内容简介

本书是一本关于线性代数和多重线性代数的高级读本，其目的是把读者的线性代数水平从本科一、二年级提高到国内及欧美大学的研究生水平，让读者有实力利用线性代数学习其他学科并展开科研。全书内容包括线性代数的基本必需知识：张量、张量代数、交错型、行列式、双线性型、二次型、Clifford 代数、典型群、旋量、模理论、线性变换结构与 Jordan 典范型、数值线性代数关于复矩阵的基础理论、模的各种构造法、群表示理论、同调代数以及范畴学。

本书适合大学数学系、物理系、计算机系和工程系的本科生和研究生阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等线性代数学 / 黎景辉，白正简，周国晖编著．—北京：高等教育出版社，2014.9

ISBN 978-7-04-041057-0

I. ①高… II. ①黎… ②白… ③周… III. ①线性代数 IV. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 203355 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫　　封面设计 赵阳　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	560 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 41057-00

序

本书是给学过初等线性代数后进一步学习线性代数的学生使用的. 在各种科研建模、金融产品及工程过程中的第一层逼近常见线性结构, 所以大学生需要使用的线性代数已超过念一年级时学的线性方程组求解, 这便有了在本科高年级开设高等线性代数学这一门课的需求.

本书为教学的需要而写, 内容虽然在一般的代数教科书内, 但在安排上是有区别的.

首先我们讲的是线性结构, 即向量空间和模, 所以我们没有环论、有限群论、域与伽罗瓦理论. 这对学生和老师来说是比较直接并且集中在线性结构上的.

在材料的次序上, 我们的做法是先从向量空间讲起, 因为对学生来说, "向量空间"是比较亲切的. 我们从向量空间的张量积开始, 事实上物理学或微分几何学的许多应用都是向量空间的张量. 差不多到本书的中间才讲模的张量积. 比起先讲模的张量积然后把向量空间的张量积看作特例, 我们认为这样的安排是比较容易学习的.

有部分概念我们在书中多次重复以加深读者的认识, 比如对称群, 从多项式到行列式都和对称有关.

在书中我们再谈行列式, 因为利用张量积我们可以看到一个 n 维向量空间线性映射 T 的行列式自然出现在它的外积 $\wedge^n T$ 中, 这样学生才能体会到在初等线性代数课所学的行列式的如此神奇的公式是怎样来的. 我们也讲到辛群和正交群等典型群, 原因是在力学、相对论和计算数学中常用到它们, 参见冯康先生的《哈密尔顿系统的辛几何算法》.

为了了解一个线性映射的结构和它的典范型, 我们引入模这个概念. 本来只用矩阵计算便可作出一个矩阵的若尔当典范型, 这样做实际上没有让学生了解背后的数学内容, 不知道这是体现主理想整环上的模的分解. 新科学的创立或工艺的突破常常都是因为对结构的基础有新的观点, 所以我们建议在学者多培养学习结构的基础理论的兴趣.

这本书是有一个中心思想的. 几乎所有构造方法都一样, 就是要求存在有某种性质的唯一态射, 用范畴学的语言, 就是寻求一个问题的 "泛解". 比如我们讲了三次直积: 向量空间的直积、模的直积、范畴的直积. 这样, 一方面在范畴内谈直积我们不会觉得太抽象, 另一方面在最后一章我们将看到如何用范畴处理大数据 —— 它把所有类似的东西 (线性结构) 放在一起来研究.

七十年前我们从代数拓扑学家那里学到一个神技 ——就是怎样从一个线性结构得出由此线性结构所决定的一个称为" 同调" 的不变量. 在第十三章我们用全书所学的知识去讨论同调, 它可以看作是全书的大考!

最后一章是给能力比较好的学生的, 让他们以比较高的观点看全书——从向量空间到同调. 范畴学现在已是广泛应用的数学工具, 比如在电脑软件工程里的超大程序验收测试时便有使用. 国外计算机系常开设范畴学的课程, 数学系本科生毕业前学点范畴学是很好的.

高等线性代数学的取材一定是因人而异的. 这本书是一个实验, 我们希望将来有更多不同的高等线性代数学教材出现, 让有不同数学知识的学生都可以学习这门非常有用的数学.

根据以往的教学经验, 教师面对一般能力的学生时, 除去最后一章, 每周讲三小时的课, 要讲两个学期才能讲完全书. 最佳的安排是除授课外组织研讨班, 由能力较好的学生讲解所学章节中比较难的部分, 并把这些较难的部分排除在考试之外, 这会减轻学生的压力.

目前, 我们的研究生考试题中线性代数部分的内容是比较初等的. 随着我国人力市场的成熟, 市场对研究生的要求提高, 研究生的入学水平也会相应提高. 希望不久的将来, 本书的内容可以成为研究生考试的内容, 这就说明我们进步了.

线性代数学是指研究线性结构的代数方法. 向量空间 V 中的两个向量可以相加, 此外 V 还有 "线性结构" ——就是有一个 "系数" 域 F. 对 F 中的元素 c 和 V 内的向量 v, 我们要知道 V 内的向量 cv, 并且如果 u 也是 V 内的向量, 且 b 属于 F, 则我们要求

$$c(v+u)=cv+cu,\quad (b+c)v=bv+cv,\quad (bc)v=b(cv).$$

设 $T:V\to V$ 是线性映射. 对 $v\in V$ 记 $T(v)$ 为 Tv. 所有从 V 到 V 的线性映射组成的环记为 $\mathscr{R}$. 若 $T,S\in\mathscr{R}$, 则记映射的合成 $S\circ T$ 为 ST. 现取 $v,u\in V$, 则

$$T(v+u)=Tv+Tu,\quad (T+S)v=Tv+Sv,\quad (ST)v=S(Tv).$$

这就是说 V 有以环 $\mathscr{R}$ 为 "系数" 的 "线性结构". 当然现在的系数是指 $\mathscr{R}$ 的元素. 它们是映射不是 "数" 了. 这已经是 "模" 了.

本书假定读者学过大学本科一年级的初等线性代数, 已经学过线性方程组、矩阵、行列式、向量空间、子空间、商空间和线性映射等概念及其基本性质. 在第一章我们为读者温习了这些性质. 我们还假定读者念过本科二年级或三年级的一个学期的基本代数课, 学过群、环、域的定义和例子以及同态的性质.

除第一章外, 全书分为四个部分. 第一部分从张量到各种利用张量构造的代数. 第二部分用张量来讲多重线性函数, 特别是双线性函数和二次型, 也讨论了相关的典型群, 即酉群、辛群和正交群. 第三部分讲述一个线性映射的结构, 为此我们引入模的概念. 选

定基底之后, 一个线性映射便是一个矩阵, 第十章讲述了矩阵的特征值的性质及应用. 第四部分我们讲的是模——从模的各种构造方法推广到以模为最基本例子的 Abel 范畴, 中间加了群表示一章作为模的最重要例子.

1978 年夏天, 黎景辉教授在广州中山大学为来自各地的老师开了一门模论的课, 参加学习的老师们把讲义编为一本小册. 三十年后张寿武教授告诉黎教授: 他在大学时念的便是这个讲义. 1979 年, 黎景辉为上海师范大学写了一份同调代数的讲义. 也是三十年后, 黎教授就这份讲义与吴可教授共同商讨同调代数的教学. 为了学生学习冯康先生的算法做好准备, 金小庆教授 2012 年邀请黎教授在澳门大学讲授高等线性代数.

本书的主要内容来自黎景辉 1978 年在广州中山大学、1979 年在上海师范学院、2001 年在北京大学、2010 年在高雄中山大学、2012 年在澳门大学和在悉尼大学二十年间讲学的讲义.

本书前半部分由白正简整理, 后半部分由周国晖整理, 黎景辉负责统筹全书. 这个统筹工作量之大是远超过预期的. 本书是用公开免费的 Texmaker 写的, 中文编码是 UTF8. 感谢澳门镜平学校中学部的苏淑仪老师帮助解决 Texmaker 的问题, 同时感谢她和澳门大学 2012 年硕一的同学 (汪志波为组长) 为本书编写了部分交换图表. 其余的交换图表由黎景辉编写. 因为技术水平不足, 所以同时使用 Tikz 和 xymatrix. 希望下一版陈志杰等老师的 LaTeX 课本附带的光盘能包含一个像 Texmaker 的公开免费的编写软件, 以及文章、图书和 Beamer 的模板, 足够多的 UTF 中文字体库, 更多 xymatrix 和作图例子, 并且能一键安装. 如果这能成为各出版社的标准, 可以免去许多如 Windows 和 Mac, GBK 和 UTF8, WinEdt 收费, WinEdt 的 UNIX 版不稳定等因素引起的排版困难.

白正简感谢他太太高春玲的支持. 另外, 赵志在准备手稿时给予了很大帮助, 陈梅香提出了许多宝贵意见. 在此向他们表示感谢! 周国晖感谢家人及太太黄恬恬. 黎景辉感谢他的两位合作者, 广州中山大学的梁之舜教授, 上海师范大学的孔仲文教授, 高雄中山大学的黄毅青教授, 台南成功大学的柯文峰教授, 澳门大学的金小庆教授和谭锡忠教授, 首都师范大学的李庆忠教授、李克正教授和徐飞教授, 北京师范大学的王昆扬教授和张英伯教授, 北京大学的赵春来教授和张继平教授及清华大学的冯克勤教授. 他们都在这部书的写作过程中给予帮助和鼓励. 感谢澳门大学提供经费, 支持黎景辉于 2012 年 4 月至 6 月访问澳门大学开始写这部书.

感谢高等教育出版社陆珊年编审的出版邀请. 感谢赵天夫编辑的全程支持, 使得本书成功出版, 特别是他在最后定稿时所做的大量工作, 提高了本书的可读性.

小学、中学、大学的数学教育是一个连在一起的有机体. 我们可以把从小学到大学的数学教育看作一个知识传递链, 也可以把这个知识传递链比喻成一根水管, 数学知识就在这水管流着. 在科学与工业技术中不停地有新知识出现, 就像在水管的源头不停有水涌出来要灌入这水管里. 若是水在水管里不流动, 新灌入的水就会把水管撑爆, 所以水一定要流. 这样看, 在这个小学、中学、大学的知识传递链里, 我们每个阶段要教的数

学都会改变! 20 世纪初是大学数学的内容, 现在已经流到中学去了. 我们现在大学本科数学的主干课程是矩阵线性代数、欧拉–黎曼式微积分、微分方程, 这些是 19 世纪的数学. 我们支持在 21 世纪把这些课程下移, 让我们可以在大学本科多讲授一些 20 世纪的数学, 因此我们希望更多大学能在数学系本科开设 "高等线性代数" 这一门课. 本书只是一个尝试. 希望其他老师能创作编写更多更好的教材, 让我们的数学教育更进步.

目　录

第一章　线性代数预备知识

本书假定读者有初等线性代数的知识, 一方面学过矩阵和行列式在解多元线性方程组的应用, 另一方面亦了解向量空间和线性映射的基本结构. 因为本书注重使用图表来表达关系, 利用图表从视觉上帮助认知, 所以我们提供本章. 一方面作为介绍图表这个方法, 另一方面亦作为初等线性代数的复习, 让读者知道我们对于线性代数所要求的预备知识. 读者们, 请不要因为认不出本章的定理便放弃本书. 事实上只要拿一部你念过的线性代数教科书比较一下, 就不难看出本章是个好的复习了. 作为一个复习, 本章的安排与其余各章完全不同, 习题是放在行文之中而不是全章之后, 目的是希望读者边看边做习题, 这就把已经学过的初等线性代数全回忆起来, 完全进入挑战高等线性代数的准备状态.

本章主要回顾向量空间之间的线性映射的核、像、商空间、同构及基变换. 我们给出了线性映射的基变换矩阵和线性映射之间的关系, 还讨论了向量空间的对偶空间和零化子的同构性质.

以 $\mathbb{Q}$ 记有理数域, 以 $\mathbb{R}$ 记实数域, 以 $\mathbb{C}$ 记复数域, 以 $\mathbb{Z}$ 记整数环, 以 $\mathbb{N}$ 记非负整数集合.

为简便起见, 本章所涉及的域 F 特征为零, 复数域 $\mathbb{C}$ 的所有子域的特征为零. 设 p 是素数, n 是正整数, 则有 p^n 个元素的有限域 $\mathbb{F}_{p^n}$ 的特征为 p.

以下常用几个逻辑符号: $\forall x$ 是对所有的 x; $\exists x$ 是存在 x; $A \Rightarrow B$ 是如果 A 则 B; $A \Leftrightarrow B$ 是 A 当且仅当 B.

映射 (map) $f : V \to W : v \mapsto w$ 的意义为 f 是从 V 到 W 的映射并且 $f(v) = w$. 如有映射 $f : V \to W$ 和 $g : W \to U$, 则 g 和 f 的**合成** (composition) 是映射 $g \circ f : V \to U$, 这是指 $(g \circ f)(v) = g(f(v))$.

如常 $\delta_{ij} = \delta^i_j = 1$ 若 $i = j$, 否则 $= 0$.

矩阵 $A = (a_{ij})$ 是说矩阵 A 的第 i **行** (row), j **列** (column) 的元素是 a_{ij}. 这样**单位矩阵** (identity matrix) $I = (\delta_{ij})$ 的**对角线** (diagonal) 上的元素是 1, 所有其他元素是 0. 把矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行和列对换得 A 的**转置矩阵** (transposed matrix) A^T, 即若 $A^T = (b_{ij})$ 则 $b_{ij} = a_{ji}$. 若 $A = (a_{ij})$, a_{ij} 是复数, 则以 $\bar{A}$ 记矩阵 $(\bar{a}_{ij})$.

当我们说 V 是域 F 上的**向量空间** (vector space) (或称 F 向量空间) 是指向量空

间 V 容许以域 F 的元素 a 数乘 V 内的向量 v 而得向量 av.

如果 V 的子集 W 以 V 的向量加法和以 F 数乘构成一个 F 向量空间, 则称 W 为 V 的 F **子空间** (subspace).

设 V 和 W 是域 F 上的向量空间, 又设有从 V 到 W 的映射 $\varphi: V \to W$. 如果对任意的 $u, v \in V$ 和 $a \in F$ 以下公式成立

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v), \quad \varphi(av) = a\varphi(v),$$

则称 φ 为F **线性映射** (F-linear map) 或**线性变换** (linear transformation) 或**线性算子** (linear operator). 最常用的线性映射是零映射

$$0: V \to V: v \mapsto 0$$

和恒等映射

$$\mathrm{Id}_V: V \to V: v \mapsto v.$$

常把 Id_V 简写为 Id 或 I.

习题 1.1 设

$$M_{n\times m}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F \right\}.$$

记 $M_{n\times m}(F)$ 为 $M(n\times m, F)$, 又记 $M_{n\times n}(F)$ 为 $M_n(F)$ 或 $M(n, F)$. 定义 $n\times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的**迹** (trace) 为 $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. 证明: (1) $M_{n\times m}(F)$ 构成一个 F 向量空间; (2) 迹 $\mathrm{Tr}: M_n(F) \to F: A \mapsto \mathrm{Tr}\, A$ 是 F 线性函数.

我们令

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{\varphi: V \to W, \varphi \text{ 是 } F \text{ 线性的}\}$$

表示从 V 到 W 的所有 F 线性映射构成的 F 向量空间.

习题 1.2 对任意 $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$, $a \in F$, 我们定义

$$(\varphi+\psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) := a(\varphi(v)) \quad \text{对所有 } v \in V.$$

证明: $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ 关于以上加法和数乘构成一个 F 向量空间.

定义 1.3 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. 定义 φ 的**核** (kernel) 为

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\},$$

并且定义 φ 的**像** (image) 为

$$\mathrm{Img}\,\varphi = \{\varphi(v) \in W : v \in V\}.$$

设有集合的映射 $\phi: X \to Y$. 如果对 $x, x' \in X$ 从 $\phi(x) = \phi(x')$ 可得出 $x = x'$, 则称 ϕ 为**单射** (injection). 设 $\phi(X) = \{\phi(x) : x \in X\}$. 如果 $\phi(X) = Y$, 则称 ϕ 为**满射** (surjection). 如果集合映射 ϕ 同时为单射和满射, 则称 ϕ 为**双射** (bijection).

习题 1.4 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$.

(1) 证明: $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是 V 的 F 子空间, $\mathrm{Img}\,\varphi$ 是 W 的 F 子空间.

(2) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ 是**线性单射** (linear injection 或 monomorphism).

(3) $\mathrm{Img}\,\varphi = W \Leftrightarrow \varphi$ 是**线性满射** (linear surjection 或 epimorphism).

设 $\phi : V \to W$ 是 F 向量空间的 F 线性映射, 并且 ϕ 是双射, ϕ 的逆映射 $\phi^{-1} : W \to V$ 是 F 线性映射. 则称 ϕ 为 F **线性同构** (isomorphism). F 向量空间的 F 线性映射 ϕ 是 F 线性同构当且仅当 ϕ 是线性单射和线性满射.

由所有从 V 到 V 的 F 线性同构组成的集合记为 $GL(V)$ 或 $\mathrm{Aut}_F(V)$. 设 $\phi, \psi \in GL(V)$. 利用映射的合成 $\psi \circ \phi$ 定义 $GL(V)$ 的元素的积. 不难证明 $GL(V)$ 满足群的定义. 称 $GL(V)$ 为**一般线性群** (general linear group).

如果 V 是有限维 F 向量空间和 $\phi \in \mathrm{Hom}_F(V, V)$, 可以定义 ϕ 的行列式 $\det \phi$. 设

$$SL(V) = \{\phi \in GL(V) : \det \phi = 1\}.$$

则不难证明 $SL(V)$ 是 $GL(V)$ 的子群. 称 $SL(V)$ 为**特殊线性群** (special linear group).

定义 1.5 设 W 是 V 的一个子空间. 对于 $v \in V$, v 的 W **陪集** (coset) 为 V 的子集 $v + W = \{v + w : w \in W\}$. 由 V 的所有 W 陪集所组成的集合记作

$$V/W := \{v + W : v \in V\}.$$

习题 1.6 证明: $v + W = v' + W \Leftrightarrow v - v' \in W$.

习题 1.7 对任意 $v_1 + W, v_2 + W \in V/W$, $a \in F$, 我们定义

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) := v_1 + v_2 + W, \quad a(v + W) := av + W.$$

证明: 集合 V/W 构成一个 F 向量空间.

提示: 首先必须证明上述加法是定义明确的, 即

$$v_1 + W = {v_1}' + W, \quad v_2 + W = {v_2}' + W \Rightarrow v_1 + v_2 + W = {v_1}' + {v_2}' + W.$$

定义 1.8 我们称 V/W 为 V 模 W 的**商空间** (the quotient space).

习题 1.9 定义 $\pi : V \to V/W : v \mapsto v + W$. 证明: π 是一个线性满射. 我们称 π 为**自然投射** (natural projection).

定义 1.10 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$. 定义 φ 的**余核** (cokernel) 为 $\mathrm{Cok}\,\varphi = W/\mathrm{Img}\,\varphi$.

习题 1.11 证明: (1) 余核 $\operatorname{Cok}\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi$ 是线性满射;
(2) $\operatorname{Ker}\varphi = 0 = \operatorname{Cok}\varphi \Leftrightarrow \varphi$ 是一个线性同构.

习题 1.12 设 $\varphi \in \operatorname{Hom}_F(V, W)$. 证明: 存在一个自然同构

$$V/\operatorname{Ker}\varphi \approx \operatorname{Img}\varphi.$$

这就是**线性映射同构定理** (isomorphism theorem of linear map). (提示: 考虑映射 $v + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(v)$.)

定义 1.13 设 S 是 F 向量空间 V 的一个子集. S 的一个有限线性组合是指 V 中的一个如下形式的向量: $\sum_{i=1}^n a_i v_i$, 其中 n 是一个正整数, $a_i \in F$, $v_i \in S$. 所有 S 的有限线性组合构成的集合记作 $\langle S \rangle$, 称为 S 的线性**生成空间** (span). 如果 $\langle S \rangle = V$, 则称 S 生成 V.

习题 1.14 证明: $\langle S \rangle$ 是 V 的一个子空间.

定义 1.15 F 向量空间 V 的一个子集 S 称为**线性相关的** (linearly dependent), 如果存在集合 S 的一个**有限**子集 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 和不全为零的数 $a_1, \cdots, a_n \in F$, 使得

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0.$$

如果 S 不是线性相关的, 则称它是**线性无关的** (linearly independent).

习题 1.16 设 F 向量空间 V 存在一个线性无关的有限子集 S 使得 $V = \langle S \rangle$. 证明: S 中元素的个数 $\#S$ 由 V 唯一决定, 即如果 S' 是另外一个生成 V 的线性无关的有限子集, 则 $\#S = \#S'$.

定义 1.17 一个生成向量空间 V 的线性无关的有限子集 S 称为 V 的一个**基** (basis). S 的基数称为 V 的**维数** (dimension), 记为 $\dim_F V$.

习题 1.18 设 V, W 是有限维 F 向量空间.

(1) 设 $\varphi \in \operatorname{Hom}_F(V, W)$. 证明: $\dim_F V = \dim_F \operatorname{Img}\varphi + \dim_F \operatorname{Ker}\varphi$.
(2) 证明: 如果 $\varphi : V \to V$ 是线性单射, 则 φ 是线性同构.

习题 1.19

(1) 设 F^n 是元取值于域 F 的所有 $n \times 1$ 矩阵 (列向量) 构成的集合. 证明: F^n 是域 F 上的一个向量空间. 有时把 F^n 中的元素记作 $[a_1, \cdots, a_n]^T$, $a_i \in F$, 其中 T 表示一个矩阵的**转置** (transpose).
(2) 证明: V 的一个给定的基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 定义一个 F 线性同构映射:

$$V \to F^n : v \mapsto [v] := [v_1, \cdots, v_n]^T,$$

其中 v_i 由下式决定

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

我们称 $[v] = [v_1, \cdots, v_n]^T$ 为 v 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下的**坐标** (coordinate).

下面 $M_2(\mathbb{C})$ 中的矩阵称为 Pauli 矩阵

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathscr{H}$ 是复 Hermite 矩阵的集合,

$$\mathscr{H} = \{s \in M_2(\mathbb{C}) : s^\dagger s = I\},$$

其中 $s^\dagger = (\bar{s})^T$ 表示矩阵 s 的复共轭转置.

习题 1.20

(1) 证明: $\mathscr{H}$ 是 4 维 $\mathbb{R}$ 向量空间. $\mathscr{H}$ 的任一向量可以唯一地表达为 $\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, 其中 σ_μ 是 Pauli 矩阵.

(2) 证明:

$$\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu \to \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}$ 线性同构 $\mathscr{H} \leftrightarrow \mathbb{R}^4$.

习题 1.21　设 $\dim_F V = n$, $\dim_F W = m$. $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基, 并且 $f = \{f_1, \cdots, f_m\}$ 是 W 的一个基.

(1) 证明: 如下定义的映射是一个 F 线性同构映射:

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) \to M_{m\times n}(F) : \varphi \mapsto [\varphi] = (a_{ij}),$$

其中映射 φ 在基 e, f 下的矩阵 $[\varphi]$ 由下式决定

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

(2) 从矩阵和坐标的角度, 证明: 对任何 $v \in V$, 有 $\varphi(v) = w \Leftrightarrow [\varphi][v] = [w]$.

(3) 证明: 线性映射 $\varphi : V \to W$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 同构于 F^n 的子空间:

$$\{x \in F^n : [\varphi]x = 0\}.$$

(4) 设 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(F)$. A 的第 j 列记作 $c_j=[a_{1j},\cdots,a_{mj}]^T$. 向量空间 F^m 的子集 $\{c_1,\cdots,c_n\}$ 生成 F^m 的一个子空间, 称为 A 的**列空间** (column space), 记作 $\mathrm{Col}\,(A)$. 证明: 映射 φ 的像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 同构于 F^m 的子空间 $\mathrm{Col}\,([\varphi])$.

下面我们了解一下基变换如何影响上述映射 $\varphi\mapsto[\varphi]$. 我们假设 V,W 为域 F 上的有限维向量空间.

给定 V 的一个基 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 以及 W 的一个基 $f=\{f_1,\cdots,f_m\}$, 线性映射 $\varphi\in\mathrm{Hom}_F(V,W)$ 在基 e,f 下的矩阵记作 $[\varphi]_{e,f}$, 以表示它对基的依赖性.

设 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $e'=\{e'_1,\cdots,e'_n\}$ 为 V 的两个基. 根据基的定义, 存在某个矩阵 $P=[p_{ij}]$, 使得

$$e'_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i.$$

这里 P 称为**基变换矩阵** (the change of basis matrix).

首先考虑 V 上的恒等映射 Id_V, 即 $\mathrm{Id}_V(v)=v$ (对任意 $v\in V$). $\mathrm{Id}_V:V\to V$ 关于基 e',e 的矩阵是什么? 这可以通过基变换矩阵获得

$$\mathrm{Id}_V(e'_j)=e'_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i.$$

这就是说, $\mathrm{Id}_V:V\to V$ 关于基 e',e 的矩阵 $[\mathrm{Id}_V]_{e',e}$ 就是基变换矩阵 P.

现在我们假设 $f=\{f_1,\cdots,f_m\}$ 和 $f'=\{f'_1,\cdots,f'_m\}$ 为 W 的两个基. 设 $Q=[q_{ij}]$ 是关于基 f',f 的基变换矩阵, 即

$$f'_j=\sum_{i=1}^n q_{ij}f_i.$$

同样可知 W 上的恒等映射关于基 f',f 的矩阵是 $[\mathrm{Id}_W]_{f',f}=Q$. 验证矩阵 Q 是可逆的.

习题 1.22 按照如上的定义, 给定一个 F 线性映射 $\varphi:V\to W$. 证明

$$[\varphi]_{e',f'}=Q^{-1}[\varphi]_{e,f}P.$$

这就是对应于向量空间 V,W 的基变换的矩阵变换方程.

习题 1.23 我们用 V,e 来表示我们要考虑的向量空间和它的一个基. 证明: 下图是交换的, 即如果我们任意选取图中的两个顶点, 则由连接这些顶点任意边序列所得到的全部映射都是相同的.

$$
\begin{tikzcd}
 & V, e' \arrow[rr, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[dl, "e'"'] \arrow[dd, dotted] & & V, e \arrow[dl, "e"'] \arrow[dd, "\varphi"] \\
F^n \arrow[rr, "P"] \arrow[dd, "{[\varphi]_{e',f'}}"'] & & F^n \arrow[dd] & \\
 & W, f' \arrow[rr, dotted, "\mathrm{Id}_W"] \arrow[dl, "f'"] & & W, f \arrow[dl, "f"] \\
F^m \arrow[rr, "Q"'] & & F^m &
\end{tikzcd}
$$

该图中有两个没有标记的映射: $\varphi : V, e' \to W, f'$ 以及左起第三个竖直箭头对应的映射 $[\varphi]_{e,f} : F^n \to F^m$, 该映射由左乘矩阵 $[\varphi]_{e,f}$ 得到.

一个 F 向量空间 V 的**对偶空间** (dual space) 是指由 V 到 F 的所有线性函数构成的空间 $V^* := \mathrm{Hom}_F(V, F)$.

习题 1.24　设 $\dim_F V = n$. 令 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基. 证明: 存在 V^* 中的一组向量 $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$, 使得

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij},$$

并且 $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是 V^* 的一个基.

我们定义一个自然对:

$$V \times V^* \to F : (v, v^*) \mapsto \langle v, v^* \rangle := v^*(v).$$

定义 1.25　对任意子集 $S \subseteq V$, 我们定义 S 的**零化子** (annihilator) 如下

$$\mathrm{Annih}\, S := \{v^* \in V^* : \langle v, v^* \rangle = 0 \text{ 对所有 } v \in S\}.$$

命题 1.26　设 $\dim_F V < \infty$, S 是 V 的一个子空间. 我们有如下的同构

$$(1)\ S^* \approx V^* / \mathrm{Annih}\, S;$$

$$(2)\ (V/S)^* \approx \mathrm{Annih}\, S.$$

证明　(1) 设 $f \in V^*$. 把映射 $f : V \to F$ 限制在子空间 S 上便得映射 $\mathrm{res}\,(f) : S \to F$. 这样便可定义限制映射:

$$V^* \to S^* : f \mapsto \mathrm{res}\,(f).$$

容易验证映射 res 是一个 F 线性满射, 并且 Ker(res) 即为零化子 $\mathrm{Annih}\, S$, 故由线性映射同构定理可得 (1).

(2) 我们首先引入投影映射:

$$\pi : V \to V/S : v \mapsto v + S,$$

然后取其对偶映射:

$$\pi^T : (V/S)^* \to V^* : f \mapsto \pi^T(f) := (f \circ \pi),$$

既有

$$\begin{tikzcd} V/S \arrow[r, "f"] & F \\ V \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\pi^T(f)"] & \end{tikzcd}$$

我们可以证明:

(a) π^T 是单射, 即 $\mathrm{Ker}(\pi^T) = 0$;

(b) $\mathrm{Img}(\pi^T) = \mathrm{Annih}\, S$.

下面我们利用线性映射同构定理完成 (2) 的证明:

$$(V/S)^* = (V/S)^* / \mathrm{Ker}(\pi^T) \approx \mathrm{Im}(\pi^T) = \mathrm{Annih}\, S. \qquad \square$$

我们需要向量空间直和的概念. 如果我们选取有限个 F 向量空间 $V_1, \cdots, V_N$, 则这些空间的直和与直积是相同的. 它们均同构于集合

$$\prod_{n=1}^{N} V_n.$$

该集合为集合 V_n 的**笛卡儿积** (cartesian product), 并且被赋予如下的 F 向量空间结构

$$a(u_1, \cdots, u_N) + (v_1, \cdots, v_N) := (au_1 + v_1, \cdots, au_N + v_N), \ \ u_n, v_n \in V_n; \ a \in F.$$

另外, 如果把 $v \in V_n$ 看作向量 $(0, \cdots, 0, v, 0, \cdots, 0)$, 其中第 n 个位置的元素为 v, 其他位置的元素为零, 则有自然线性映射

$$i_n : V_n \to \prod_{n=1}^{N} V_n.$$

现在设每个 V_n 都是 V 的一个子空间, 则可以构造和

$$V_1 + \cdots + V_N := \{v \in V : v = v_1 + \cdots + v_N, \ v_n \in V_n\}.$$

我们可以验证

(1) 和 $V_1+\cdots+V_N$ 是包含所有子空间 V_n 的最小子空间;
(2) 如果 $V_n\cap\sum_{i\neq n}V_i=0$, 则和 $V_1+\cdots+V_N$ 同构于 $\prod_{n=1}^N V_n$.

设对每个正整数 n, 我们有一个向量空间 V_n. 令 S 为满足如下性质的无穷序列 $v=(v_n)$ 的集合: (1) $v_n\in V_n$ 和 (2) 除了有限个 n 之外, $v_n=0$. 如果按分量方式定义运算:

$$a(u_n)+(v_n):=(au_n+v_n),$$

则集合 S 构成一个域 F 上的向量空间. 另外, 如果把向量 $v\in V_n$ 看作无穷序列 (v_j), 其中当 $j\neq n$ 时, $v_n=v$ 且 $v_j=0$, 则有自然线性映射 $i_n:V_n\to S$. 向量空间 S 称为向量空间 V_n 的**直和** (direct sum), 记作 $\oplus_n^\infty V_n$.

第二章　张量积

设 $A=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵, a_{ij} 为域 F 的元素. 可以用矩阵乘法由 A 决定线性映射

$$\phi_A : F^n \to F^n : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \sum_j a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

现又取 $m\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})$, $b_{ij}\in F$. 如上便得线性映射 $\phi_B : F^m \to F^m : y \mapsto By$.

我们可以从 A 和 B 构造什么新的线性映射呢? 第一个办法是利用直和得如下线性映射

$$\phi_A \oplus \phi_B : F^n \oplus F^m \to F^n \oplus F^m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix},$$

其中 $x\in F^n$, $y\in F^m$.

另一很自然的办法是利用分块矩阵. 把我们要定义的矩阵 C 分成 $n\times n$ 块, 第 (i,j) 块 $C_{ij}=a_{ij}B$ 是个 $m\times m$ 矩阵. 这样 C 是 $nm\times nm$ 矩阵

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

称 C 为 A 与 B 的张量积, 并记为 $A\otimes B$. 当然 ϕ_C 是线性映射 $F^{nm}\to F^{nm}$, 但是从这样的定义就不容易看出 ϕ_C 和 ϕ_A,ϕ_B 的关系. 本章将说明线性映射 ϕ_C 是线性映射张量积 $\phi_A\otimes\phi_B$, 它是向量空间张量积 $F^n\otimes F^m$ 上的线性映射.

在域 F 上给出两个向量空间 V,W. 可以用直和及 F 线性映射得出新的向量空间 $V\oplus W$ 及 $\mathrm{Hom}_F(V,W)$. 此外另一种从两个向量空间构造一个新的向量空间的方法便是两个向量空间的张量积 $V\otimes_F W$. 我们用双线性映射来定义张量积: 我们要求一个

“最一般” 的双线性映射, 即要求任何一个双线性映射都可以透过这个 “最一般” 的双线性映射表达出来. 用范畴学的术语: 这个 “最一般” 的双线性映射是一个问题的 “**泛解**” (universal solution). 最后我们把张量积刻画为 “最一般” 的双线性映射的像. 开始时读者可能不明白这几句话, 但念下去慢慢会觉得这是自然的.

本章主要介绍张量积的定义, 张量积的存在性及其构造, 并用张量积引入正合序列. 正合序列在同调代数中占据核心位置.

张量积是构造典型群的有限表示的基本方法, 所以在微分流形、理论物理学和理论化学中都是很重要的工具.

为简单起见, 本章中所涉及的域均为一个特征为零的域 F.

2.1 双线性映射和张量积

有几个方法定义张量积, 这里是利用 “要求存在有某种性质的唯一态射” 这个条件来定义张量积. 这个条件是关于双线性映射的.

固定域 F. 我们熟知 F 向量空间线性映射 $\phi : V \to Z$. 自然我们把只有一个变元的映射 ϕ 推广为两个变元的映射, 加上适当的线性条件后便是以下定义的双线性映射.

定义 2.1 设 V, W, Z 都是域 F 上的向量空间. 称 $f : V \times W \to Z$ 为 F **双线性映射** (bilinear map), 如果对任意的 $a \in F, v_1, v_2, v \in V, w, w_1, w_2 \in W$ 有

$$
\begin{aligned}
f(av_1 + v_2, w) &= af(v_1, w) + f(v_2, w),\\
f(v, aw_1 + w_2) &= af(v, w_1) + f(v, w_2).
\end{aligned}
$$

由所有从 $V \times W$ 到 Z 的双线性映射所组成的集合记为 $\mathscr{L}(V, W; Z)$. 不难证明这是 F 向量空间.

常规说: 变元的个数越少, 映射就越简单. 可以问: 给出两个 F 向量空间 V, W, 可否从 V, W 得出 F 向量空间 U 使得 U 的线性映射可以取代 V, W 的双线性映射? 以下定义说清楚这个问题.

定义 2.2 设 V, W, z 都是 F 向量空间. 称 F 双线性映射 $f : V \times W \to U$ 为 V 与 W 在 F 上的**张量积** (tensor product), 如果对任意的 F 双线性映射 $g : V \times W \to Z$, 存在唯一的 F 线性映射 $h : U \to Z$, 使得

$$h \circ f = g.$$

这就是说, 下图是可交换的

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & U \arrow[d, dotted, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

注意到上述定义表明 f 在 $V \times W$ 上的 F 双线性映射中具有**万有性**或说为 "**泛性**" (universal).

说明 2.3 由定义 2.1 可得如下结论: (U, f) 在同构意义下是唯一的. 我们是指: 如果

$$f : V \times W \to U,$$
$$f' : V \times W \to U'$$

都是 V 与 W 在域 F 上的张量积, 则 U 和 U' 是同构的 F 向量空间.

证明 我们将证明下面交换图表中的 F 线性映射 j, j' 是 F 线性同构.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & U \arrow[d, dotted, "j"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & U' \arrow[d, dotted, "j'"] \\ & U \end{tikzcd}$$

对上面的第一个图来说, 由 f 是一个张量积并且 f' 是双线性的事实可知 j 的存在性. 同理可知, 上面第二个图中 j' 也是存在的.

