Note For Complex Geometry

整理者：Tsechi/Tseyu

2023 年 9 月 28 日

目录

1 复几何初探

本章的主要来源是陈先生在教材《微分几何》中复流形一章的内容。我们将给出一些基础的概念。

1.1 复流形的定义

定义 1.1 设 M 是具有可数基的 Hausdorff 空间。若在 M 上给定了坐标卡 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 使得 $\{U_\alpha\}$ 是开覆盖，且 φ_α 是从 U_α 到 $\mathbb{C}^m$ 的同胚，并且满足转移映射是 $\mathbb{C}_m$ 之间的全纯映射，则称 M 是 m 维复流形。

多元复函数全纯意指:

命题 1.1 下面三个条件是彼此等价的。

1.f 是多元全纯函数。（对每个分量都满足柯西黎曼方程）。

2. 对于任意 $a \in U$, 存在邻域 $V \subset U$ 使得 f 在 V 可以表示为收敛的幂级数:

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_m}(z^1 - a^1)^{k_1}\ldots(z^m - a^m)^{k_m}$$

3. 复导数 $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 在 U 中处处存在。(对于任何分量 z^k)

考虑转移函数 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$。其是同胚，从而 Jacobi 矩阵:

$$\frac{\partial(w^1, \ldots, w^m)}{\partial(z^1, \ldots, z^m)} \neq 0 \tag{1}$$

实际上，我们可以计算 $m = 2$ 的情况，以思考该矩阵的行列式和 4 维实矩阵行列式的关系。该矩阵的行列式的模长实际上是对应的是实 $2m$ 维的 Jacobi 行列式。

设 $f: M \to \mathbb{C}$ 是复流形上的全纯函数（限制在每个坐标邻域上都是全纯的）。根据极大模原理，若 $p_0 \in M$ 的一个邻域 U 内 f 在 p_0 的模取得最大值，即 $|f(p)| \leq |f(p_0)|$, 则在 U 内有:

$$f(p) = f(p_0)$$

如果 M 是紧致的连通复流形，$|f(p)|(p \in M)$ 是 M 上的连续函数。他必然在 M 上取得最大值，于是全纯函数 f 必然取常数。

例 1.1 $\mathbb{C}_m$ 是 m 维复流形，$\mathbb{C}_1$ 是 Gauss 复平面。

例 1.2 复 m 维射影空间 $\mathbb{C}P^m$。

构造这个空间的复结构的方法和 $\mathbb{R}P^m$ 的方法一模一样。在变换中，由于转换映射是分式，所以全纯函数。（分母不等于 0）

考虑一些 m 较小的情况。如 $m = 1$，此时 $\mathbb{C}P^1$ 被两个坐标邻域 U_0, U_1 覆盖。因此 $\mathbb{C}P^1$ 是 Gauss 复平面的一点紧化:S^2。

考虑自然的投影 $\pi : \mathbb{C}_{m+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^m$。则对于 $p \in \mathbb{C}P^m$ 有 $\pi^{-1}(p)$ 与 $C^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 等同。显然根据局部坐标，有:

$$\pi^{-1}(U_j) = U_j \times C^*$$

可以验证转移函数都是全纯的。因此 $\mathbb{C}^m$ 是 $\mathbb{C}P^m$ 上全纯的纤维丛。

我们可以把上述纤维做一些变化。考虑 S^{2m+1} 到 $\mathbb{C}P^m$ 的投影。则纤维转化为 S^1。这称为 Hopf 纤维化。

当 $m = 1$,$\pi : S^3 \to S^2$ 是一个重要的映射。这是一个非零伦的映射。因为根据同伦正合，$\pi_n(S^3)$ 和 $\pi_n(S^2)$ 是由 π 给出的同构。

例 1.3 由一组齐次多项式 $P(z^1, \ldots, z^m) = 0$ 给出的轨迹在 $\mathbb{C}P^m$ 中被称为代数流形。周炜良的一个定理说，隐蔽在 $\mathbb{C}P^m$ 的每一个紧致子流形必是一个代数流形。

例 1.4 (复环面) 将 $\mathbb{C}^m$ 看作 $\mathbb{R}^{2m}$ 所得到的实流形具有复结构, 称为 m 维复环面。

复结构给出了复环面更多的性质。如 $m = 1$ 时，复环面到自身的全纯映射是保角的。

若复环面可以嵌入到复射影空间作为非奇异子流形，即对于充分大的 N，存在非退化的全纯映射：

$$f : \mathbb{C}_m / L \to \mathbb{C}P^N$$

则称该复流形为 Abel 流形。

例 1.5 (Hopf 流形) 考虑 $\mathbb{C}_m - \{0\} \to \mathbb{C}_m - \{0\}$, 将 $(z^1, \ldots, z^m)$ 映射为 $2(z^1, \ldots, z^m)$。商空间 $\mathbb{C}^m - \{0\}$ 商去这个映射生成的等价关系得到的流形是 m 维复流形。其与 $S^{2m-1} \times S^1$ 同胚。

