ODE Stduy Notes

颜成子游

2022 年 11 月 7 日

目录

1 引论 **2**

1.1 一阶微分方程式 2

1.2 解的存在性和唯一性 2

1.3 一些初等的求积分方法 3

1.3.1 $\dot{x} = f(t), t \in (a, b)$ 3

1.3.2 $\dot{x} = g(x), x \in (a, b)$ 3

1.3.3 $\dot{x} = f(t)g(x), a < t < b, c < x < d$ 3

1.3.4 齐次方程:$\dot{y} = h(\frac{y}{t})$ 4

1.4 存在性与唯一性定理的叙述 4

1　引论

这一章将给出这本书会涉及到的基础概念；以及几种最简单的微分方程的解法。最后讨论了复值函数的微分方程和它们的复值解，以及一些线性微分方程的最简单的知识。

1.1　一阶微分方程式

微分方程是指这样的方程：其中未知的是单变量或者多变量的（一个或者几个）函数，且方程中不仅含有函数本身，还含有它们的导函数；如果未知数是多变量函数，则称为**偏微分方程**；否则，则称为**常微分方程**。ODE 即"Ordinary Differential Equation"。

首先讨论一阶的情况，此时，方程可以写为：

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

由此，我们首先应该考虑 F 的定义域 B。这里的定义域指的是三个变量 $t, x.\dot{x}$ 所构成的空间。当 $r_1 < t < r_2$ 时，解的解：$\varphi(t)$ 必须满足以上的定义域。

如果分离变量，由隐函数定理：

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

我们假定 $f(t, x)$ 的定义域 Γ 是开集, 并且 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 是连续的。这将有利于之后的研究。

从方程(**??**)解出来的函数 $\varphi(t) = x$ 所对应的曲线称为**积分曲线**。

1.2　解的存在性和唯一性

显然微分方程的解可以有无数多个的情况。因此我们应当讨论如何描述出微分方程所有的解的集合。我们不加证明给出**存在和唯一性定理**:

定理 1.1 给定微分方程

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2}$$

假设函数 $f(x, t)$ 在变量 (t, x) 平面 P 的某一个开集 Γ 上有定义，并且在整个开集 Γ 上函数 f 本身及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 都是 t, x 的连续函数；那么，我们断定：

1 对于集合 Γ 的任意一个点 (t_0, x_0)，方程(2)都存在解 $x = \varphi(t)$，它满足:

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{3}$$

2 如果方程有两个解，只要它们在某一个值 $t = t_0$ 处是一样的，也就是如果满足

$$\psi(t_0) = \chi(t_0)$$

那么对于两者都有定义的变量 t 值，它们是恒等的。

证明留在很久后给出。

定理1.1的几何含义：通过集合 Γ 的每一点 (t_0, x_0)，有且只有一条满足方程积分曲线经过方程(**??**)。

在实际问题中，我们必须考虑到 t 的定义区间。定理只表明在定义区间的相同地方，不同解的值会是相同的。但是并没有说明定义区间必须完全相同。

记 $\psi(t)$ 和 $\chi(x)$ 的定义区间分别为：$r_1 < t < r_2$，$s_1 < t < s_2$，并且前者完全包含了后者，那么我们说 $\psi(t)$ 是 $\chi(x)$ 的延拓。

对于同一个初值，其拥有最大定义区间的解称为**不可延拓**的解。容易看出来，如果使用图来描述，那么不可延拓的解是集合 Γ 里面所能包含的最长曲线。

任何积分曲线 $x = \varphi(x)$ 在它的每一个点的切线可以写为：

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$$

这是微分方程(1)的几何解释。

1.3 一些初等的求积分方法

这些方法在最后的理解上都不难。我们最需要关注的是解的存在区域 (a<t<b) 此类。一种可能出现的情况是，几个解可以用一个式字表示，但是由于他们的存在范围是分开不连通的，因而不是一个解。

1.3.1 $\dot{x} = f(t), t \in (a, b)$

无慈悲的讲，这个方程小学生都会。唯一要注意的是，解写为：

$$x = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + c$$

$t_0 \in (a, b)$ 是最合适的。此时可以完美解决定义域的问题。

1.3.2 $\dot{x} = g(x), x \in (a, b)$

不考虑定义域的话，这个方程将是简单的。这里我们假定 $g(x)$ 拥有连续的导函数，以便于使用唯一性定理。

此时直接积分：

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)}$$

这要求 $g(x) \neq 0$ 这是自然的。因为如果有 x_0：$g(x_0) = 0$。那么 $x = x_0$ 是一个解。根据存在唯一性，此时 $x = x_0$ 是唯一解。同时，$g(x) \neq 0$ 也表明 $g(x)$ 不变号。于是上面的方程可以给出反函数。