如果我们将第二个图放在第一个图下方, 则有:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, "f"'] & U \arrow[d, "j"] \\ & U' \arrow[d, "j'"] \\ & U \end{tikzcd}$$

我们现在将上图与下图比较

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d, dotted, "\mathrm{Id}_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

将两个图合并, 我们可得

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d, dotted, "\mathrm{Id}_U"'] \arrow[d, bend left, "j' \circ j"] \\ & U \end{tikzcd}$$

可以看出: 在张量积的定义中, 我们要求映射 h 是唯一的. 对于上述情形, 这种唯一性表明

$$\mathrm{Id}_U = j' \circ j.$$

现在通过交换 f 与 f' 的位置并重复上面的讨论, 我们可得

$$\mathrm{Id}_U = j \circ j'.$$

最终我们可得

$$j' \circ j = \mathrm{Id}_U = j \circ j',$$

即 j 和 j' 是同构映射, 从而结论得证. □

张量积的记号

正如我们所知, V 与 W 在域 F 上的张量积

$$f : V \times W \to U$$

在同构的意义下是唯一的, 我们用 $V \otimes_F W$ 表示 U (或者在域 F 明确的情况下, 简记为 $V \otimes W$), 并且用 $v \otimes w$ 表示 $f(v, w)$. 因此张量积可表示为

$$V \times W \to V \otimes W,$$
$$(v, w) \mapsto v \otimes w.$$

我们应该记住, $V \otimes W$ 是域 F 上的一个向量空间.

注意到在上述记号下, F 双线性可表示为:

$$(av_1 + v_2) \otimes w = av_1 \otimes w + v_2 \otimes w,$$
$$v \otimes (aw_1 + w_2) = av \otimes w_1 + v \otimes w_2.$$

说明 2.4 *泛解.*

从张量积 $V \otimes W$ 的定义知: 若有双线性映射 $g : V \times W \to Z$, 则存在唯一线性映射 $h : V \otimes W \to Z$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

于是 $g \mapsto h$ 给出集合单射

$$\mathscr{L}(V, W; Z) \to \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, Z).$$

再者若有线性映射 $h : V \otimes W \to Z$, 则

$$g : V \times W \to Z : (v, w) \mapsto h(v \otimes w)$$

为双线性映射. 如此便知以上从 $\mathscr{L}(V, W; Z)$ 到 $\mathrm{Hom}_F(V \otimes W, Z)$ 的映射为满射. 不难证明我们所得的是 F 向量空间的同构

$$\mathscr{L}(V, W; Z) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, Z).$$

我们用最后一章范畴的语言. 则以上同构是说双线性映射函子

$$Z \mapsto \mathscr{L}(V, W; Z)$$

是可表的, 而且是由张量积 $V \otimes W$ 所表示. 也就是说张量积是求表示 ‘双线性映射函子’ 的 “泛解”. 引入记号 $h^U(?) = \mathrm{Hom}_F(U, ?)$. 我们便可以说双线性映射函子 $\mathscr{L}(V, W; ?)$ 等价于 $h^{V \otimes W}(?)$. 这些日后读者就会了解.

2.2 张量积的存在性

本节讨论对任给域 F 上的两个向量空间 V 和 W, 存在一个 V 与 W 在域 F 上的张量积, 即构造一个双线性映射

$$? : V \times W \to U$$

满足张量积定义中的条件:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "?"] \arrow[dr] & U \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$$

设 T 是由有序对 (v,w) $(v\in V, w\in W)$ 生成的域 F 上的向量空间 (我们把 (v,w) 看成一个符号). 向量空间 T 中的任一个元素可表为一种如下形式上的有限和

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(v_i,w_i),\quad a_i\in F.$$

设 S 是由 T 中具有如下形式的元素生成的 T 的一个子空间:

$$\begin{aligned}&(av_1+v_2,w)-a(v_1,w)-(v_2,w),\\&(v,aw_1+w_2)-a(v,w_1)-(v,w_2),\end{aligned}$$

其中 $a\in F$, $v,v_1,v_2\in V$, $w,w_1,w_2\in W$.

令 $U=T/S$ 并定义映射 f 如下

$$\begin{aligned}f:V\times W&\to U,\\(v,w)&\mapsto f(v,w):=(v,w)+S.\end{aligned}$$

由 U 的构造方式可得

$$\begin{aligned}f(av_1+v_2,w)-af(v_1,w)-f(v_2,w)=0\in U,\\f(v,aw_1+w_2)-af(v,w_1)-f(v,w_2)=0\in U.\end{aligned}$$

例如, 这意味着

$$\begin{aligned}f(av_1+v_2,w)&=(av_1+v_2,w)+S\\&=(a(v_1,w)+S)+((v_2,w)+S)\\&=af(v_1,w)+f(v_2,w).\end{aligned}$$

读者不难验证按照如上方式构造的有序对 (U,f) 是 V 与 W 在域 F 上的张量积.

张量积的计算

我们是从映射的观点来定义张量积, 没有用坐标, 比较简洁, 但是以上张量积的构造是会帮助计算的.

如果我们把以上 T 的元素 $(v,w)+S$ 记为 $v\otimes w$, 则可记张量积 U 的任一元素可表达为有限和 $\sum_i v_i\otimes w_i$, $v_i\in V$, $w_i\in W$.

取空间 V 的向量子集 $\{e_i : i\in I\}$. 设 V 的任一向量 v 均可表达为 $\{e_i\}$ 的有限线性组合, 即

$$v=\sum_i a_ie_i,\quad a_i\in F,$$

其中只有有限个 a_i 非零. 又设空间 W 的向量子集 $\{f_j : j \in J\}$ 有相同性质. 则从以上讨论可见张量积 $V \otimes W$ 的任一向量可表达为有限和 $\sum_{i,j} a_{i,j} e_i \otimes f_j$. 即是说, 如果 $\{e_i\}$ 生成 V, $\{f_j\}$ 生成 W, 则 $\{e_i \otimes f_j\}$ 生成张量积 $V \otimes W$.

定理 2.5 设 V, W 是域 F 上的向量空间. 取 $v_i \in V$ 和 $w_i \in W$. 设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关. 如果 $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$, 则 $w_1 = \cdots = w_n = 0$.

证明 按张量积定义, 对任意双线性映射 $g : V \times W \to Z$ 存在线性映射 $h : V \otimes W \to Z$ 使得

$$g(v, w) = h(v \otimes w).$$

取线性函数 $\alpha \in V^*$ 和 $\beta \in W^*$, 定义

$$g(v, w) = \alpha(v)\beta(w).$$

显然这个 $g : V \otimes W \to F$ 是双线性映射.

现从假设 $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$ 开始. 则

$$0 = h\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n h(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha(v_i)\beta(w_i).$$

因为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关. 故此存在 $v_j^* \in V^*$ 使得 $v_j^*(v_i) = \delta_{ji}$. 下一步取 $\alpha = v_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant n$, 则

$$0 = \sum_i v_j^*(v_i)\beta(w_i) = \beta(w_j).$$

但在上式 β 是可以任意选取的. 这样对所有 $\beta \in W^*$, $\beta(w_j) = 0$, 于是 $w_j = 0$. □

例 2.6 设 $A = (a_{ij}) \in M_{2\times 2}(F)$, $B = (b_{ij}) \in M_{3\times 3}(F)$, 其中 $M_{m\times n}(F)$ 表示域 F 上 $m \times n$ 矩阵全体. 则 A 与 B 的张量积 $A \otimes B$ 或称 Kronecker 积定义为 6×6 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}.$$

这就是 $M_{2\times 2}(F)$ 与 $M_{3\times 3}(F)$ 在域 F 上的张量积. 事实上, 定义映射

$$\gamma : M_{2\times 2}(F) \times M_{3\times 3}(F) \to M_{6\times 6}(F),$$
$$(A, B) \to \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}.$$

令 T 表示由有序对 (A, B), $A \in M_{2\times 2}(F)$, $B \in M_{2\times 3}(F)$ 生成的域 F 上的向量空间. T 中的子空间 S 是由如下元素生成的

$$(aA_1 + A_2, B) - a(A_1, B) - (A_2, B), \quad (A, aB_1 + B_2) - a(A, B_1) - (A, B_2),$$

其中 $a \in F, A, A_1, A_2 \in M_{2\times 2}(F)$, $B, B_1, B_2 \in M_{3\times 3}(F)$.

设商空间 $U = T/S$ 并定义映射 f 为

$$f : M_{2\times 2}(F) \times M_{3\times 3}(F) \to U,$$
$$(A, B) \to f(A, B) := (A, B) + S.$$

则 (U, f) 是 $M_{2\times 2}(F)$ 与 $M_{3\times 3}(F)$ 在域 F 上的张量积. 由张量积的万有性可知, 对于上述映射 γ, 存在唯一的 F 线性映射 $h : U \to M_{6\times 6}(F)$, 使得 $h \circ f = \gamma$.

下面我们证明 h 同构于 γ. 易知 U 的维数是 $6 \times 6 = 36$. 取 $M_{2\times 2}$ 的基 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^2$, 其中 E_{ij} 的 (i, j) 元为 1, 其他元为 0. 再取 $M_{3\times 3}$ 的基 $\{F_{pq}\}_{p,q=1}^3$, 其中 F_{pq} 的 (p, q) 元为 1, 其他元为 0. 则 U 的基为 $\{E_{ij} \otimes F_{pq}\}$. 于是

$$h(E_{ij} \otimes F_{pq}) = h \circ f(E_{ij}, F_{pq}) = \gamma(E_{ij}, F_{pq})$$

是 E_{ij} 与 F_{pq} 的 Kronecker 积并且所有的 $\gamma(E_{ij}, F_{pq})$ 是线性无关的, $i, j = 1, 2$; $p, q = 1, 2, 3$. 从而 h 同构于 γ. 因此 $(M_{6\times 6}(F), \gamma)$ 是 $M_{2\times 2}(F)$ 与 $M_{3\times 3}(F)$ 在域 F 上的张量积.

2.3　线性映射的张量积

给出 F 向量空间 V, W, V', W'. 取线性映射 $\phi : V \to V'$ 和 $\psi : W \to W'$. 定义映射 $\phi \odot \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$ 如下

$$\phi \odot \psi(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w).$$

容易验证 $\phi \odot \psi$ 是 F 线性映射.

于是得映射

$$g : \mathrm{Hom}_F(V, V') \times \mathrm{Hom}_F(W, W') \to \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, V' \otimes W'),$$
$$(\phi, \psi) \mapsto \phi \odot \psi.$$

可以验证 g 是双线性映射.

按张量积 $\mathrm{Hom}_F(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_F(W, W')$ 的定义得线性映射 h 如下交换图表所示

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_F(V, V') \times \mathrm{Hom}_F(W, W') \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Hom}_F(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_F(W, W') \arrow[d, dashed, "h"] \\ & \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, V' \otimes W') \end{tikzcd}$$

从上图知 $h(\phi \otimes \psi) = \phi \odot \psi$.

定理 2.7 存在唯一线性映射

$$h : \mathrm{Hom}_F(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_F(W, W') \to \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, V' \otimes W'),$$
$$\phi \otimes \psi \mapsto \phi \odot \psi.$$

此外 h 是单射. 如果题中所有向量空间是有限维, 则 h 是同构.

证明 只证明 h 是单射. 在 $\mathrm{Hom}_F(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_F(W, W')$ 内取非零元 η. 则可在 $\mathrm{Hom}_F(W, W')$ 内找线性无关元素 $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$, 及 $\{\phi_i\} \subset \mathrm{Hom}_F(V, V')$ 使得

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \otimes \psi_i.$$

若 $h(\eta) = 0$, 则对任意 $v \in V$, $w \in W$ 有

$$0 = h(\eta)(v \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} h(\phi_i \otimes \psi_i)(v \otimes w) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) \otimes \psi_i(w).$$

由于 $\eta \neq 0$, 存在一 $\phi_i \neq 0$. 所以有一 $v \in V$ 使 $\phi_i(v) \neq 0$. 如有需要我们可以更改指标让我们可以假定 $\phi_1(v) \neq 0$. 同理我们从 W 内向量集合 $\{\phi_1(v), \cdots, \phi_n(v)\}$ 选出最大线性无关子集 $\{\phi_1(v), \cdots, \phi_m(v)\}$. 于是有 $a_{k,i} \in F$ 使对 $k > m$ 有

$$\begin{aligned}
\phi_k(v) &= \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} \phi_i(v), \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) \otimes \psi_i(w) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \phi_i(v) \otimes \psi_i(w) + \sum_{i=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{k,i} \phi_i(v) \right) \otimes \psi_k(w) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \phi_i(v) \otimes w_i',
\end{aligned}$$

其中 $w_i' = \psi_i(w) + \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} \psi_k(w)$.

因为子集 $\{\phi_1(v), \cdots, \phi_m(v)\}$ 是线性无关, 所以对所有 $i \leqslant m$ 和任意的 $w \in W$ 有 $w_i' = 0$, 即

$$\psi_i + \sum_{i=1}^{m} a_{k,i} \psi_k = 0.$$

但这与集 $\{\psi_i\}$ 是线性无关相矛盾, 故得证线性映射 h 是单射. □

此后不再区分 $\phi \otimes \psi$, $\phi \odot \psi$. 即把 $\phi \otimes \psi \in \mathrm{Hom}_F(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_F(W, W')$ 看作 $\mathrm{Hom}_F(V \otimes W, V' \otimes W')$ 内元素, 并且

$$\phi \otimes \psi(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w).$$

现取 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, $m\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})$, a_{ij},b_{ij} 在域 F 内. 则有映射

$$\phi_A : F^n \to F^n$$

和

$$\phi_B : F^m \to F^m.$$

对应于 F^n 的标准基 $\{e_i\}$ (即 e_i 的 i 坐标为 1, 其余为 0) ϕ_A 的矩阵是 A, 以公式表示为 $[\phi_A]=A$. 同样对应于 F^m 的标准基 $\{f_j\}$ ϕ_B 的矩阵是 B, 以公式表示为 $[\phi_B]=B$. 如果在 $F^n\otimes F^m$ 取基

$$e_1\otimes f_1,\cdots,e_1\otimes f_m,e_2\otimes f_1,\cdots,e_2\otimes f_m,\cdots,e_n\otimes f_m,$$

则线性映射 $\phi_A\otimes\phi_B$ 的矩阵是 $A\otimes B$, 即

$$[\phi_A\otimes\phi_B]=A\otimes B.$$

如前做个例子. 取 $n=m=2$, 做计算如下,

$$\begin{aligned}\phi_A\otimes\phi_B(e_1\otimes f_1)&=\phi_A(e_1)\otimes\phi_B(f_1)\\&=(a_{11}e_1+a_{21}e_2)\otimes(b_{11}f_1+b_{21}f_2)\\&=a_{11}b_{11}e_1\otimes f_1+a_{11}b_{21}e_1\otimes f_2+a_{21}b_{11}e_2\otimes f_1+a_{21}b_{21}e_2\otimes f_2,\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}\phi_A\otimes\phi_B(e_1\otimes f_2)&=a_{21}b_{12}e_1\otimes f_1+a_{11}b_{22}e_1\otimes f_2+a_{21}b_{12}e_2\otimes f_1+a_{21}b_{22}e_2\otimes f_2,\\\phi_A\otimes\phi_B(e_2\otimes f_1)&=a_{12}b_{11}e_1\otimes f_1+a_{12}b_{21}e_1\otimes f_2+a_{22}b_{11}e_2\otimes f_1+a_{22}b_{21}e_2\otimes f_2,\\\phi_A\otimes\phi_B(e_2\otimes f_2)&=a_{12}b_{12}e_1\otimes f_1+a_{12}b_{22}e_1\otimes f_2+a_{22}b_{21}e_2\otimes f_1+a_{22}b_{22}e_2\otimes f_2,\end{aligned}$$

所以 $\phi_A\otimes\phi_B$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&a_{12}b_{11}&a_{12}b_{12}\\a_{11}b_{21}&a_{11}b_{22}&a_{12}b_{21}&a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}&a_{21}b_{12}&a_{22}b_{11}&a_{22}b_{12}\\a_{21}b_{21}&a_{21}b_{22}&a_{22}b_{21}&a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B\\a_{21}B&a_{22}B\end{pmatrix}=A\otimes B.$$

2.4 张量积的另一种构造方式

设 F 是一个特征为零的域, V 是域 F 上的一个向量空间. $V^*:=\mathrm{Hom}_F(V,F)$ 表示 V 的对偶空间. 则有一个**标准配对** (standard pairing)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\ : V\times V^*\to F$$

满足

$$\langle v, v^* \rangle = v^*(v) \quad \text{对所有 } v \in V,\ v^* \in V^*.$$

对于 F 向量空间 V, W, Z, 令 $\mathscr{L}(V, W; Z)$ 表示 $V \times W$ 到 Z 上的所有双线性映射构成的 F 向量空间.

对 $v^* \in V^*$, $w^* \in W^*$, 容易验证由

$$[v^*, w^*](v, w) = v^*(v)w^*(w) \quad \text{对所有的 } v \in V, w \in W$$

定义的映射

$$[v^*, w^*] : V \times W \to F$$

是一个双线性函数.

令

$$[V^*, W^*] = \{[v^*, w^*] \mid v^* \in V^*, w^* \in W^*\}$$

表示所有形如 $[v^*, w^*]$ 的双线性函数的集合. 该集合是 $\mathscr{L}(V, W; Z)$ 的一个 F 子空间, 其对偶空间记为 $[V^*, W^*]^*$.

定义一个映射 $f : V \times W \to [V^*, W^*]^*$ 如下:

$$f(V, W)[V^*, W^*] \to F,$$
$$[v^*, w^*] \to f(v, w)([v^*, w^*]) = v^*(v)w^*(w).$$

定理 2.8 设 $\dim_F V < \infty$, $\dim_F W < \infty$. 定义一个映射

$$f : V \times W \to [V^*, W^*]^*,$$

使得

$$f(v, w)([v^*, w^*]) = v^*(v)w^*(w),$$

则 f 是双线性的, 并且

(1) $([V^*, W^*]^*, f)$ 是 V 与 W 的张量积,
(2) $[V^*, W^*] \approx V^* \otimes W^*$,
(3) $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$,
(4) 标准配对

$$\langle ., . \rangle \ : \ (V \otimes W) \times (V^* \otimes W^*) \to F$$

满足 $\langle v \otimes w, v^* \otimes w^* \rangle = \langle v, v^* \rangle \langle w, w^* \rangle$.

证明留作练习. 可以参考陈省身, 陈维桓著, 微分几何讲义, 北京大学出版社, 第二章第 2 节.

张量积的其他性质:

(1) $\mathscr{L}(V, W; Z) \approx \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, Z)$;
(2) $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$;
(3) $V \otimes W \cong W \otimes V$;
(4) $(V \otimes W) \otimes Z \cong V \otimes (W \otimes Z)$;
(5) 如果 $\dim_F V < \infty$ 且 $\dim_F W < \infty$, 则有 $\dim_F(V \otimes W) = (\dim_F V)(\dim_F W)$.

说明 2.9

(1) 直积 : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^2 + \dim \mathbb{R}^1 = \dim \mathbb{R}^3$,
(2) 张量积 : $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^2$, $\dim \mathbb{R}^2 \cdot \dim \mathbb{R}^1 = \dim \mathbb{R}^2$.

2.5 正合序列

本节给出正合序列的定义并且将正合序列和张量积联系起来.

定义 2.10 给定 F 向量空间上的 F 线性映射序列:

$$\cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \to \cdots.$$

对于每个 n, V_n 有两个子空间: f_{n-1} 的像

$$\mathrm{Img}(f_{n-1}) := \{f_{n-1}(v) : v \in V_{n-1}\},$$

以及 f_n 的核

$$\mathrm{Ker}(f_n) := \{v \in V_n : f_n(v) = 0\}.$$

(1) 给定的 F 线性映射序列称为一个**复形** (complex), 如果对任意的 n, 有

$$\mathrm{Img}(f_{n-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(f_n).$$

在这种情况下, 我们可以定义商 F 线性空间

$$H_n = \frac{\mathrm{Ker}(f_n)}{\mathrm{Img}(f_{n-1})},$$

并且称其为给定复形的第 n 个**同调群** (homology group).

(2) 给定的 F 线性映射序列称为**正合的** (exact), 如果对任意的 n, 有

$$\mathrm{Img}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n).$$

例 2.11 设 $V=\mathbb{R}^3, V_1=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$, 其中 $e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的自然基. 定义一个线性映射

$$\psi: V\to V_1,$$
$$xe_1+ye_2+ze_3\to\psi(xe_1+ye_2+ze_3)=xe_1+ye_2 \quad \text{对任意 } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

容易验证 $\mathrm{Ker}(\psi)=\mathbb{R}e_3$ 和 $\mathrm{Img}(\psi)=V_1$. 由线性映射同构定理可得 $V/\mathbb{R}e_3\approx V_1$. 进一步可以证明: $\mathbf{0}\to\mathbb{R}e_3\to V\to V_1\to\mathbf{0}$ 是正合的.

定理 2.12 给定 F 向量空间上的一个正合序列 $V'\overset{\varphi}{\to}V\overset{\psi}{\to}V''\to\mathbf{0}$, 则对任意的 F 向量空间 W,

$$W\otimes V'\overset{1\otimes\varphi}{\to}W\otimes V\overset{1\otimes\psi}{\to}W\otimes V''\to\mathbf{0}$$

是正合的, 其中 $(1\otimes\varphi)(w\otimes v')=w\otimes\varphi(v')$.

证明 我们需要证明:

(1) $1\otimes\psi$ 是满射;
(2) $\mathrm{Img}(1\otimes\varphi)\subseteq\mathrm{Ker}(1\otimes\psi)$;
(3) $\mathrm{Img}(1\otimes\varphi)=\mathrm{Ker}(1\otimes\psi)$.

(1) 由于 $V\overset{\psi}{\to}V''\to\mathbf{0}$ 是正合的, 则 ψ 是满射, 故 V'' 中的任一元素均可表示为 $\psi(v)$, $v\in V$. 因此, $1\otimes\psi: W\otimes V\to W\otimes V''$ 是满射, 因为 $W\otimes V''$ 中的元素可以写成 $\sum w_i\otimes\psi(v_i)=(1\otimes\psi)(\sum w_i\otimes v_i)$.

(2) 由于 $V'\overset{\varphi}{\to}V\overset{\psi}{\to}V''$ 是正合的, $\mathrm{Img}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\psi$, 从而可得 $\psi\varphi=0$. 注意到 $(1\otimes\psi)(1\otimes\varphi)=(1\otimes\psi\varphi)=(1\otimes 0)=0$. 于是 $\mathrm{Img}(1\otimes\varphi)\subseteq\mathrm{Ker}(1\otimes\psi)$.

(3) 为了证明 $\mathrm{Img}(1\otimes\varphi)=\mathrm{Ker}(1\otimes\psi)$, 我们需要利用习题中的一个技巧来证明: 某一个给定的映射是同构映射.

令 $I=\mathrm{Img}(1\otimes\varphi)$, $K=\mathrm{Ker}(1\otimes\psi)$.

- 由 $V\overset{\psi}{\to}V''$, 定义一个 F 线性映射 $W\otimes V\overset{1\otimes\psi}{\to}W\otimes V''$. 我们已经证明了 $I\subseteq K$, 即

$$(1\otimes\psi)(I)=0.$$

于是可以定义一个线性映射

$$\theta: W\otimes V/I\to W\otimes V'': x\otimes y+I\mapsto x\otimes\psi(y)$$

使得下图是交换的.

$$\begin{tikzcd} W\otimes V \arrow[r, "1\otimes\psi"] \arrow[d] & W\otimes V'' \\ W\otimes V/I \arrow[ur, dashed, "\theta"] & \end{tikzcd}$$

下面, 通过构造一个逆映射 $\eta : W\otimes V" \to W\otimes V/I$, 我们将证明 θ 是一个同构映射.

- 为了构造映射 η, 我们首先构造一个双线性映射

$$\beta : W\times V'' \to W\otimes V/I.$$

设 $(x,y'')\in W\times V''$, $\psi(y)=y''$. 令

$$\beta(x,y'')=x\otimes y+I.$$

我们必须验证上述定义是明确的. 假设存在 y_1, y_2, 使得 $\psi(y_1)=y''=\psi(y_2)$. 再由 β 的定义可得

$$\begin{aligned} x\otimes y'' &\mapsto x\otimes y_1+I,\\ x\otimes y'' &\mapsto x\otimes y_2+I. \end{aligned}$$

由 $\psi(y_1)=\psi(y_2)$ 知

$$\psi(y_1-y_2)=0,\quad \text{即}\quad y_1-y_2\in\operatorname{Ker}\psi=\operatorname{Img}\varphi.$$

故存在 $y'\in V'$ 使得 $y_1-y_2=\varphi(y')$, 即

$$y_1=y_2+\varphi(y').$$

于是

$$\begin{aligned} x\otimes y_1+I &= x\otimes(y_2+\varphi(y'))+I\\ &= x\otimes y_2+x\otimes\varphi(y')+I\\ &= x\otimes y_2+(1\otimes\varphi)(x\otimes y')+I\\ &= x\otimes y_2+I. \end{aligned}$$

这里我们利用了如下事实: $(1\otimes\varphi)(x\otimes y')\in I$ 意味着 $(1\otimes\varphi)(x\otimes y')+I=I$.

- 容易验证映射 β 是双线性的. 再由张量积 $W \otimes V''$ 的定义知, 存在一个线性映射 η, 使得

$$\begin{tikzcd} W \times V'' \arrow[r] \arrow[dr, "\beta"'] & W \otimes V'' \arrow[d, "\eta"] \\ & W \otimes V/I \end{tikzcd}$$

  是一个交换图表.

- 我们可以断言: 映射 η 就是我们所要找的 θ 的逆映射, 即 $\theta\eta = I, \eta\theta = I$, 其中 I 是恒等映射. 例如, 设 $x \otimes y'' \in W \otimes V''$, 则有

$$x \otimes y'' \xrightarrow{\eta} \beta(x, y'') \xrightarrow{\theta} x \otimes \psi(y),$$

  其中 $\beta(x, y'') = x \otimes y + I$, $\psi(y) = y''$. □

2.6 混合张量

混合张量是微分流形上的基本结构. 本节内容可以参考陈省身, 陈维桓著, 微分几何讲义, 北京大学出版社, 第二章第 2 节.

2.6.1 反变与共变张量

我们选取一个特征为 0 的域 F. 设 V 是域 F 上的一个有限维向量空间, $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ 是由 F 线性函数 $V \to F$ 组成的 V 的对偶空间. 定义张量积

$$V_s^r := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{ 个}} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{s\text{ 个}}.$$

有时也将 V_s^r 记作 $T_s^r V$ 或 T_s^r. 特别地, 我们记作

$$T^r V = V^r = V_0^r = V \otimes \cdots \otimes V,$$

而且其元素称为**反变张量** (contravariant tensors).

再者

$$V_s^0 = V_s = V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$$

而且其元素称为**共变张量** (covariant tensors).

V_s^r 中的元素称为 (r, s) 型张量, 这表示它们含有 r 个反变分量与 s 个共变分量.

设 $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 V 的一个基. 这样可以定义 V^* 的一个对偶基 $\{e^{*j}\}_{1\leqslant j\leqslant n}$

$$e^{*j}(e_i)=\delta_i^j.$$

注 Einstein 求和约定是指: 在一单项内若有标号出现两次, 一次是上标, 一次是下标时, 则必须对此标号求和. 例如 n 维空间 V 的向量

$$x=\sum_{i=1}^n x^i e_i$$

按 Einstein 求和约定便表达为

$$x=x^i e_i,$$

这样 $x_j^{ik}e_i\otimes e^{*j}$ 是指

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_j^{ik}e_i\otimes e^{*j}.$$

若矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素标记为 A_j^i, 则用 Einstein 标记矩阵乘法 $C=AB$ 表达为

$$C_k^i=A_j^i\,B_k^j.$$

设线性映射 $\phi:V\to V$ 对应于基 $\{e_i\}$ 的矩阵是 (A_j^i). 则

$$\phi\left(\sum_i x^j e_j\right)=\sum_i\left(\sum_j A_j^i x^j\right)e_i=\sum_i y^i e_i$$

可表达为

$$y^i=A_j^i x^j.$$

2.6.2 基变换

设 $\{\overline{e}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 V 的另外一个基, $\{\overline{e}^{*j}\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是相应的对偶基.

假设从基 $\{e_i\}$ 到基 $\{\overline{e}_i\}$ 的基变换由矩阵 $\alpha=(\alpha_i^j)$ 给出, 即由 Einstein 和式约定可知

$$\overline{e}_i=\alpha_i^j e_j.$$

因而

$$\overline{e}^{*i}=\beta_j^i e^{*j}\ ,$$

其中 $\beta=(\beta_j^i)=\alpha^{-1}$, 即 $\alpha_i^j\beta_j^k=\delta_i^k$.

现在将上述公式用于 V_s^r 中的张量, 可得

$$\begin{aligned}
x &= \overline{x}_{k_1,\cdots,k_s}^{i_1,\cdots,i_r}\overline{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\overline{e}^{*k_s} \quad (\text{关于新基 } \{\overline{e}_i\},\{\overline{e}^{*j}\})\\
&= \overline{x}_{k_1,\cdots,k_s}^{i_1,\cdots,i_r}\alpha_{i_1}^{j_1}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{l_s}^{k_s}e^{*l_s} \quad (\text{利用 } \overline{e}_i=\alpha_i^j e_j\ \overline{e}^{*i}=\beta_j^i e^{*j})\\
&= \overline{x}_{k_1,\cdots,k_s}^{i_1,\cdots,i_r}\alpha_{i_1}^{j_1}\cdots\alpha_{i_r}^{j_r}\beta_{l_1}^{k_1}\cdots\beta_{l_s}^{k_s}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{*l_1}\otimes\cdots\otimes e^{*l_s}.
\end{aligned}$$

但

$$x = x_{l_1,\cdots,l_s}^{j_1,\cdots,j_r}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{*l_1}\otimes\cdots\otimes e^{*l_s}$$

是在基 $\{e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{*l_1}\otimes\cdots\otimes e^{*l_s}\}$ 下的展开式.

因此

$$x_{l_1,\cdots,l_s}^{j_1,\cdots,j_r} = \overline{x}_{k_1,\cdots,k_s}^{i_1,\cdots,i_r}\alpha_{i_1}^{j_1}\cdots\alpha_{i_r}^{j_r}\beta_{l_1}^{k_1}\cdots\beta_{l_s}^{k_s}.$$

这是张量基变换法则.

例 2.13 设 $V=\mathbb{R}^3$, $e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$. 考虑由所有 $(2,1)$ 型张量构成的空间 $V_1^2=V\otimes V\otimes V^*$. V_1^2 的一个基含有 27 个元素. 为了给出一个张量 $x\in V_1^2$, 我们需要对应于基

$$\{e_{j_1}\otimes e_{j_2}\otimes e^{*l_1}\}$$

的 27 个数

$$\{x_{l_1}^{j_1j_2}\}.$$

我们考虑如下的一个例子

$$\begin{aligned}
\{x_{l_1}^{j_1j_2}\} &= \{x_1^{11},x_2^{11},x_3^{11},x_1^{12},x_2^{12},\cdots\}\\
&= \{1,2,1,1,1,0,\cdots,0\}.
\end{aligned}$$

这是一个张量

$$x = e_1\otimes e_1\otimes e^{*1}+2e_1\otimes e_1\otimes e^{*2}+e_1\otimes e_1\otimes e^{*3}+e_1\otimes e_2\otimes e^{*1}+e_1\otimes e_2\otimes e^{*2}.$$

假设现在我们把基加以变更

$$\overline{e}_1 = e_1+e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overline{e}_2=e_2,\quad \overline{e}_3=e_3.$$

计算 α, β, $\overline{x}_{k_1}^{i_1i_2}$ 以及 x 在基

$$\{\overline{e}_{j_1}\otimes\overline{e}_{j_2}\otimes\overline{e}^{*l_1}\}$$

下的表达式.

习　题

1. 取 $V=W=F^n, U=F$, $A\in M_{n\times n}(F)$. 则下面定义的映射 f

$$f([v_1,\cdots,v_n]^T,[w_1,\cdots,w_n]^T):=[v_1,\cdots,v_n]A[w_1,\cdots,w_n]^T\in F$$

是双线性的.

2. 由所有从 $V\times W$ 到 U 的双线性映射所组成的集合记为 $\mathscr{L}(V,W;U)$. 证明: $\mathscr{L}(V,W;U)$ 是 F 向量空间.

3. 设 V,W,Z 都是 F 向量空间. 通常, $\mathrm{Hom}_F(V\otimes W,Z)$ 是从向量空间 $V\otimes W$ 到向量空间 Z 的所有线性映射构成的 F 向量空间. 以 $\mathscr{L}(V,W;Z)$ 表示从 $V\times W$ 到 Z 上的所有的双线性映射构成的 F 向量空间. 根据张量积的定义: 对每个 $g\in\mathscr{L}(V,W;Z)$, 存在唯一的 $h\in\mathrm{Hom}_F(V\otimes W,Z)$, 使得下图是交换的.

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r] \arrow[dr, "g"] & V\otimes W \arrow[d, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

这意味着我们可以定义一个映射

$$\mathscr{L}(V,W;Z)\to\mathrm{Hom}_F(V\otimes W,Z):g\mapsto h.$$

证明: 这个映射是 F 线性的, 并且是一个同构映射.

4. 取 $v_i\in V$ 和 $w_i\in W$. 设 $\sum_{i=1}^n v_i\otimes w_i=0$. 如果 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 线性无关. 证明: $w_1=\cdots=w_n=0$.

5. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 在 V 线性无关和 $f_1,\cdots,f_m$ 在 W 线性无关. 证明: $\{e_i\otimes f_j:1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\}$ 在 $V\otimes W$ 线性无关.

6. 如果 $\dim_F V<\infty$ 和 $\dim_F W<\infty$, 证明: $\dim_F(V\otimes W)=(\dim_F V)(\dim_F W)$.

7. 设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 在 V 线性无关, $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 在 V 线性无关, $\{w_1,\cdots,w_n\}$ 在 W 线性无关, $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 在 W 线性无关. 证明:

$$\sum_{i=1}^n v_i\otimes w_i=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$$

当且仅当存在可逆 F 矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 使得 $A^TB=I$ 并且

$$v_i=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j,\quad w_i=\sum_{i=1}^n b_{ij}y_j.$$

8. 设 $V=\mathbb{R}^3=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$, $V_1=\mathbb{R}e_1$, $V_2=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$, $V_3=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}(e_2+e_3)$, 其中 $e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的自然基. 定义线性映射

$$\psi_1: V\to\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3,$$
$$xe_1+ye_2+ze_3\to\psi_1(xe_1+ye_2+ze_3)=ye_2+ze_3\quad \text{对所有的 } x,y,z\in\mathbb{R};$$
$$\psi_2: V\to\mathbb{R}e_3,$$
$$xe_1+ye_2+ze_3\to\psi_2(xe_1+ye_2+ze_3)=ze_3\quad \text{对所有的 } x,y,z\in\mathbb{R};$$
$$\psi_3: V\to\mathbb{R}(e_3-e_2),$$
$$xe_1+ye_2+ze_3\to\psi_3(xe_1+ye_2+ze_3)=(y-z)(e_3-e_2)\quad \text{对所有的 } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

(a) 给出 ψ_1 的核和 ψ_1 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵. 进一步证明: $V/V_1\approx\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3$ 且 $\mathbf{0}\to V_1\to V\to\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3\to\mathbf{0}$ 是正合的.

(b) 给出 ψ_2 的核和 ψ_2 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵. 进一步证明: $V/V_2\approx\mathbb{R}e_3$ 且 $\mathbf{0}\to V_2\to V\to\mathbb{R}e_3\to\mathbf{0}$ 是正合的.

(c) 给出 ψ_3 的核和 ψ_3 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵. 进一步证明: $V/V_3\approx\mathbb{R}(e_3-e_2)$ 且 $\mathbf{0}\to V_3\to V\to\mathbb{R}(e_3-e_2)\to\mathbf{0}$ 是正合的. 最后, 画图表示商空间 V/V_3 的同构空间.

9. (a) $0\xrightarrow{g}V\xrightarrow{f}W$ 是正合的 $\Longleftrightarrow$ f 是单射. (序列正合 $\Rightarrow 0=\mathrm{Img}(g)=\mathrm{Ker}(f)\Rightarrow f$ 是单射. 反之亦然.)

(b) $V\xrightarrow{f}W\xrightarrow{g}\mathbf{0}$ 是正合的 $\Longleftrightarrow$ f 是满射. (序列正合 $\Rightarrow \mathrm{Img}(f)=\mathrm{Ker}(g)=W\Rightarrow f$ 是满射. 反之亦然.)

(c) $\mathbf{0}\to V\to W\to Z\to\mathbf{0}$ 是正合的 $\Longleftrightarrow$ V 同构于 W 的一个子空间且 Z 同构于商空间 W/V.

10. 设 V 是一个 F 向量空间, U, W 为 V 的子空间. 假设 $U\subseteq W$.

