subset \mathrm{int}Q$, 使得

$$P\to fP\to f^2P\to\cdots\to f^{m-3}P\Rightarrow B_{m-2}\Rightarrow B_{m-1}\Rightarrow P.$$

这样依次选取 $\mathrm{int}\,Q$ 中的紧集 $B_{m-1},B_{m-2},\cdots,B_1$, 使得

$$P\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_{m-3}\Rightarrow B_{m-2}\Rightarrow B_{m-1}\Rightarrow P.$$

令

$$U=P\cup B_1\cup\cdots\cup B_{m-1}.$$

则

$$A\subset \mathrm{int}\,U\subset U\subset \mathrm{int}\,Q,$$

且

$$fU\subset \mathrm{int}\,U.$$

定理 5.8 证完. ■

下一定理大体上是定理 5.7 的逆, 是拓扑动力系统的一个大范围结果.

定理 5.9 (滤子存在定理) 设 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_k$ 为 f 的有限个两两不交的紧不变集, 满足无环条件, 且

$$\bigcup_{i=1}^{k}\Lambda_i\supset \mathrm{L}(f).$$

则必要时重新规定 $\{\Lambda_i\}$ 的下标, 存在 f 的滤子 $\{X_i\}_{i=0}^{k}$, 使得对每一 $i=1,\cdots,k$ 有

$$K_i=\Lambda_i.$$

证明 由定理 5.6, 可重新规定 $\{\Lambda_i\}$ 的下标, 使得

$$\Lambda_i\rightharpoonup\Lambda_j\quad 蕴含\quad i>j.$$

对每一 i, 取 Λ_i 在 X 中的紧邻域 U_i, 使得对任意 $i\neq j$ 有

$$U_i\cap U_j=\emptyset,\quad f(U_i)\cap U_j=\emptyset.$$

断言 1 对任何 $i, j = 1, \cdots, k$,

(a) 若 $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j) \neq \emptyset$, 则 $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$.

(b) 若 $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, 且若 $i \neq j$, 则 $\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) - \Lambda_j) \neq \emptyset$.

先看 (a). $\overline{W^u(\Lambda_i)}$ 为 f 的闭不变集, 故若包含一点 $x \in W^u(\Lambda_j)$, 则必包含 $\alpha(x) \subset \Lambda_j$.

再看 (b). 设 $x \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j$. 则存在 $x_m \in W^u(\Lambda_i) \cap U_j$, $m = 1, 2, \cdots$, 使得 $x_m \to x$. 但 $i \neq j$, 故对任意 $m \geq 1$, 存在 $n_m \geq 1$, 使得

$$x_m, f^{-1}(x_m), \cdots, f^{-n_m+1}(x_m) \in U_j,$$

但

$$f^{-n_m}(x_m) \notin U_j$$

(见图 5.5). 那么

$$z_m = f^{-n_m}(x_m) \in f^{-1}(U_j) - U_j \subset f^{-1}(U_j) - \operatorname{int} U_j.$$

因 $x \in \Lambda_j$, 知

$$n_m \to +\infty.$$

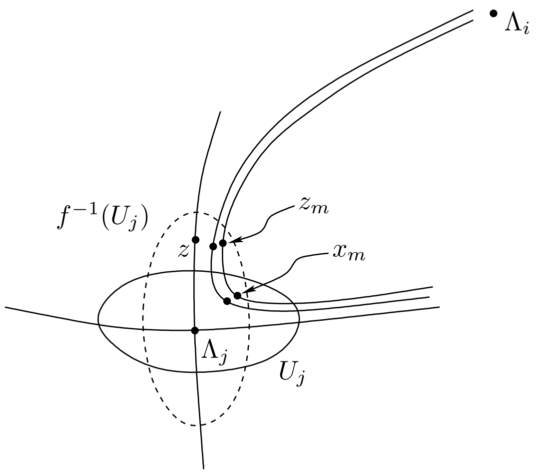

图 5.5 断言 1 (b) 的证明

在紧集 $f^{-1}(U_j)-\operatorname{int}U_j$ 中取 $\{z_m\}$ 的一个极限点 z. 则 $z\in\overline{W^u(\Lambda_i)}-\Lambda_j$. 只需证 $z\in W^s(\Lambda_j)$. 因 z_m 的从第 1 到第 n_m 次迭代都包含在 U_j 中, 且 $n_m\to+\infty$, 知对所有 $n\geq 1$ 有 $f^nz\in U_j$. 因

$$\bigcup_{l=1}^{k}\Lambda_l\supset \mathrm{L}(f),$$

而 U_j 与其他 U_l 不相交, 故 $\omega(z)\subset\Lambda_j$, 从而 $z\in W^s(\Lambda_j)$. 断言 1 证完.