因此该方程的初值决定了 $g(x)$ 的正负性。在不同的正负区间，解的曲线是不同的。

1.3.3 $\dot{x} = f(t)g(x), a < t < b, c < x < d$

直接分离变量积分即可。注意我们要求 f 连续，g 连续可导。同样要求 $g \neq 0$. 这样同样可以给出反函数。

1.3.4 齐次方程:$\dot{y} = h(\frac{y}{t})$

换元 $x = \frac{y}{t}$。即可得到一个变量可分离的方程。此时 x 的范围为 h 所规定的范围。

例 1.1 求解:

$$\dot{x} = \frac{x^2 - 1}{2}$$

证明 我们把 x 的存在区间分为 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$。容易知道 $-1, 1$ 时解为 $x = -1, x = 1$。

此时 $\frac{x^2-1}{2}$ 符号固定。可以直接分离参量求解。我们得到:

$$x = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

c 的取值决定了解的图像。若 $c > 0$,其确定了谅解,一个定义在 $-\infty < t < -\ln c$ 上,一个定义在 $-\ln c < t < +\infty$ 上。取值分别为 $x > 1$ 和 $x < -1$。

若 $c > 0$,其确定了一个解。x 取值为 $-1 < x < 1$。 □

最后,我们说明如果 $\dot{x} = f(x, t)$ 中的 $f(x, t)$ 不满足在区域 Γ 内连续,对 x 偏导连续,那么唯一性可能不存在。

例 1.2

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$$

证明 这个方程的在初值 $(0, 0)$ 处可以有两个解:

$$x = 0$$

$$x = t^3$$

1.4 存在性与唯一性定理的叙述

我们在本节展开叙述存在与唯一性定理的一般情况。证明不会给出。

定理 1.2 (存在性与唯一性定理) 考虑常微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n$$

设 f_i 有一个公共的区域 Γ 作为定义域。这是一个开集。

若 f_i 与 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都连续,那么对于 Γ 中的每个初值 $(t_0, \vec{x}_0)$,都存在唯一的积分曲线满足其是微分方程的解。

我们首先注意到,若 $G \subseteq \mathbf{R}$ 为开集,则 $f^{-1}(G)$ 为 F_σ 集事实上,由于 R 中的开集 G 是可数个构成区间的并,故不妨设 G 是一个开区间 (a, b). 而我们知道

$$\{x | f_k(x) \geq a + \varepsilon\}$$

是闭集,由于 $f_k(x)$ 的连续性,从而

$$\{x | f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{x | f_k(x) \geq a + \frac{1}{n}\right\}$$

是 F_σ 集. 同理 $\{x|f(x)<b\}$ 也是 F_σ 集合. 而他们的交集

$$f^{-1}((a,b))=\{x|f(x)>a\}\bigcap\{x|f(x)<b\}$$

也是 F_σ 集. 为了证明 $f(x)$ 的连续点是稠密的 G_δ 集，我们只要证 $f(x)$ 的不连续点是没有内点的 F_σ 集. 记 $D(f)$ 为 $f(x)$ 的不连续点集合，任意的 $a\in D(f)$, 存在 $p,q\in\mathbf{Q}$ 使得

$$p<f(a)<q$$

$$\Leftrightarrow \qquad a\in f^{-1}((p,q))$$

$$a\notin f^{-1}(R-(p,q))$$

而存在点列 $\{a_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\qquad f(a_n)\notin(p,q)$$

$$\Leftrightarrow \qquad a_n\notin f^{-1}(p,q)$$

$$\Leftrightarrow \qquad a_n\in f^{-1}(R-(p,q)),\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

于是

$$a\in\overline{f^{-1}(R-(p,q))}-f^{-1}(R-(p,q))$$

所以

$$D(f)=\bigcup_{p<q,p,q\text{ 为有理数}}[\overline{f^{-1}(R-(p,q))}-f^{-1}(R-(p,q))]$$

而 $f^{-1}(R-(p,q))$ 为 G_δ 集，故

$$\overline{f^{-1}(R-(p,q))}-f^{-1}(R-(p,q))$$

为 F_σ 集. 并且 $\overline{f^{-1}(R-(p,q))}-f^{-1}(R-(p,q))=\partial f^{-1}(R-(p,q))$ 是没内点的. 它是可数个无内点的闭集的并，所以 $D(f)$ 也是可数个无内点的闭集的并。由 Baire 定理，$D(f)$ 是无内点的 F_σ 集. 所以 $R^n\setminus D(f)$ 是稠密集合.

从这个结论可以看出，导函数的连续点也是稠密的，只要注意到

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

就好.