(a) 证明映射 p:

$$V/U\to V/W,$$
$$v+U\mapsto v+W$$

是一个定义明确的线性映射, 即证明: 如果

$$v_1+U=v_2+U,$$

则

$$p(v_1+U)=p(v_2+U).$$

(b) 映射 p 的核为

$$\mathrm{Ker}\,p:=\{v+U: p(v+U)=0+W\}.$$

证明: $\mathrm{Ker}\,p=W/U$.

(c) 证明: 如下序列

$$0\to W/U\to V/U\xrightarrow{p}V/W\to 0$$

是正合的.

(d) 证明: 如果 $\mathrm{Ker}\, p = 0$, 则 $U = W$. 因此证明: 如果 p 是一个同构映射, 则 $U = W$.

11. (a) 张量组 $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*j_1}\otimes\cdots\otimes e^{*j_s}\}$ 构成 V_s^r 的一个基, 其中 $1\leqslant i_k\leqslant n, 1\leqslant j_l\leqslant n$.

(b) 任给的元素 $x\in V_s^r$ 可唯一地表示为

$$x = \sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s} x^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*j_1}\otimes\cdots\otimes e^{*j_s},$$

其中 $x^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}\in F$.

12. 由 Einstein 和式约定可知

$$x = x^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3} e_{i_1}\otimes e^{*i_2}\otimes e_{i_3}\otimes e_{i_4}$$

表示

$$x = \sum_{i_1,i_2,i_3} x^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3} e_{i_1}\otimes e^{*i_2}\otimes e_{i_3}\otimes e_{i_4}\in V\otimes V^*\otimes V\otimes V.$$

注意到我们不必先将 V 放在一起然后把 V^* 放在后面.

13. 以 $\mathrm{End}_F(V)$ 记 $\mathrm{Hom}_F(V,V)$. 设 V,W 是有限维 F 向量空间. 证明: 有 F 向量空间同构

$$\mathrm{End}_F(V)\otimes_F \mathrm{End}_F(W)\approx \mathrm{End}_F(V\otimes W).$$

14. 设 V,W 是有限维 F 向量空间. V^* 是 V 的对偶空间. 取 $f\in V^*$, $g\in W^*$, 证明: 以下为双线性映射

$$V\times W\to F:(v,w)\mapsto f(v)g(w).$$

用

$$\theta(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)g(w)$$

定义 $\theta(f\otimes g)\in (V\otimes W)^*$. 利用张量的定义证明:

$$\theta: V^*\times W^*\to (V\otimes W)^*$$

是 F 向量空间同构.

15. 设 V,W 是有限维 F 向量空间. V^* 是 V 的对偶空间. 对 $v^*\in V^*$, $w\in W$, 定义 $\phi(v^*\otimes w)\in \mathrm{Hom}_F(V,W)$ 为 $\phi(v^*\otimes w)(v) = \langle v, v^*\rangle w$.

设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的基. $\{v_1^*,\cdots,v_n^*\}$ 是对偶基. 对 $T\in \mathrm{Hom}_F(V,W)$, 定义 $\psi(T)\in V^*\otimes W$ 为 $\psi(T) = \sum v_j^*\otimes T(v_j)$.

利用 ϕ,ψ 证明: 有 F 向量空间同构

$$V^*\otimes W\approx \mathrm{Hom}_F(V,W).$$

16. 设 A,B,C 是有限维 F 向量空间. 对 $f\in \mathrm{Hom}_F(A\otimes B, C)$, 设

$$\Phi(f)\in \mathrm{Hom}_F(A, \mathrm{Hom}_F(B,C))$$

为

$$\Phi(f)(a): b\mapsto f(a\otimes b).$$

证明: Φ

$$\mathrm{Hom}_F(A \otimes B, C) \approx \mathrm{Hom}_F(A, \mathrm{Hom}_F(B, C))$$

是 F 向量空间同构.

17. 设有线性映射 $\phi_1 : V_1 \to W_1$, $\phi_2 : V_2 \to W_2$. 证明:

$$\mathrm{Ker}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \mathrm{Ker}\,\phi_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \mathrm{Ker}\,\phi_2, \quad \mathrm{Img}(\phi_1 \otimes \phi_2) = \phi_1(V_1) \otimes \phi_2(V_2).$$

18. 设向量空间 $V \subset V'$, $W \subset W'$. 证明:

$$V' \otimes W'/(V \otimes W' + V' \otimes W) \cong (V'/V) \otimes (W'/W),$$
$$(V' \oplus W')/(V \oplus W) \cong (V'/V) \oplus (W'/W).$$

第三章　张量代数

设 V 是向量空间. V 有加法

$$V \times V \to V : (v, u) \mapsto v + u.$$

如果我们希望 V 是环, 那就要在 V 上放入一个乘法 $* : V \times V \to V$. 我们不可以直接用张量积做乘法, 因为 $V \times V \to V \otimes V$. 解决办法是把所有张量积都放在一起. 记 p 次张量积 $V \otimes \cdots \otimes V$ 为 $T^p V$. 这样张量积便是直和

$$TV = \oplus_{p=0}^{\infty} T^p V$$

的乘法而 TV 就变成环了.

本章首先回顾置换群、环以及代数的相关概念. 然后, 我们构造出张量代数 TV 并由此引出外代数和斜称张量.

3.1　代数

本章是讲代数. 我们在定义代数之前给出环的定义.

3.1.1　环的定义

设 R 是一个集合. 给定两个从 $R \times R$ 到 R 的映射 α 和 μ. 我们将 $\alpha(x, y)$ 记作 $x + y$, 将 $\mu(x, y)$ 记作 xy. 我们称 R 是一个**环** (ring), 如果下面的条件成立:

(1) R 和 α 一起构成一个交换群;

(2) $(xy)z = x(yz)$ 对于所有 $x, y, z \in R$ 都成立, 并且存在 R 中的一个元 1 使得 $1x = x = x1$ 对于所有 $x \in R$ 都成立;

(3) $(x + y)z = xz + yz$ 且 $z(x + y) = zx + zy$ 对于所有 $x, y, z \in R$ 都成立.

一个环的最简单的例子是整数环 $\mathbb{Z}$. 另一个环的例子是所有 2×2 矩阵的集合 $M(2, \mathbb{Z})$ 且把矩阵的加法和乘法作为复合律. 一个环称为交换的, 如果 $xy = yx$ 对于所有 $x, y \in R$ 都成立. 整数环 $\mathbb{Z}$ 是交换环但环 $M(2, \mathbb{Z})$ 不是交换环.

3.1.2　商环

我们复习商环这个结构.

设 A 为一个环. 根据定义, A 的一个 (双边) 理想 I 是环 A 的加法群 $(A,+)$ 的一个子群, 且满足如下条件:

$$AI \subseteq I \text{ 和 } IA \subseteq I.$$

我们利用理想 I 来构造一个商群

$$A/I := \{a+I : a \in A\},$$

其中

$$a+I := \{a+b : b \in I\}.$$

A/I 中的加法按通常的方式定义:

$$a+I+b+I := a+b+I.$$

由于 I 是一个理想, 实际上我们可以在 A/I 中定义一种乘法使其成为一个环:

$$(a+I)(b+I) := (ab+I).$$

容易验证如上定义的乘法是明确的, 即如果

$$a+I = a_1+I, \quad b+I = b_1+I,$$

则

$$(a+I)(b+I) = (a_1+I)(b_1+I).$$

验证

$$a+I = a_1+I \Leftrightarrow a-a_1 = c \in I \Rightarrow a = a_1+c \in I,$$
$$b+I = b_1+I \Leftrightarrow b-b_1 = d \in I \Rightarrow b = b_1+d \in I,$$

可得

$$\begin{aligned}(a+I)(b+I) := {} & ab+I \\ & = (a_1+c)(b_1+d)+I \\ & = a_1b_1+a_1d+cb_1+cd+I \\ & = a_1b_1+I \quad (\text{因为 } a_1d+cb_1+cd \in I) \\ & = (a_1+I)(b_1+I).\end{aligned}$$

我们称 A/I 为 A 对于 I 的**商环** (quotient ring). 给定两个环 R 和 A. 映射 $f: R \to A$ 称为一个**环同态** (ring homomorphism), 如果

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

对于所有 $x, y \in R$ 都成立. 容易证明: 若 I 是环 A 的 (双边) 理想, 则以下映射

$$p : A \to A/I : a \mapsto a + I$$

是环同态. 称 p 为**自然投射** (natural projection).

3.1.3 代数的定义

定义 3.1 域 F 上的**代数** (algebra) 是指域 F 上的向量空间 A, 其上定义了一个乘法

$$A \times A \to A : (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

使得

(1) 向量空间 A 中的向量加法

$$A \times A \to A : (x, y) \mapsto x + y$$

与乘法

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

构成环 $(A, +, \cdot)$.

(2) 乘法运算是 F 双线性的, 即

$$(ax_1 + x_2) \cdot y = ax_1 \cdot y + x_2 \cdot y, \quad x \cdot (ay_1 + y_2) = ax \cdot y_1 + x \cdot y_2.$$

这就是说一个 F 代数是一个环 $(A, +, \cdot)$, 其上定义了数乘

$$F \times A \to A : (a, x) \mapsto ax,$$

使得

(1) 该数乘运算与环的加法运算 $+$ 可以使 A 构成域 F 上的向量空间, 并且

(2) 环的乘法 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 是 F 双线性的.

留意这里所定义的代数有时称为**结合代数** (associative algebra) 用以强调乘法 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 满足结合律 $(xy)z = x(yz)$.

例 设 F 为域. 由系数在 F 内的 $n \times n$ 矩阵所组成的集合记为 $M_n(F)$. 以矩阵乘法为乘法 $M_n(F)$ 为 F 代数.

设 F 代数 A 有 F 子向量空间 A_n, $n \geqslant 0$ 为整数使得

(1) $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$, 向量空间直和,

(2) $A_n A_m \subset A_{n+m}$ 对所有 n, m,

(3) $1 \in A_0$.

则称 A 为**分级代数** (graded algebra).

让我们给个标准例子. 设 $R=F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变元系数取自域 F 的多项式所组成的环. 设 $(i)=(i_1,\cdots,i_n)$, $i_k\geqslant 0$ 为整数. 设 $x^{(i)}=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$. R 内的单项式 $a_{(i)}x^{(i)}$ $(a_{(i)}\in F)$ 的次数是 $d=i_1+\cdots+i_n$. 以 R_d 记由 0 及所有次数是 d 的单项式的有限和所组成的集合. 则 R_d 的元素便是 d 次齐次多项式. R 的任一元素 f 可以唯一地表达成有限和 $f=f_0+f_1+\cdots+f_d+\cdots$, 其中 $f_d\in R_d$, 所以 $R=\oplus_d R_d$. 显然有 $R_nR_m\subset R_{n+m}$, 这样我们利用次数把多项式环写成分级代数.

3.2 对称群

3.2.1 置换

定义 3.2 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个**置换** (permutation) 是指一个双射 $\pi=\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$.

有时将 $\pi(i)$ 记作 π_i, 且令

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\end{pmatrix}.$$

我们也用如下记号: 将没有出现的数认为是固定的. 例如, 取 $n=4$, 则有

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\quad \text{表示}\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

两个置换 π 和 σ 的乘积定义为两个对应映射的复合映射.

例 3.3

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad \sigma\pi(i)=\sigma(\pi(i)),$$

$$\sigma\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

下面我们回顾群的定义.

定义 3.4 设 G 是一个集合. 设

$$\mu: G\times G\to G$$

是一个映射, 我们有时称之为 G 的复合律. 为方便起见, 我们用 xy 表示 $\mu(x,y)$. 设

(1) $(xy)z = x(yz)$ 对于所有 $x, y, z \in G$ 都成立;
(2) 存在 G 中的一个元 e, 使得 $ex = x = xe$ 对于所有 $x \in G$ 都成立;
(3) 对于每个 $x \in G$, 存在一个 $y \in G$, 使得 $xy = e = yx$.

则我们称 G 是一个**群** (group). 我们称条件 (2) 中的元 e 为群 G 的单位元; 有时, 我们用 1 表示 e. 给定 x, 条件 (3) 中的元 y 称为 x 的逆; 我们用 x^{-1} 表示 y.

当我们用 $x + y$ 表示 $\mu(x, y)$ 时, 我们也用 0 表示 e, 用 $-x$ 表示 x 的逆. 如果 $xy = yx$ 对于所有 $x, y \in G$ 都成立, 则我们称群 G 为交换群或者 Abel 群.

第一个关于群的例子是所有整数构成的加法群 $\mathbb{Z}$, 这里复合映射 $\mu(x, y)$ 就是两个整数 n, m 的加法 $n + m$, 这是一个 Abel 群.

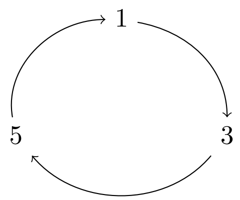
所有整数集合 $\mathbb{Z}$ 上的行列式为 1 的 2×2 矩阵的集合记作 $SL(2, \mathbb{Z})$, 这里 $\mu(A, B)$ 定义为 $SL(2, \mathbb{Z})$ 中任意两个矩阵 A, B 的乘积 AB, 这不是一个 Abel 群.

称双射 $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 为**置换** (permutation). 由集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上所有置换所组成的集合记为 $\mathscr{S}_n$. 以映射的复合 $\pi \circ \sigma$ 定义两个置换 π 和 σ 的乘积 $\pi\sigma$. 则容易验证 $\mathscr{S}_n$ 满足群的定义. 称 $\mathscr{S}_n$ 为 n 个元素的**置换群** (permutation group) 或**对称群** (symmetric group).

3.2.2 轮换

一个**轮换** (cycle) 是指 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集上的一个循环置换. 轮换中移动整数的个数称为轮换的长度. 我们给出一个轮换的例子.

例 3.5 取 $n = 6$. 下图是一个长度为 3 的轮换的例子.



利用前面的记号, 这个轮换为置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

并且这个置换可简记为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

称两个轮换为不相交的, 如果它们不含有相同的数.

命题 3.6　任何置换都是互不相交的轮换的乘积.

证明　设 $s \in \mathscr{S}_n$. 取 $a \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 设 $sa = b$, $sb = s^2a = c, \cdots$, 等等. 因为只有 n 个元素, 所以有第一个整数 ℓ 使得 $s\ell = a$ 和

$$a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{s} c \cdots \xrightarrow{s}$$

是轮换 $(abc \cdots \ell)$.

下一步取一个不在 $a, b, c, \cdots, \ell$ 之中的整数 p, $1 \leqslant p \leqslant n$. 计算 $sp, s^2p, \cdots$. 如上得轮换 $(p \cdots q)$.

如此继续直至取完所有从 1 至 n 之间的整数. 这样便得一列轮换: $(abc \cdots \ell)$, $(p \cdots q)$, $\cdots$, $(x \cdots y)$. 不难验证

$$s = (abc \cdots \ell)(p \cdots q) \cdots (x \cdots y). \qquad \square$$

一个长度为 2 的轮换称为一个**对换** (transposition).

例 3.7　这是一个对换的例子

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

命题 3.8　任何轮换都是对换的乘积.

证明　$(\,1\ 2 \cdots n\,) = (1, n)(1, n-1) \cdots (1, 3)(1, 2)$. $\square$

推论 3.9　$\mathscr{S}_n$ 是由对换生成的.

3.2.3　奇偶性

设 D 是所有整数对 $\langle i, j \rangle$ 的集合, 使得 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 以及 $i < j$, 于是

$$D = \begin{Bmatrix} \langle 1,2 \rangle & \langle 1,3 \rangle & \cdots \\ \langle 2,3 \rangle & \langle 2,4 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{Bmatrix}.$$

一个置换 $\pi \in S_n$ 称为倒置 $\langle i, j \rangle \in D$, 如果 $\pi_i = \pi(i) > \pi(j) = \pi_j$.

例 3.10　置换 $(2, 3)$ 倒置 D 中的元素 $\langle 2, 3 \rangle$.

定义 3.11　设 $\operatorname{sgn}(\pi)$ 表示 D 中由置换 π 产生的倒置总数. 设 $\delta(\pi) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)}$. 称 $\delta(\pi)$ 为置换 π 的**奇偶性** (parity).

3.2.4 对称多项式

固定域 F. 以 $x_1,\cdots,x_n$ 为变元系数取自 F 的多项式组成的环记为 $F[x_1,\cdots,x_n]$. 这是个 F 代数.

取对称群 $\mathscr{S}_n$ 的元素 σ. 设

$$^{\sigma}\left(\sum c_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\right)=\sum c_{k_1\cdots k_n}x_{\sigma 1}^{k_1}\cdots x_{\sigma n}^{k_n},$$

即 $^{\sigma}f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_{\sigma 1},\cdots,x_{\sigma n})$. 这样对称群 $\mathscr{S}_n$ 作用在 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 上. 如果 $^{\sigma}f=f$ 则称 f 为**对称多项式** (symmetric polynomial).

展开 $\phi(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 得

$$\phi(x)=x^n-e_1x^{n-1}+e_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^ne_n,$$

则

$$\begin{aligned}
&e_1=x_1+\cdots+x_n,\\
&e_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&e_n=x_1x_2\cdots x_n,
\end{aligned}$$

又可写为

$$e_r=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}.$$

称 e_r 为**初等对称函数** (elementary symmetric functions). 类似以上 $\phi(x)$ 的展开我们可得以下等式

$$\sum_{r=0}^{n}e_rt^r=\prod_{i=1}^{n}(1+x_it),$$

从此得形式无穷级数

$$E(t)=\sum_{r\geqslant 0}e_rt^r=\prod_{i\geqslant 1}(1+x_it),$$

称 $E(t)$ 为 $\{e_r\}$ 的**生成函数** (generating function).

对称多项式组成 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 的子环

$$\Lambda_n=F[x_1,\cdots,x_n]^{\mathscr{S}_n}.$$

Λ_n 是**分级环** (graded ring)

$$\Lambda_n=\oplus_k\Lambda_n^k,$$

其中 Λ_n^k 由 0 和齐性对称 k 次多项式所组成.

定理 3.12

$$\Lambda_n = F[e_1, \cdots, e_n].$$

证明 设 $f \in \Lambda_n$ 的次数是 ν. 将证明 $f \in F[e_1, \cdots, e_n]$. 证法是对 (n, ν) 做归纳. 以 $T(n, \nu)$ 记所需要证明的结果.

(1) 当 $n = 1$ 时 $e_1 = x_1$, 于是 $T(1, \nu)$ 对所有 ν 成立;

(2) 由于 n 个变元的 1 次对称多项式必为 $a + be_1$, 所以 $T(n, 1)$ 对所有 n 成立;

(3) 余下证明: 如果 $T(n-1, \nu') \Rightarrow T(n, \nu')$ 对所有 $\nu' < \nu$, 则 $T(n-1, \nu) \Rightarrow T(n, \nu)$.

设 $f(x_1, \cdots, x_n) \in \Lambda_n$ 的次数是 ν. 则 $f(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) \in \Lambda_{n-1}$ 的次数是 $\nu^* \leqslant \nu$. 由假设 $T(n-1, \nu^*)$ 知有系数在 F 的多项式 g^* 使

$$f(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = g^*(e_1^*, \cdots, e_{n-1}^*),$$

其中

$$e_1^* = x_1 + \cdots + x_{n-1}, \quad \cdots, \quad e_{n-1}^* = x_1 \cdots x_{n-1}.$$

设

$$g(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) - g^*(e_1^*, \cdots, e_{n-1}^*),$$

则 $g \in \Lambda_n$, g 的次数是 $\nu' \leqslant \nu$ 或 $g = 0$. 此外 $g(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0$, 所以 g 的每一项都包含 x_n 为因子. 由于 g 是对称多项式, 所以 g 的每一项都包含 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 为因子. 这样便可抽出因子

$$g(x_1, \cdots, x_n) = e_n g^\dagger(x_1, \cdots, x_n),$$

$g^\dagger$ 的次数是 $\nu' - n < \nu$ 或 $g^\dagger = 0$. 由假设 $T(n, \nu' - n)$ 知有系数在 F 的多项式 h,

$$g^\dagger(x_1, \cdots, x_n) = h(e_1, \cdots, e_n),$$

所以

$$f(x_1, \cdots, x_n) = e_n h(e_1, \cdots, e_n) + g^*(e_1, \cdots, e_{n-1}). \qquad \square$$

3.3 张量代数

设 V 是域 F 上的一个向量空间. 我们有如下同构

$$(V \otimes V) \otimes V \approx V \otimes (V \otimes V),$$

记为 $V \otimes V \otimes V$.

一般地, 对于任给的整数 $p \geqslant 0$, 设

$$T^0V = F, \quad T^1V = V, \quad T^pV = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{ 次}}, \quad p \geqslant 2.$$

每个 T^pV 都是域 F 上的一个向量空间. 我们用这些向量空间构造一个无限直和

$$TV = \oplus_{p=0}^{\infty} T^pV.$$

TV 仍为域 F 上的一个向量空间, 并且有 F 线性单射

$$\iota : V = T^1V \hookrightarrow TV.$$

下面我们利用张量积在这个向量空间中引入一个乘法

$$T^pV \times T^qV \to T^{p+q}V,$$
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p, w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q.$$

最后我们可以验证 TV 构成域 F 上的一个代数. 称 $(TV, \iota : V \to TV)$ 为 V 的**张量代数** (tensor algebra).

3.4　对称代数

取 F 向量空间 V 的张量代数 $(TV, \iota : V \to TV)$. 在 TV 内由所有形式如

$$\iota(u)\iota(v) - \iota(v)\iota(u), \quad u, v, \in V$$

的元素所生成的双边理想记为 K. 设 $SV = TV/K$, $\pi : TV \to SV$ 为自然投射. 记 $\psi = \pi \circ \iota$. 称 $(SV, \psi : V \to SV)$ 为 V 的**对称代数** (symmetric algebra).

因为 $\iota(u)\iota(v) - \iota(v)\iota(u)$ 在 K 内, 所以对任意 $u, v \in V$,

$$\psi(u)\psi(v) = \psi(v)\psi(u)$$

在 SV 成立.

取 n 维 F 向量空间 V. 以 $x_1, \cdots, x_n$ 为 V 的对偶空间 V^* 的一个基. 不难证明 $S(V^*)$ 同构于多项式环 $F[x_1, \cdots, x_n]$.

3.5　外代数

在 F 向量空间 V 的张量代数 TV 内取所有形如 $v \otimes v$ 的元素, 其中 v 是向量空间 V 的任意向量. 在 TV 内用这些元素生成的双边理想记为 I.

这样 I 中的一个元素具有如下形式

$$a \otimes (v \otimes v) \otimes b,$$

其中 $a, b \in TV$, $v \in V$. 令

$$I_p := I \cap T^p V,$$

则 I_p 中的每个元素均为一个具有两个相同相邻元素的长度为 p 的张量.

定义 3.13 V 的**外代数** (exterior algebra) $\wedge V$ 定义为

$$\wedge V := TV/I,$$

其中 I 是代数 TV 的理想, 其元素具有如下形式: $v \otimes v, v \in V$, 则

$$\wedge V = \oplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p V,$$

其中

$$\wedge^0 V = F, \quad \wedge^1 V = V \quad 和 \quad \wedge^p V = T^p V / I_p, \quad p \geqslant 2.$$

我们有自然投影

$$\begin{aligned} TV &\to \wedge V = TV/I, \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_p &\mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p + I. \end{aligned}$$

引入记号

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p := v_1 \otimes \cdots \otimes v_p + I,$$

则称 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ 是 $v_1, \cdots, v_p$ 的**外积** (exterior product).

外代数 $\wedge V$ 的性质:

(1) 对于 $v \in V$, 有 $v \wedge v = 0$. 这可由下式推出

$$v \wedge v := v \otimes v + I = 0 + I.$$

(2) 对于 $v, w \in V$, 有 $v \wedge w = -w \wedge v$. 我们可按如下方式验证

$$\begin{aligned} v + w \in V &\Rightarrow (v + w) \wedge (v + w) = 0 \\ &\Rightarrow v \wedge v + v \wedge w + w \wedge v + w \wedge w = 0 \\ &\Rightarrow v \wedge w + w \wedge v = 0. \end{aligned}$$

(3) 对于 $v_1, \cdots, v_p, {v'}_1, \cdots, {v'}_q \in V$, 利用归纳法, 我们可以证明

$$\begin{aligned} &(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge ({v_1}' \wedge \cdots \wedge {v_q}') \\ &\quad = (-1)^{pq} ({v_1}' \wedge \cdots \wedge {v_q}') \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p). \end{aligned}$$

(4) 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一个基, 则

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}: i_1<\cdots<i_p,\ 1\leqslant i_j\leqslant n\}$$

是 $\wedge^p V$ 的一个基, 从而

$$\dim\wedge^p V=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

(5) 设 $\{v_1,\cdots,v_k\}\subseteq V$, 则 $v_1,\cdots,v_k$ 是线性无关的当且仅当

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k=0.$$

例 3.14 设 $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$. 对于任给整数 $p\geqslant 0$, 设 S_p 是张量 T^pV 中如下元素

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_p,\quad 其中\ v_i=v_j\ 对于某\ 1\leqslant i\neq j\leqslant p\ 成立$$

的全体生成的线性子空间, 商空间为 $\wedge^pV=T^pV/S_p$. 我们有自然映射

$$\tau: T^pV\to\wedge^pV,$$
$$v_1\otimes\cdots\otimes v_p\to v_1\otimes\cdots\otimes v_p+S_p,$$

则 $v_1\wedge\cdots\wedge v_p=\tau(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)$ 为 $v_1,\cdots,v_p$ 的外积.

令

$$V^p:=\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\ 个}.$$

设 $g: V^p\to F$ 是多线性映射, 即对于所有指标 $1\leqslant i\leqslant p$ 和任意 $a\in F$, $v_1,\cdots,v_{i-1},v_i',v_i'',v_{i+1},\cdots,v_p\in V$, 有

$$\begin{aligned}&g(v_1,\cdots,x_{i-1},av_i'+v_i'',v_{i+1},\cdots,v_p)\\&\quad=ag(v_1,\cdots,x_{i-1},v_i',v_{i+1},\cdots,v_p)+g(v_1,\cdots,x_{i-1},v_i'',v_{i+1},\cdots,v_p).\end{aligned}$$

多线性映射 $g: V^p\to F$ 是交错的, 如果对于任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant p$, 都有 $g(v_1,\cdots,v_p)=0$. (对于多线性映射和交错映射的定义, 我们可以参考第四章.)

设 $g: V^p\to F$ 是一个多线性映射, 则

$$f(v_1,\cdots,v_p)=\sum_{\pi\in G_p}(-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)}g(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(p)})$$

是交错的, 其中 G_p 表示集合 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的置换群.

由张量积的定义可知, 对于任意交错多线性映射 $f: V^p\to F$, 存在唯一的线性映射 $f': T^pV\to F$, 使得 $f'(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=f(v_1,\cdots,v_p)$. 由于 f 是交错的, 故

$\ker(\tau) = S_p \subset \ker(f')$. 因此 T^pV/K 中的所有张量在 f' 下的像都相同. 显然 f' 决定了一个映射 $f'': \wedge^p V \to F$, 使得 $f''(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = f'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = f(v_1, \cdots, v_p)$.

我们知道, $\mathbb{R}^3$ 有基 $e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T$. 则 $\wedge V$ 的基为 e_1, e_2, e_3 (三维), $\wedge^2 V$ 的基为 $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$ (三维), $\wedge^3 V$ 的基为 $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ (一维), $\wedge^p V = 0$ $(p \geqslant 4)$. 因此 $\wedge V = \oplus_{p=0}^3 \wedge^p V$.

3.6 斜称张量

设 $\mathscr{S}_p$ 为 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 上的对称群, 我们按如下方式定义 $\mathscr{S}_p$ 在 T^pV 上的作用: 取 $\sigma \in \mathscr{S}_p, v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in T^pV$, 定义

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}$$

然后将这一作用线性延拓至所有线性组合:

$$\sigma\left(\sum a v_1 \otimes \cdots \otimes v_p\right) = a \sum \sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p), \ \ a \in F$$

例 3.15 设 $p = 3, \sigma = (12)$, 则 $\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_2 \otimes v_1 \otimes v_3$.

定义 3.16 如果 $\sigma x = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} x$ 对于所有 $\sigma \in \mathscr{S}_p$ 都成立, 则称 $x \in T^pV$ 是**斜称张量** (skew symmetric tensor).

令 Sk^pV 是 T^pV 中所有斜称张量构成的子空间.

定义 3.17 对于 $x \in T^pV$, 令

$$A_p(x) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} (\sigma x).$$

假设 $\dim V < \infty$, 则下图是交换的:

$$\begin{tikzcd}
T^pV \arrow[r, "A_p"] \arrow[d, "\pi"] & T^pV \\
\wedge^p V \arrow[r, "\alpha"] & Sk^pV \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

其中

$$\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

且

$$\alpha(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = A_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p).$$

可以证明映射 α 是一个同构映射.

习 题

1. 证明: 由集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有置换所组成的集合 $\mathscr{S}_n$ 按映射合成定义乘积, 构成一个群. 这是一个交换群吗?

2. $\mathscr{S}_n$ 是对称群. $e_1,\cdots,e_n$ 是初等对称函数. 证明:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n,x_1^{-1},\cdots,x_n^{-1}]^{\mathscr{S}_n}&\cong\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{\mathscr{S}_n}\otimes\mathbb{C}[e_n^{-1}]\\&\cong\mathbb{C}[e_1,\cdots,e_n]\otimes\mathbb{C}[e_n^{-1}]\\&\cong\mathbb{C}[e_1,\cdots,e_{n-1}]\otimes\mathbb{C}[e_n,e_n^{-1}].\end{aligned}$$

3. $\operatorname{sgn}(\pi)$ 表示由置换 π 产生的倒置总数. 证明: 下列奇偶映射

$$\mathscr{S}_n\to\{+1,-1\}:\pi\mapsto(-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)}$$

是一个群同态.

4. 定义一个映射 $\mathbb{Z}\to M(2,\mathbb{Z})$, 使得

$$n\to\begin{pmatrix}n&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

证明这是一个环同构. 证明: 映射

$$n\to\begin{pmatrix}0&n\\0&0\end{pmatrix}$$

不是一个环同构.

5. 设 I 是环 A 的一个双边理想. 证明: 投射 $A\to A/I:a\mapsto a+I$ 是一个环同构.

6. 设 $M_{n\times n}(F)$ 表示元素取值于 F 的所有 $n\times n$ 阶矩阵构成的集合. 证明: $M_{n\times n}(F)$ 是域 F 上的一个代数.

7. 取 n 维 F 向量空间 V. 以 $x_1,\cdots,x_n$ 为 V 的对偶空间 V^* 的一个基. 证明: $S(V^*)$ 同构于多项式环 $F[x_1,\cdots,x_n]$.

8. 记 $\mathbb{R}^2$ 的标准基为 $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. 计算 $\dim T^p\mathbb{R}^2$ 及张量代数的维数. 证明: $\wedge^2\mathbb{R}^2=\mathbb{R}e_1\wedge e_2$, 如果 $p>2$ 则 $\wedge^p\mathbb{R}^2=0$. 计算外代数 $\wedge\mathbb{R}^2$ 的维数.

9. 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一个基. 证明:

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}:i_1<\cdots<i_p,\ 1\leqslant i_j\leqslant n\}$$

是 $\wedge^pV$ 的一个基. 从而证明:

$$\dim\wedge^pV=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

10. 设 $\{v_1,\cdots,v_k\}\subseteq V$. 证明: $v_1,\cdots,v_k$ 是线性无关的当且仅当

$$v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k=0.$$

11. 令 Sk^pV 是 T^pV 中所有斜称张量构成的子空间. 对于 $x \in T^pV$, 令

$$A_p(x) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} (\sigma x).$$

假设 $\dim V < \infty$, 则证明下图是交换的:

$$\begin{tikzcd} T^pV \arrow[r, "A_p"] \arrow[d, "\pi"] & T^pV \\ \wedge^p V \arrow[r, "\alpha"] & Sk^pV \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

其中

$$\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

且

$$\alpha(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = A_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p).$$

证明: 映射 α 是一个同构映射.

12. 设 $f : V \to W$ 为向量空间线性映射. 证明: 存在外代数的线性映射 $\wedge V \to \wedge W$ 使得 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_p)$. 记此映射为 $\wedge f$. 设 $g : W \to U$ 为向量空间线性映射. 证明: $\wedge(g \circ f) = \wedge g \circ \wedge f$.

13. 取 F 向量空间 V 的对称代数 $(SV, \psi : V \to SV)$. 设有 F 代数 A 和 F 线性映射 $\phi : V \to A$ 使得

$$\phi(u)\phi(v) = \phi(v)\phi(u)$$

对任意 $u, v \in V$ 成立. 证明: 存存唯一 F 代数同态 $f : SV \to A$ 使得 $\phi = f \circ \psi$.

14. 设 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 由以下矩阵决定

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在外积 $\wedge^2\mathbb{R}^3$ 上取基 $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$. 对应此基, 证明: $\wedge^2\phi : \wedge^2\mathbb{R}^3 \to \wedge^2\mathbb{R}^3$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. F 为域. A 为 F 代数. 证明:

(a) $M_n(F) \otimes_F A \cong M_n(A)$;

(b) $M_m(F) \otimes_F M_n(F) \cong M_m(M_n(F)) \cong M_{mn}(F)$.

第四章　交错型

用消去法解方程组

$$\begin{cases} ax+by=h, \\ cx+dy=k \end{cases}$$

时大家便会遇上矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

多学一点我们就求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

以 A 记系数矩阵 (a_{ij}), 用列 $(b_1,\cdots,b_n)^T$ 代替 A 的第 j 列所得的矩阵记为 B_j. 则有 Cramer 公式

$$|A|x_j=|B_j|,$$

其中 $|*|$ 是指矩阵 $*$ 的行列式

$$|A|=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

以上是从解线性方程组的观点得出行列式. 事实上用消去法解方程组, 从 $n=2$ 开始, 然后做 $n=3,4,5,\cdots$, 很快所得的公式就变得非常复杂, 从这些公式是不容易看出以上的行列式公式和 Cramer 公式的. 在本章我们将从交错映射看见行列式怎样 "自然" 地出现, 而不是一个老师给的 "神奇" 公式.

最重要的交错映射应是微分流形上的微分形式, 即余切向量丛外代数的截面. 但是在物理学和金融数学中常出现无穷维流形, 于是便要考虑无穷维拓扑向量空间的

多重线性代数和无穷维流形上的变分法. 菲尔兹奖获得者 Grothdendieck 就为此做出优异的成果, 见 *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1955). 至于无穷维行列式也一样重要. 近年最著名的工作为菲尔兹奖获得者 Quillen 所做, 见 Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface, *Funkcionalnyi Analiz i ego* 19 (1985), 37 – 41. 也可以参考 Barry Simon, Notes on Infinite Determinants of Hilbert Space Operators, *Advances in Math.* 24 (1977), 244 – 273 和 J.-M. Bismut, D. S. Freed, The analysis of elliptic families II, *Comm. Math. Phys.* 107 (1986), 103 – 163. 至于无穷维拓扑向量空间可参考: 夏道行, 杨亚立, 线性拓扑空间引论, 上海: 上海科技出版社, 1986. 如果要想 "猎奇" 一点就看 P. Schneider, *Nonarchimedean functional analysis.* 总的来说, 我们还没有一本关于无穷维拓扑向量空间的多重线性代数学的书.

本章介绍多重线性映射和交错型的定义及其性质. 我们还介绍了 n 阶行列式的定义及经典行列式公式. 最后我们讲对偶空间的外积, 并以证明如下公式结束本章

$$\wedge^p V^* \xrightarrow{\approx} \mathrm{Alt}^p V$$

当 V 是有限维向量空间时成立. 这样在有限维微分流形上两种微分形式的定义是一样的. 但在无穷维流形会是怎样呢? 对无穷维流形上变分法会有什么影响呢?

4.1 多重线性映射

定义 4.1 一个从域 F 上的向量空间 V 到域 F 上的向量空间 Z 上的 p **线性映射** (p-linear map) 是指一个映射

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\ \text{次}} \to Z,$$

并且条件

$$\begin{aligned} &f(v_1, \cdots, v_{j-1}, av_j + w, v_{j+1}, \cdots, v_p) \\ &\quad = af(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_p) + f(v_1, \cdots, v_{j-1}, w, v_{j+1} \cdots, v_p) \end{aligned}$$

对所有 $1 \leqslant j \leqslant p$, $a \in F$ 及 $v_j, w \in V$ 都成立. 这即是说映射 f 对每一个分量都是线性的. 在这种情况下, 我们也称 f 是**多重线性的** (multilinear).

当 $p = 2$ 时, 2 线性映射也就是前几章的双线性映射.

容易验证从 V 到 Z 的所有的 p 线性映射的集合 ${}^p\mathscr{L}(V, Z)$ 构成域 F 上的一个向量空间.