Hopf 流形是最简单的非代数流形。

例 1.6 (黎曼曲面) 设 M 是二维定向曲面，有度量:

$$ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$$

假定 ds^2 是解析的，则:

$$ds^2 = (\omega_1 + i\omega_2)(\omega_1 - i\omega_2)$$

可以对 $\omega_1 + i\omega_2$ 积分，得到:

$$dz = \lambda(\omega_1 + i\omega_2)$$

于是 $ds^2 = \dfrac{1}{|\lambda|^2} dz d\bar{z} = \dfrac{1}{|\lambda|^2}(dx^2 + dy^2)$

二维定向曲面必定有复流形构造，使其成为一维复流形。这称之为黎曼曲面。

1.2 复结构与近复结构

这一节我们简要说明，当给出实线性空间 V 的时候，如何定义上面的复结构。从而如果实流形的切空间总能有复结构的时候，称之为其上的近复结构。

1.2.1 线性空间的复结构

定义 1.2 设 V 是 m 维实线性空间。所谓 V 上的复结构是指线性变换 $J : V \to V$，使得 $J^2 = -\mathrm{id}$。如果 V 上有复结构 J，可以自然诱导 V^* 上的复结构:

$$\langle x, J\alpha \rangle := \langle Jx, \alpha \rangle$$

容易验证 $J^2\alpha = -\alpha$。

选取 V 的一组基底 e_r，设 J 对应的矩阵 $A = (a_i^j)$。于是 $A^2 = -I$。于是矩阵有最小多项式 $x^2 + 1 = 0$。因此 A 的特征值只可能为 $i, -i$，且必须成对出现。因此 $m = 2n$ 是偶数。

根据线性代数知识，若 e^{*r} 是对偶的 V^* 基底，则可以得到:$J(e^{*r})^t = {}^tA(e^{*r})^t$. 所以 V^* 上的 J 矩阵拥有与 A 相同的特征值。

现在考虑 V^* 的复化:$V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。显然复化后，其中的元素可以写为:$\lambda = \alpha + i\beta$. 于是 V^* 的基底自然成为复线性空间 $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 的基底。V^* 的复结构也可以延拓到 $V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 上.

现在复化空间上必然存在 i 和 $-i$ 的特征向量。i 的特征向量称为 $(1,0)$ 元素，而 $-i$ 的特征向量称为 $(0,1)$ 元素。显然全体 $(1,0)$ 元素组成了子复空间，记作 V_c. 另一个则记为 $\overline{V_C}$。我们断言，把 $(1,0)$ 型向量取共轭，会得到 $(0,1)$ 向量。这里省略断言的证明。

另一方面，任何一个复向量都可以写为两类向量的和。因此这是一个直和。

$$f = f_1 + f_2, f_1 = \frac{1}{2}(f - iJf), f_2 = \frac{1}{2}(f + iJf)$$

所以两个空间都是 $m/2$ 维复向量空间。

现在考虑一些新的东西。在子空间 V_C 上选取一组基底，以及与之对应的共轭基底。在这组基下，J 的矩阵为 $\mathrm{diag}(i, i, \ldots, i, -i, -i, \ldots, -i)$。

现在考虑 V 上的复值线性函数。设 λ^i 是 V_c 的基，则设 $\lambda^i = e^{*i} + ie^{*n+i}$. 根据 λ^i 对应的特征值是 i，我们有:

$$Je^{*j} = -e^{*n+j}, Je^{*n+j} = e^{*j}$$

显然 e^{*j} 和 e^{*n+j} 可以生成 λ^j 和 λ^j 的共轭，因此他们也生成了整个 V^*。换句话说，是 V^* 的一组基。

设 e_j, e_{n+j} 是 V 中对偶上述基的基。则:

$$Je_j = e_{n+j}, Je_{n+j} = -e_j$$

定理 1.1 拥有复结构的实向量空间一定是偶数维的。并且这样的空间可以赋予基 $\{e_i, Je_j\}$. 此外，任何两个这样的基底赋予 V 相同的定向。

证明 我们只需要证明定向。考虑 V^* 的基底 $e^{*j}, -Je^{*j}$. 则有:

$$-e^{*j} \wedge e^{*j+n} = -\frac{i}{2}\lambda^j \wedge \overline{\lambda^j}$$

从而把所有基楔积，得到 $(\frac{-i}{2})^n \bigwedge_{i=1}^n (\lambda^i \wedge \overline{\lambda^i})$.

现在考虑 $\mu^j, \overline{\mu^j}$ 生成了另外一组基。则存在 $n \times n$ 非退化矩阵 G:

$$(\mu^i) = (\lambda^i)G$$

因此

$$\bigwedge_{i=1}^n (\lambda^i \wedge \overline{\lambda^i}) = |\det G|^2 \bigwedge_{i=1}^n (\mu^i \wedge \overline{\mu^i})$$

这说明给出的定向是一致的。 □

命题 1.2 设 V 是实向量空间。若 $V^* \otimes \mathbb{C}$ 有任意直和分解，使得在复共轭关系下有一一对应，则存在唯一的复结构 J 使得以 V_C 为 $(1,0)$ 型，另外一个为 $(0,1)$ 型。

证明 对于 $f \in V^* \otimes \mathbb{C}$，我们定义 J 为 $Jf = if$, 若 $f \in V_C$。若 $f \in \overline{V_c}$, 则定义为 $Jf = -if$。 □