对每一 $i=1,\cdots,k$, 记

$$A_i=\bigcup_{m\leq i}W^u(\Lambda_m),\quad B_i=\bigcup_{m\leq i}W^s(\Lambda_m).$$

下一断言说, 每一 A_i 为 "吸引子", 而 B_i 为其 "吸引盆".

断言 2　对每一 $i=1,\cdots,k$,

(a) A_i 为紧不变集, B_i 为开不变集.

(b) $A_i\subset B_i$.

(c) 对任意紧集 Q, $A_i\subset Q\subset B_i$, 总有

$$\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)=A_i.$$

先看 (a). 我们来证明 A_i 为 X 的闭子集. 任取 $m\leq i$. 要证

$$\overline{W^u(\Lambda_m)}\subset A_i.$$

反设不成立. 则由定理 5.4, 存在 $j>i$, 使得

$$\overline{W^u(\Lambda_m)}\cap W^u(\Lambda_j)\neq\emptyset.$$

由断言 1, 存在 $z\in\overline{W^u(\Lambda_m)}\cap(W^s(\Lambda_j)-\Lambda_j)$. 由定理 5.4, 存在 r, 使得 $z\in W^u(\Lambda_r)$, 从而

$$\overline{W^u(\Lambda_m)}\cap W^u(\Lambda_r)\neq\emptyset.$$

易见 $z\notin\Lambda_r$. 故 $\Lambda_r\rightharpoonup\Lambda_j$. 由下标的规定知 $r>j$. 归纳地, $\overline{W^u(\Lambda_m)}$ 将与有任意大下标 r 的 $W^u(\Lambda_r)$ 相交, 矛盾. 故 A_i 为 X 的闭子集.

将 f 换成 f^{-1} 即知 $\cup_{m\geq i+1}W^s(\Lambda_m)$ 为 X 的闭子集. 由定理 5.4, $\cup_{m\leq i}W^s(\Lambda_m)$ 为 X 的开子集. 这就证明了 (a).

再看 (b). 任取 $m \leq i$. 要证

$$W^u(\Lambda_m) \subset B_i.$$

反设不成立, 则由定理 5.4, 存在 $j > i$ 使得

$$W^u(\Lambda_m) \cap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset.$$

因 $m \neq j$, 故 $\Lambda_m \rightharpoonup \Lambda_j$. 这与下标的规定矛盾. 这就证明了 (b).

最后看 (c). 任取紧集 Q, $A_i \subset Q \subset B_i$. 由 A_i 和 B_i 的定义, 知

$$Q \supset \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_i,$$

且

$$Q \cap (\Lambda_{i+1} \cup \cdots \cup \Lambda_k) = \emptyset.$$

为证 (c), 只需证

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q) \subset A_i.$$

任取 $x \in \bigcap_{n\geq 0} f^n(Q)$. 则对所有 $n \geq 0$ 有 $f^{-n}x \in Q$. 故 $\alpha(x) \subset Q$. 因

$$Q \cap (\Lambda_{i+1} \cup \cdots \cup \Lambda_k) = \emptyset,$$

知

$$\alpha(x) \subset \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_i.$$

也即

$$x \in A_i.$$

这就证明了 (c), 也就证明了断言 2.

现在来完成定理 5.9 的证明. 对任意 $i = 1, \cdots, k$, 取紧集 Q_i 满足

$$A_i \subset \operatorname{int} Q_i \subset Q_i \subset B_i.$$

由断言 2,

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i) = A_i.$$

由定理 5.8, 不妨设

$$fQ_i \subset \operatorname{int} Q_i.$$

令

$$X_i = \bigcup_{m\leq i} Q_m.$$

显然

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = X$$

是 f 的一个滤子. 由上述 Q_i 的类似性质知

$$X_i \supset \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_i,$$

且

$$X_i \cap (\Lambda_{i+1} \cup \cdots \cup \Lambda_k) = \emptyset.$$

故

$$X_i - X_{i-1} \supset \Lambda_i,$$

且

$$(X_i - X_{i-1}) \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad \forall\ j \neq i.$$