我们可以将张量积 $V\otimes V$ 与 V 上的双线性映射的关系推广到含有多于两个因子的情形, 这样可以得到由所有的 p 线性映射

$$\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\text{ 个因子}}\to Z$$

构成的向量空间到所有的线性映射

$$T^pV=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{ 个因子}}\to Z$$

构成的向量空间的一个同构映射, 即存在一个 F 线性同构映射

$$\mathrm{Hom}_F(T^pV,Z)\xrightarrow{\approx}{}^p\mathscr{L}(V,Z).$$

4.2 交错映射

定义 4.2 给定 F 向量空间 V 和 Z. 称一个 p 线性映射

$$g:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\text{ 次}}\to Z$$

是**交错 p 线性映射** (alternating p-linear map) 或 p **交错映射** (p-alternating map), 如果对任意 $v_1,\cdots,v_p\in V$, 有

$$i\neq j,\quad v_i=v_j\Rightarrow g(v_1,\cdots,v_p)=0.$$

设 $\mathrm{Alt}^p(V,Z)$ 是从 V 到 Z 的所有交错 p 线性映射构成的 F 向量空间. 对于 $Z=F$ 的情形, 所有的交错 p 线性函数

$$V\times\cdots\times V\to F$$

所构成的空间简写为 $\mathrm{Alt}^p(V)$. 这些函数也称为 V 上的**交错 p 型** (alternating p-forms).

根据定义可知, 对于 p 个元素构成的置换群 $\mathscr{S}_p$ 中的元素 σ, 我们有如下等式成立

$$g(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)})=(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}g(v_1,\cdots,v_p).$$

对于 $p=2$ 的情形容易验证, 一般的情形则可由归纳法证明得到. 设 g 是交错 2 线性的. 根据定义可得

$$g(v_1+v_2,v_1+v_2)=0.$$

由于 g 是 2 线性的, 我们将等式左端进行展开可得

$$g(v_1,v_1)+g(v_1,v_2)+g(v_2,v_1)+g(v_2,v_2)=0.$$

再次利用定义可得 $g(v_1,v_1)=0=g(v_2,v_2)$, 从而

$$g(v_1,v_2)+g(v_2,v_1)=0$$

或

$$g(v_2,v_1)=-g(v_1,v_2).$$

为了将该结果写成同上公式相同的形式, 我们将该置换记为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2.$$

于是, $(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}=-1$. 另外,

$$g(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)})=g(v_2,v_1)=-g(v_1,v_2)=(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}g(v_1,v_2).$$

这样便证明了公式对于 $p=2$ 的情形成立.

这实际上就是下面定理中所陈述意义下的通用的 p 交错映射.

定理 4.3 给定 F 向量空间 V 和 Z. 设 f 为如下映射

$$f:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\text{ 次}}\to\wedge^p V:(v_1,\cdots,v_p)\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_p.$$

对于任给的从 V 到 Z 的交错 p 线性映射

$$g:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\text{ 次}}\to Z,$$

均存在唯一的 F 线性映射 $h:\wedge^p V\to Z$ 使得下图是交换的.

$$\begin{tikzcd} V\times\cdots\times V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \wedge^p V \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

证明　(1) 我们引入 p 线性映射 $m:V\times\cdots\times V\to V\otimes\cdots\otimes V$ 如下:

$$m(v_1,\cdots,v_p)=v_1\otimes\cdots\otimes v_p.$$

由于 g 是 p 线性的, 根据张量积 $V\otimes\cdots\otimes V$ 的性质可知, 存在唯一的 F 线性映射

$k : V \otimes \cdots \otimes V \to Z$ 使得

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes \cdots \otimes V \arrow[d, "k"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

是可交换的, 即

$$g(v_1, \cdots, v_p) = k(m(v_1, \cdots, v_p)) = k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p).$$

(2) 由于 g 是交错的, 我们有

$$g(v_1, \cdots, v, v, \cdots, v_p) = 0.$$

根据 (1) 可知

$$k(v_1 \otimes \cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots \otimes v_p) = 0.$$

(3) 回想

$$\wedge^p V = V \otimes \cdots \otimes V / I_p,$$

其中 I_p 为具有如下形式的张量的线性组合所生成的 $V \otimes \cdots \otimes V$ 的子空间

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots \otimes v_p.$$

另外, 我们有自然投影映射

$$\pi : V \otimes \cdots \otimes V \to V \otimes \cdots \otimes V / I_p = \wedge^p V,$$
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \to v_1 \otimes \cdots \otimes v_p + I_p = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

(4) 利用 (2) 可得, $k(I_p) = 0$. 这意味着映射

$$h : \wedge^p V \to Z : v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

是定义明确的并且明显是 F 线性的. (我们有时称其为 $\wedge^p V$ 上的 k 因子.)

总之, 我们的构造如下图.

$$\begin{tikzcd}
V\times\cdots\times V \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g"'] & V\otimes\cdots\otimes V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "k"] & \wedge^p V \arrow[dl, "h"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

定理的结论可由上图得到. □

推论 4.4 给定 F 向量空间 V, Z, 存在 F 线性同构映射

$$\mathrm{Hom}_F(\wedge^p V, Z) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Alt}^p(V, Z).$$

证明 (1) 给定 $h \in \mathrm{Hom}_F(\wedge^p V, Z)$. 可以验证映射

$$V\times\cdots\times V \to Z : v_1, \cdots, v_p \to h(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)$$

包含在 $\mathrm{Alt}^p(V, Z)$ 之中.

(2) 给定 $g \in \mathrm{Alt}^p(V, Z)$. 利用前面定理可知, 存在唯一的 $h \in \mathrm{Hom}_F(\wedge^p V, Z)$ 使得

$$g(v_1, \cdots, v_p) = h(v_1\wedge\cdots\wedge v_p).$$

可以验证映射 $g \mapsto h$ 实际上是 (1) 中构造的映射的逆映射. □

当我们取 $Z = F$ 时, $\mathrm{Hom}_F(\wedge^p V, Z)$ 即为对偶空间 $(\wedge^p V)^*$. 前面的引理现在便可以重新表述为如下形式.

推论 4.5 给定一个 F 向量空间 V. 我们可得到一个 F 线性同构映射

$$\Phi : (\wedge^p V)^* \xrightarrow{\approx} \mathrm{Alt}^p V,$$

即对于 $t \in (\wedge^p V)^*$,

$$\Phi(t)(v_1, \cdots, v_p) = t(v_1\wedge\cdots\wedge v_p).$$

注意到如果 $\dim V < \infty$, 则当 $p > \dim V$ 时, $\wedge^p V = 0$. 因此, 如果 $p > \dim V$, 则 $\mathrm{Alt}^p V = 0$.

令 $\mathrm{Alt}^0 V = F$. 我们也有 $\mathrm{Alt}^1 V = V^*$. 因此, 对于所有的 $p \geqslant 0$, 向量空间 $\mathrm{Alt}^p V$ 的直和是一个向量空间

$$\oplus_{p\geqslant 0} \mathrm{Alt}^p V.$$

我们在这个向量空间中引入一个外积运算使其成为一个代数.

对任给的 $\omega \in \operatorname{Alt}^p V$ 和 $\eta \in \operatorname{Alt}^q V$, 我们定义 $\omega \wedge \eta \in \operatorname{Alt}^{p+q} V$ 如下:

$$\omega \wedge \eta(v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_{p+q}) = \sum (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} \omega(v_{i_1}, \cdots, v_{i_p}) \eta(v_{j_1}, \cdots, v_{j_q}).$$

其中我们对 $\{1, 2, \cdots, p+q\}$ 上的所有满足 $i_1 < \cdots < i_p, j_1 < \cdots < j_q$ 的置换 $\sigma = (i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q)$ 进行求和.

有了这个乘积运算, 我们称 $\oplus_{p \geqslant 0} \operatorname{Alt}^p V$ 为 V 上的交错型的外代数. 注意到如果 V 是有限维的, 则我们可以取从 $p = 0$ 到 $p = \dim V$ 的直和 $\oplus$, 从而向量空间 V 上的交错线性型的外代数是有限维的.

4.3 行列式

我们把 F^n 中的向量写成列形式:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in F,$$

将一个矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(F)$ 写成 n 列:

$$A = (c_1 \ \cdots \ c_n), \quad c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in F^n.$$

现在我们可以认为 $n \times n$ 矩阵 A 与 $(F^n)^n$ 中的向量组 $(c_1, \cdots, c_n)$ 一一对应:

$$M_{n \times n}(F) \leftrightarrow \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n\text{ 次}} : A \leftrightarrow (c_1, \cdots, c_n).$$

定理 4.6 向量空间 F^n 只有一个交错 n 线性函数

$$d : \underbrace{F^n \times \cdots \times F^n}_{n\text{ 次}} \to F$$

使得 $d(I) = 1$, 其中 I 是单位矩阵.

证明 设 $\{e_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 F^n 的标准基, 即 e_j 是 F^n 中的向量, 其中第 j 个位置的元为 1, 而其他位置的元全为 0. 因此, 单位矩阵 $I = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n)$. 根据假设 $d(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$, 取 $\sigma \in \mathscr{S}_n$, 因为 d 是交错的, 所以得

$$d(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} d(e_1, e_2, \cdots, e_n) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}.$$

以 c_j 记 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的第 j 列, 把矩阵 $A=(a_{ij})$ 与向量组 $(c_1,\cdots,c_n)$ 等同起来. 使用 F^n 的标准基 $\{e_j\}$, 则

$$c_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

于是

$$d(A)=d(c_1,\cdots,c_n)=d\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,\sum_{i=1}^n a_{i2}e_i,\cdots,\sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right).$$

因为 d 是多重线性函数, 我们可以把上式展开为和 $S=\sum t_\alpha$. 怎样计算此和的任一项 t_α 呢? 从以下各个和 $\sum a_{i1}e_i$, $\sum a_{i2}e_i,\cdots$, $\sum a_{in}e_i$ 中的每一个和选一项, 然后用 d 来计算选出的项的值便得到 $\sum t_\alpha$ 的一项.

为了表达这个计算, 我们引入一个函数

$$f:\{1,\cdots,n\}\to\{1,\cdots,n\}.$$

比如在第 j 个和 $\sum_i a_{ij}e_i$ 选出的项记为 $a_{f(j),j}e_{f(j)}$. 这样得到 S 的一项是

$$d(a_{f(1),1}e_{f(1)},a_{f(2),2}e_{f(2)},\cdots,a_{f(n),n}e_{f(n)}).$$

这样便得

$$d(A)=\sum_f d(e_{f(1)},\cdots,e_{f(n)})a_{f(1),1}\cdots a_{f(n),n}.$$

什么函数 f 可以在上述和式中出现呢? 因为 d 是交错函数, 所以, 如果 $i\neq j$ 及 $f(i)=f(j)$, 则 $d(e_{f(1)},\cdots,e_{f(n)})=0$. 这告诉我们上面 $d(A)$ 的和 $\sum_f$ 中, 我们要求 f 是双射, 即 f 是置换群 $\mathscr{S}_n$ 中的元素.

因此, 我们最终得到

$$d(A)=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} d(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)})a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

这是计算 d 的值的唯一的表达式. 这就证明了为什么向量空间 F^n 只有一个交错 n 线性函数在单位矩阵上取值为 1. □

定义 4.7 给定一个 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, 我们将矩阵 A 的**行列式** (determinant) 定义为

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

我们将这一和式记为 $\det A$ 或 $|A|$ 或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

4.4 经典行列式公式

我们给出一些有用的经典行列式公式.

4.4.1

我们先证明置换奇偶性的一些性质. 设 σ 是整数集合 $\{1,\cdots,n\}$ 上的一个置换. 如果 $\sigma(a_i)=b_i$, 我们记 σ 为

$$\sigma=\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \\ b_1 \cdots b_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \sigma=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

将 σ 的奇偶性记作

$$\delta_b^a=\delta_{b_1\cdots b_n}^{a_1\cdots a_n}=\delta(\sigma)=(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}.$$

容易验证

$$\delta_b^a=\prod_{i<j}\frac{a_i-a_j}{b_i-b_j}.$$

以下置换

$$\begin{pmatrix} 1 \ \cdots \ q \ \ q+1 \cdots \ n \\ b_1 \cdots b_q \ \ b_{q+1} \ \cdots b_n \end{pmatrix}$$

的奇偶性是

$$\prod_{i<j}\frac{i-j}{b_i-b_j}.$$

由于分子和分母中的因子相同, 我们只讨论分子和分母的符号.

现在假设 $b_1<\cdots<b_q$ 和 $b_{q+1}<\cdots<b_n$.

首先看分母. 我们知道 $1\leqslant b_1\leqslant n$, 从而 b_1 严格大于 $\{1,\cdots,n\}$ 中的 (b_1-1) 个整数. 但我们假设 $b_1<\cdots<b_q$, 所以 b_1 只好严格大于 $b_{q+1},\cdots,b_n$ 中的前 (b_1-1) 个. 因此 b_1 恰好出现在分母中 (b_1-1) 个正因子里. 如此继续下去便知 b_q 出现在分母的 (b_q-q) 个正因子里. 接下来, 我们注意到剩余的因子若有 $b_{q+1},\cdots,b_n$ 出现, 则这因子必然是负的. 由于因子的总数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 我们得到分母的符号为

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)-(b_1-1)-\cdots-(b_q-q)}.$$

显然分子中的每个因子都是负的, 从而分子的符号为

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

因此如果 $b_1<\cdots<b_q$ 和 $b_{q+1}<\cdots<b_n$, 则

$$\delta_{b_1\cdots b_q\ b_{q+1}\cdots b_n}^{1\cdots q\ q+1\cdots n}=(-1)^{(b_1-1)+\cdots+(b_q-q)}.$$

再者我们假设 $a_1 < \cdots < a_q$ 和 $a_{q+1} < \cdots < a_n$.

从

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q & q+1 & \cdots & n \\ b_1 & \cdots & b_q & b_{q+1} & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & q & q+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

我们有

$$\begin{aligned} \delta^a_b &= \delta^{a_1\cdots a_n}_{1\cdots n}\delta^{1\cdots n}_{b_1\cdots b_n} \\ &= \delta^{1\cdots n}_{a_1\cdots a_n}\delta^{1\cdots n}_{b_1\cdots b_n} \\ &= (-1)^{(a_1-1)+\cdots+(a_q-q)}(-1)^{(b_1-1)+\cdots+(b_q-q)} \\ &= (-1)^{a_1+\cdots+a_q+b_1+\cdots+b_q}. \end{aligned}$$

综上所述, 如果我们假设

$$\begin{aligned} &a_1 < \cdots < a_q, \quad a_{q+1} < \cdots < a_n, \\ &b_1 < \cdots < b_q, \quad b_{q+1} < \cdots < b_n, \end{aligned}$$

则

$$\delta^a_b = (-1)^{a_1+\cdots+a_q+b_1+\cdots+b_q}.$$

4.4.2

我们已经看到 $n \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 的行列式是

$$|a_{ij}| = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \delta(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

如果 σ 是置换

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ k_1 \cdots k_n \end{pmatrix},$$

则有

$$|a_{ij}| = \sum_k \delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n} a_{k_1,1} \cdots a_{k_n,n}.$$

置换

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ k_1 \cdots k_n \end{pmatrix}$$

可以唯一地表示为置换

$$\begin{pmatrix} j_1 \cdots j_n \\ 1 \cdots n \end{pmatrix}.$$

我们亦可以这样说, 序对集合 $\{(k_1,1),\cdots,(k_n,n)\}$ 等同于序对集合 $\{(1,j_1),\cdots,(n,j_n)\}$. 如此说, 乘积 $a_{1,j_1}\cdots a_{j_n,n}$ 仅是 $a_{k_1,1}\cdots a_{k_n,n}$ 的因子重排. 于是我们可以把行列式的公式写为

$$|a_{ij}|=\sum_j \delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n} a_{1,j_1}\cdots a_{n,j_n}.$$

以上说明, 如果 A^T 是 A 的转置, 则

$$|A|=|A^T|.$$

我们可以进一步探讨: 如果 $r_1,\cdots,r_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个固定排列, 则置换

$$\begin{pmatrix} 1\cdots n \\ k_1\cdots k_n \end{pmatrix}$$

可以唯一地表示为置换

$$\begin{pmatrix} r_1\cdots r_n \\ j_1\cdots j_n \end{pmatrix},$$

并且当 $k_1\cdots k_n$ 遍历 $1,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 个排列时, $j_1\cdots j_n$ 也遍历 $1,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 个排列. 由于

$$\delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n}=\delta^{r_1\cdots r_n}_{j_1\cdots j_n}$$

且乘积 $a_{r_1,j_1}\cdots a_{r_n,j_n}$ 仅仅是 $a_{1,k_1}\cdots a_{n,k_n}$ 的一个重排, 我们得到行列式的另一个公式

$$|a_{ij}|=\sum_j \delta^{r_1\cdots r_n}_{j_1\cdots j_n} a_{r_1,j_1}\cdots a_{r_n,j_n}.$$

4.4.3

假设矩阵 A 的第一列是两列的和, 即 $a_{i1}=b_{i1}+c_{i1}$. 则 A 的行列式是两个行列式的和

$$\begin{aligned}|a_{ij}|&=\sum_k \delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n} a_{k_1,1}\cdots a_{k_n,n}\\&=\sum_k \delta^{1\cdots n}_{k_1\cdots k_n}(b_{k_1,1}+c_{k_1,1})\cdots a_{k_n,n}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{vmatrix}(b_{11}+c_{11}) & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (b_{n1}+c_{n1}) & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

假设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵. 利用上述按列展开, 我们有

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots & \cdots & a_{11}b_{1m}+\cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots & \cdots & a_{m1}b_{1m}+\cdots \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1m}+\cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1m}+\cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21}+\cdots & \cdots & a_{11}b_{1m}+\cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2}b_{21}+\cdots & \cdots & a_{m1}b_{1m}+\cdots \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

最后, 我们得到 n^m 个行列式的和

$$
|AB| = \sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_1 1} & \cdots & a_{1j_m}b_{j_m m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1}b_{j_1 1} & \cdots & a_{mj_m}b_{j_m m} \end{vmatrix}.
$$

如果在 $j_1,\cdots,j_m$ 中至少两个是相同的, 则上述和式中的一个行列式为 0. 如果 $m>n$, 这种情况就会出现, 从而在这种情况下

$$
|AB| = 0.
$$

如果 $m\leqslant n$, 在上述关于 $|AB|$ 的和式中, 我们是从 $1,\cdots,n$ 中选出的所有的有 m 个不同整数 $j_1,\cdots,j_m$ 的集合, 然后对这个集合求和. 知有

$$
n(n-1)\cdots(n-m+1)
$$

个这样的集合. 我们把这样的集合通过某种方式聚集在一起.

固定 $k_1<\cdots<k_m$. 在上述关于 $|AB|$ 的和式中, 有 $m!$ 个行列式, 它的 $j_1,\cdots,j_m$ 是 $k_1,\cdots,k_m$ 的一个置换, 我们断言: 这 $m!$ 个行列式的和是

$$
\begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{k_1 1}+\cdots+a_{1k_m}b_{k_m 1} & \cdots & a_{1k_1}b_{k_1 m}+\cdots+a_{1k_m}b_{k_m m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mk_1}b_{k_1 1}+\cdots+a_{mk_m}b_{k_m m} & \cdots & a_{mk_1}b_{k_1 m}+\cdots+a_{mk_m}b_{k_m m} \end{vmatrix}.
$$

只要把上述行列式展开并且忽略由于两个或更多相同列的零项, 我们立刻证出断言.

综上所述便得以下 **Binet-Cauchy 公式**

$$
|AB| = \sum_k \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mk_1} & \cdots & a_{mk_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \cdots & b_{k_1 m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_m 1} & \cdots & b_{k_m m} \end{vmatrix},
$$

其中求和是对 $1,\cdots,n$ 中 $\binom{n}{m}$ 个满足 $k_1<\cdots<k_m$ 的 m 的数 $\{k_1,\cdots,k_m\}$ 求和.

4.4.4

给定矩阵 $A=(a_{ij})$. 对于 $r=(r_1,\cdots,r_q)$, $c=(c_1,\cdots,c_q)$, 我们引入 A 的一个子矩阵

$$A_c^r=A_{c_1,\cdots,c_q}^{r_1,\cdots,r_q}=\begin{vmatrix}a_{r_1c_1} & \cdots & a_{r_1c_q}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r_qc_1} & \cdots & a_{r_qc_q}\end{vmatrix},$$

行列式 $|A_c^r|$ 称为 $|A|$ 的 q 阶**子式** (minor).

假设 $r'=(r_{q+1},\cdots,r_n)$, $c'=(c_{q+1},\cdots,c_n)$, 使得 $r\cup r'$ 和 $c\cup c'$ 都等于集合 $\{1,\cdots,n\}$. 则我们称数

$$\delta_{c_1,\cdots,c_n}^{r_1,\cdots,r_n}|A_{c'}^{r'}|$$

为子式 $|A_c^r|$ 的**代数余子式** (algebraic complement).

下面我们固定 q 不同的整数 $r_1,\cdots,r_q$, 然后选择 $r_{q+1},\cdots,r_n$, 使得

$$r_1,\cdots,r_q,r_{q+1},\cdots,r_n$$

是 $1,\cdots,n$ 的一个置换.

设 $h_1,\cdots,h_q,h_{q+1},\cdots,h_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换, 使得

$$h_1<\cdots<h_q \quad 和 \quad h_{q+1}<\cdots<h_n.$$

存在 $q!(n-q)!$ 个排列 $k_1,\cdots,k_n$, 使得 $k_1,\cdots,k_q$ 是 $h_1,\cdots,h_q$ 的一个排列且 $k_{q+1},\cdots,k_n$ 是 $h_{q+1},\cdots,h_n$ 的一个排列. 我们还有

$$\begin{aligned}\delta_{k_1,\cdots,k_n}^{r_1,\cdots,r_n}&=\delta_{h_1,\cdots,h_n}^{r_1,\cdots,r_n}\delta_{k_1,\cdots,k_q\ k_{q+1},\cdots,k_n}^{h_1,\cdots,h_q\ h_{q+1},\cdots,h_n}\\&=\delta_{h_1,\cdots,h_n}^{r_1,\cdots,r_n}\delta_{k_1,\cdots,k_q}^{h_1,\cdots,h_q}\delta_{k_{q+1},\cdots,k_n}^{h_{q+1},\cdots,h_n}.\end{aligned}$$

现在我们计算行列式

$$|a_{ij}|=\sum_j\delta_{j_1,\cdots,j_n}^{r_1,\cdots,r_n}a_{r_1j_1}\cdots a_{r_nj_n}.$$

来自于 $h_1,\cdots,h_q,h_{q+1},\cdots,h_n$ 的 $q!(n-q)!$ 个排列 $k_1\cdots k_n$ 对于 $|A|$ 的贡献为

$$\delta_{h_1,\cdots,h_n}^{r_1,\cdots,r_n}\sum\delta_{k_1,\cdots,k_q}^{h_1,\cdots,h_q}a_{r_1,k_1}\cdots a_{r_q,k_q}\sum\delta_{k_{q+1},\cdots,k_n}^{h_{q+1},\cdots,h_n}a_{r_{q+1},k_{q+1}}\cdots a_{r_n,k_n}.$$

上式中第一个和式表示对 $h_1,\cdots,h_q$ 的所有排列 $k_1,\cdots,k_q$ 求和, 而第二个和式表示对 $h_{q+1},\cdots,h_n$ 的所有排列 $k_{q+1},\cdots,k_n$ 求和. 由于这两个和式是相互独立的, 这对于 $|A|$ 的贡献为

$$\delta_{h_1,\cdots,h_n}^{r_1,\cdots,r_n}|A_{h_1\cdots h_q}^{r_1\cdots r_q}||A_{h_{q+1}\cdots h_n}^{r_{q+1}\cdots r_n}|.$$

最后, 加起来可得

$$|A| = |A^{r_1\cdots r_q}_{h_1\cdots h_q}| \left(\sum_{(h)} \delta^{r_1,\cdots,r_n}_{h_1,\cdots,h_n} |A^{r_{q+1}\cdots r_n}_{h_{q+1}\cdots h_n}| \right),$$

其中和表示对所有满足条件

$$h_1 < \cdots < h_q \quad 和 \quad h_{q+1} < \cdots < h_n$$

的排列 $h_1, \cdots, h_q, h_{q+1}, \cdots, h_n$ 求和.

这称为行列式的 **Laplace 展开式** (Laplace expansion).

我们用一句话来表达: 我们在 A 中任意选定 q 行形成含于这 q 行的所有可能的 q 阶子式, 然后将每一个子式乘以它的代数余子式. 这些乘积之和就是行列式 $|A|$. 当然, 在上述表达中, 行和列可以交换.

4.4.5

现在假设

$$r_1 < \cdots < r_q \quad 和 \quad r_{q+1} < \cdots < r_n.$$

则 Laplace 展开式变成

$$|A| = \sum_{(h)} (-1)^{r_1+\cdots+r_q+h_1+\cdots+h_q} |A^{r_1\cdots r_q}_{h_1\cdots h_q}||A^{r_{q+1}\cdots r_n}_{h_{q+1}\cdots h_n}|.$$

我们用希腊字母表示按照递增顺序排列的整数集合, 即

$$\alpha = (i_1 < i_2 < \cdots < i_p),$$

我们称 α 是一个长度为 p 的序标.

从一个 $n \times n$ 的矩阵 A 中, 我们可得 N^2 个 p 阶子式, 其中 $N = \binom{n}{p}$.

我们固定一个 p. 考虑长度为 p 的所有序标. 在定个序标所组成的集固定一个次序. 例如, 取 $n = 4, p = 2$. 则 $N = 6$. 我们把序标集排序如下

$$(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4).$$

一旦有了长度为 p 的指标枚举的顺序, 我们可以引入 A 的第 p 个 $N \times N$ **复合矩阵** (compound matrix)

$$A_{(p)} = (|A^\alpha_\beta|),$$

即第 α 行和 β 列上的元为子式 $|A^\alpha_\beta|$.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵. 记 $C=AB$. 我们将 Binet-Cauchy 公式用于 C 的一个子式. 子矩阵

$$C^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}$$

是由如下两个矩阵的乘积形成的

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p 1} & \cdots & a_{i_p n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{1 j_1} & \cdots & b_{1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n j_1} & \cdots & a_{n j_p} \end{pmatrix}.$$

因此, 由 Binet-Cauchy 公式可得

$$|C^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}|=\sum_k |A^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}||B^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}|,$$

其中和式表示对所有排列 $1\leqslant k_1<\cdots<k_p\leqslant n$ 求和; 或者

$$|C^\alpha_\beta|=\sum_k |A^\alpha_\kappa||B^\kappa_\beta|,$$

其中 κ 取遍 N 个长度为 p 的序标. 这就是说, 对于复合矩阵, 有

$$(AB)_{(p)}=A_{(p)}B_{(p)}.$$

于是推出

$$(A^{-1})_{(p)}=(A_{(p)})^{-1}.$$

这是因为, 对于单位矩阵 I 来说, 它的复合矩阵 $I_{(p)}$ 是 $N\times N$ 单位矩阵.

给定 A, 记 $B=A^{-1}$. 则 $A_{(p)}B_{(p)}=I_{(p)}$, 从而

$$\sum_\alpha |A^\gamma_\alpha||B^\alpha_\beta|=\delta_{\gamma\beta},$$

其中如果 $\gamma=\beta$, $\delta_{\gamma\beta}=1$; 如果 $\gamma\neq\beta$, $\delta_{\gamma\beta}=0$. 或者我们有

$$\sum_{(i)} |A^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}||B^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}|=\begin{cases} 1, & \text{如果 } \sum\limits_{v=1}^{p}(j_v-k_v)^2=0, \\ 0, & \text{如果 } \sum\limits_{v=1}^{p}(j_v-k_v)^2>0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{(i)}$ 表示对所有排列 $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 求和.

对于 $\alpha=(i_1<i_2<\cdots<i_p)$, 记 $\alpha'=(i'_1<\cdots<i'_{n-p})$, 使得 $\alpha\cup\alpha'$ 等于集合 $\{1,\cdots,n\}$. 我们用 $|\alpha|$ 表示和 $i_1+\cdots+i_p$.

另一方面, 由 $|A|$ 的 Laplace 展开式可得

$$\sum_{(i)} |A^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}|(-1)^{\sum i_v+\sum k_v}|A^{i'_1\cdots i'_{n-p}}_{k'_1\cdots k'_{n-p}}| = \begin{cases} |A|, & \text{如果 } \sum\limits_{v=1}^{p}(j_v-k_v)^2=0, \\ 0, & \text{如果 } \sum\limits_{v=1}^{p}(j_v-k_v)^2>0. \end{cases}$$

比较 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ 上的和式, 我们可得如下关于逆矩阵的子式的 Jacobi 公式

$$|(A^{-1})^{\alpha}_{\beta}| = \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}|A^{\alpha'}_{\beta'}|}{|A|}.$$

4.4.6

我们最后给出一些著名行列式的计算.

例 4.8 证明 Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

我们用归纳法证明. 容易验证当 $n=2$ 时, 上式成立. 要证上式对 n 成立, 对 Vandermonde 行列式, 用第 n 行减去第 $n-1$ 行的 x_1 倍, 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 x_1 倍, 继续下去直到第 2 行减去第 1 行的 x_1 倍. 我们有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

按照第 1 列展开, 并把每列的公因子提出, 由归纳假设, 我们有

$$D_n = (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 4.9 计算下列循环行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix}.$$

设 $w_1,\cdots,w_n$ 为 1 的 n 次根. 将第 $2,3,\cdots,n$ 列分别乘以 $w_i,w_i^2,\cdots,w_i^{n-1}$ 然后加到第 1 列, 我们有

$$D=p_i\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ w_i & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ w_i^2 & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_i^{n-1} & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix},$$

其中 $p_i=x_0+w_ix_1+\cdots+w_i^{n-2}x_{n-2}$. 这表明作为 $x_0,\cdots,x_{n-1}$ 的齐次多项式, D 可被 $\prod_1^n p_i$ 整除. 比较 x_0^n 的系数可得

$$D=\prod_1^n p_i.$$

4.5 判别式和结式

4.5.1

设有非零多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

其系数 a_j 在特征为零的代数封闭域 F 内.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in F$ 为 $f(x)=0$ 的根. $f(x)$ 的**判别式** (discriminant) 定义为

$$D(f)=a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

显然 $D(f)=0$ 当且仅且 $f(x)=0$ 有重根, 即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中最少有两个相同.

设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则由 Vandermonde 行列式公式可得

$$|A| = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i).$$

所以

$$\begin{aligned} D(f) &= a_n^{2n-2}|A|^2 = a_n^{2n-2}|A^T\ A| \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$s_i = \alpha_1^i + \cdots + \alpha_n^i.$$

例 计算 ax^2+bx+c 的判别式

$$D = a^2 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 2 & -b/a \\ -b/a & (b^2-2ac)/a^2 \end{vmatrix} = b^2 - 4ac.$$

4.5.2

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

的根. 设 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 为多项式

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0$$

的根.

定义 f, g 的**结式** (resultant) 为

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_n^m b_m^n((\alpha_1-\beta_1)\cdots(\alpha_1-\beta_m))\cdots((\alpha_n-\beta_1)\cdots(\alpha_n-\beta_m)) \\ &= a_n^m b_m^n \prod(\alpha_i - \beta_j). \end{aligned}$$

显然 $R(f,g)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 最少有两个根相同.

由于 $g(x) = b_m(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$, 可见

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n).$$

同理可得

$$R(f,g)=(-1)^{nm}b_m^n f(\beta_1)\cdots f(\beta_m).$$

定义 $(m+n)\times(m+n)$ 矩阵 $S(f,g)$ 为

$$\begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\
0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & \cdot & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_0\\
b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & 0 & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & \cdot & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0
\end{pmatrix}.$$

引理 4.10

$$|S((x-\alpha)f,g)|=g(\alpha)|S(f,g)|.$$

证明 引理由以下等式得出

$$\begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & D\end{pmatrix} S((x-\alpha)f,g)A=\begin{pmatrix} S(f,g) & 0\\ C & g(\alpha)\end{pmatrix},$$

其中

$$C=(0\cdots0\cdots b_m\cdots b_m\alpha+b_{m-1}\cdots b_m\alpha^2+b_{m-1}\alpha+b_{m-2}\cdots),$$

$$D=\begin{pmatrix}
1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & -\alpha & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}
1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{m+n-1}\\
0 & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{m+n-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

建议读者考虑在 $n=m=2$ 时用行与列运算来计算这些多项式. □

定理 4.11 (Sylvester 定理)

$$R(f,g)=|S(f,g)|.$$

证明 对 f 的次数 n 做归纳证明.

当 $n=1$ 时, $f(x)=a_1x+a_0=a_1(x-\alpha_1)$,

$$|S(f,g)|=\begin{vmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_0\\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0
\end{vmatrix}.$$

按最后一行展开以上行列式

$$\begin{aligned}|S(f,g)| &= b_0a_1^m - b_1a_1^{m-1}a_0 + \cdots + (-1)^{m-1}b_ma_0^m \\ &= a_1^m(b_0 + \cdots + b_m\alpha_1^m) = a_1^m g(\alpha_1) \\ &= R(f,g).\end{aligned}$$

归纳步: 假设定理对所有次数小于 n 的多项式 f 均成立. 设 $f(x) = (x-\alpha_n)\phi(x)$, 而 $\phi(x) = a_nx^{n-1} + \cdots$. 则由引理可得

$$|S(f,g)| = |S((x-\alpha_n)\phi(x),g)| = g(\alpha_n)|S(\phi(x),g)|.$$

则由归纳假设可得

$$\begin{aligned}|S(f,g)| &= g(\alpha_n)R(\phi(x),g) \\ &= g(\alpha_n)a_n^m g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_{n-1}) \\ &= R(f,g).\end{aligned}$$

□

设 $M_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n\times n$ 复数矩阵. 把 $M_n(\mathbb{C})$ 看作 $\mathbb{C}^{n^2}$, 便可从 $\mathbb{C}$ 给出 $M_n(\mathbb{C})$ 拓扑空间结构.

称 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 为**可对角化** (diagonalizable), 若有可逆矩阵 X 使 XAX^{-1} 为对角矩阵. 以 $D_n(\mathbb{C})$ 记所有 $n\times n$ 可对角化复数矩阵. 我们可知, 若 $B\in M_n(\mathbb{C})$ 的所有特征根各不相同, 则 $B\in D_n(\mathbb{C})$.

命题 4.12 $D_n(\mathbb{C})$ 包含 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个非空开子集.

证明 取对角矩阵 A 其对角元素为 $1,2,\cdots,n$. 我们将证明 A 有 $M_n(\mathbb{C})$ 内的开邻域 U 使得 $U\subset D_n(\mathbb{C})$.

A 的特征多项式 χ_A 是 $(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)$, 所以 χ_A 的判别式 $D(\chi_A)\neq 0$. 设矩阵 B 在矩阵 A 的一个足够小的开邻域内. 则 χ_B 的系数会接近 χ_A 的系数. 所以判别式 $D(\chi_B)$ 会接近 $D(\chi_A)\neq 0$. (我们是说

$$M_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C} : X\mapsto D(\chi_X)$$

是连续函数.) 结论是: 存在 A 的开邻域 U 使得若 $B\in U$ 则 $D(\chi_B)\neq 0$. 那就是说 B 的所有特征根各不相同. 于是知 $B\in D_n(\mathbb{C})$. □

4.5.3

本小节提供一个证明交换环上代数恒等式的方法. 然后用这个方法证明一个行列式的恒等式.

定理 4.13 设 $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ 和有 $\mathbb{C}^n$ 的非空开子集 U, 使得对 $(z_1, \cdots, z_n) \in U$ 有 $f(z_1, \cdots, z_n) = g(z_1, \cdots, z_n)$. 则作为多项式 $f = g$.

证明 对 n 做归纳证明. $n = 1$, 多项式 $f - g$ 在 U 内有无穷个根, 故为零多项式.

归纳步: 设 $f \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ 在非空开子集 $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 取零值. 证: f 的所有系数为 0. 设

$$f(X_1, \cdots, X_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d} c_i(X_1, \cdots, X_n) X_{n+1}^i.$$

开集 U 包含 $V = U_1 \times \cdots \times U_{n+1}$, 其中 U_i 为 $\mathbb{C}$ 的非空开子集. 取 $(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in V$. 考虑

$$g(X) = f(z_1, \cdots, z_n, X) = \sum_{i=0}^{d} c_i(z_1, \cdots, z_n) X^i \in \mathbb{C}[X].$$

这样从 $g(X)$ 在非空开子集 $U_{n+1} \subset \mathbb{C}$ 为零知 $g(X)$ 为零多项式, 即 $c_i(z_1, \cdots, z_n) = 0$. 于是多项式 $c_i(X_1, \cdots, X_n)$ 在非空开子集 $U_1 \times \cdots \times U_n$ 上取零值. 用归纳假设得知 $c_i(X_1, \cdots, X_n)$ 为零多项式.

