Note for Homological Algebra

范畴论笔记

EDITED BY

颜成子游/南郭子綦

最后一次编译时间：2024-03-11 22:41

LOGO NAME
Slogan Here

Contents

范畴论基础是学习现代数学理论重要的语言。很多时候如果预先学习过范畴论，就可以很好的了解许多已知的数学理论。我们将会以李文威所著的《代数学方法》为讲义，攥写该笔记。以此在将来遇到该门语言时可以进行快速的复习。

由于范畴本身的概念在攥写笔记中可以得到反复强化，因此我们省略范畴论中最最基础的定义，直接从函子范畴开始攥写笔记。

Chapter 2

幺半范畴

§2.1 基础定义

Definition 2.1.1: 幺半范畴

幺半范畴意指一组资料 $(\mathcal{V}, \otimes, a, 1, \iota)$, 其中:

1.$\mathcal{V}$ 是一个范畴。

2.$\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 是一个二元函子, 其在对象和态射集上定义的映射分别记为:$(X, Y) \mapsto X \otimes Y$ 和 $(f, g) \mapsto f \otimes g$.

3.a 是函子范畴 $\mathrm{Fct}(\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{V})$ 中的同构:

$$a : ((\cdot \otimes \cdot) \otimes \cdot) \cong (\cdot \otimes (\cdot \otimes \cdot)) \tag{2.1}$$

使得对于所有对象 X, Y, Z, W, 下图:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a(X,Y,Z)\otimes \mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, "a(X\otimes Y,Z,W)"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a(X,Y\otimes Z,W)"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a(X,Y,Z\otimes W)"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes a(Y,Z,W)"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

交换。

4. 对象 1 称为幺元, 相应的函子 $1 \otimes -$ 和 $- \otimes 1$ 给出范畴 $\mathcal{V}$ 到自身的等价。

5.$\iota : 1 \otimes 1 \to 1$ 是同构。