还需证明 $K_i = \Lambda_i$. 因 K_i 为 $X_i - X_{i-1}$ 中的极大不变集, 知 $\Lambda_i \subset K_i$. 只需证明 $K_i \subset \Lambda_i$. 任取 $x \in K_i$. 则

$$\omega(x) \cup \alpha(x) \subset K_i \subset X_i - X_{i-1}.$$

因

$$(X_i - X_{i-1}) \cap \Lambda_j = \emptyset, \quad \forall\ j \neq i,$$

且

$$\mathrm{L}(f) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j,$$

知

$$\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \Lambda_i.$$

也即

$$x \in W^s(\Lambda_i) \cap W^u(\Lambda_i).$$

因 $\{\Lambda_i\}$ 满足无环条件, 得 $x \in \Lambda_i$. 这证明 $K_i \subset \Lambda_i$. 定理 5.9 证完. ■

定理 5.10 *设 $\mathrm{L}(f)$ 分解为有限个两两不交的紧不变集的并*

$$\mathrm{L}(f) = L_1 \cup \cdots \cup L_k,$$

满足无环条件. 则 $\mathrm{L}(f) = \mathrm{CR}(f)$.

证明 只需证 $\mathrm{L}(f) \supset \mathrm{CR}(f)$. 由定理 5.9, 必要时重新规定下标, 可设存在 f 的滤子, 使得

$$K_i = L_i.$$

由定理 5.7,

$$\mathrm{L}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} L_i = \bigcup_{i=1}^{k} K_i \supset \mathrm{CR}(f).$$

定理 5.10 证完. ■

§5.4 Ω-稳定性定理

在本书的最后我们证明 Smale 的如下结果:

定理 5.11 (Ω-稳定性定理) *设 M 为一紧致无边流形, $f: M \to M$ 为一微分同胚. 若 f 满足公理 A 且基本集满足无环条件, 则对任意 $r \geq 1$, f 为 C^r Ω-稳定.*

证明 只需证明 f 为 C^1 Ω-稳定. 下面证明 f 实际上为 C^1 ε-Ω-稳定. 因 f 满足公理 A, 由定理 5.3, $\Omega(f)$ 分解为基本集

$$\Omega_1, \cdots, \Omega_k.$$

因 $\{\Omega_i\}$ 满足无环条件, 由定理 5.9, 必要时重排下标, 存在 f 的滤子

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = M$$

使得

$$\Omega_i = K_i \equiv \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(X_i - X_{i-1}).$$

由定理 5.7, Ω_i 是 f 的以 $X_i - X_{i-1}$ 为隔离邻域的孤立不变集.

因 $f(X_i) \subset \operatorname{int} X_i$ 是一个 “开” 条件, 存在 f 的 C^0 邻域 $\mathcal{U}_0$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}_0$, $\{X_i\}_{i=0}^k$ 也是 g 的滤子. 从而

$$K_i(g) \equiv \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} g^n(X_i - X_{i-1})$$

是以 $X_i - X_{i-1}$ 为隔离邻域的孤立不变集.

设 $\varepsilon > 0$ 给定. 由定理 4.23, 存在 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ 使得对任意 $g \in \mathcal{U}$ 和任意 $i = 1, \cdots, k$, 存在同胚

$$h_i : K_i \to K_i(g)$$

使得

$$h_i f = g h_i, \quad \mathrm{d}(h_i, id) \le \varepsilon.$$

这些 h_i 合起来给出一个 ε-拓扑共轭

$$h : \Omega(f) \to \bigcup_{i=1}^{k} K_i(g).$$

只需证明

$$\bigcup_{i=1}^{k} K_i(g) = \Omega(g).$$

因 $\{X_i\}_{i=0}^k$ 是 g 的滤子, “$\supset$” 部分由定理 5.7 保证. 而 “$\subset$” 部分是因为

$$\bigcup_{i=1}^{k} K_i(g) = h(\Omega(f)) = h(\overline{P(f)}) = \overline{h(P(f))} \subset \overline{P(g)} \subset \Omega(g).$$

定理 5.11 证完. ■

应该注意, 上面的 “$\subset$” 之所以成立, 理由不能说成, h 为从 $\Omega(f)$ 到 $\cup_{i=1}^k K_i(g)$ 的拓扑共轭, 而 “拓扑共轭保持非游荡集”. 这是因为, h 仅仅定义在 $\Omega(f)$ 上, 故它所保持的 “非游荡集” 其实是 $\Omega(f|_{\Omega(f)})$, 而这个集合一般与 $\Omega(f)$ 不同.