现设整数系数多项式 $f(X_1, \cdots, X_n)$, $g(X_1, \cdots, X_n)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 内非空开子集取等值. 则按以上定理的系数相同. 用以下易证的定理便可做结论

$$f(a_1, \cdots, a_n) = g(a_1, \cdots, a_n)$$

对任意交换环 R 内元素 $a_1, \cdots, a_n$ 均成立. 如此便得证交换环 R 上以上代数恒等式 $f = g$. □

定理 4.14 从交换环 R 取元素 $a_1, \cdots, a_n$. 则

$$\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n] \to R : f(X_1, \cdots, X_n) \mapsto f(a_1, \cdots, a_n)$$

为环同态.

作为这个证法的例子, 考虑以下定理. 以 $\mathrm{Tr}(A)$ 记矩阵 $A = (a_{ij})$ 的**迹** (trace) $\sum_i a_{ii}$.

定理 4.15 设 R 为交换环, n 为正整数. 把 $A \in M_n(R)$ 的特征多项式写为

$$\det(\Lambda - A) = \Lambda^n + c_1(A)\Lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}(A)\Lambda + c_n(A) \in R[\Lambda].$$

则 $c_k(A) = (-1)^k \mathrm{Tr}(\wedge^k(A))$.

证明 记矩阵 $A = (a_{ij})$. 把 $c_k(A) = (-1)^k \mathrm{Tr}(\wedge^k(A))$ 看作 n^2 个变元 $\{a_{ij}\}$ 交换环 R 上的代数恒等式. 按以上证法只需证明 $c_k(A)$, $(-1)^k \mathrm{Tr}(\wedge^k(A))$ 在 $M_n(\mathbb{C})$ 的非空开子集上取等值. 已知可对角化矩阵集合 $D_n(\mathbb{C})$ 包含 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个非空开子集. 故只需

证明当 A 是可对角化矩阵时必有 $c_k(A) = (-1)^k \operatorname{Tr}(\wedge^k(A))$. 因为特征多项式在变换 $A \mapsto XAX^{-1}$ 下不改变, 所以只需为对角矩阵 A 证明上式.

设对角矩阵 A 的对角元素为 $a_1, \cdots, a_n$. 在

$$\det(\Lambda - A) = \prod_{i=1}^{n}(\Lambda - a_i)$$

中 Λ^{n-k} 的系数是

$$c_k(A) = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1} \cdots a_{i_k}.$$

另一方面考虑 $\wedge^k(A)$ 在外积 $\wedge^k(\mathbb{C}^n)$ 上的作用. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准基. 则 $Ae_i = a_i e_i$. 于是 $\wedge^k(\mathbb{C}^n)$ 的基 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\}$ 是 $\wedge^k(A)$ 的特征向量

$$\wedge^k(A)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = a_{i_1} \cdots a_{i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

所以

$$\operatorname{Tr}(\wedge^k(A)) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1} \cdots a_{i_k}.$$

于是对角矩阵 A 有等式 $c_k(A) = (-1)^k \operatorname{Tr}(\wedge^k(A))$. □

4.6 对偶空间的外积

4.6.1

从一个向量空间 V 出发, 我们有两种产生新向量空间的构造方式:

(1) $V \to V^* = \operatorname{Hom}_F(V, F)$ (V 的对偶空间);

(2) $V \to \wedge^p V$ (V 的 p 次外幂).

我们将会看到它们均为函子的例子.

我们想要知道这两种构造方式是否可交换, 即如果我们按不同的顺序进行这两种构造方式

$$V \to \wedge^* \to \wedge^p(V^*)$$

与

$$V \to \wedge^p V \to (\wedge^P V)^*,$$

则我们怎么知道

$$\wedge^p(V^*) = (\wedge^p V)^*,$$

或至少我们怎么可以得到一个同构

$$\wedge^p(V^*) \approx (\wedge^p V)^*?$$

为了得到这样一个同构, 首先设法构造一个 F 线性映射:

$$\Psi : \wedge^p(V^*) \to (\wedge^p V)^*.$$

下面我们利用外积 $(\wedge^p V)^*$ 的泛性质来构造这个映射. 这就是说, 我们构造一个合适的交错 p 线性映射

$$g : V^* \times \cdots \times V^* \to (\wedge^p V)^*,$$

并且映射 Ψ 以下图的方式存在,

$$\begin{tikzcd}
V^* \times \cdots \times V^* \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \wedge^p(V^*) \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\
& (\wedge^p V)^*
\end{tikzcd}$$

这里 f 是如下映射

$$f : V^* \times \cdots \times V^* \to \wedge^p(V^*) :\ f_1, \cdots, f_p \mapsto f_1 \wedge \cdots \wedge f_p.$$

映射 g 是什么? 给定 $(f_1, \cdots, f_p) \in V^* \times \cdots \times V^*$, 我们想要一个线性映射 $g(f_1, \cdots, f_p) : \wedge^p V \to F$. 同样, 这样一个映射来自如下映射的泛性质

$$V \times \cdots \times V \to \wedge^p V : (v_1, \cdots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

换言之, 为了得到 $g(f_1, \cdots, f_p)$, 我们需要找到一个合适的交错 p 线性映射

$$t(f_1, \cdots, f_p) : V \times \cdots \times V \to F$$

使得下图是交换的.

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r] \arrow[dr, "t(f_1, \cdots, f_p)"'] & \wedge^p V \arrow[d, dashed, "g(f_1, \cdots, f_p)"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

给定线性映射 $f_j : V \to F$, 由 f_j 构造而成的自然交错线性映射

$$t(f_1, \cdots, f_p)(v_1, \cdots, v_p)$$

只能是行列式:

$$t(f_1,\cdots,f_p)(v_1,\cdots,v_p)=\begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}.$$

这就完成了说明下一个定理的动机.

定理 4.16 设 V 是域 F 上的有限维向量空间. 对于 $f_j\in V^*$, $1\leqslant j\leqslant p$, 定义一个线性映射 $\Psi(f_1\wedge\cdots\wedge f_p):\wedge^p V\to F$ 为如下行列式

$$\Psi(f_1\wedge\cdots\wedge f_p)(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)=\begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}.$$

则 $\Psi:\wedge^p(V^*)\to(\wedge^p V)^*$ 是 F 向量空间的一个同构映射.

证明 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一个基, 且 $\{e^{*1},\cdots,e^{*n}\}$ 是其对偶基, 则

(1) $\wedge^p V$ 有一个基 $\{e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_p}:k_1<\cdots<k_p\}$,

(2) $\wedge^p V^*$ 有一个基 $\{e^{*h_1}\wedge\cdots\wedge e^{*h_p}:h_1<\cdots<h_p\}$.

由此可知, $\dim_F\wedge^p V=\binom{n}{p}=\dim_F\wedge^p V^*$.

根据映射 Ψ 的定义, 我们有

$$\Psi(e^{*h_1}\wedge\cdots\wedge e^{*h_p})(e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_p})=|A|,$$

其中 A 为矩阵

$$A=\begin{pmatrix} e^{*h_1}(e_{k_1}) & \cdots & e^{*h_1}(e_{k_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{*h_p}(e_{k_1}) & \cdots & e^{*h_p}(e_{k_p}) \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的第 i 行为

$$(e^{*h_i}(e_{k_1}),\cdots,e^{*h_i}(e_{k_p})),$$

而且除非存在一个 $k_j=h_i$, 否则该行为零. 但是这种情形只有当 $k_1=h_1,\cdots,k_i=h_i,\cdots,k_p=h_p$ 时才可能发生, 因为如下序列

$$h_1<\cdots<h_p$$

和

$$k_1<\cdots<k_p$$

是递增的.

因此, 我们可以看出, 当对于所有的 i, $h_i = k_i$ 时, 矩阵 A 为单位矩阵, 从而矩阵 A 的行列式为 1. 否则矩阵 A 将有一个零行, 从而其行列式为 0. 这就是说

$$\Psi(e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p})(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p}) = \begin{cases} 1, & \text{如果} \quad h_1 = k_1, \cdots, h_p = k_p, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此我们可以断定向量空间 $(\wedge^p V)^*$ 中的向量集合

$$\{\Psi(e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p}),\ 1 \leqslant h_1 < \cdots < h_p \leqslant n\}$$

是 $\wedge^p V$ 的一个对偶基.

这样我们可以看出 Ψ 把 $\wedge^p(V^*)$ 的一个基 $\{e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p}\}$ 传送到 $(\wedge^p V)^*$ 的一个基, 从而 Ψ 是一个同构映射. □

例 4.17 设 V 是域 F 上的有限维向量空间, 并设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基且 $\{e^{*1}, \cdots, e^{*n}\}$ 是其对偶基. 则 $\wedge^p V$ 有一基 $\{e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p} : k_1 < \cdots < k_p\}$, $\wedge^p V^*$ 有一个基 $\{e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p} : h_1 < \cdots < h_p\}$. 设 $f \in \wedge^p V^*$ 和 $w \in \wedge^p V$. 则 f 和 w 可表示为

$$f = \sum_{k_1 < \cdots < k_p} f_{k_1 \cdots k_p} e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p}$$

和

$$w = \sum_{k_1 < \cdots < k_p} w^{k_1 \cdots k_p} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p},$$

其中 $f_{k_1 \cdots k_p}, w_{k_1 \cdots k_p} \in F$. 由定理 4.16 可知, Ψ 是一个多重线性映射, 于是

$$\begin{aligned} \Psi(f)(w) &= \sum_{h_1 < \cdots < h_p} f_{h_1 \cdots h_p} \sum_{k_1 < \cdots < k_p} w^{k_1 \cdots k_p} \Psi(e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p})(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_p}) \\ &= \sum_{k_1 < \cdots < k_p} f_{k_1 \cdots k_p} w^{k_1 \cdots k_p}. \end{aligned}$$

4.6.2

设 V 是一个有限维的向量空间. 现在我们有两个同构映射

$$\Phi : (\wedge^p V)^* \xrightarrow{\approx} \mathrm{Alt}^p\, V$$

和

$$\Psi : \wedge^p(V^*) \xrightarrow{\approx} (\wedge^p V)^*.$$

这给出一个新的同构映射

$$\Phi\Psi : \wedge^p(V^*) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Alt}^p\, V.$$

我们可验证该同构映射可以推广到外代数的一个同构映射:

$$\bigoplus_p \wedge^p(V^*) \xrightarrow{\approx} \bigoplus_p \operatorname{Alt}^p V.$$

$\Phi\Psi$ 是一个非常有趣的映射. 这说明, 对于一个有限维向量空间 V, 所有的交错 p 线性形式构成的向量空间与 V 上的 1 线性映射构成的向量空间的 p 次外幂向量空间是相同的.

特别地, 如果 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一个基, $\{e^{*1}, \cdots, e^{*n}\}$ 是其对偶基, 则

$$\{e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p} : h_1 < \cdots < h_p\}$$

是 $\wedge^p V^*$ 的一个基. 于是

$$\{\Phi\Psi(e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p})\}$$

是 $\operatorname{Alt}^p V$ 的一个基.

$\Phi\Psi$ 经常从记号中除去. 换言之, 我们常常用 $f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ 来表示交错 p 线性映射 $\Phi\Psi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)$. 利用这种方式我们可得

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(v_1, \cdots, v_p) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}.$$

这一公式经常作为 $\wedge$ 积的定义, 并且它省略了我们所做的所有讨论.

在这种情况下, 我们还有另一个映射. 回想 Sk^pV 是由 T^pV 内的所有斜称张量所组成的空间, 并且存在一个同构

$$\alpha : \wedge^p V \to Sk^p V : v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto A_p(v_1 \otimes \cdot \otimes v_p),$$

其中

$$A_p(x) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}(\sigma x).$$

我们继续称 α 是上述定义的一个映射但 V 被 V^* 所代替. 这就是说, 我们有

$$\alpha : \wedge^p V^* \to Sk^p V^* \xrightarrow{\approx} \operatorname{Alt}^p V.$$

这最终告诉我们, 当 V 是有限维向量空间时, 所有斜称共变 p 张量组成的空间同构于所有交替 p 线性形式组成的空间.

习 题

1. 设 $\mathbb{R}$ 是实数域, V 是实平面 $\mathbb{R}^2$. V 中的元素可记为 $(x, y)^T$. 定义函数 $f : V \times V \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1$$

(即为通常的行列式). 证明: 该映射是 2 线性的.

2. 证明:

(a) $p = q = 1$, $\omega, \eta \in \operatorname{Alt}^1 V = V^*$, 则

$$\omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1) = \begin{vmatrix} \omega(v_1) & \omega(v_2) \\ \eta(v_1) & \eta(v_2) \end{vmatrix};$$

(b) $p = 2, q = 1, \omega \in \wedge^2 V, \eta \in \wedge^1 V = V^*$, 则

$$\omega \wedge \eta(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2)\eta(v_3) - \omega(v_1, v_3)\eta(v_2) + \omega(v_2, v_3)\eta(v_3).$$

3. 取 $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. 设

$$B_u(v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

证明:

$$B_u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : v, w \mapsto B_u(v, w)$$

是交错双线性函数. 再证明: $\mathbb{R}^3$ 的任意交错双线性函数一定是某个 B_u.

4. 设 V, Z 都是 F 向量空间. 证明: 从 V 到 Z 的所有的 p 线性映射的集合 ${}^p\mathscr{L}(V, Z)$ 构成域 F 上的一个向量空间.

5. 设 V, Z 都是 F 向量空间.

(a) 证明: 映射

$$m : V \times \cdots \times V \to V \otimes \cdots \otimes V : v_1, \cdots, v_p \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$$

是 p 线性的.

(b) 给定任一 p 线性映射

$$g : V \times \cdots \times V \to Z.$$

证明: 存在唯一的 F 线性映射

$$k : V \otimes \cdots \otimes V \to Z$$

使得 $g = k \circ m$.

6. 给定 F 向量空间 V 和 Z. 选取 $\alpha_j \in \operatorname{Hom}_F(V, Z)$, $j = 1, \cdots, p$. 定义映射 $f : V \times \cdots \times V \to Z$ 如下:

$$f(v_1, v_2, \cdots, v_p) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2)\cdots\alpha_p(v_p).$$

证明: f 是 p 线性的.

7. 验证按如下方式定义的映射

$$m : V \times \cdots \times V \to V \otimes \cdots \otimes V,$$
$$m(v_1, \cdots, v_p) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$$

是 p 线性的.

8. 回想 $\wedge^p V$ 表示 V 与自身的 p 次外积. 验证映射

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\text{ 次}} \to \wedge^p V,$$
$$(v_1, \cdots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

是交错 p 线性的.

9. (a) 设 $\{e^{*j}\}$ 为 $\{e_i\}$ 的对偶基. 证明:

$$c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n e^{*i}(c_j) e_i,$$
$$d(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \begin{vmatrix} e^{*1}(c_1) & \cdots & e^{*1}(c_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{*n}(c_1) & \cdots & e^{*n}(c_n) \end{vmatrix}.$$

(b) 给定任一 n 维 F 向量空间 V, 即 $V \approx F^n$. 证明: 给定 V 的一个基 $\{e_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$, 存在唯一的交错 n 线性形式 $d : V \times \cdots \times V \to F$ 满足条件 $d(e_1, \cdots, e_n) = 1$. 此外, 证明: d 由下式给出

$$d(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \begin{vmatrix} e^{*1}(v_1) & \cdots & e^{*1}(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{*n}(v_1) & \cdots & e^{*n}(v_n) \end{vmatrix},$$

其中 $\{e^{*j}\}$ 是给定基 $\{e_i\}$ 的对偶基, 即 $e^{*j}(e_i) = \delta_{ij}$.

10. 设 s 是如同 r' 的整数集合但可能按照不同的顺序排列, t 是如同 c' 的整数集合但可能按照不同的顺序排列. 证明:

$$\delta^{r_1, \cdots, r_n}_{c_1, \cdots, c_n} |A^{r'}_{c'}| = \delta^{r_1, \cdots, r_n}_{c_1, \cdots, c_n} |A^s_t|.$$

11. 设 V 是域 F 上的有限维向量空间. V 上所有的 p 线性函数构成的向量空间记作 ${}^p\mathscr{L}(V, F)$. $\mathrm{Alt}^p(V)$ 来表示 V 上所有的交错 p 线性函数构成的空间. 对 $\lambda \in {}^p\mathscr{L}(V, F)$, 设

$$A(\lambda)(v_1, \cdots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \lambda(v_{\sigma 1}, \cdots, v_{\sigma p}).$$

对 $\alpha \in \mathrm{Alt}^p(V)$, $\beta \in \mathrm{Alt}^q(V)$, 设

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(\alpha \otimes \beta).$$

(a) 证明: A 是线性满映射及 $A(A(\alpha)) = A(\alpha)$.

(b) 证明: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

12. 设 F 为域. $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. 从 A 消去 i 行 j 列所得的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵记为 $A(i|j)$. 记 $A_{ji} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ [A 的**余因子** (cofactor)]. 记 $\operatorname{adj}(A) = (A_{ij})$ (adjugate matrix of A), 即 $n \times n$ 矩阵 $\operatorname{adj}(A)$ 的 (i,j) 元素是 A_{ij}. 证明:

(a) $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = |A|I$;

(b) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ (Cauchy 公式).

13. 设 F 为域. $A \in M_n(F)$ 的**特征多项式** (characteristic polynomial) $\chi_A(\Lambda)$ 是 $\det(\Lambda - A)$.

(a) 证明: (Cayley-Hamilton): $\chi_A(A) = 0$.

(b) 证明: 集合 $\{f \in F[\Lambda] : f(A) = 0\}$ 为多项式环 $F[\Lambda]$ 的主理想. 它的生成元 m 为次数最小的多项式 f 使 $f(A) = 0$, 并且可以要求 μ_A 的最高次数项的系数等于 1, 称 μ_A 为 A 的**最小多项式** (minimal polynomial).

(c) 设 g 为 $\chi_A(\Lambda)$ 的所有 $n-1$ 阶子式的最大公因子. 证明:

$$\chi_A(\Lambda) = \mu_A(\Lambda) g(\Lambda).$$

14. 设 R 为交换环. 取 $A \in M_n(R)$, $g(X) \in R[X]$. 证明:

$$\det(g(A)) = R(\chi_A, g).$$

15. 设 R 为交换环. 取 $A \in M_n(R)$, $B \in M_m(R)$. 证明:

(a) $\operatorname{Tr}(A \otimes B) = \operatorname{Tr}(A) \operatorname{Tr}(B)$;

(b) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$;

(c) $\det(A \otimes I_m - I_n \otimes B) = R(\chi_A, \chi_B)$.

16. 设 R 为交换环. 取 $A \in M_n(R)$. 设 $1 \leqslant k \leqslant n$. 证明:

$$\det(\wedge^k A) = \det(A)^{\binom{n-1}{k-1}}.$$

17. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为非零多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

的根. 设

$$s_i = \alpha_1^i + \cdots + \alpha_n^i, \quad D_r(f) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{r-1} & s_r & \cdots & s_{2r-2} \end{vmatrix}.$$

证明: $f(x) = 0$ 有 k 个各不相同的根的充要条件是

$$D_k(f) \neq 0, \quad D_{k+1}(f) = \cdots = D_n(f) = 0.$$

18. 域 F 上矩阵 A 为可对角化的充要条件是 A 的最小多项式 $\mu_A(\Lambda)$ 在 $F[\Lambda]$ 内分裂为一次多项式的乘积和 $\mu_A(\Lambda)$ 所有的根各不相同.

19. 设 $A_1, \cdots, A_r$ 为域 F 上可对角化矩阵. 证明: 存在矩阵 X 使得对所有 i, XAX^{-1} 同时为对角矩阵的充要条件是对所有 i, j 有 $A_iA_j = A_jA_i$.

20. 以 F 记域. 设 $e = \{e_j\}$ 为 n 维 F 向量空间 V 的基. $\phi : V \to V$ 为 F 线性映射. 用基 e 得 ϕ 的矩阵 $[\phi]_{e,e}$. 另取 V 的基 e'. 证明: 特征多项式 $\chi_{[\phi]_{e,e}} = \chi_{[\phi]_{e',e'}}$, 最小多项式 $\mu_{[\phi]_{e,e}} = \mu_{[\phi]_{e',e'}}$. 因为与基无关可以定义线性映射 ϕ 的特征多项式 χ_ϕ 为 $\chi_{[\phi]}$, 最小多项式 μ_ϕ 为 $\mu_{[\phi]}$.

21. $\phi : V \to V$ 为 F 线性映射. $V = W_1 + \cdots + W_k$ 为子空间直和. $\phi(W_i) \subset W_i$. ϕ 限制为 $\phi_i : W_i \to W_i$. 证明: μ_ϕ 为 $\mu_{\phi_1}, \cdots, \mu_{\phi_k}$ 的最小公倍.

22. $\phi : V \to V$ 为 F 线性映射. 有子空间 W 使得 $\phi(W) \subset W$. 于是得线性映射 $\phi_W : W \to W$ 和 $\phi_{V/W} : V/W \to V/W$. 证明:

(a) μ_ϕ 为 $\mu_{\phi_W}\mu_{\phi_{V/W}}$ 的因子;

(b) $\mu_{\phi_W}, \mu_{\phi_{V/W}}$ 的最小公倍为 μ_ϕ 的因子.

23. $\phi : V \to V$ 为 F 线性映射. 证明以下条件等价:

(a) $\phi \neq 0$, 若有子空间 W 使得 $\phi(W) \subset W$, 则 $W = 0$ 或 $W = V$;

(b) μ_ϕ 在 F 上不可约并且 μ_ϕ 的次数等于 V 的维数;

(c) $\mu_\phi = \chi_\phi$ 在 F 上不可约.

第五章　双线性型

在第二章我们用双线性型引入张量积. 本章从另一个角度再谈双线性型, 主要是利用双线性型介绍内积、范数、正交化过程和两个典型群——酉群和辛群的性质. 下一章将讲正交群.

5.1　双线性型

5.1.1

本章假设基本域 F 的特征不等于 2. 特别地, $\frac{1}{2} \in F$.

定义 5.1　域 F 上的向量空间 V 上的一个**双线性型** (bilinear form) 是从 V 到域 F 的一个双线性映射.

定义 5.2　给定一个双线性型 b, 我们称 b 是

(1) **对称的** (symmetric), 如果 $b(x,y) = b(y,x)$ 对任意的 $x, y \in V$ 都成立;
(2) **反称的** (skew symmetric), 如果 $b(x,y) = -b(y,x)$ 对任意的 $x, y \in V$ 都成立;
(3) **交错的** (alternating), 如果 $b(x,x) = 0$ 对任意的 $x, y \in V$ 都成立.

一个对称双线性型有时称为一个**标量积** (scalar product). 当 b 是 V 上的一个对称或反称双线性型时, 我们称有序对 (V, b) 是一个双线性空间.

显然 b 是反称的等同于 b 是交错的, 因为基本域 F 的特征不等于 2.

5.1.2

定义 5.3　给定向量空间 V 上的一个对称或反称双线性型 b. 如果 $x, y \in V$ 且 $b(x,y) = 0$, 则我们称 x, y 是**正交的** (orthogonal) (或者 x 垂直于 y), 记作 $x \perp y$. 对于子集 $X, Y \subset V$, 我们记作 $X \perp Y$, 如果 $b(x,y) = 0$ 对所有的 $x \in X$, $y \in Y$ 都成立.

对于一个子集 $X \subset V$, 令 $X^\perp := \{y \in V : y \perp X\}$. 我们称 $V^\perp$ 是 b 的**根** (radical) [或**零化子** (annihilator)]. 我们称 b 是**非退化的** (non-degenerate) (或非奇异的或正则

的), 如果 $V^\perp = 0$.

所以 b 是向量空间 V 上的对称或反称非退化双线性型是指不存在非零向量 $y \in V$ 使得对任一 $x \in V$ 有 $b(x,y) = 0$.

引理 5.4 给定一个双线性型 $b : V \times V \to F$. 对于 $x \in V$, 如下定义映射 $\hat{b} : V \to V^*$

$$\hat{b}x \in V^*,$$
$$(\hat{b}x)(y) = b(x,y) \quad \text{对任意 } y \in V.$$

则我们有

(1) $\hat{b}$ 是 F 线性的;
(2) $\operatorname{Ker} \hat{b} = V^\perp$;
(3) b 是非退化的 $\Leftrightarrow$ $\hat{b}$ 是一个同构映射;
(4) 设 U 为 V 的子空间, 则任一线性函数 $U \to F$ 必可表达为 $y \mapsto b(x,y)$ (或 $y \mapsto b(y,x)$), 其中 $x \in V$.

证明　1. 性质 (1) 容易验证.

2.
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} \hat{b} &\Leftrightarrow \hat{b}x = 0 \in V^* \\ &\Leftrightarrow \hat{b}x(y) = b(x,y) = 0 \quad \text{对任意 } y \in V \\ &\Leftrightarrow x \in V^\perp. \end{aligned}$$

3. b 为非退化的意味着 $V^\perp = 0$, 即由性质 (2) 可得, $\operatorname{Ker} \hat{b} = 0$. 这说明 $\hat{b}$ 是单射, 从而也是一个同构映射, 因为 V 与 V^* 具有相同的维数. □

5.1.3

定义 5.5 如果 V 有子空间 $V_1, V_2, \cdots V_k$, 使得 V 是一个直和

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

并且对于 $i \neq j$, $V_i \perp V_j$, 则我们记作

$$V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_k.$$

我们称之为一个正交分解. 称一个子空间 U 分解 V, 如果存在 V 的一个子空间 W 使得 $V = U \boxplus W$.

引理 5.6 设 W 是 (V, b) 的一个子空间, b 在 W 上的限制 $b|_W$ 是非退化的. 则 $V = W^\perp \boxplus W$.

证明　显然由定义可知 $W^\perp \perp W$. 还需证明 $V = W \oplus V^\perp$, 即

(1) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

(2) 任给的 $x \in V$ 均可以写成一个和式 $x = y + z$, 其中 $y \in W$, $z \in W^{\perp}$.

(1) 的证明: 回想 $W^{\perp} = \{x \in V : b(x, W) = 0\}$. 现在选取 $x \in W \cap W^{\perp}$, 则 x 属于限制到 W 的双线性映射 $b|_W : W \times W \to F$ 的根. 但是, 根据假设, $b|_W$ 是非退化的. 从而 $x = 0$.

(2) 的证明: 选取任意的 $x \in V$. 回想我们有一个线性映射 $\hat{b} : V \to V^*$. 从而 $\hat{b}x \in V^*$, 即 $\hat{b}x : V \to F$. 我们可以将 $\hat{b}x$ 限制在 W 上, 即 $(\hat{b}x)|_W : W \to F$ 或 $(\hat{b}x)|_W \in W^*$.

现在, 利用双线性型 $b|_W : W \times W \to F$ 是非退化的事实, 我们可以推出

$$\widehat{b|_W} : W \to W^*$$

是一个同构映射. 由于 $(\hat{b}x)|_W \in W^*$, 则存在一个 $y \in W$, 使得

$$\widehat{b|_W}(y) = \hat{b}(x)|_W.$$

这意味着对任给的 $z \in W$, 有

$$b(y, z) = \widehat{b|_W}(y)(z) = \hat{b}(x)(z) = b(x, z),$$

即对所有的 $z \in W$, $b(x - y, z) = 0$. 于是 $x - y \in W^{\perp}$.

因此, 给定 $x \in V$, 我们可以找到 $y \in W$ 使得 $x = y + x - y$, $x - y \in W^{\perp}$. $\square$

5.1.4

从现在起, 我们假设 $\dim_F V < \infty$.

设 $b : V \times V \to F$ 是有限维向量空间 V 上的一个双线性型. b 在 V 的一个基 $\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 下的矩阵定义为

$$B = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

此外, 若记 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 和 $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, 则我们可将 $b(x, y)$ 展开如下

$$b(x, y) = (x_1, \cdots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

正如我们所知, 对于一个双线性型 b, 其在基 $\{e_i\}$ 下的矩阵为 B, 一个基于矩阵 T 的基变换 $\{e_i'\}$ 导致双线性型 b 关于 $\{e_i'\}$ 的矩阵 $T^T B T$. 由于 $\det(T^T B T) =$

$(\det(T))^2 \det B$, 我们只能把 b 的行列式设定为行列式 $\det B$ 差域 F 上的一个元的平方.

设 $F^\times = F \setminus \{0\}$ 和

$$F^{\times 2} = \{a^2 : a \in F^\times\}.$$

则我们可以把行列式 $\det b$ 定义为商群 $F^\times/F^{\times 2}$ 中的元 $(\det B)F^{\times 2}$.

5.2 内积和酉群

我们将分别讨论实数和复数的情形.

5.2.1 实向量空间

设 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. 一个从 V 到实数域 $\mathbb{R}$ 的双线性型 $b : V \times V \to \mathbb{R}$ 称为是**正定的** (positive definite), 如果对所有的 $v \in V$, 有

$$b(v,v) \geqslant 0 \quad \text{和} \quad b(v,v) = 0 \text{ 当且仅当 } v = 0.$$

特别地, 如果 $w \in V$ 使得 $b(w,v) = 0$ 对所有的 $v \in V$ 都成立, 则 $b(w,w) = 0$. 由正定性可得 $w = 0$. 这就是说, 如果 b 是正定性的, 则 b 是非退化的.

称实向量空间 V 上的正定对称双线性型 b 为**内积** (inner product), 且我们称 V 是一个实内积空间. 我们通常将内积 $b(v,w)$ 记为 $\langle v,w\rangle$. 此时, 我们定义一个元 $v \in V$ 的范数为

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

一个集合中的度量是指一个实值函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$, 其满足下列条件:

(1) 三角不等式. 对于 X 中的任意三个元 u, v, x, 我们有

$$d(u,x) + d(x,v) \geqslant d(u,v);$$

(2) 对于 X 中的每一个元 x, 我们有

$$d(x,x) = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0.$$

我们称 (X,d) 是一个度量空间.

在一个实内积空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中, 我们定义任意两个元 $u, v \in V$ 的距离为

$$d(u,v) := \|u - v\|.$$

容易证明 (V,d) 是一个度量空间.

称实内积空间的线性双射

$$T : (V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (V_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$$

为**等距映射** (isometry), 如果

$$\langle T(u), T(v)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$$

对于所有的 $u, v \in V_1$ 都成立.

从实内积空间 V 到 V 的等距映射称为**正交映射** (orthogonal transformation). 利用映射的合成来定义乘积, V 上的所有正交映射所组成的集合, 成为一个群. 称这群为实内积空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的**实正交群** (orthogonal group). 下章将更详细地讨论正交群.

5.2.2 复向量空间

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间. V 上的一个**半双线性型** (sesquilinear form) (“一个半线性型”) 是一个映射 $s : V \times V \to \mathbb{C}$, 使得对所有的 $u, v, w \in V$ 和 $a \in \mathbb{C}$, 我们有

(1) $s(au + v, w) = as(u, w) + s(v, w)$;
(2) $s(w, au + v) = \bar{a}s(w, u) + s(w, v)$, 其中 $\bar{a}$ 表示复数 a 的共轭.

这就是说, s 对于第一个变量是线性的且对于第二个变量是共轭线性的.

复数域向量空间 V 上的一个半双线性型 $s : V \times V \to \mathbb{C}$ 称为**正定的**, 如果对所有的 $v \in V$, $s(v, v)$ 是实的, $b(v, v) \geqslant 0$, 且

$$s(v, v) = 0 \text{ 当且仅当 } v = 0.$$

复数域向量空间 V 上的一个半双线性型 $s : V \times V \to \mathbb{C}$ 称为**共轭对称的** (conjugate symmetric), 如果对所有的 $u, v \in V$,

$$s(u, v) = \overline{s(u, v)}.$$

复数域向量空间 V 上的一个正定共轭对称半双线性型称为一个**内积**. 我们说 V 是一个复内积空间 (或者一个准 Hilbert 空间). 我们通常将一个内积 $s(v, w)$ 记作 $\langle v, w\rangle$. 在这种情况下, 我们定义一个元 $v \in V$ 的**范数** (norm) 如下

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

我们定义任意两个元 $u, v \in V$ 之间的距离为

$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

例 5.7 设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 和 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 都属于 $\mathbb{C}^n$. 令

$$\langle z,w\rangle := z_1\overline{w_1}+\cdots+z_n\overline{w_n}.$$

这称为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准内积.

例 5.8 我们用 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 或者 $M_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n\times n$ 复矩阵的集合. 这是一个同构于 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的 $\mathbb{C}$ 向量空间, 如下给出其标准内积: 对于 $A=(a_{jk}),B=(b_{jk})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 公式

$$\langle A,B\rangle=\sum_{j,k}a_{jk}\overline{b_{jk}}$$

表示 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的内积.

定理 5.9 设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是复内积空间. 则对所有的 $u,v\in V$, 有

(1) **Schwarz 不等式** $|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\|v\|$;

(2) **三角不等式** (triangle inequality) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$;

(3) **极化等式** (polarization equality)

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2+\frac{i}{4}\|u+iv\|^2-\frac{i}{4}\|u-iv\|^2.$$

证明 1. 设 $A=\|u\|^2$, $B=|\langle u,v\rangle|$ 和 $C=\|v\|^2$. 取复数 c 使得 $|c|=1$ 和 $c\langle v,u\rangle=B$. 取任意实数 r. 则

$$0\leqslant\langle u-rcv,u-rcv\rangle=\langle u,u\rangle-rc\langle v,u\rangle-r\bar{c}\langle u,v\rangle+r^2\langle v,v\rangle.$$

即对任意实数 r 有

$$A-2Br+Cr^2\geqslant 0.$$

若 $C=0$ 和 $B\neq 0$, 则只要取 $r>\frac{A}{2B}$ 便与上式相矛盾. 因此若 $C=0$, 则 $B=0$. 余下问若 $C\neq 0$, 则在上式取 $r=\frac{B}{C}$ 便得 $B^2\leqslant AC$.

2. 利用 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle\\&\leqslant\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2.\end{aligned}$$

3. 利用内积性质把极化等式的右边展开便得左边. □

5.2.3 酉映射

我们引入矩阵 B 的**共轭转置** (conjugate transpose) $B^*=(b^*_{jk})$, 其中 $b^*_{jk}=\overline{b_{kj}}$. **迹** (trace) 函数为

$$\mathrm{Tr}:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}:(c_{jk})\mapsto\sum_j c_{jj}.$$

则

$$\mathrm{Tr}(AB^*) = \sum_j (AB^*)_{jj} = \sum_j \sum_k a_{jk} b^*_{kj} = \sum_j \sum_k a_{jk} \overline{b_{jk}}.$$

因此我们得到

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*) = \mathrm{Tr}(B^*A).$$

命题 5.10 设 $T : (V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (V_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是复内积空间之间的一个线性双射. 则 $\|Tv\| = \|v\|$ 对于每一个 $v \in V_1$ 都成立当且仅当

$$\langle T(u), T(v)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$$

对所有的 $u, v \in V_1$ 都成立.

证明 如果 $\|Tv\| = \|v\|$ 成立, 则由 T 的线性和极化等式可得 $\langle T(u), T(v)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$. 反之亦然. □

复内积空间之间的一个**酉映射** (unitary map)

$$T : (V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (V_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$$

是一个线性双射 $T : V_1 \to V_2$ 满足如下条件:

$$\langle T(u), T(v)\rangle_2 = \langle u, v\rangle_1$$

对所有的 $u, v \in V_1$ 都成立.

固定一个复内积空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(1) 如果 T_1, T_2 是从 V 到 V 的酉映射, 则它们的复合 $T_2 \circ T_1$ 是可逆的.
(2) $\|T_2 \circ T_1 v\| = \|T_1 v\| = \|v\|$ 知 $T_2 \circ T_1$ 是酉映射.
(3) 如果 T 是酉映射, 则 T 是双射, 从而 V 中的每一个元可以表示为 $w = Tv$ 的形式. 由 $\|v\| = \|Tv\|$ 可推出 $\|T^{-1}w\| = \|w\|$ 对任意的 $w \in V$ 都成立. 这表明一个酉映射的逆映射也是酉映射.
(4) 单位映射自然是酉映射.

如此我们证明了: 以映射合成为乘积, 一个复内积空间上的所有酉映射所组成的集合是一个群. 这个群称为复内积空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的**酉群** (unitary group). 一个有限维内积空间的酉群是一类重要的 Lie 群.

定义 5.11 一个 $n \times n$ 复矩阵 A 称为**酉阵** (unitary matrix), 如果 $A^*A = I$. 所有 $n \times n$ 酉阵的集合形成一个群, 称为**酉群** (unitary group), 记作 $U(n)$.

