Graph

颜成子游

2022 年 9 月 15 日

目录

1 图的基本概念

1.1 图与子图

我们要研究图论，那么首先就要给出图的基本概念。以及一些图的附属概念。

定义 1.1 图 *(Graph)* 是这样一个二元组，记作:$G = (V(G), E(G))$。其中：

1. $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_n$。这个集合被称为图的顶点集合，$v_i$ 被称为 G 的顶点。

2. $E(G) = \{(v_i, v_j)|i, j \leq n\}$。这个集合被称为图的边集合。其中 i, j 并不一定遍历所有的 n.

如果对于任意的 (i, j)，若 $(v_i, v_j) \in E(G)$, 那么就有 (v_j, v_i) 就在 $E(G)$ 中，那么称 G 是无向图。反之称之为有向图。

边到 $E \times E$ 的映射被称为关联函数。

对于有向图，如果把所有的有序对都补充上他的转置，那么形成的无向图称为原图的 underlying graph（基础图）。

定义 1.2 若 G 的 $V(G), E(G)$ 是有限集合，则称之为有限图。$|V|$ 被称为 G 的阶，记为 $\nu(G)$。$|E|$ 被称为 G 的边数，记为 $\epsilon(G)$。此时 G 被称为 (ν, ϵ) 图。

某种意义上有序对是可以重复的。但是为了研究的方便，我们认为所有的有序对是不重复的。这样的图我们称之为“简单图”。对于有限简单图：

$$0 \leq \epsilon(G) \leq \frac{1}{2}\nu(G)(\nu(G) - 1)$$

今后未加说明的情况下，所指的图是顶点集和边集有限的无向简单图。

例 1.1 (几类图的例子)

1. 完全图：$|E| = \frac{1}{2}\nu(G)(\nu(G)-1)$ 的简单图。

2. 空图：没有边的图。

3. 二部图（偶图）：$V(G) = V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$。且 G 的每个边的端点都分别属于 V_1, V_2。

4. 完全二部图：如果 V_1 中的顶点和 V_2 中的顶点都相邻，则称为完全二部图。显然 G 的边数为 mn，若 V_1 个数 m,V_2 个数 n。

作为一个类似代数结构的东西，图也可以定义子图：

定义 1.3 对于 $G = (V, E)$, 称 $H = (V_1, E_1)$ 是 G 的子图，若 H 也是图且 $V_1 \subset V$,$E_1 \subset E$。

定义 1.4 (生成子图) 若 $H \subset G$，$V(H) = V(G)$，则称 H 是 G 的生成子图或支撑子图。

定义 1.5 (导出子图) 某种意义上的“生成子图”。由 E 或者 V 的子集所生成的子图。

定义 1.6 补图：G 的补图 H 是这样的图，其顶点是 $V(G)$，其边集是 $V(G)$ 能生成所有边集中 $E(G)$ 的子集。

显然，图与补图的并是完全图。

定义 1.7 图的并，交：很容易理解的定义。

图的差：之去掉边。

图的环和：并中去掉公共边。

定义 1.8 对于不相交的图，我们定义和：$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E1 \cup E_2 \cup E_3)$. 其中 $E_3 = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$

笛卡尔积：顶点集合是顶点集的笛卡尔积，而顶点之间有连线当且仅当其有一个分量相同，另一个分量在原图中相邻。

1.2 图的连通度