习　题

1. 构造一个双曲集 Λ 使得

$$W^s(\Lambda) \neq \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x).$$

2. 设 p, $q \in M$ 为 f 的双曲周期点. 称 p 和 q **同宿相关**, 如果 $W^s(\mathrm{Orb}(p))$ 与 $W^u(\mathrm{Orb}(q))$ 有横截相交点, 且 $W^u(\mathrm{Orb}(p))$ 与 $W^s(\mathrm{Orb}(q))$ 也有横截相交点. 称与 p 同宿相关的周期点的集合的闭包为 p 的**同宿类**, 记为 $H(p,f)$. 证明:

(1) $H(p,f)$ 为传递集.

(2) 若 $H(p,f)$ 不退化为一条周期轨道, 则 $H(p,f)$ 等于 p 的横截同宿点集的闭包.

3. 证明: 公理 A 系统的每个基本集都是一个同宿类.

4. 设 $\Omega_i = \overline{P}_{i_1} \cup \cdots \cup \overline{P}_{i_r}$ 为谱分解定理证明中的循环并. 证明: f^r 限制在每一 $\overline{P}_{i_j}$ 上为拓扑混合.

5. 设 Λ 为一公理 A 系统的一个基本集. 设 p 为 Λ 的一个周期点. 证明: $W^s(\mathrm{Orb}(p))$ 在 $W^s(\Lambda)$ 中稠密. 类似地, $W^u(\mathrm{Orb}(p))$ 在 $W^u(\Lambda)$ 中稠密.

6. 可以定义整体马蹄映射 $f: S^2 \to S^2$ 使得 $\Omega(f)$ 恰为马蹄集 Λ 再加下半球面的一个双曲源点和上半球面的一个双曲汇点. 验证 f 满足公理 A 和无环条件. 描述 f 的一个滤子.

称 f 的紧不变集 $\Lambda \subset M$ 为**李雅普诺夫稳定**, 如果对 Λ 的任意邻域 U, 存在 Λ 的邻域 $V \subset U$ 使得对任意 $x \in V$ 和任意 $n \geq 0$, 有 $f^n(x) \in U$. 又称 f 的紧不变集 $\Lambda \subset M$ 为**吸引的**, 如果存在 Λ 的一个邻域 U 使得 $\Lambda = \cap_{k\geq 0} f^k(U)$ (这时, 由定理 5.8, 可假设 $f(U) \subset \mathrm{int}(U)$).

7. 证明: 任意吸引集为李雅普诺夫稳定的. (反之不然.)

8. 构造一个紧不变集 Λ, 有一紧邻域 U 使得对任意 $x \in U$ 有 $\omega(x) \subset \Lambda$, 但 Λ 不是吸引集.

9. 设 Λ 为李雅普诺夫稳定. 证明: 对任意 $x \in \Lambda$ 有 $W^u(x) \subset \Lambda$.

10. 设 Λ 为李雅普诺夫稳定. 假设 Λ 有一邻域 U 使得对任意 $x \in U$, $\omega(x) \cap \Lambda \neq \emptyset$. 证明: Λ 是吸引集.

11. 设 Λ 为李雅普诺夫稳定. 假设 Λ 为双曲集, 证明: Λ 是吸引集.

12. 设 $p \in M$ 为 f 的双曲周期点. 证明: 若 $x \in \overline{W^s(\mathrm{Orb}(p))} \cap \overline{W^u(\mathrm{Orb}(p))}$, 则 $x \in \Omega(f)$. 并且, 若 p, q 为同宿相关的双曲周期点, 且 $x \in \overline{W^s(\mathrm{Orb}(p))} \cap \overline{W^u(\mathrm{Orb}(q))}$, 则 $x \in \Omega(f)$.

13. 设 $p \in M$ 为 f 的双曲周期点. 证明: 若 $\overline{W^s(\mathrm{Orb}(p))} = \overline{W^u(\mathrm{Orb}(p))} = M$, 则 f 为传递. 若进一步, $p \in M$ 为不动点, 则 f 为混合.

14. 设 $F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ 为一斜积型的, 即形如 $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$ (“保纤维”) 的微分同胚. 记 $0 \in \mathbb{T}^2$ 为点 $\pi(0)$, 其中 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为 §3.3 定义的覆叠映射. 证明: 如果 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 和 $g_0 = g(0, \cdot) : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 都是 Anosov 环面同构, 则 F 为拓扑混合的.