例 5.12 我们将 $\mathbb{C}^n$ 等同于 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 且标准内积可记为 $\langle X, Y\rangle = Y^*X$. 一个 $n \times n$ 复矩阵 A 定义一个线性映射

$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : X \mapsto AX.$$

则

$$\langle X, Y\rangle = \langle T(X), T(Y)\rangle$$

变成

$$Y^*X = \langle AX, AY\rangle = Y^*A^*AX$$

对所有的 X, Y 都成立, 即 $A^*A = I$. 因此我们可以看出, 由 A 的乘法给出的映射是酉映射当且仅当 A 是酉矩阵.

5.2.4 正规映射

定理 5.13 设 $f : V \to \mathbb{C}$ 是一个有限维内积空间 V 上的一个线性函数. 则存在唯一的向量 $v_f \in V$, 使得 $f(u) = \langle u, v_f\rangle$ 对所有的 $u \in V$ 都成立.

证明 设 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是 V 的一个正交基. 令

$$v_f := \sum_{j=1}^{n} \overline{f(u_j)} u_j$$

且定义 $g : V \to \mathbb{C}$ 使得 $g(u) = \langle u, v_f\rangle$. 则

$$g(u_k) = f(u_k)$$

对所有的基向量 u_k 都成立. 因此 $f = g$.

下面假设我们有 $w \in V$ 使得 $\langle u, v_f\rangle = \langle u, w\rangle$ 对所有的 u 都成立. 则 $\langle v_f - w, v_f - w\rangle = 0$, 从而 $w = v_f$. 这就证明了唯一性. □

定义 5.14 设有线性映射 $T : V \to V$, 且 V 为内积空间. 如果对所有的 $u, v \in V$ 线性映射 $T^* : V \to V$ 满足条件

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle,$$

则称 T^* 为 T 的**伴随** (adjoint) 映射.

命题 5.15 设 $T : V \to V$ 是一个内积空间 V 上的一个线性映射. 则 T 是酉映射当且仅当 T 的伴随 T^* 存在且 $TT^* = T^*T = I$.

证明 如果 T 是酉映射, 则 T 可逆且

$$\langle Tu, v\rangle = \langle Tu, TT^{-1}v\rangle = \langle u, T^{-1}v\rangle$$

对所有的 u, v 都成立. 因此 T^{-1} 是 T 的伴随.

反过来, 假设 T^* 存在且 $TT^* = T^*T = I$. 则 T 可逆且 $T^{-1} = T^*$. 仍需证明

$$\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle.$$

通过计算可得

$$\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, T^*Tv\rangle = \langle u, Iv\rangle = \langle u, v\rangle. \qquad \square$$

命题 5.16 有限维内积空间 V 的线性映射 $T: V \to V$ 必有伴随映射 T^*.

证明 对于给定的 $u \in V$, 我们可得一个线性函数 $u \mapsto \langle Tu, v\rangle$. 于是由上述关于线性函数的定理可知, 存在一个唯一的 $v' \in V$ 使得对于每个 $u \in V$, 都有

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, v'\rangle.$$

设 T^* 表示映射 $v \mapsto v'$. 于是上述条件唯一地确定 T^*. 余者需证明映射 T^* 是线性的.

对于 $c \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\langle u, T^*(cv+w)\rangle &= \langle Tu, cv\rangle + \langle Tu, w\rangle \\ &= \bar{c}\langle Tu, v\rangle + \langle Tu, w\rangle = \bar{c}\langle u, T^*v\rangle + \langle u, T^*w\rangle \\ &= \langle u, cT^*v\rangle + \langle u, T^*w\rangle = \langle u, cT^*v + T^*w\rangle.\end{aligned}$$

从而 $T^*(cv+w) = cT^*v + T^*w$. $\square$

定义 5.17 一个内积空间 V 上的一个线性映射 $T: V \to V$ 称为是 Hermite 映射 [或者**自伴** (self adjoint) 映射], 如果 $T = T^*$. 我们称 T 是**正规的** (normal), 如果 $TT^* = T^*T$. 一个 $n \times n$ 复矩阵 A 称为是 Hermite 矩阵, 如果 $A = A^*$. 我们称 A 是正规的, 如果 $AA^* = A^*A$.

一个酉映射是正规的. 一个 Hermite 映射是正规的.

例 5.18 我们将 $\mathbb{C}^n$ 认同为 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 且其标准内积记为 $\langle X, Y\rangle = Y^*X$. 设 A 是 $n \times n$ 复矩阵. 则

$$\langle AX, Y\rangle = Y^*AX = (A^*Y)^*X = \langle X, A^*Y\rangle.$$

这表明线性映射 $X \mapsto AX$ 是线性映射 $X \mapsto A^*X$.

5.2.5 正交化过程

本章余下部分考虑实数域或复数域上内积空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. 当然, 对于 $a \in \mathbb{R}$, 其复共轭 $\bar{a} = a$ 且复内积空间上的公式变成实内积空间上的公式.

如上所述, 我们称向量 $u, v \in V$ 是正交的, 如果 $\langle u, v\rangle = 0$, 记作 $u \perp v$. 我们说 $S \subset V$ 是一个**正交集** (orthogonal set), 如果 S 中所有不同的向量对都是正交的. 一个**法正交集** (orthonormal set) S 是指一个正交集并赋予附加性质: $\|u\| = 1$ 对所有的 $u \in S$ 都成立. 对于一个子集 $X \subset V$, 令 $X^\perp := \{y \in V : y \perp X\}$. 我们称 $X^\perp$ 为 X 的**正交补** (orthogonal complement).

例 5.19 设 E^{pq} 是 $n \times n$ 矩阵, 其唯一非零元是位于第 p 行第 q 列的元 1. 则集合 $\{E^{pq} : 1 \leqslant p, q \leqslant n\}$ 关于由所有 $n \times n$ 复矩阵组成的 $\mathbb{C}$ 向量空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是规范正交的. 因此,

$$\langle E^{pq}, E^{rs}\rangle = \operatorname{Tr}(E^{pq}E^{sr}) = \delta_{qs} \operatorname{Tr} E^{pr} = \delta_{qs}\delta_{pr}.$$

给定一个内积空间 V, 我们感兴趣的是构造 V 的有限生成子空间的正交基. 这可以通过基于正交投影思想的 **Gram-Schmidt 正交化过程** (Gram-Schmidt orthogonalization) 来完成.

为此让我们先给出动机. 考虑 $V = \mathbb{R}^2$ 和 $W = \mathbb{R}w_1$, 其中 $w_1 = (2, 0)$. 任取向量 $v = (v_1, v_2)$, 则 v 在 W 上的投影是

$$u = (v_1, 0) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

且 $v - u$ 与 W 是正交的, 因为

$$\langle v - u, w_1\rangle = \langle v, w_1\rangle - \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\langle w_1, w_1\rangle = 0.$$

最好是通过画图来了解这一点.

如果我们现在取 $V = \mathbb{R}^3$ 和 $W = \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, 其中 $w_1 = (2, 0, 0)$, $w_2 = (0, 3, 0)$. 则 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 在 W 上的投影 $u = (v_1, v_2, 0)$ 是 v 在 $\mathbb{R}w_1$ 和 $\mathbb{R}w_2$ 上的投影之和. 即

$$u = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2.$$

且由 $w_1 \perp w_2$ 和上述计算方法可推出 $v - u \perp W$.

我们现在给出一个定理, 其证明需要 Gram-Schmidt 正交化过程.

定理 5.20 设 V 是一个内积空间, $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的任意线性无关的向量. 则存在 V 的正交集 $\{w_1, \cdots, w_n\}$, 使得对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 集合 $\{w_1, \cdots, w_k\}$ 是由 $v_1, \cdots, v_k$ 生成的子空间的一个正交基.

证明 我们通过归纳构造 w_j. 首先, 设 $w_1 = v_1$. 假设我们已经构造了 $w_1, \cdots, w_m$ 满足所要求的条件, 其中 $1 \leqslant m < n$. 特别地, $w_1, \cdots, w_m$ 是由 $v_1, \cdots, v_m$ 生成的子空间的一个正交基. 这时我们要处理下一个的向量是 v_{m+1}. 令

$$u_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v_{m+1}, w_k\rangle}{\langle w_k, w_k\rangle} w_k$$

(这是 v_{m+1} 到由 $w_1, \cdots, w_m$ 生成的子空间的 “投影”). 现在令

$$w_{m+1} = v_{m+1} - u_{m+1}.$$

我们断言 $w_{m+1} \neq 0$. 否则, v_{m+1} 是 $w_1, \cdots, w_m$ 的一个线性组合, 从而也是 $v_1, \cdots, v_m$ 的一个线性组合. 这与 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 的线性无关性矛盾. 再者, 对于 $1 \leqslant k, j \leqslant m$, 由 $\langle w_k, w_j \rangle = \delta_{kj}$, 我们有

$$\begin{aligned}\langle w_{m+1}, w_j \rangle &= \langle v_{m+1}, w_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v_{m+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} \langle w_k, w_j \rangle \\ &= \langle v_{m+1}, w_j \rangle - \langle v_{m+1}, w_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

因此 $\{w_1, \cdots, w_{m+1}\}$ 是一个正交集, 其生成子空间和由 $\{v_1, \cdots, v_{m+1}\}$ 生成的子空间相同. 既然任意正交集是线性无关的, 依归纳法原理定理证毕. □

5.2.6 整二次型

在 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 上取 $\mathbb{R}$ 值双线性型 $b : V \times V \to \mathbb{R}$. 设 $b(x, y) = b(y, x)$, $x, y \in V$. 从 b 得的函数

$$q(x) = b(x, x)$$

称为二次型. 如果对任意 $0 \neq x \in V$ 有 $q(x) > 0$, 则称 q 为**正定二次型** (positive definite quadratic form). 本节所谈的范数便是最好的例子.

现设 $V = \mathbb{R}^\ell$. 若二次型 $q : V \to \mathbb{R}$ 满足条件 $q(\mathbb{Z}^\ell) \subseteq \mathbb{Z}$, 则说 q 是**整二次型** (integral quadratic form). 这样便可以把 q 限制到子群 $\mathbb{Z}^\ell$ 上并记它为 $q_{\mathbb{Z}}$.

以 e_i 为 $\mathbb{R}^\ell$ 的标准基底. 设 $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ 和 $x = \sum_i x_i e_i$, 则

$$q(x) = \sum_i b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2 b_{ij} x_i x_j.$$

如果 $b_{ii}, 2b_{ij}$ $(i < j)$ 都是整数, 则 q 是整二次型.

函数 $q : \mathbb{Z}^\ell \to \mathbb{Z}$ 由以下公式给出

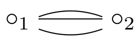
$$q(x) = \sum_i q_i x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j, \quad q_i, q_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

让 x 从 $\mathbb{R}^\ell$ 取, 则同样公式定义函数 $q_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$. 如果 $q_{\mathbb{R}}$ 为正定二次型, 则称 q 为正定二次型.

整二次型是一门内容丰富的学问. 我们以下谈一个著名的例子.

一个**图** (graph) 是指一个三元组 $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \mathscr{E}, st)$, 其中 V, E 为集合. 称 V 的元素为**顶点** (vertex), E 的元素为**边** (edge). 对 $e \in E$, $st(e) = \{i, j\}$ 为 V 的二元子集. 称 $i, j \in V$ 为边 e 的端点, 又说 e 连接顶点 i, j (e 是没有选定方向的). 如果 $\mathscr{V}, \mathscr{E}$ 均为有限集, 则称图 $\mathscr{G}$ 为有限图.

例



设 $\mathscr{G}=(\mathscr{V},\mathscr{E},st)$ 为有限图. 以 $(e_i)_{i\in\mathscr{V}}$ 记群 $L(\mathscr{G}):=\mathbb{Z}^{\mathscr{V}}$ 的标准基底. 于是 $L(\mathscr{G})$ 的任一元素可以表达为 $\sum_i n_i e_i$, $n_i\in\mathbb{Z}$. 有限图 $\mathscr{G}$ 所决定的二次型 $q_{\mathscr{G}}$ 是

$$q_{\mathscr{G}}\left(\sum_{i\in\mathscr{V}} n_i e_i\right)=\sum_{i\in\mathscr{V}} n_i^2-\sum_{e\in\mathscr{E}} n(e),$$

其中当 $st(e)=\{i,j\}$ 取 $n(e)=n_in_j$.

与前面例子对应的二次型是

$$n_1^2+n_2^2-3n_1n_2.$$

反过来. 由以下公式

$$q(x)=\sum_i x_i^2-\sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j,\quad 0\leqslant q_{ij}\in\mathbb{Z}$$

给出的二次型 $q:\mathbb{Z}^\ell\to\mathbb{Z}$ 决定图 $\mathscr{G}_q=(\mathscr{V},\mathscr{E},st)$ 如下: $\mathscr{V}=\{1,2,\cdots,\ell\}$, 若 $q_{ij}\neq 0$, 则引入

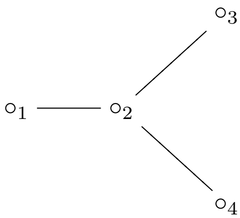
$$\mathscr{E}^{ij}=\{e_1^{ij},\cdots e_{q_{ij}}^{ij}\},$$

并设 $st(e_k^{ij})=\{i,j\}$ (以 i,j 为顶点的 q_{ij} 个边). 若 $q_{ij}=0$, 则取 $\mathscr{E}_{ij}$ 为空集. 然后取 $\mathscr{E}=\cup_{i<j}\mathscr{E}^{ij}$.

例

$$q(n_1,n_2,n_3,n_4)=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2-n_1n_2-n_2n_3-n_2n_4$$

的图是

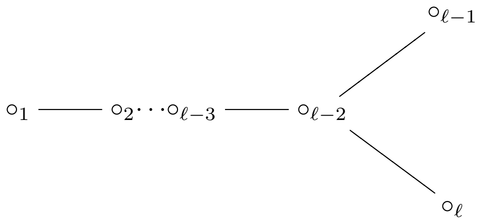


在李代数和流型奇点理论有一组图非常重要, 名为 Dynkin 图. 关于 Dynkin 图的分类可以看 J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1980. 关于奇点理论可以看 V. I. Arnol'd, V. Vasilev, V. Goryunov, O. Lyashko, *Singularities – Local and Global Theory*, Springer, 1998.

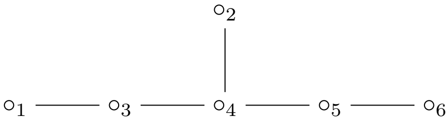
Dynkin ADE 图是指以下的图

$$A_\ell\ (\ell\geqslant 1)\qquad \circ_1 \text{------} \circ_2 \text{------} \circ_3\cdots\circ_{\ell-1} \text{------} \circ_\ell$$

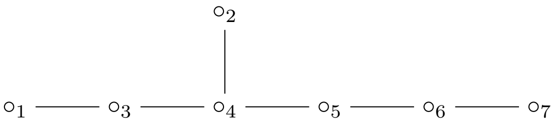
$D_\ell\ (\ell \geqslant 4)$



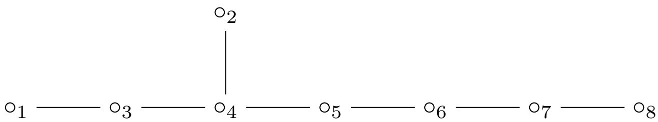
E_6



E_7



E_8



命题 5.21 如果图 $\mathscr{G}$ 是 Dynkin ADE 图, 则 $q_{\mathscr{G}}$ 为正定二次型.

证明 第一考虑 $q = q_{D_\ell}$. 设 $x = (x_1, \cdots, x_\ell)$. 这时

$$\begin{aligned} q(x) &= x_\ell^2 - x_\ell x_{\ell-2} + x_{\ell-1}^2 - x_{\ell-1}x_{\ell-2} + x_{\ell-2}^2 - x_{\ell-2}x_{\ell-3} \\ &\quad + \cdots + x_i^2 - x_i x_{i-1} + \cdots + x_2^2 - x_2 x_1 + x_1^2 \\ &= \left(x_\ell - \frac{1}{2}x_{\ell-2}\right)^2 + \left(x_{\ell-1} - \frac{1}{2}x_{\ell-2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x_{\ell-2} - x_{\ell-3})^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2 + \cdots + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}x_1^2. \end{aligned}$$

显然每当 $x \neq 0$ 时 $q(x) > 0$. 所以 q_{D_ℓ} 为正定二次型.

同样可验证 q_{A_ℓ} 为正定二次型.

第二考虑 $q = q_{E_8}$. 这时

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 - x_1x_3 + x_3^2 - x_3x_4 + x_2^2 - x_2x_4 + x_4^2 - \cdots - x_{i-1}x_i + x_i^2 - \cdots + x_8^2 \\ &= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_3 - \frac{2}{3}x_4\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{5}{12}\left(x_4 - \frac{6}{5}x_5\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{5}\left(x_5 - \frac{5}{4}x_6\right)^2 + \frac{3}{8}\left(x_6 - \frac{4}{3}x_7\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x_7 - \frac{3}{2}x_8\right)^2 + \frac{1}{4}x_8^2. \end{aligned}$$

显然 q_{E_8} 为正定二次型. 因为 q_{E_7}, q_{E_6} 都是可以从 q_{E_8} 限制到子空间得来, 所以它们也是正定二次型. $\square$

5.3 辛型

5.3.1

定义 5.22 称反称非退化双线性型 $\omega: V\times V\to F$ 为**辛型** (symplectic form), 称 (V,ω) 为**辛空间** (symplectic space).

ω 称为是反称的, 如果

$$\omega(x,y)+\omega(y,x)=0.$$

取 $y=x$ 可得 $\omega(x,x)=0$. (F 的特征 $\neq 2$.)

例 5.23 (1) 设 V 是域 F 上的一个 2 维向量空间, $\{e_1,e_2\}$ 是 V 的一个基. 如果 $v{=}x_1e_1+y_1e_2$, $v'=x_1'e_1+y_1'e_2$, 令

$$\omega(v,v')=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix}=x_1y_1'-x_1'y_1.$$

则 ω 是 V 上的一个辛双线性型. 我们称 (V,ω) 是一个 (辛) 双曲面.

(2) 设 $\{e_i\}$ 是 F^{2n} 的一个标准基, 即 e_i 是一个列向量, 其第 i 个分量是 1 且其他分量是 0. 如果

$$\begin{aligned}v{=}&x_1e_1+\cdots+x_ne_n+y_1e_{n+1}+\cdots+y_ne_{2n},\\ v'{=}&x_1'e_1+\cdots+x_n'e_n+y_1'e_{n+1}+\cdots+y_n'e_{2n},\end{aligned}$$

则令 $\omega(v,v')=\sum(x_iy_i'-x_i'y_i)$. 我们称 (F^{2n},ω) 为标准辛空间.

(3) 设 W 是一个 n 维 F 向量空间, W^* 为其对偶空间. 令 $V=W\oplus W^*$. 在 $V\times V$ 上定义 ω:

$$\omega(t_1+\tau_1,t_2+\tau_2)=\tau_1(t_2)-\tau_2(t_1).$$

则 (V,ω) 是一个辛空间.

注意以上三个例子实际上是一样的.

记号. 我们用

$$\mathrm{diag}(A,B,\cdots,D)$$

表示这样一个分块矩阵, 其中矩阵 $A,B,\cdots,D$ 按照该顺序排在对角线上, 其余的子矩阵都是零矩阵.

定理 5.24 设 b 是域 F 上的有限维向量空间 V 上的一个反称双线性型. 则 b 的秩是 $2n\leqslant \dim_F V$. 存在 V 的一个基, 使得 b 在这个基下的矩阵有如下形式:

$\mathrm{diag}(S, S, \cdots, S, 0, \cdots, 0)$, 其中

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

且存在 V 的一个基使得 b 在这个基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵.

证明 显然, 如果我们找到一个基使得 b 的矩阵是如上述分块对角形式, 则这个基的重排就给出第二个矩阵. □

对于域 F 上的有限维向量空间 V, V 上的所有交错 p 线性形式构成的空间同构于外积 $\wedge^p V^*$. 设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 V 的一个基, 且 $\{e^{*1}, \cdots, e^{*m}\}$ 是其对偶基. 则 $\wedge^p V^*$ 有一个基

$$\{e^{*h_1} \wedge \cdots \wedge e^{*h_p} : h_1 < \cdots < h_p\}.$$

特别地, 当 $p = 2$ 时, 我们可以看出 V 上的任意反称双线性型在这个基下可表示为

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} e^{*i} \wedge e^{*j},$$

其中 $\omega_{ij} \in F$. 由公式计算可得

$$\omega(v, w) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(e^{*i}(v) \wedge e^{*j}(w) - e^{*i}(w) \wedge e^{*j}(v)).$$

如果 (V, ω) 是一个辛空间, 则 ω 的秩是 $2\pi = \dim V$. 根据前面的定理可知, V 有一个基 $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$, ω 在这个基下可表示为

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^{*i} \wedge e^{*i+n}.$$

从而, 如果

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n + y_1 e_{n+1} + \cdots + y_n e_{2n},$$

$$v' = x_1' e_1 + \cdots + x_n' e_n + y_1' e_{n+1} + \cdots + y_n' e_{2n},$$

则

$$\omega(v, v') = \sum (x_i y_i' - x_i' y_i).$$

我们得到标准辛空间.

5.3.2

如前所述, 由给定的 V 的一个子空间 W, 我们得到

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega(v,w) = 0 \text{ 对所有的 } w \in W \text{ 都成立}\}.$$

定义 5.25 辛空间 (V,ω) 的一个子空间 W 称为**迷向的** (isotropic), 如果满足 $\omega|_W = 0$. V 的一个子空间 W 称为**余迷向的** (coisotropic), 如果 $W^{\perp}$ 是迷向的. 我们称 V 的一个子空间 W 称为 Lagrange 的, 如果它既是迷向的又是余迷向的.

注意到反称形式的迷向定义与对称形式的迷向定义是不同的!

显然, 我们有

(1) W 是迷向的当且仅当 $W \subset W^{\perp}$;
(2) W 是余迷向的当且仅当 $W \supset W^{\perp}$;
(3) W 是 Lagrange 的当且仅当 $W = W^{\perp}$.

我们称辛空间 (V,ω) 的一对向量 e, $\bar{e}$ 为一**双曲对** (hyperbolic pair), 如果

$$\omega(e,e) = 0 = \omega(\bar{e},\bar{e}), \quad \omega(e,\bar{e}) = 1.$$

此时由 $e, \bar{e}$ 所生成之平面 $P = Fe + F\bar{e}$ 称为**双曲平面** (hyperbolic plane).

设 (V,ω) 是一个辛空间且 W 是 V 的一个子空间. 当我们把 ω 限制到 W 上时, 这个限制 $\omega|_W$ 的**根** (radical) 是

$$\{u \in W : \omega(u,w) = 0 \text{ 对所有的 } w \in W \text{ 都成立}\}.$$

这就是说, $\omega|_W$ 的根为 $W^{\perp} \cap W'^{\perp}$. 我们用 W^{rad} 表示这个子空间, 这样在商空间

$$W^{\text{red}} := W/W^{\text{rad}}$$

上, ω 给出辛空间的结构 ("red" 是指 reduced).

给定 W, 我们总是可找到 W 的一个子空间 U, 使得我们有一个正交分解

$$W = W^{\text{rad}} \boxplus U \quad \text{和} \quad U \approx W^{\text{rad}}.$$

定理 5.26 设 (V,ω) 是一个辛空间, W 是 V 的一个子空间,

$$W = W^{\text{rad}} \boxplus U$$

是 W 的一个正交分解, 且 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 是 W^{rad} 的一个基. 则

(1) 我们能够找到向量 $e_{\bar{1}}, \cdots, e_{\bar{r}}$, 使得对于 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$P_i := Fe_i + Fe_{\bar{i}}$$

是一个双曲面.

(2) $P_i \perp P_j$ 对所有的 $i \neq j$ 都成立且 $P_i \perp U$ 对所有的 i 都成立.

(3) ω 在

$$P_1 \boxplus \cdots \boxplus P_r \boxplus U$$

上的限制是辛映射.

证明 对 r 做归纳证明. $r=0$ 时自动成立. 设所求对 $r' < r$ 成立, 且

$$W_0 = \langle e_1, \cdots, e_{r-1} \rangle \perp U.$$

因为 $e_r \perp W_0$, 所以 $e_r \notin W_0$ 及

$$W_0^{\mathrm{rad}} = (W_0^{\perp})^{\mathrm{rad}} = \langle e_1, \cdots, e_{r-1} \rangle.$$

于是 $e_r \in W_0^{\perp}$, $e_r \notin (W_0^{\perp})^{\mathrm{rad}}$, 因此存在 $a \in W_0^{\perp}$ 使得 $\omega(e_r, a) \neq 0$, 即 $\langle e_r, a \rangle \subset W_0^{\perp}$. 在平面 $\langle e_r, a \rangle$ 中选 $e_{\bar{r}}$ 使得 $e_r, e_{\bar{r}}$ 成为双曲对. 取 $P_r := Fe_r + Fe_{\bar{r}}$. 则 $P_r \subset W_0^{\perp}$, $P_r \perp W_0$, $W_0 \subset P_r^{\perp}$.

由 $\dim W_0^{\mathrm{rad}} = r-1$ 可知

$$W_0 = W_0^{\mathrm{rad}} \perp U \subset P_r^{\perp}.$$

由归纳假设可得相互正交之双曲平面

$$P_i = Fe_i + Fe_{\bar{i}} \subset P_r^{\perp}, \quad i = 1, \cdots, r-1,$$

并且 $P_i \perp U$. 显然 ω 在

$$P_1 \boxplus \cdots \boxplus P_r \boxplus U$$

上的限制是辛映射. □

注 力学中使用的微分流形的切空间常有辛型的结构, 因此有很多关于这种结构的书, 例如

[1] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 1980.

[2] A. Weinstein, Lectures on symplectic manifolds, *Amer. Math. Soc.*, 1977.

[3] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, *Poisson Structures*, Springer, 2013.

[4] 冯康, 秦孟兆, 哈密尔顿系统的辛几何算法, 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003 (英文版 Springer 2010).

[5] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer, 2006.

5.4 辛群

5.4.1

一个**辛映射** (symplectic map) $\phi : (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_1)$ 是一个线性映射 $\phi : V_1 \to V_2$ 并且满足如下条件:

$$\omega_2(\phi(u), \phi(v)) = \omega_1(u, v) \quad 对任意\ u, v \in V_1.$$

一个辛映射必定是一个单射. 因为如果 $\phi(v) = 0$, 则

$$\omega_1(u, v) = \omega_2(\phi(u), \phi(v)) = 0$$

对所有的 $u \in V_1$ 都成立, 这就是说 $v \in V^\perp$. 但是 ω_1 是非退化的, 因此 $v = 0$. 所有的线性双射 $V \to V$ 的集合构成一个群, 记作 $GL(V)$. 由于辛映射的复合还是辛映射, 所有辛双射 $(V, \omega) \to (V, \omega)$ 构成一个群, 记作 $Sp(V)$. 这是 $GL(V)$ 的一个子群, 我们称之为 (V, ω) 的**辛群** (symplectic group).

如果 $V = F^{2n}$, 则 $GL(V)$ 中的一个元仅仅是一个 $2n \times 2n$ 矩阵, 其元属于 F. 此时我们用 $GL(2n, F)$ 表示 $GL(V)$.

如果 (F^{2n}, ω) 是一个标准辛空间, ω 在 F^{2n} 的标准基 $\{e_i\}$ 下的矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵. 因此我们用 $Sp(n, F)$ 表示 $Sp(V)$. 如果 F^{2n} 中的元看作列向量 v, 则

$$\omega(v, v') = v^T J v'.$$

因此一个矩阵 M 属于 $Sp(n, F)$ 的条件变成

$$\omega(Mv, Mv') = \omega(v, v')$$

或者

$$(Mv)^T J (Mv') = v^T J v'.$$

这和要求

$$M^T J M = J$$

是一样的.

由此我们看出辛群

$$Sp(n, F) = \{M \in GL(2n, F) : M^T J M = J\}.$$

5.4.2

我们想引入 $Sp(n,F)$ 中的一些特殊的元. 回顾 ω 是标准辛型. 对于 $0\neq u\in F^{2n}$ 和 $c\in F$, 我们定义

$$\tau_{u,c}: V\to V: x\mapsto x+c\omega(x,u)u.$$

我们称 $\tau_{u,c}$ 是沿方向 u 的一个**辛平延** (symplectic transvection).

引理 5.27 (1) 设 u,u' 为非零向量. 则有映射 T 使 $Tu=u'$, 并且 T 是辛平延的合成.

(2) 设 $\omega(u,v)=1$, $\omega(u,v')=1$, $\{u,v\}$ 和 $\{u,v'\}$ 是双曲平面. 则有映射 T 使 $Tu=u$, $Tv=v'$ 并且 T 是辛平延的合成.

(3) 设 u,v,u',v' 使得 $\omega(u,v)=1$, $\omega(u',v')=1$, $\{u,v\}$ 和 $\{u',v'\}$ 是双曲平面. 则有映射 T 使 $Tu=u'$, $Tv=v'$ 并且 T 是辛平延的合成.

证明 1. 若 $\omega(u,u')\neq 0$, 则 $u\neq u'$. 取 $w=u-u'$, 则

$$\tau_{w,c}u=u+c\omega(u,w)w=u-c\omega(u,u')(u-u').$$

取 $c=\omega(u,u')^{-1}$, 则 $\tau_{w,c}u=u'$.

若 $\omega(u,u')=0$, 则有线性函数 $f:V\to F$ 使 $f(u)\neq 0$ 及 $f(u')\neq 0$. 由于 ω 是非退化的, 存在 $v\in V$ 使得 $f(x)=\omega(x,v)$, 即 $\omega(u,v)\neq 0$, $\omega(u',v)\neq 0$. 于是存在辛平延 τ,τ' 使得 $\tau(u)=v$, $\tau'(v)=u'$, 即 $\tau'\tau(u)=u'$.

2. 若 $\omega(v,v')\neq 0$, 则有 c 使得 $\tau_{v-v',c}(v)=v'$. 由 $\omega(u,v)=1=\omega(u,v')$ 可得 $\omega(u,v-v')=0$, 于是 $\tau_{v-v',c}(u)=u$.

若 $\omega(v,v')=0$, 则 $\{u,u+v\}$ 是双曲平面. 由 $\omega(v,u+v)\neq 0$ 可得辛平延 τ, $\tau(v)=(u+v)$. 由 $\omega(u+v,v')\neq 0$ 可得辛平延 τ', $\tau'(u+v)=(v')$, 而且 $\tau'\tau(u)=u$.

3. 可由变换 $(u,v)\to(u',v")\to(u',v')$ 得出. □

命题 5.28 群 $Sp(n,F)$ 是由辛平延生成的.

证明 对 n 做归纳法. 设 $T\in Sp(n,F)$, 取双曲平面 (u,v). 则 (Tu,Tv) 是双曲平面. 按之前引理有辛平延的合成 τ 使 $\tau u=Tu$, $\tau v=Tv$. 取 $U=(Fu+Fv)^{\perp}$, $S=\tau^{-1}T$. 则 $Su=u$, $Sv=v$, $SU\subset U$, $\dim U=n-2$. 由归纳假设可得辛映射 $S|_U$ 是辛平延 τ_{u_j,c_j} 的合成, 其中 $u_j\in U$. 这时 τ_{u_j,c_j} 亦可看作 V 上的辛平延. $\prod\tau_{u_j,c_j}$ 在 $Fu+Fv$ 上为 1, 在 U 上为 $S|_U$, 于是 $S=\prod\tau_{u_j,c_j}$. 因此 $T=\tau S$ 是辛平延的积. □

注 和辛群有关的学问又多又深, 引几部书和文章希望能启发一下大家.

[1] C. Siegel, Symplectic geometry, *Amer. J. Math.* 65, 1943.

[2] C. Siegel, Analytic functions of several complex variables, *Lecture Notes Institute for Advanced Studies*, Princeton, 1962.

[3] I. Piateski-Shapiro, *Geometry of Classical Domains and Theory of Automorphic Functions*, (English translations) Gordon and Breach, New York, 1969.

[4] H. Maass, *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*, Springer Lecture Notes Math 216, 1971.

[5] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Yung-Sheng Tai, *Smooth Compactifications of Locally Symmetric Varieties*, Cambridge Mathematical Library, 1975.

[6] O. O'Meara, Symplectic groups, Mathematical Surveys 16, *American Math. Soc.*, 1978.

[7] I. Satake, *Algebraic Structure of Symmetric Domains*, Princeton University Press, 1980.

[8] Ching-Li Chai (翟敬立), *Compactification of Siegel Moduli Schemes*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 1985.

[9] S. Gelbart, I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis, *Explicit Constructions of Automorphic L-Functions*, Lecture Notes in Mathematics 1254, Springer, 1987.

[10] G. Faltings, Ching-Li Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer, 1991.

[11] J. Carlson, S. Muller-Stach, C. Peters, *Period Mappings and Period Domains*, Cambridge University Press, 2003.

[12] Yichao Xu (许以超), *Theory of Complex Homogeneous Bounded Domains*, Science Press, Beijing, 2005.

[13] H. Klingen, *Introductory Lectures on Siegel Modular Forms*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambrifge University Press, 2008.

[14] S. Morel, *On the Cohomology of Certain Non-Compact Shimura Varieties*, Annals of Mathematics Studies 173, Princeton University Press, 2010.

[15] Kai-Wen Lan, *Arithmetic Compactifications of PEL-Type Shimura Varieties*, London Mathematical Society Monographs, 2013.

不怕难的可以试读!

习 题

1. 设 $V = \mathbb{R}^3$.

(a) 对于 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, 令

$$b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

证明: 这是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个双线性型.

(b) 给定一个 3×3 实矩阵 B. 对于 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, 令

$$b(x, y) = (x_1, x_2, x_3) B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

证明: 这是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个双线性型.

2. 给定 V 上的一个对称或反称双线性型 b. 证明:

(a) 如果 X 是 V 的一个子集, 则 $X^\perp$ 是 V 的一个子空间;

(b) $V^\perp = \{y \in V : b(y, x) = 0$ 对所有的 $x \in V$ 都成立$\}$;

(c) b 是非退化的意味着对于任给的 $x \in V$, 存在一个 $0 \neq y \in V$, 使得 $b(x, y) \neq 0$.

3. 如果 e_i 和 e_i' 为 V 的基且 $e_i' = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$, 证明:

(a) $B' = T^T BT$, 其中 $B = (b(e_i, e_j))$, $B' = (b(e_i', e_j'))$, $T = (t_{ij})$, 这里 T 是基变换矩阵, T^T 是 T 的转置;

(b) B 的秩等于 B' 的秩.

4. 对于 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \cdots, y_n)$, 令

$$\langle x, y \rangle = \sum_j x_j y_j.$$

证明: 这定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积. 证明: 在这种情况下, 正交群 $O(n)$ 被认作所有满足条件 $A^T A = I$ 的可逆 $n \times n$ 实矩阵 A 组成的群 (A^T 表示 A 的转置矩阵).

5. (a) 设 $\operatorname{Re} z$ 表示一个复数的实部. 证明:

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \sqrt{-1} \langle u, \sqrt{-1} v \rangle$$

对所有的 $u, v \in V$ 都成立. (这就是说一个内积是由它的实部决定的.)

(b) 证明:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{\sqrt{-1}}{4}\|u+\sqrt{-1}v\|^2 - \frac{\sqrt{-1}}{4}\|u-\sqrt{-1}v\|^2.$$

(这就是所谓的**极化等式**, 它帮助我们转换范数和内积之间的性质.)

6. 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个复内积空间. 则对所有的 $u, v \in V$, 我们有

(a) **Cauchy-Schwarz 不等式** $|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$.

(b) **三角不等式** $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

(c) (V, d) 是一个度量空间.

7. 证明: 由非零向量组成的任意正交向量组是线性无关的.

8. 设 W 是一个内积空间 V 的有限维子空间, 并设 $w_1, \cdots, w_m$ 是 W 的一个正交基. 对于任意的 $v \in V$, 令

$$\pi v := \sum_{k=1}^m \frac{\langle v, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k.$$

称 $\pi : V \to W$ 是到 W 上的投影. 证明:

(a) $v - \pi v \in W^\perp$;

(b) $\|v - \pi v\| \leqslant \|v - w\|$ 对所有的 $w \in W$ 都成立.

9. 证明: 任意有限维内积空间都有一个规范正交基.

10. (V, ω) 称为一个辛空间. 由给定的 V 的一个子空间 W, 我们得到

$$W^\perp = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \text{ 对所有的 } w \in W \text{ 都成立}\}.$$

(a) $W^{\perp} \subset W'^{\perp}$, 如果 $W' \subset W$.

(b) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(c) $(W + W')^{\perp} = W^{\perp} \cap W'^{\perp}$.

(d) $(W \cap W')^{\perp} = W^{\perp} + W' \perp$.

11. 辛群

$$Sp(n, F) = \{M \in GL(2n, F) : M^T JM = J\}.$$

证明: 对于 $n \times n$ 矩阵 A, B, C, D, 下面的条件是等价的.

(a) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, F)$.

(b) $A^T C = C^T A$, $B^T D = D^T B$, $A^T D - C^T B = I$.

(c) $A^T B = B^T A$, $C^T D = D^T C$, $A^T D - B^T C = I$.

12. ω 是标准辛形式. 对于 $0 \neq u \in F^{2n}$ 和 $c \in F$, 定义

$$\tau_{u,c} : V \to V : x \mapsto x + c\omega(x, u)u.$$

我们称 $\tau_{u,c}$ 是沿方向 u 的一个辛平延. 证明:

(a) $\omega(\tau_{u,c}x, \tau_{u,c}y) = \omega(x, y)$;

(b) $\tau_{u,c}\tau_{u,e}\tau_{u,c+e}$;

(c) $\tau_{u,c} = 1$ 当且仅当 $c = 0$;

(d) $\eta\tau_{u,c}\eta^{-1} = \tau_{\eta u,c}$, 如果 $\eta \in Sp(n, F)$;

(e) 对于 $a \in F^{\times}$, 有 $\tau_{au,c} = \tau_{u,a^2c}$;

(f) $\tau_{u,c}(x) = x$, 如果 $x \in Fu^{\perp}$;

(g) $(\tau_{u,c} - 1)F^{2n} \subset Fu$;

(h) $(\tau_{u,c} - 1)^2 = 0$;

(i) $\det \tau_{u,c} = 1$.

13. 设有辛空间 V, V'. 设 W 为 V 的子空间.

(a) 设 $e_1, \cdots, e_r$ 为 W 的根 W^{rad} 的基. 取 $e_{\bar{j}} \in V$ 使 $e_j, e_{\bar{j}}$ 为双曲对. 设 $\tilde{W}$ 为由 W 及 $e_{\bar{1}} \cdots, e_{\bar{r}}$ 所生成的子空间. 若 $\phi : W \to V'$ 是辛单映射. 证明: 存在辛映射 $\tilde{\phi} : \tilde{W} \to V'$ 使 $\tilde{\phi}|_W = \phi$.

(b) 证明: 辛单映射 $\phi : W \to V'$ 必可扩充为辛映射 $\phi : V \to V'$

14. 以 $\mathfrak{L}(V)$ 记由 V 所有 Lagrange 子空间所组成的集合.

(a) 取 $L, L' \in \mathfrak{L}(V)$. 证明: 有 $\phi \in Sp(V)$ 使得 $\phi(L) = L'$.

(b) 取 $L \in \mathfrak{L}(V)$. 设 $L = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle$, $L^{\perp} = \langle e_{\bar{1}}, \cdots, e_{\bar{n}} \rangle$. 证明: 对应于基 $\{e_1, e_{\bar{1}}, \cdots, e_n, e_{\bar{n}}\}$ 有 $Sp(V) \cong Sp(n, F)$.

(c) 取 $L \in \mathfrak{L}(V)$. 设 $G_L = \{\phi \in Sp(V) : \phi(L) = L\}$. 证明:

$$G_L \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : {}^T BD = {}^T DB, {}^T AD = I \right\}.$$

(d) 证明: $Sp(V)/G_L \to \mathfrak{L} : gG_L \mapsto g(L)$ 是双射.

第六章　二次型

在平面上, 直角三角形勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 是二次型 (quadratic form) 的祖先, 从此**平方和** (sum of squares)

$$x_1^2+\cdots+x_n^2$$

成为长度的基本概念. 此平方和便是标准的二次型, 这样二次型便成为数学的中心角色. 与它有关的数学内容丰富, 比如保持长度不变的空间变换在刚体力学就很重要, 这些变换组成本章的正交群. 求不变量的想法在数学中是非常重要的. 例如 19 世纪末 Klein 提出: 几何的内容是典型群的不变量. 20 世纪中叶 Tits 把这个想法反了过来. Tits 提出: 从群开始, 怎样构造一个几何使得这个几何的内容就是已给群的不变量呢? 为此 Tits 创建了一种从来没有的几何学: building 理论. 还未有一部介绍这套理论的中文教科书, 我们也未曾建立起这方面的术语, 在这一领域, 我们落后了六十年! 因为这方面的贡献, Tits 获得 2008 年的阿贝尔奖 (Abel Prize). 阿贝尔奖是挪威政府设立的, 奖金的数额大致同诺贝尔奖相近. 设立此奖的一个原因是因为诺贝尔奖没有数学奖项, 因此阿贝尔奖可以算是数学的诺贝尔奖. 至于有年龄限制的菲尔兹奖 (Fields Medal) 应是青年数学家奖, 奖金比较少. 至 2013 年, 全世界只有 13 人拿了阿贝尔奖.

本章假设基本域 F 的特征不等于 2.

6.1　Witt 理论

定义 6.1　域 F 上向量空间 V 上的一个**二次型** (quadratic form) 是指由一个对称双线性型 $b: V\times V\to F$ 按如下方式给出的一个函数

$$q: V\to F: x\mapsto b(x,x),$$

即 $q(x)=b(x,x)$. 我们也将 q 记作 q_b 以表示 q 是来自 b. 我们称对 (V,q) 为一个**二次空间** (quadratic space).

给定一个二次型 $q: V\to F$, 我们定义相应的双线性型 b_q 如下

$$b_q(x,y):=q(x+y)-q(x)-q(y).$$

容易验证 $q(ax)=a^2q(x)$. 亦有人用这个条件作为二次型的定义.

我们说两个二次空间 (V,q) 和 (V',q') 是等距的, 如果存在一个向量空间同构 $\phi: V\to V'$, 使得

$$b'(\phi x,\phi y)=b(x,y)$$

对所有的 $x,y\in V$ 都成立. 这里 $q(x)=b(x,x)$ 和 $q'(x)=b'(x,x)$, 最后一个条件等同于 $q'(\phi x)=q(x)$.

我们还可以验证 $b_{q_b}=2b$, $q_{b_q}=2q$. 由于这样的关系, 我们将双线性形式 b 的相关概念推广到二次型 $q=q_b$. 例如,

(1) 我们说 q 的根就是指 b 的根,

(2) 我们称 q 是非退化的, 如果 b 是非退化的,

(3) q 的矩阵就是 b 的矩阵,

(4) 我们说

$$(V,q_b)\approx(V_1,q_{b_1})\boxplus(V_2,q_{b_2})$$

是指

$$(V,b)\approx(V_1,b_1)\boxplus(V_2,b_2).$$

所以, 若 q 是 V 上非退化二次型则我们可在 V 内求 “法正交基底”.

作为另外一个例子, 我们重新陈述一个已经证明过的关于双线性形式的命题.

命题 6.2 给定一个二次空间 (V,q) 以及 V 的一个子空间 W 使得 q 在 W 上的限制 $q|_W$ 是非退化的. 则有 $V=W\boxplus W^{\perp}$.

给定 V 上的一个双线性形式 b, 其在一个基 $\{e_i\}$ 下的矩阵为 B, 我们记作 $V=\langle B\rangle$. 则记号

$$V=\langle M\rangle\boxplus\langle N\rangle$$

表示 V 有一个基, 使得双线性形式 b 在这个基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} M & O\\ O & N\end{pmatrix}.$$

特别地, 给定一个 n 维对称双线性空间 (V,b). 当我们记作

$$V=\langle a_1\rangle\boxplus\cdots\boxplus\langle a_n\rangle,$$

其中 $a_i\in F$, 我们指的是 V 有一个基 $\{v_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, 使得如果 $i\neq j$, 则 $b(v_i,v_j)=0$ 且 $b(v_i,v_i)=a_i$. 这就是说, V 有一个基 $\{v_i\}$ 使得双线性形式 b 在基 $\{v_i\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

此时, 值得询问一维二次空间是什么样. 假设 $\dim V = 1$, 即 $V = F \cdot e$, 其中 e 是 V 中的任意非零向量. 设 $q : V \to F$ 是 V 上的一个二次型. 我们记作 $a := q(e)$. 则按照如上记号, 关于基 e, 我们有

$$(V, q) = \langle a \rangle.$$

假设现在我们变换基 $e \to e' := be$ 且记 $a' := q(e')$. 则关于基 e', 我们有

$$(V, q) = \langle a' \rangle.$$

但 $\langle a \rangle$ 和 $\langle a' \rangle$ 是相同的二次空间并且

$$a' = q(e') = q(be) = b^2 q(e) = b^2 a.$$

换句话说, $\langle a \rangle$ 和 $\langle a' \rangle$ 是相同的二次空间当且仅当 a 与 a' 产生商群 $F^\times/(F^\times)^2$ 中相同的类. 这里 $F^\times = F \setminus \{0\}$ 且

$$(F^\times)^2 = \{b^2 : b \in F, b \neq 0\}.$$

定理 6.3 如果 b 是 V 上的一个对称双线性形式, 则存在某个 $a_i \in F$, 使得

$$V = \langle a_1 \rangle \boxplus \cdots \boxplus \langle a_n \rangle.$$

证明 首先, 如果 $b = 0$, 则没有什么需要证明的, 因为 V 的任何直和分解都是正交的.

我们下面假设 $b \neq 0$, 然后通过对 V 的维数归纳证明该定理.

如果 $\dim V = 1$, 则定理是显然成立的. 由归纳假设, 如果 V 的维数小于等于 $n-1$, 定理是成立的.

我们说 $b \neq 0$ 是指存在 $x, y \in V$, 使得 $b(x, y) \neq 0$. 因为

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y)),$$

我们知道下列变量

$$b(x+y, x+y), \quad b(x, x), \quad b(y, y)$$

中的一个必是非零的. 因此, 我们得出结论: 如果 $b \neq 0$, 则存在一个 $z \in V$, 使得 $b(z, z) \neq 0$. 这意味着 b 在一维子空间 $V_1 := Fz$ 上的限制是非退化的, 记作 $V_1 = \langle a_1 \rangle$.

利用前面的命题, 我们得到一个正交分解

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp$$

且 $\dim_F V_1^\perp = \dim_F V - 1$.

我们对 $V_1^\perp$ 利用归纳假设可得: 存在 $a_2, \cdots, a_n \in F$, 使得

$$V_1^\perp = \langle a_2 \rangle \boxplus \cdots \boxplus \langle a_n \rangle.$$

因此我们得出结论:

$$V = V_1 \boxplus V_1^\perp = \langle a_1 \rangle \boxplus \langle a_2 \rangle \boxplus \cdots \boxplus \langle a_n \rangle. \qquad \square$$

对于二次型, 我们可以将上述定理改写如下.

定理 每一个二次空间都等距于一维二次空间的一个正交直和.

命题 6.4 设 (V,q) 为一个二次空间, W 是 V 的一个子空间, 使得 $W\cap V^{\perp}=\{0\}$, $W+V^{\perp}=V$. 则

(1) $(V,q)=(W,q|_W)\boxplus(V^{\perp},0)$,

(2) $(W,q|_W)$ 是非退化的,

(3) $(W,q|_W)$ 在同构意义下由 (V,q) 决定.

证明 1. 结论 (1) 正是正交直和 $\boxplus$ 的定义和下列定义: $V^{\perp}=\{x\in V: b(x,y)=0$ 对所有的 $y\in V$ 都成立$\}$, 且对于所有的 $x\in V^{\perp}$, 都有 $q(x)=0$.

2. 我们说 $q|_W: W\to F$ 是非退化的是指

$$W^{\perp}=\{x\in W: b(x,y)=0, \text{ 对所有的 } y\in W \text{ 都成立}\}=\{0\}.$$

取 $x\in W^{\perp}$. 则对于所有的 $z\in W+V^{\perp}$, $b(x,z)=0$. 为此, 记 $z=y+u$, $y\in W$, $u\in V^{\perp}$. 则

$$b(x,z)=b(x,y)+b(x,u)=0.$$

因此, 由 $V^{\perp}$ 的定义可得, $x\in V^{\perp}$, 从而 $x\in W\cap V^{\perp}=\{0\}$, 于是 $x=0$.

3. 假设我们有两个子空间 W 和 W_1 满足给定的条件. 即

$$\begin{aligned} V=W+V^{\perp},\quad W\cap V^{\perp}=\{0\},\\ V=W_1+V^{\perp},\quad W_1\cap V^{\perp}=\{0\}.\end{aligned}$$

我们需要证明 W 和 W_1 是同构的.

首先, 我们构造一个映射 $\alpha: W\to W_1$. 由于 $V=W_1\oplus V^{\perp}$, 任意的 $x\in W$ 有分解 $x=\alpha(x)+\beta(x)$, 其中 $\alpha(x)\in W_1$ 和 $\beta(x)\in V^{\perp}$, $\alpha(x)$ 由 x 唯一决定, 这便得到我们的映射. 容易验证 α 是线性的.

其次, 我们可以断言, α 是单射.

假设 $\alpha(x)=0$. 则由分解 $W_1\oplus V^{\perp}$ 可得, $x\in V^{\perp}$. 于是, $x\in W\cap V^{\perp}=\{0\}$. 因此, $x=0$. 两个分解

$$W\oplus V^{\perp}=V=W_1\oplus V^{\perp}$$

意味着 $\dim W=\dim W_1$. 由此可推出 α 是一个同构映射.

此外, α 是一个等距映射. 我们可以验证如下:

$$\begin{aligned} q(x)&=q(\alpha x+\beta x)=b(\alpha x+\beta x,\alpha x+\beta x)\\ &=q(\alpha x)+2b(\alpha x,\beta x)+q(\beta x)=q(\alpha x). \end{aligned}$$ □

定义 6.5 给定一个非退化二次空间 (V,q). 称向量 $x\in V$ 为是**迷向向量** (isotropic vector), 如果 $x\neq 0$ 和 $q(x)=0$. 称 $x\in V$ 是**非迷向向量** (anisotropic vector), 如果 $q(x)\neq 0$.

如果 V 中存在一个迷向向量, 则称 (V,q) 是迷向二次空间. 如果 (V,q) 不是迷向的, 则我们称 (V,q) 是非迷向二次空间, 即对所有的 $x\neq 0$, 都有 $q(x)\neq 0$.

注 关于反称形式的迷向术语有不同的含义!

定理 6.6 设 (V,q) 是 F 上的一个 2 维非退化二次空间, 即对 V 上的一个对称双线性形式 b, 有 $q(x)=b(x,x)$. 则下面的条件是等价的:

(1) (V,q) 是迷向的;

(2) 存在 V 的一个基, 使得 b 的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$$

(3) 存在 V 的一个基, 使得 b 的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};$$

(4) q 的行列式满足 $\det q\equiv -1 \pmod{F^{\times 2}}$.

记号 $F^{\times}=F\setminus\{0\}$, $F^{\times 2}=\{a^2: a\in F^{\times}\}$, $c\equiv d \pmod{F^{\times 2}}$ 是指存在 $0\neq h\in F$, 使得 $c=dh^2$, 即是说在乘积商群 $F^{\times}/F^{\times 2}$ 内 $cF^{\times 2}=dF^{\times 2}$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $x\in V$ 是一个迷向向量, 即 $x\neq 0$ 且 $q(x)=0$. 选取 $y\in V$, 使得 $\{x,y\}$ 是 V 的一个基, 则我们断言 $b(x,y)\neq 0$. 我们验证如下.

V 中任一向量 v 可表示为 $v=dx+cy$, 其中 $d,c\in F$. 假设 $b(x,y)=0$, 则

$$b(x,v)=db(x,x)+cb(x,y)=0.$$

这表明 $x\in V^{\perp}$. 但我们假设 q 是非退化的, 即 $V^{\perp}=\{0\}$. 于是 $x=0$, 这与 $x\neq 0$ 矛盾.

由于 $b(x,y)\neq 0$, 我们将 y 替换为 $(b(x,y))^{-1}y$. 则我们得到 $b(x,y)=1$. 现在 b 在基 $\{x,y\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}b(x,x)&b(x,y)\\b(y,x)&b(y,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&k\end{pmatrix},$$

其中 $b(y,y)=k$. 我们分两种情况讨论.

i) 如果 $k=0$, 则证毕.

ii) 如果 $k\neq 0$, 我们变换基. 考虑基 $\{x,-\frac{k}{2}x+y\}$. 计算可得,

$$b(x,x)=0,\quad b\left(x,-\frac{k}{2}x+y\right)=1,$$

$$\begin{aligned} b\left(-\frac{k}{2}x+y,-\frac{k}{2}x+y\right) &= -\frac{k^2}{4}b(x,x)-kb(x,y)+b(y,y) \\ &= 0-k+k=0. \end{aligned}$$

因此, 关于这个基 $\{x, -\frac{k}{2}x+y\}$, b 的矩阵即为所求.

(2) ⇒ (3): 回想对于一个双线性形式 b, 其在基 $\{e_i\}$ 下的矩阵为 B, 由矩阵 T 引起的基变换 $\{e_i'\}$ 导致 b 在基 $\{e_i'\}$ 的矩阵为 T^TBT. 由于 $\det(T^TBT)=(\det T)^2\det B$, 基于 F 中一个元的平方倍意义下, 我们可仅设定 b 的行列式为 $\det B$.

我们通过矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

变换基. 由 (2), 我们可得 (3), 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) ⇒ (4): 因为

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1,$$

结论显然.

(4) ⇒ (1): 我们知道, 我们总是可以将一个二次型对角化, 即

$$(V,q)\approx\langle a\rangle\boxplus\langle b\rangle.$$

因此, $\det(q)=ab\pmod{F^{\times 2}}$.

由 (4) 可得, $ab\equiv -1\pmod{F^{\times 2}}$, 即 $-ab\equiv 1\pmod{F^{\times 2}}$, 于是, $-ab\in F^{\times 2}$. 这就是说, $-ab=c^2$, 其中 $c\in F$ 且 $c\neq 0$. 我们可以变换基以获得 q 的矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -ac^2 \end{pmatrix}.$$

因此, $(V,q)\approx\langle a\rangle\boxplus\langle -ac^2\rangle$. 则 $x=(c,1)$ 是 V 中的一个迷向向量, 因为

$$q(x)=(c,1)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -ac^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = ac^2+(-ac^2)=0.$$

我们完成了证明. □

根据上述定理, 只有一个迷向非退化 2 维二次空间的等距类. 我们将这个类或者这个类中的任何元素记作 $\mathbb{H}$. 称这个非退化 2 维迷向二次空间 $\mathbb{H}$ 为**双曲平面** (hyperbolic plane).

定义 6.7 设 y 是一个非退化二次空间 (V,q) 中的一个非迷向向量. 用 y 定义一个对称

$$\tau_y : V \to V, \quad x \mapsto x - \frac{2b(x,y)}{b(y,y)} y.$$

我们可以证明:

(1) $q(\tau_y, x) = q(x)$ 对所有的 x 都成立;

(2) $\tau_y = x$ 当且仅当 $x \perp y$, 即 $\tau_y|_y^{\perp} =$ 单位映射;

(3) $\tau_y = -y$;

(4) $\tau_y \tau_y =$ 单位映射.

这些条件说明, 把超平面 $y^{\perp}$ 看作欧几里得空间时, τ_y 是超平面 $y^{\perp}$ 中的一个对称.

定理 6.8 (Witt 消去定理) 设 (V,q) 是一个非退化二次空间. 设 V_1,V_2,U_1,U_2 是 V 的子空间, 使得

$$V_1 \boxplus U_1 \approx V \approx V_2 \boxplus U_2.$$

假设 $(V_1, q|_{V_1})$, $(V_2, q|_{V_2})$ 是非退化的且 $(V_1, q|_{V_1}) \approx (V_2, q|_{V_2})$, 则

$$(U_1, q|_{U_1}) \approx (U_2, q|_{U_2}).$$

E. Witt (1911 — 1991) 是德国代数学家, 他的著名创造是 Witt 向量, 见 Serre, *Local Fields*, Springer, 第 2 章第 6 节.

证明 对 V_1 的维数进行数学归纳法.

首先假设 $\dim V_1 = 1 = \dim V_2$, 即 $V_1 = Fx$, $V_2 = Fy$, 其中 $x, y \in V$.

进一步, 因为 $(V_1, q|_{V_1})$ 是非退化的, 我们可假设, 必要时可以乘以 F 中的一个适当的非零元, $q(x) = q(y) \neq 0$.

因此我们断言, 或者 $q(x+y) \neq 0$ 或者 $q(x-y) \neq 0$. 否则, 我们得到

$$0 = q(x+y) = 2q(x) + 2b(x,y),$$

$$0 = q(x-y) = 2q(x) - 2b(x,y)$$

加起来可得, $0 = 4q(x)$, 与 $q(x) \neq 0$ 矛盾.

必要时将 y 替换为 $-y$, 我们假设 $q(x-y) \neq 0$. 这允许我们定义与 $x-y$ 相联系的对称:

$$\tau_{x-y}(z) = z - \frac{2b(z, x-y)}{b(x-y, x-y)}(x-y).$$

我们知道, $\tau : V \to V$ 是一个等距同构.

断言: (1) $\tau_{x-y}(x) = y$; (2)$\tau_{x-y}(x^{\perp}) = y^{\perp}$.

(1) 的证明: 因为 $q(x) = q(y)$, 由计算可得,

$$\begin{aligned} b(x-y, x-y) &= q(x) - 2b(x,y) + q(y) \\ &= 2q(x) - 2b(x,y). \end{aligned}$$

因为

$$b(x, x-y) = q(x) - b(x, y),$$

所以

$$2b(x, x-y) = 2q(x) - 2b(x, y) = b(x-y, x-y).$$

因此

$$\tau_{x-y}(x) = x - \frac{2b(x, x-y)}{b(x-y, x-y)}(x-y) = x - (x-y) = y.$$

(2) 的证明: 我们首先证明 $\tau_{x-y}(x^\perp) \subseteq y^\perp$, 即对于 $v \in \tau_{x-y}(x^\perp)$, 我们将证明 $v \in y^\perp$. 我们有 $v \in \tau_{x-y}(x^\perp)$ 意味着 $v = \tau_{x-y}(u)$, 其中 $u \in x^\perp$, 即 $b(x, u) = 0$. 现在因为 τ_{x-y} 是一个等距映射, 我们可得 $b(v, y) = b(\tau_{x-y}(u), \tau_{x-y}(x)) = b(u, x) = 0$. 从而,$v \in y^\perp$.

类似地, 我们可以证明 $\tau_{x-y}(x^\perp) \supseteq y^\perp$.

由于 $(V_1, q|_{V_1})$ 是非退化的, 我们有 $V \cong V_1 \boxplus V_1{}^\perp$. 在我们情况下,

$$Fx \boxplus x^\perp \approx V \approx Fy \boxplus y^\perp,$$

从而我们证明了等距映射 $\tau_{x-y} : V \to V$ 将 $x^\perp$ 映射到 $y^\perp$.

接下来, 我们证明归纳步: 假设定理成立, 如果 $\dim V_1 = n-1$, 证明当 $\dim V_1 = n$ 时, 定理成立.

给定 $V_1 \boxplus U_1 \approx V_2 \boxplus U_2$,$V_1 \approx V_2$ 和 $\dim V_1 = n = \dim V_2$. 既然二次型可对角化, 我们假设

$$V_1 \approx (a_1, \cdots, a_n) \approx V_2$$

对于某些 $a_1, \cdots, a_n \in F$ 成立.

设 $W_1 = \langle a_2, \cdots, a_n \rangle \boxplus U_1$, $W_2 = \langle a_2, \cdots, a_n \rangle \boxplus U_2$. 则我们有

$$Fa_1 \boxplus W_1 \approx Fa_1 \boxplus W_2.$$

因此有第一步可得 $W_1 \approx W_2$, 即

$$\langle a_2, \cdots, a_n \rangle \boxplus U_1 \approx \langle a_2, \cdots, a_n \rangle \boxplus U_2$$

且

$$\dim\langle a_2, \cdots, a_n \rangle = n-1.$$

由归纳假设, 我们可消去 $\langle a_2, \cdots, a_n \rangle$ 得到等距同构 $U_1 \approx U_2$. □

这个定理的一个结论: 由一个非退化二次空间 (V, q) 出发. 我们问是否存在一个迷向向量. 如果有的话, 设 x 是 V 中的一个迷向向量. 如果 $\dim V > 1$, 我们选取 y 使得 $b(x, y) \neq 0$, 则 $\{x, y\}$ 生成一个双曲面 $H_1 \subseteq V$ 且

$$(V, q) \approx (H_1, q|_{H_1}) \boxplus (V', q|_{V'}).$$

如果 $(V', q|_{V'})$ 是迷向的, 通过重复以上过程, 我们可得

$$(V,q) \approx (H_1, q|_{H_1}) \boxplus (H_2, q|_{H_2}) \boxplus (V'', q|_{V''}).$$

最后, 我们有

$$(V,q) \approx H_1 \boxplus H_2 \boxplus \cdots \boxplus H_i \boxplus (W, q|_W),$$

其中 $q|_W$ 是迷向的. 这称为 Witt 分解.

现在我们应用 Witt 消去定理得到如下推论.

推论 6.9 在等距同构的意义下, $(W, q|_W)$ 是由 (V,q) 唯一定义的, 也是唯一定义的, 即如果

$$(V,q) \approx H_1 \boxplus H_2 \boxplus \cdots \boxplus H_i \boxplus (W, q|_W)$$

且

$$(V,q) \approx H_1 \boxplus H_2 \boxplus \cdots \boxplus H_j \boxplus (W', q|_{W'}),$$

则我们有

$$i=j \quad 和 \quad (W, q|_W) = (W', q|_{W'}).$$

定义 6.10 $(W, q|_W)$ 称为 (V,q) 的非迷向部, 记作 $(V,q)_{an}$, 也称为 (V,q) 的 Witt 指标.

定理 6.11 (Sylvester 定理) 实数域上的任一非退化二次空间 (V,q) 是等距同构于 $\langle \underbrace{1,\cdots,1}_{m\text{ 个}}, \underbrace{-1,\cdots,-1}_{n\text{ 个}} \rangle$, 其中两个整数 m, n 由 q 唯一决定.

J. Sylvester (1814—1897) 是英国代数学家.

证明 首先, 我们知道

$$(V,q) \approx \langle a_1, \cdots, a_q \rangle$$

对于某个 $a_j \in R^*/R^{*2} = \{\pm 1\}$.

假设 $m \leqslant n$, 则

$$\begin{aligned}&\langle 1,\cdots,1,-1,\cdots,-1\rangle = \\ &\qquad \underbrace{\langle 1,-1\rangle \boxplus \langle 1,-1\rangle \boxplus \cdots \boxplus \langle 1,-1\rangle}_{m\text{ 个}} \boxplus \langle \underbrace{-1,\cdots,-1}_{n-m\text{ 个}} \rangle,\end{aligned}$$

且每个 $\langle 1,-1\rangle$ 是一个双曲面. □

我们知道, 作为 Witt 消去定理的一个推论, 双曲面的个数 m 是由 q 唯一决定的. 因此, n 也一样. 如果 $m < n$, 重复同样的论证.

6.2 代数

6.2.1 四元数代数

正如大家所知, 复数域 $\mathbb{C}$ 可被构造为一个 2 维 $\mathbb{R}$ 向量空间 $\mathbb{R}+\mathbb{R}\mathbf{i}$, 其中乘法为

$$(x+y\mathbf{i})(x'+y'\mathbf{i}) = xx'-yy'+(xy'+yx')\mathbf{i}.$$

我们感兴趣的是构造有限维 $\mathbb{R}$ 代数以延伸上述构造.

设 F 是一个域. 取任意的 $a,b\in F^\times = F\backslash\{0\}$, 取 F 上的一个 4 维向量空间且取 V 的一个基 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$. 让我们用 $\mathbb{1}$ 表示 e_0. 则

$$V{=}F\cdot\mathbb{1}+F\cdot e_1+F\cdot e_2+F\cdot e_3.$$

通过线性延拓如下乘法表来定义 V 中的乘法:

	$\mathbb{1}$	e_1	e_2	e_3
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$a\cdot\mathbb{1}$	e_3	$a\cdot e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$b\cdot\mathbb{1}$	$-b\cdot e_1$
e_3	e_3	$-a\cdot e_2$	$b\cdot e_1$	$-ab\cdot\mathbb{1}$

显然, $\mathbb{1}$ 是这个乘法中的单位元且对于任意的 i,j,k, 我们可以验证

$$(e_i\cdot e_j)\cdot e_k = e_i\cdot(e_j\cdot e_k)$$

(例如, $(e_1\cdot e_2)\cdot e_3 = e_3\cdot e_3 = -ab\cdot\mathbb{1}$ 和 $e_1\cdot(e_2\cdot e_3) = e_1\cdot -be_1 = -ab\cdot\mathbb{1}$). 因此这个乘法是可结合的, 从而 V 是 F 上的一个代数.

这个代数称为是一个**四元数代数** (quaternion algebra), 记为 $(\frac{a,b}{F})$ 或者仅仅 (a,b).

四元数代数是英裔爱尔兰数学家 W. R. Hamilton (1805—1865) 在 1843 年发现的.

关于四元数代数算术最好的教材是法文书 M.-F. Vigneras, *Arithmetique des algebres de quaternions* (Lecture Notes in Mathematics 800), Springer, 1980.

对于

$$x = x_0\cdot\mathbb{1}+x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+x_3\cdot e_3\in V,$$

我们定义 x 的一个共轭为

$$\bar{x} = x_0\cdot\mathbb{1}-x_1\cdot e_1-x_2\cdot e_2-x_3\cdot e_3.$$

则我们可以验证

$$\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\quad \overline{xy}=\bar{y}\cdot\bar{x}.$$

我们定义 x 的缩范数 Nx 和缩迹 Tx 为

$$Nx=x\cdot\bar{x},\quad Tx=x+\bar{x}.$$

计算可得

$$Nx=(x_0^2-x_1^2\cdot a-x_2^2\cdot b+x_3^2\cdot ab)\cdot\mathbb{1},\quad Tx=2x_0\cdot\mathbb{1}.$$

再者, 我们有

$$N(x\cdot y)=Nx\cdot Ny,\quad T(x+y)=Tx+Ty.$$

引理 6.12 一个四元数代数中的一个元素 x 是可逆的当且仅当 $Nx\in F^{\times}\cdot\mathbb{1}$. 如果这个条件成立, 则

$$x^{-1}=(Nx)^{-1}\cdot\bar{x}.$$

证明 x 可逆是指在这个代数中存在一个元素 x^{-1} 使得

$$x^{-1}\cdot x=x\cdot x^{-1}=\mathbb{1}.$$

设 x^{-1} 存在, 则

$$x^{-1}\cdot Nx=x^{-1}\cdot(x\cdot\bar{x})=\bar{x}\neq 0,$$

因此 $Nx\neq 0$. *i.e.* $Nx\in F^{\times}\cdot\mathbb{1}$.

反过来, 设 $Nx\in F^{\times}\cdot\mathbb{1}$. 则

$$((Nx)^{-1}\cdot\bar{x})\cdot x=(Nx)^{-1}\cdot(\bar{x}\cdot x)=(Nx)^{-1}\cdot(N\bar{x})=(Nx)^{-1}\cdot(Nx)=\mathbb{1}.$$

类似地,

$$x\cdot((Nx)^{-1}\cdot\bar{x})=\mathbb{1}.$$ □

考虑四元数代数

$$\left(\frac{a,b}{F}\right)=F\cdot\mathbb{1}+F\cdot e_1+F\cdot e_2+F\cdot e_3.$$

我们可利用迹映射在 (a,b) 上定义一个对称双线性形式 $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}(x,y)\mathbb{1}=\frac{1}{2}T(x\bar{y})=\frac{1}{2}(x\bar{y}+y\bar{x})$$

对所有的 $x,y\in(a,b)$ 都成立. 相应的二次型 $q(x)=\mathbf{b}(x,x)$ 可由范数计算得到

$$q(x)\mathbb{1}=N(x)=x\bar{x},$$

这给出了一个二次空间的四元数代数结构.

如果 $x = c\mathbb{1}$ $(c \in F)$ 且 y 属于 $F \cdot e_1 + F \cdot e_2 + F \cdot e_3$, 则 $T(x\bar{y}) = 0$. 我们也有

$$T(e_i\bar{e_j}) = T(e_i(-\bar{e_j})) = 0.$$

由此容易验证我们由如下二次空间正交分解

$$(a, b) = \langle 1 \rangle \boxplus \langle -a \rangle \boxplus \langle -b \rangle \boxplus \langle ab \rangle.$$

6.2.2 可除代数

定义 6.13 我们总是假设含单位 1 的一个环对于加法和乘法是可结合的. 我们说一个环是一个可除环, 如果每一个非零元都是可逆的. 一个**可除代数** (division algebra) 是一个代数也是一个可除环.

例 6.14 四元数代数 $(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 4 维可除代数.

取

$$x = x_0 \cdot \mathbb{1} + x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \in \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right).$$

则

$$Nx = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot \mathbb{1}.$$

于是

$$x \neq 0 \Rightarrow Nx \in R^\times \cdot \mathbb{1} \Rightarrow x \text{ 是可逆的}.$$

一般地, 我们将 $(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}})$ 的基记作 $\mathbb{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 则

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j},$$
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbb{1}.$$

注意到

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{i} \subset \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right).$$

我们可以给出 $(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}})$ 的一个 2×2 矩阵表示如下:

$$\mathbb{1} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} \to \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{j} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

验证这定义了一个 $\mathbb{R}$ 代数同态:

$$\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \to M_2(\mathbb{C}) = 2 \times 2 \text{ 复矩阵},$$

其像等于形如

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

的矩阵集合, 其中 $z, w \in \mathbb{C}$ 且 $\bar{z}$ 表示 z 的通常的复共轭.

6.2.3 中心单代数

设 A 是一个 F 代数. 根据我们的约定, 作为一个环, A 有单位元 $\mathbb{1}$. 于是 $A \supseteq F \cdot \mathbb{1}$. 我们用 F 表示 $F \cdot \mathbb{1}$. A 的中心定义为

$$Z(A) = \{x \in A : xy = yx \ \text{ 对所有的 } \ y \in A\}.$$

则

$$F = F \cdot \mathbb{1} \subseteq Z(A),$$

因为对我们来说, 乘法映射 $A \times A \to A : x, y \mapsto xy$ 是双线性的, 是指对于 $a \in F$, 我们有 $(ax)y = a(xy)$. 令 $x = \mathbb{1}$. 则 $(a\mathbb{1})y = a(\mathbb{1}y) = ay$. 再者 $y(a\mathbb{1}) = a(y\mathbb{1}) = ay$. 因此 $(a\mathbb{1})y = y(a\mathbb{1})$.

由于 F 代数 A 是一个环, 我们可以讨论 A 的左理想、右理想以及 (双边) 理想.

定义 6.15 我们称一个 F 代数 A 是中心代数, 如果 $Z(A) = F$. 我们称 A 是单代数, 如果 A 没有真的非零理想, 即如果 I 是 A 的一个理想则 $I = 0$ 或者 $I = A$. 称一个 F 代数为**中心单代数** (central simple algebra) 如果它既是中心代数又是单 F 代数.

例 6.16 由所有元在 F 上的 $n \times n$ 组成的 F 代数 $M_n(F)$ 是 F 上的一个中心单代数.

为了验证这一点, 设 e_{ij} 是一个 $n \times n$ 矩阵, 其 (i, j) 位置的元为 1, 其余位置的元全为零, 即

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}.$$

则

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{若 } j = k \\ 0, & \text{若 } j \neq k \end{cases} \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{n} e_{ii} = \mathbb{1} \text{ (单位矩阵)}.$$

我们首先证明 $M_n(F)$ 是中心代数. 取 $z=\sum\alpha_{\lambda\mu}e_{\lambda\mu}\in Z(M_n(F))$, 则 $e_{ij}z=ze_{ij}$. 但是,

$$e_{ij}z=\sum_\mu\alpha_{j\mu}e_{i\mu}\quad \text{和}\quad ze_{ij}=\sum_\lambda\alpha_{\lambda i}e_{\lambda j},$$

于是, 如果 $\mu\neq j$, 则 $\alpha_{j\mu}=0$, 且 $\alpha_{jj}=\alpha_{ii}$. 设 $\alpha=\alpha_{ii}$. 则 $z=\alpha\sum e_{ii}=\alpha\mathbb{1}\in F\cdot\mathbb{1}$. 因此 $Z(M_n(F))=F\cdot\mathbb{1}$.

下面我们证明 $M_n(F)$ 是单的. 我们将证明如果 I 是 $M_n(F)$ 的一个理想且 $I\neq 0$, 则 $I=M_n(F)$.