称两个点 x 和 y **链等价**, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 有 ε-伪轨从 x 到 y, 也有 ε-伪轨从 y 到 x. 链回归集 $\mathrm{CR}(f)$ 在这一等价关系下分成**链回归类**.

15. 证明: 每一链回归类为紧致不变集.

16. 构造一个微分同胚, 具有无穷多个链回归类.

17. 证明: 在任何有限个链回归类之间都不存在环.

18. 设 Λ 为一链回归类或一同宿类. 如果 Λ 为双曲集, 证明: Λ 为孤立不变集.

称双曲集 Λ 有**匀齐指标**, 如果对所有 $x \in \Lambda$, 双曲分解 $E^s(x) \oplus E^u(x)$ 中的 $\dim E^s(x)$ 为常数. 称这一常数为 Λ 的**指标**.

19. 设 $y \in M$. 若 $\omega(y)$ 为双曲集, 则 $\omega(y)$ 有匀齐指标.

20. 设 Λ_1 和 Λ_2 为指标不同的两个传递的双曲集. 假设 Λ_1 和 Λ_2 之间有一个环. 证明: $\mathrm{CR}(f)$ 不是双曲集.

21. 称 $x \in M$ 为双曲周期点 $p \in M$ 的一个**同宿切点**, 如果 $W^s(\mathrm{Orb}(p))$ 和 $W^u(\mathrm{Orb}(p))$ 非横截地相交于 x. 证明: 如果 f 有一同宿切点, 则 $\Omega(f)$ 不是双曲集.

22. 证明: 公理 A 系统的基本集之间不存在 1-环, 即对任意基本集 Λ, $W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda) = \Lambda$.

23. 设 f 为公理 A 系统. 证明: 每一基本集是孤立双曲集.

24. 设 $f: M \to M$ 为 Anosov 微分同胚. 若 $\mathrm{CR}(f) = M$, 证明: f 为传递 (总假定 M 连通).

25. 设 $f: M \to M$ 为 Anosov 微分同胚. 证明: f 满足公理 A.

参考文献

[A] Anosov D V. (1967) Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, Proceedings of Steklov Institute of Mathematics, **90**. Amer. Math. Soc. translation 1969.

[B] Banks J, Brooks J, Cairns G, Davis G, Stacey P. (1992) On Devaney's definition of chaos, *Amer. Math. Monthly*, **99**, 332–334.

[BD] Bonatti C, Diaz L. (2003) On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES*, **96**, 171–197.

[Co] Conley C. (1978) Isolated invariant sets and Morse index, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[Cr] Crovisier S. (2001) Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334** (5), 401–404.

[D] Denkner A. (1978) On Smale's axiom A dynamical systems, *Ann. Math.*, **107**, 517–553.

[F] Franks J. (1982) *Homology and Dynamical Systems*, Conference Board Math. Science, **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[G] Guckenheimor J, Moser J, Newhouse N. (1980) *Lectures on Dynamical Systems*, Progress in Math. Birkhauser, **8**, 1–114.

[HPS] Hirsch M, Pugh C, Shub M. (1977) *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. 583, Springer-verlag.

[I] Irwin M. (1980) *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press.

[KH] Katok A, Hasselblatt B. (1994) *Introduction to the Modern Theory of Smooth Dynamical Systems*, Cambridge University Press.

[L] Liao S. (1996) *Qualitative Theory of Differentiable Dynamical Systems*, Science Press, China.

[M] Massey W. (1967) *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt-Brace-World.

[N] Nitecki Z. (1971) *Differentiable Dynamics*, M.I.T. Press, Cambridge.

[PM] Palis J, de Melo W. (1982) *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction*, Springer-Verlag.

[P] Piliugin S. (1999) *Shadowing in Dynamical Systems*, Lecture Notes in Math., **1706**, Springer-Verlag.

[R] Robinson C. (1994) *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press.

[Ru] Ruding W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Companies, Inc.

[S] Shub M. (1987) *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag.

[Sm1] Smale S. (1967) Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817.

[Sm2] Smale S. (1980) *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics*, Springer-Verlag.

[Sz] Szlenk W. (1984) *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*, John Wiley & Sons.

[W] Walters P. (1982) *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag.

[Z] 张筑生. (1987) 微分动力系统原理, 北京: 科学出版社.

[ZQ] 张锦炎, 钱敏. (1991) 微分动力系统导引, 北京: 北京大学出版社.

[ZH] 朱德明 , 韩茂安. (1993) 光滑动力系统, 上海: 华东师范大学出版社.

名词索引