为此我们只需证明 $\mathbb{1}\in I$, 因为 $\mathbb{1}\in I\Rightarrow M_n(F)=M_n(F)\cdot\mathbb{1}\subseteq M_n(F)I\subseteq I$, I 是一个理想. 由此可推出 $M_n(F)=I$. 由于 $I\neq 0$, 我们可找到 $0\neq x=\sum\alpha_{\lambda\mu}e_{\lambda\mu}\in I$, 比方说, $\alpha_{ij}\neq 0$, 则对于 $1\leqslant p\leqslant n$, 我们有 $I\ni(\alpha_{ij}^{-1}e_{pi})x=(\alpha_{ij}^{-1}e_{pi})(\sum\alpha_{\lambda\mu}e_{\lambda\mu})=e_{pp}$, 从而 $\mathbb{1}=\sum_{p=1}^n e_{pp}\in I$.

容易把以上例子推广为以下命题.

命题 6.17 *F 为域. D 为可除中心 F 代数. 则矩阵环 $M_n(D)$ 为中心单 F 代数.*

证明 设 e_{ij} 是一个 $n\times n$ 矩阵, 其 (i,j) 位置的元为 1, 其余位置的元全为零. 则 $e_{ij}e_{jk}=e_{ik}$, 并且 $e_{ij}e_{kl}=0$ 若 $j\neq k$. 设 A 的 (i,j) 位置的元 $a_{ij}\neq 0$. 则

$$a_{ij}^{-1}e_{ki}Ae_{jk}=e_{kk}.$$

所以由 A 生成的双边理想包含单位矩阵 $I=e_{11}+\cdots+e_{nn}$. 这就证明了 $M_n(D)$ 是单代数.

在 $M_n(D)$ 的中心取 $A=(a_{ij})$. 从等式 $e_{ij}A=Ae_{ij}$ 知对任意 i,j 有 $a_{ii}=a_{jj}$, 并且 $a_{ij}=0$ 若 $i\neq j$. 于是 $M_n(D)$ 的中心是 $\{aI:a\in F\}$. □

命题 6.18 *对于任意的 $a,b\in F^\times$, 四元数代数 $(\frac{a,b}{F})$ 是一个中心单 F 代数.*

证明 1. 为了证明 $(\frac{a,b}{F})$ 是中心的, 我们取 $x=x_0\mathbb{1}+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ 位于中心, 然后证明 x 属于 $F\cdot\mathbb{1}$.

设 (i,j,k) 是 $(1,2,3)$ 的任意置换. 则

$$0=xe_k-e_kx=2(x_ie_i+x_je_j)e_k.$$

由 $e_k^2\in F\mathbb{1}$ 可知, e_k^{-1} 属于这个代数且我们将上述方程乘以 e_k^{-1} 可得

$$0=x_ie_i+x_je_j.$$

由于 e_i,e_j 是一个基的部分, 因此 $x_i=x_j=0$.

简单的计算表明 $x_k=0$, 因此 $x=x_0\mathbb{1}\in F\cdot\mathbb{1}$.

2. 下一步证明 $(\frac{a,b}{F})$ 是单代数. 事实上我们只需证明: 如果 $0 \neq I$ 是理想, 则 $\mathbb{1} \in I$. 为此 $0 \neq x = x_0\mathbb{1} + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in I$. 如果 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 则 $x = x_0\mathbb{1} \in I$, $x_0 \neq 0$. 于是 $\mathbb{1} \in I$.

我们可以假设 $x_j \neq 0$, 且 $1 \leqslant j \leqslant 3$. 设 (i,j,k) 是 $(1,2,3)$ 的一个置换, 则 $xe_k - e_kx = 2(x_ie_i + x_je_j)e_k \in I$, 从而 $y = x_ie_i + x_je_j \in I$.

于是 $ye_j + e_jy = 2x_je_j^2 \in I$, 但 $e_j^2 \in F \cdot \mathbb{1}$, 从而 $\mathbb{1} \in I$. □

称环 R 为**单环** (simple ring) 若 R 的双边理想只可以是 0 和 R.

定理 6.19 设 R 为单环, M 为 R 的非零左理想, D 为自同态环 $\mathrm{End}_R(M)$. 则 $R \cong \mathrm{End}_D(M)$.

证明 取 $\alpha \in R$. 定 $i(\alpha) : M \to M$ 为 $i(\alpha)(x) = \alpha x$, $x \in M$.

对 $\lambda \in D$ 有

$$(i\alpha)(x\lambda) = \alpha(x\lambda) = (\alpha x)\lambda = ((i\alpha)x)\lambda.)$$

所以 $i\alpha \in \mathrm{End}_D(M)$. 于是得

$$i : R \to \mathrm{End}_D(M)$$

显然 i 是环同态并且 $i(1_R) = \mathrm{Id}_M =$ 在 $\mathrm{End}_D(M)$ 内的单位元.

因为 R 为单环和 $i \neq 0$, 所以 $\mathrm{Ker}\, i = 0$. 即得 i 为单射.

现证: $i(R)$ 为左理想.

取 $y \in M$. 则

$$M \to M : x \mapsto xy$$

属于 D. 所以, 若 $f \in \mathrm{End}_D(M)$, 则 $f(xy) = (fx)y$. 由此得

$$(f(ix))y = f(xy) = (fx)y = (i(fx))y,$$

即对所 $x \in M$ 有 $f(ix) = i(fx)$. 所以得 $i(M)$ 为 $\mathrm{End}_D(M)$ 的左理想. 但 R 为单环, 双边理想 MR 等于 R. 所以

$$\begin{aligned} i(R)\,\mathrm{End}_D(M) &= i(MR)\,\mathrm{End}_D(M) = i(M)i(R)\,\mathrm{End}_D(M) \\ &\subset i(M)\,\mathrm{End}_D(M) \subset \mathrm{End}_D(M). \end{aligned}$$

从此得 $i(R)$ 为 $\mathrm{End}_D(M)$ 的左理想.

已知 iR 包含 $\mathrm{End}_D(M)$ 的单位元, 所以 $iR = \mathrm{End}_D(M)$. □

定理 6.20 (Wedderburn 定理) 设 A 为域 F 上的有限维中心单代数. 则有 F 上的可除代数 D 使得 $A \cong M_n(D)$.

证明 因为 A 的理想自然是 F 向量空间, 所以知存在最少左理想 M. 取 $D = \mathrm{End}_A(M)$. 则按前一定理 $A \cong \mathrm{End}_D(M)$. M 是有限维 F 向量空间, 所以 M 是有限维 D 向量空间. 于是 $\mathrm{End}_D(M) \cong M_n(D)$.

取 $0 \neq f \in D$. 则 $\mathrm{Ker}\, f \neq M$ 和 $\mathrm{Img}\, f \neq 0$. 但 M 为最少左理想, 于是只可以有 $\mathrm{Ker}\, f = 0$ 和 $\mathrm{Img}\, f = M$. 这样 $f : M \to M$ 为同构, 故此 f 可逆. 这就证明了 D 是可除代数. □

J. Wedderburn (1882—1948) 是英国代数学家, 爱丁堡大学毕业.

推论 6.21 F 上的任一四元数代数都同构于 $M_2(F)$ 或者是 F 上的一个可除代数.

证明 由 Wedderburn 定理可得, $A \approx M_n(D)$, 于是 $\dim_F A = n^2 \dim_F D$. 但 $\dim_F A = 4 = n^2 \dim_F D$, 因此 $n = 1$, 则 $A \approx D$; 或者 $n = 2$, 则 $4 = 4\ \dim_F D$. 即 $\dim_F D = 1$. 因此 $D = F$ 且 $A \approx M_2(F)$. □

命题 6.22 给定 F 上的一个代数 A, 其含单位 $\mathbb{1}_A$. 设 $y, z \in A$, 使得 $y^2 = a\mathbb{1}_A, z^2 = b\mathbb{1}_A, yz = -zy$, 对于某些 $a, b \in F^\times$, 则向量空间 $C = F\mathbb{1}_A + Fy + Fz + Fyz$ 是一个代数, 其同构于 $(\frac{a,b}{F})$.

证明 记

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) = F \cdot \mathbb{1} + F \cdot e_1 + F \cdot e_2 + F \cdot e_3.$$

定义一个映射 $f : (\frac{a,b}{F}) \to C$, 其中 $f(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_A, f(e_1) = y, f(e_2) = z, f(e_3) = yz$, 则我们可以验证 f 是一个代数同态.

f 的核是 $(\frac{a,b}{F})$ 中的一个理想. 但 $(\frac{a,b}{F})$ 是中心单的, 于是这个理想是零, 即 f 是单射, 从而是一个同构. □

例 6.23 $(\frac{1,-1}{F})$ 同构于 $M_2(F)$.

我们令

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $y^2 = \mathbb{1}, z^2 = -\mathbb{1}, yz = -zy$.

由上述命题可得, $C = F \cdot \mathbb{1} + F \cdot y + F \cdot z + F \cdot yz = (\frac{1,-1}{F})$. 但 $M_2(F)$ 的子空间 C 和 $M_2(F)$ 是同维的, 于是 $C = M_2(F)$. 因此 $M_2(F) \cong (\frac{1,-1}{F})$.

设 A 和 B 都是 F 代数. 我们首先取张量积 $A \otimes_F B$ 作为向量空间. 然后我们在这个张量积中引入一个乘法

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

对于这个乘法, $\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$ 是 $A \otimes_F B$ 中的单位元, 现在可验证其维一个 F 代数.

定理 6.24 如果 A 和 B 都是有限维中心单 F 代数, 则 $A \otimes_F B$ 是一个中心单 F 代数.

证明 1. 我们首先证明 $A\otimes_F B$ 是中心的. 固定 B 的一个基 $y_1,\cdots,y_n$. 在 $A\otimes_F B$ 的中心任取一个元 z. 将 z 记作如下形式 $z=\sum_\lambda u_j\otimes y_j$, 其中 $u_j\in A$. 由于 $z(x\otimes\mathbb{1})=(x\otimes\mathbb{1})z$ 对所有的 $x\in A$ 都成立. 我们得到 $(\Sigma u_j\otimes y_j)(x\otimes\mathbb{1})=\Sigma u_jx\otimes y_j=\Sigma xu_j\otimes y_j$. 但 y_j 是 B 的一个基, 所以这个表示法在 $u_jx=xu_j$ 的意义下是唯一的. 这暗示了 $u_j\in Z(A)=F\cdot\mathbb{1}_A$, 因此我们简化考虑 $Z=\mathbb{1}_A\otimes y$ 对于某个 $y\in B$. 重复上述论证, 我们可看出 $y\in Z(B)=F\cdot\mathbb{1}_B$. 因此 $z=c(1_A\otimes 1_B),c\in F$.

2. 我们证明 $A\otimes_F B$ 是单的. 我们将证明如果 $0\neq I$ 是 $A\otimes_F B$ 的一个理想, 则 $\mathbb{1}_A\otimes\mathbb{1}_B\in I$. 我们首先证明一些简化程序.

断言

(1) 如果 $x_1\otimes y_1+\cdots+x_p\otimes y_p\in I$ 且 $x_1\neq 0$, 则 I 包含一个元 $x_1'\otimes y_1+\cdots+x_p'\otimes y_p$, 其中 $x_1'=\mathbb{1}_A$.

(2) 如果 $x_1\otimes y_1+\cdots+x_p\otimes y_p\in I$ 且 $y_1\neq 0$, 则 I 包含一个元 $x_1\otimes y_1'+\cdots+x_p\otimes y_p'$, 其中 $y_1'=\mathbb{1}_B$.

(1) 的证明. 由于 $x_1\neq 0$, 由 x_1 产生的理想是 A, 因为 A 是单的, 因此存在一个元 $x\in A$, 使得 $xx_1=\mathbb{1}_A$. 于是 $(x\otimes 1_B)(x_1\otimes y_1+\cdots+x_p\otimes y_p)=\mathbb{1}_A\otimes y_1+xx_2\otimes y_2+\cdots\in I$.

我们返回来证明 $A\otimes_F B$ 是单的.

在 $I\neq 0$ 中所有的非零 z 和 B 中所有的基 $y_1,\cdots,y_n$ 之中挑选, 使得 k 在表示法中是最小的

$$z=u_1\otimes y_1+\cdots+u_k\otimes y_k\quad(u_i\in A).$$

我们可以说, $u_1\neq 0$ 从而由上述断言 (1) 我们可以假设

$$z=\mathbb{1}_A\otimes y_1+\cdots+u_k\otimes y_k.$$

设 $k>1$, 则 $u_k\notin F\cdot\mathbb{1}_A$. 否则, 如果 $u_k\in F\cdot\mathbb{1}_A$, 比如说 $u_k=c\cdot\mathbb{1}_A$, $c\neq 0$, 则我们可以变换基且产生一个更小的 k, 与 k 的选择相矛盾. 事实上

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_A\otimes y_1+\cdots+u_{k-1}\otimes y_{k-1}+u_k\otimes y_k\\&\qquad=\mathbb{1}_A\otimes y_1+\cdots+\mathbb{1}_A\otimes cy_k,\\&\qquad=\mathbb{1}_A\otimes(y_1+cy_k)+u_2\otimes y_2+\cdots+u_{k-1}\otimes y_{k-1}.\end{aligned}$$

现在我们可将 B 的基从 $y_1,\cdots,y_n$ 变换到 $y_1+cy_k,y_2,\cdots,y_n$ 以产生一个更小的 k.

我们有 $u_k\notin F\cdot\mathbb{1}_A$. 但 A 是中心的, 从而 u_k 不在中心. 于是存在一个 $x\in A$, 使得 $xu_k\neq u_kx$. 这意味着 I 中的元 $(x\otimes\mathbb{1}_B)z-z(x\otimes\mathbb{1}_B)$ 是非零的且包含一个更小的 k. 这是不可能的.

因此 $k=1$ 且 $z=\sum\mathbb{1}_A\otimes y\in I,\ y\in B$. 利用断言 (2) 推出 $\mathbb{1}_A\otimes\mathbb{1}_B\in I$. □

关于中心单代数的算术性质, 中心单代数与 Brauer 群、Brauer-Severi 簇的关系, 可参看下面的资料.

[1] M. Deuring, *Algebren*, Springer, 1935.

[2] A. Albert, *Structure of Algebras*, AMS, 1939 (谢邦杰译, 代数结构, 科学出版社, 1963).

[3] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, in, Dix exposes sur la cohomologie des schemes, North Holland, 1968, 1–21.

[4] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer, 1974.

[5] A. 德罗兹德, B. 基里钦柯, 有限代数, 刘绍学, 张英伯译, 北京师范大学出版社, 1983.

[6] D. Saltman, *Lectures on Division Algebras* (CBMS Regional Conference Series in Mathematics), AMS, 1999.

6.2.4 范数和迹

设 A 是一个 n^2 维中心单 F 代数, 取 $x \in A$, 定义 F 线性映射

$$M_x : A \to A : y \mapsto xy.$$

所有从 A 到 A 的 F 线性映射组成 F 代数 $\mathrm{End}_F(A)$, 这样便有代数同态

$$M : A \to \mathrm{End}_F(A) : x \mapsto M_x,$$

称此为 A 的左正则表示.

取矩阵 $x \in M_n(F)$, 向量 $v \in F^n$, 定义 $m_x(v) = xv$ (按矩阵乘法). 矩阵代数 $M_n(F)$ 在 F^n 上的标准表示是指

$$m : M_n(F) \to \mathrm{End}_F(F^n) : x \mapsto m_x.$$

设 $A = M_n(F)$. 则 A 的左正则表示 M 是 F^n 上 $M_n(F)$ 的 n 个标准表示 m 的直和, 即 $M = m \oplus \cdots \oplus m$ (n 个). 线性映射 M_x 的特征多项式 $P_x^A(T)$ 是 n^2 次的首一多项式, 而且

$$P_x^A(T) = (p_x)^n(T),$$

其中, 当 x 被看作一个 F^n 的自同态时, p_x 是 x 的特征多项式.

设 A 是一个 n^2 维中心单 F 代数, $\hat{F}$ 是 F 的一个代数闭包. 则 $A \otimes_F \hat{F} \approx M_n(\hat{F})$. 因此, 存在 n 次多项式 $p_x(T) = \sum a_k(x) T^k$ 使得

$$P_x^{A \otimes_F \hat{F}}(T) = (p_x(T))^n.$$

称 $p_x(T)$ 为 x 的 “缩特征多项式”.

$p_x(T)$ 的系数 $a_{n-1}(x)$ 决定线性映射

$$\tau : A \to F : x \mapsto -a_{n-1}(x).$$

我们称 $\tau(x)=-a_{n-1}(x)$ 为 $x\in A$ 的缩迹. 显然 $n\tau(x)=\operatorname{Tr}M_x$.

$p_x(T)$ 的常数项 $a_0(x)$ 决定乘性函数

$$\nu:A\to F:x\mapsto(-1)^n a_0(x),\quad \nu(xy)=\nu(x)\nu(y).$$

称 $\nu(x)$ 为 x 的缩范数. 显然 $(\nu(x))^n=\det(M_x)$. 如果 $A=M_n(F)$, 则 $\nu(x)$ 等于矩阵 $x\in M_n(F)$ 的行列式 $\det x$.

我们可做这样的结论.

给定域 F 上的一个 n^2 维代数 A. 1_A 表示 A 中的单位元, 1_n 表示 $n\times n$ 单位矩阵. 对于任一包含 F 的域 L, A 的一个 L 表示是指一个映射

$$\rho:A\to M_n(L)$$

使得 (1) ρ 是 F 线性的, (2) $\rho(ab)=\rho(a)\rho(b)$ 对所有的 $a,b\in A$ 都成立, (3) $\rho(1_A)=1_n$.

设 A 是域 F 上的一个 n^2 维中心单代数. 则存在一个非零 F 线性形式 $\tau:A\to F$ 和一个函数 $\nu:A\to F$, 使得如果 L 是任一包含 F 的域和 $\rho:A\to M_n(L)$ 是 A 的任一 L 表示, 则

$$\tau(a)=\operatorname{Tr}(\rho(a))\ \text{和}\ \nu(a)=\det(\rho(a))$$

对所有的 $a\in A$ 都成立. 而且,

$$\tau(xy)=\tau(yx)\ \text{和}\ \nu(xy)=\nu(x)\nu(y).$$

我们称 τ 为 A 的**缩迹** (reduced trace) 且 ρ 为 A 的**缩范数** (reduced norm).

例如: 如果 A 是 $\mathbb{R}$ 上 Hamilton 四元数的可除代数 $\mathbb{H}$, 则一个四元数的缩化迹 $x=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ 是 $2a$, 其缩减范数是 $a^2+b^2+c^2+d^2$, 以及其缩减特征多项式 $R_x(T)$ 是 $T^2-2aT+(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

6.3 Clifford 代数

6.3.1 分级代数

定义 6.25 设 A 是一个 F 代数, 且是子空间 A^0,A^1 的直和, 即 $A=A^0\oplus A^1$. 再设

$$A^0A^0\subseteq A^0,\quad A^0A^1\subseteq A^1,\quad A^1A^0\subseteq A^1,\quad A^1A^1\subseteq A^0.$$

则我们说 A 是一个 $\mathbb{Z}/2$ **分级代数** ($\mathbb{Z}/2$-graded algebra).

设 $\alpha:A\to A'$ 为 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数之间的一个 F 代数同态. 如果 $\alpha(A^0)\subseteq A'^0$ 和 $\alpha(A^1)\subseteq A'^1$, 则称 α 为**分级同态** (graded homomorphism).

在这个定义中, 条件 $A^0A^0 \subseteq A^0$ 是指对所有的 $x, y \in A^0$, 有 $xy \in A^0$.

我们用 $\mathbb{Z}$ 表示整数环且用 $\mathbb{Z}/2$ 表示 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 我们知道, 如果 $n \in \mathbb{Z}$, 则 $n \equiv 0$ 或 $1 \pmod 2$, 即 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

设 $[n]$ 表示 n 的 mod 2 同余类. 则我们可将上述乘法要求记为

$$A^{[n]}A^{[m]} \subseteq A^{[n+m]}.$$

这意味着, 例如,

$$A^{[1]}A^{[1]} \subseteq A^{[1+1]} = A^{[0]}.$$

我们说一个 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数 A 的一个子空间或者一个理想 V 是分级的, 如果 $V = V \cap A^0 \oplus V \cap A^1$.

我们用 1_A 表示 A 中的单位元, 把 F 的元素 c 看作 $c \cdot 1_A \in A$. 由于 $1_A \in A^0$ 和 $A^0A^0 \subseteq A^0$, 所以 A^0 是 F 代数, 但 A^1 不是.

例 6.26 我们给出一个 2 维 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数的例子.

以 T 为变量系数在 F 中的多项式组成多项式环 $F[T]$, 即 $F[T]$ 中的任一元 $p(T)$ 是一个多项式

$$p(T) = a_0 + a_1T^1 + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n, \ \ a_j \in F.$$

取 $a \in F$, 多项式 $T^2 - a$ 生成 $F[T]$ 的理想记为 I. 理想 I 的元素是 $p(T)(T^2 - a)$, 其中 $p(T) \in F[T]$. 我们用 t 表示商环 $F[T]/I$ 中的元 $T + I$.

设 $p(T)$ 表示 $F[T]$ 中的任一元. 则由多项式的长除法可知, 存在多项式 $q(T)$, $r(T)$ 使得

$$p(T) = q(T)(T^2 - a) + r(T) \quad \text{和} \quad r(T) = c + dT,$$

其中 $c, d \in F$. 由 $q(T)(T^2 - a) \in I$ 可推出, 在商环 $F[T]/I$ 中, 有

$$p(T) + I = r(T) + I = c\mathbb{1} + dt.$$

我们用 $\mathbb{1}$ 表示 $1 + I$, 其中 $1 \in F$. 这样, 我们证明了 $F[T]/I$ 中的任一元可表示为 $c\mathbb{1} + dt$ 并且

$$F[T]/I = F \cdot \mathbb{1} \oplus F \cdot t.$$

计算 $F[T]/I$ 中的 t^2 如下

$$t^2 = (T + I)(T + I) = T^2 + TI + IT + II.$$

由于 I 是理想, 便得 $TI + IT + II = I$, 从而

$$t^2 = (T + I)(T + I) = T^2 + I = a + (T^2 - a) + I = a + I = a\mathbb{1}.$$

如果对于 $c \in F$ 和

$$p(T) = a_0 + a_1 T^1 + \cdots + a_n T^n \in F[T],$$

我们定义 $cp(T)$ 为

$$cp(T) = ca_0 + ca_1 T^1 + \cdots + ca_n T^n.$$

则环 $F[T]$ 是 F 代数. 所以 $F[T]/I$ 也是 F 代数.

取 $A = F[T]/I$, $A^0 = F \cdot \mathbb{1}$ 和 $A^1 = F \cdot t$. 则

$$A = A^0 + A^1.$$

从 $t^2 = a\mathbb{1}$ 证出 $A^1 A^1 \subset A^0$. 不难验证 A 是 $\mathbb{Z}/2$ 分级 F 代数.

6.3.2 二次型的 Clifford 代数

定义 6.27 给定域 F 上的有限维向量空间 V 和 V 上的二次型 q. 定义 (V,q) 的 **Clifford 代数**为 $\mathbb{Z}/2$ 分级 F 代数 $C\ell(V,q) = C\ell^0(V,q) \oplus C\ell^1(V,q)$, 连同 F 线性映射

$$\rho : V \to C\ell^1(V,q) \subset C\ell(V,q),$$

使得对于所有的 $x \in V$

$$\rho(x)^2 = q(x),$$

并且下面的条件成立: 对于任意的 $\mathbb{Z}/2$ 分级 F 代数 A 和任意满足条件 $\alpha(x)^2 = q(x)$ 的 F 线性映射

$$\alpha : V \to A^1 \subset A,$$

存在一个唯一的分级代数同态 $\beta : C\ell(V,q) \to A$ 使得 $\alpha = \beta \circ \rho$.

以上条件是可以说为下图是交换的:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\alpha"'] & C\ell(V,q) \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ & A \end{tikzcd}$$

常把 $C\ell(V,q)$ 简写为 $C\ell(q)$.

W. Clifford (1845—1879) 是英国代数学家、伦敦大学教授.

照例, 除同构外, Clifford 代数是由 q 唯一确定的. 我们后面将证明其存在性.

如果域 F 是实数域 $\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^{r+s}$ 和

$$q(x)=x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2,$$

常用 $C\ell_{r,s}$ 记 Clifford 代数 $C\ell(V,q)$.

注 一些作者将我们的条件 $\rho(x)^2=q(x)$ 替换为 $\rho(x)^2=-q(x)$. 后果是, 对我们来说, $C\ell(\mathbb{R},\langle -1\rangle)$ 是 $\mathbb{C}$; 对于他们来说, $C\ell(\mathbb{R},\langle 1\rangle)$ 是 $\mathbb{C}$!

命题 6.28 一维二次空间 $\langle a\rangle$ 的 Clifford 代数同构于 $F[T]/(T^2-a)$.

证明 我们用 C 表示 $F[T]/(T^2-a)$. 令 $t:=T+(T^2-a)$, $\mathbb{1}:=1+(T^2-a)$, $C^0=F\cdot\mathbb{1}$, $C^1=Ft$. 则 $t^2=a$ 属于 C. 一维二次空间 $\langle a\rangle$ 是 (V,q), 其中 $V=Fu$ 和 $q(u)=a$.

我们定义一个线性映射

$$V\xrightarrow{\rho}C^1\subseteq C=C^0+C^1$$

使得 $\rho(u)=t$.

我们通过直接计算验证

$$\rho(v)^2=q(v),$$

任一 $v\in V$ 是 $v=xu$ 对于 $x\in F$. 因为 ρ 是线性的, 则 $\rho(xu)=xt$. 最后

$$\rho(v)^2=\rho(xu)^2=(xt)^2=x^2t^2=x^2a=x^2q(u)=q(xu)=q(v).$$

还需验证, C 是 $\langle a\rangle$ 的 Clifford 代数. 设 $\alpha:V\to A^1\subset A$ 是一个线性映射, 使得 $\alpha(v)^2=q(v)$ 对于 $v\in V$. 我们定义 $\beta:C\to A$ 使得 $\beta(\mathbb{1})=1_A$, $\beta(t)=\alpha(u)$, 然后 F 线性地延拓 β 得 F 线性映射.. 则对于 $v=xu$, $x\in F$, 我们有

$$\beta\rho(v)=\beta(xt)=x\beta(t)=x\alpha(u)=\alpha(v)$$

和

$$\begin{aligned}(\beta\rho(v))^2&=(x\beta(t))^2=x^2(\beta(t))^2=x^2(\alpha(u))^2\\&=x^2q(u)=q(xu)=(\alpha(v))^2.\end{aligned}$$

□

6.3.3 分级张量积

定义 6.29 两个分级 F 代数 $A=\oplus A^i$, $B=\oplus B^j$ 的**分级张量积** (graded tensor product) $A\hat{\otimes}B$ 定义为一个分级 F 代数 $A\hat{\otimes}B$ 配备了一对分级代数同态 $i_A:A\to A\hat{\otimes}B$, $i_B:B\to A\hat{\otimes}B$, 并具有如下泛性质: 如果 $\alpha:A\to C$ 和 $\beta:B\to C$ 是分级代数同态, 使得 $\alpha(A)$, $\beta(B)$ 是反交换的, 即

$$\alpha(a_i)\beta(b_j)=(-1)^{ij}\beta(b_j)\alpha(a_i),$$

其中 $a_i \in A^i, b_j \in B^j$, 则存在一个唯一的分级代数同态 $\gamma: A\hat{\otimes}B \to C$ 使得下图是交换的:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\alpha"'] & A\hat{\otimes}B \arrow[d, dotted, "\gamma"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

分级张量积 $A\hat{\otimes}B$ 总是存在的. 事实上, 作为向量空间 $A\hat{\otimes}B$ 是通常的向量空间的张量积 $A\otimes B$. 张量积的性质保证了线性映射 γ 的存在性. 显然, 我们应该取 $i_A(a_i) = a_i\hat{\otimes}1$ 和 $i_B(b_j) = 1\hat{\otimes}b_j$. 在 $A\otimes B$ 上引入乘法,

$$(a_i\hat{\otimes}1)(1\hat{\otimes}b_j) = (-1)^{ij}(1\hat{\otimes}b_j)(a_i\hat{\otimes}1).$$

这样便保证 γ 是分级代数同态.

例 6.30 四元数代数是一个分级张量积.

回想一维二次空间 $\langle a\rangle$ 有一个基向量 e 使得 $q(e) = a$. $\langle a\rangle$ 的 Clifford 代数, 记作 $\{a\}$, 有一个基 $\{1, e\}$ 使得 $e^2 = a$.

设 $\{1, e_1\}$ 是 $\{a\}$ 的基且 $\{1, e_2\}$ 是 $\{b\}$ 的基. 设 C 为它们的 $\mathbb{Z}/2$ 分级张量积,

$$\{a\}\hat{\otimes}\{b\} = C = C^0 \oplus C^1,$$

其中 $C^0 = F\cdot 1 \oplus F\cdot e_3$, $e_3 = e_1\hat{\otimes}e_2$, $C^1 = F\cdot e_1 \oplus F\cdot e_2$. 则条件

$$e_1^2 = a, e_2^2 = b, \quad e_1e_2 = -e_2e_1$$

保证 C 同构于四元数代数 (a, b). 因此

$$\{a\}\hat{\otimes}\{b\} \cong (a, b).$$

6.3.4 Clifford 代数的存在性

定理 6.31 设 $(V_1, q_1), (V_2, q_2)$ 是 F 上的二次空间, 且 Clifford 代数 $C\ell(V_1, q_1), C\ell(V_2, q_2)$ 存在. 则 Clifford 代数 $C\ell(V_1 \oplus V_2, q_1 \boxplus q_2)$ 存在. 而且, 存在一个同构

$$Cl(V_1 \oplus V_2, q_1 \boxplus q_2) \cong C\ell(V_1, q_1)\hat{\otimes}C\ell(V_2, q_2).$$

推论 6.32 任一二次空间 (V, q) 的 Clifford 代数 $C\ell(V, q)$ 都存在.

证明 给定任一二次空间 (V,q), 我们有一个正交分解

$$(V,q)\cong\langle a_1\rangle\boxplus\cdots\boxplus\langle a_n\rangle,$$

其中每一个 $\langle a_j\rangle$ 都是一个一维二次空间. 我们已经构造了每一个 $\langle a_j\rangle$ 的 Clifford 代数 $C\ell(\langle a_j\rangle)$. 因此, 有上述定理可得,

$$C\ell(V,q)\cong C\ell(\langle a_1\rangle)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}C\ell(\langle a_n\rangle).$$

我们必须证明什么呢?

我们记 $q=q_1\boxplus q_2$, $V=V_1\oplus V_2$. 我们需要构造一个 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数 $C\ell(V,q)$ 使得对于任意的 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数 $A=A^0+A^1$ 和任意的线性映射 $\alpha:V\to A^1\subseteq A$ 满足 $\alpha(v)^2=q(v)$, 其中 $v\in V$, 我们可以找到一个唯一的分级代数同态 $\beta:C\ell(V,q)\to A$ 使得下图是交换的:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & Cl(V,q) \arrow[d, dotted, "\beta"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

我们知道, 如果 $C\ell(V,q)$ 存在, 在同构的意义下, 它是唯一的. 因此只要证明 $C\ell(V_1,q_1)\hat{\otimes}C\ell(V_2,q_2)$ 有上述 $C\ell(V,q)$ 要求的性质就足够了.

我们记 $C=C\ell(V_1,q_1)\hat{\otimes}C\ell(V_2,q_2)=C^0+C^1$. 我们将

(1) 构造一个 F 线性映射 $\rho:V\to C^1\subseteq C$, 使得 $\rho(v)^2=q(v)$ 对任意 $v\in V$ 都成立.

(2) 对任意的 $\alpha:V\to A^1\subseteq A$ 使得 $\alpha(v)^2=q(v)$, 其中 $v\in V$, 构造 $\beta:C\to A$ 使得 $\alpha=\beta\circ\rho$.

步骤 (1) : 首先让我们计算 C^0 和 C^1.

$$\begin{aligned}
C=&(C\ell^0(q_1)\oplus C\ell^1(q_1))\hat{\otimes}(C\ell^0(q_2)\oplus C\ell^1(q_2))\\
=&(C\ell^0(q_1)\otimes C\ell^0(q_2)\oplus C\ell^1(q_1)\otimes C\ell^1(q_2))\\
&\oplus(C\ell^0(q_1)\otimes C\ell^1(q_2)\oplus C\ell^1(q_1)\otimes C\ell^0(q_2))\\
=&C^0\oplus C^1.
\end{aligned}$$

接下来我们给出线性映射

$$\begin{aligned}
i_1: C\ell^1(q_1)\to C^1\subset C: a\mapsto a\otimes 1,\\
i_2: C\ell^1(q_2)\to C^1\subset C: 1\mapsto 1\otimes b.
\end{aligned}$$

按 Clifford 代数 $C\ell(V_j,q_j)$ 的定义有以下映射,

$$\rho_j: V_j\to C\ell(V_j,q_j),$$

所以我们得到线性映射

$$i_j\rho_j : V_j \to C.$$

但 $V = V_1 \oplus V_2$ 是一个直和, 因此可得映射 $\rho : V \to C^1 \subset C$ 使得下图是交换的:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"] \arrow[dr] & V_1 \oplus V_2 \arrow[d, dashed, "\rho"] & V_2 \arrow[l] \arrow[d, "\rho_2"] \arrow[dl] \\
C\ell^1(V_1, q_1) \arrow[r, "i_1"] & C^1 & C\ell^1(V_2, q_2) \arrow[l, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

还需验证

$$\rho(v)^2 = q(v).$$

取 $v = x + y \in V = V_1 \oplus V_2$, 其中 $x \in V_1, y \in V_2$, 我们计算

$$\begin{aligned}
(\rho(x+y))^2 &= (\rho(x)+\rho(y))^2 \quad (\text{因为 } \rho \text{ 是线性的}) \\
&= (i_1\rho_1(x) + i_2\rho_2(y))^2 \quad (\text{由 } \rho \text{ 的定义}) \\
&= (\rho_1(x)\otimes 1 + 1\otimes\rho_2(y))^2 \quad (\text{由 } i_1, i_2 \text{ 的定义}) \\
&= (\rho_1(x)\otimes 1 + 1\otimes\rho_2(y))(\rho_1(x)\otimes 1 + 1\otimes\rho_2(y)) \\
&= \rho_1(x)^2\otimes 1 + (\rho_1(x)\otimes 1)\cdot(1\otimes\rho_2(y)) \\
&\quad +(1\otimes\rho_2(y))\cdot(\rho_1(x)\otimes 1) + 1\otimes\rho_2(y)^2 \\
&= q_1(x)\otimes 1 + 1\otimes q_2(x) \\
&= i_1(q_1(x)) + i_2(q_2(x)) \\
&= q(x+y) \quad (\text{因为 } q_1 \perp q_2).
\end{aligned}$$

注 $(\rho_1(x)\otimes 1)\cdot(1\otimes\rho_2(y)) + (1\otimes\rho_2(y))\cdot(\rho_1(x)\otimes 1) = 0$, 因为一个分级张量积乘法是反交换的.

步骤 (2) : 给定 $\alpha : V = V_1 \oplus V_2 \to A^1 \subset A$. 对于 $j = 1, 2$, 我们可得一个分级代数同态 ρ_j, 使得下图是交换的:

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[rr, "\rho_j"] \arrow[dr] & & C\ell(V_j, q_j) \arrow[dd, dashed, "\beta_j"] \\
& V_1 \oplus V_2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

因为 $\alpha(x)^2 = q_j(x)$, 其中 $x \in V_j$, 且 $C\ell(V_j, q_j)$ 是一个 Clifford 代数 (由假设可知是存在的), 所以我们有

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_1"] & V_1 \oplus V_2 \arrow[d, "\alpha"] & V_2 \arrow[l] \arrow[d, "\rho_2"] \\
C\ell(V_1, q_1) \arrow[r, dashed, "\beta_1"] & A & C\ell(V_2, q_2) \arrow[l, dashed, "\beta_2"']
\end{tikzcd}
$$

在生成元上验证. 取 $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$. 由

$$(\alpha(x_1 + x_2))^2 = (q_1 \boxplus q_2)(x_1 + x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2),$$

和

$$
\begin{aligned}
(\alpha(x_1 + x_2))^2 &= (\alpha x_1 + \alpha x_2)^2 \\
&= (\beta_1(x_1) + \beta_2(x_2))^2 \\
&= q_1(x_1) + \beta_1(x_1)\beta_2(x_2) + \beta_2(x_2)\beta_1(x_1) + q_2(x_2)
\end{aligned}
$$

推出,

$$\beta_1(x_1)\beta_2(x_2) + \beta_2(x_2)\beta_1(x_1) = 0.$$

按分级张量积 $C = C\ell(V_1, q_1)\hat{\otimes}C\ell(V_2, q_2)$ 的泛映射性质, 知存在唯一的分级代数同态 β 使得下图是交换的:

$$
\begin{tikzcd}
C\ell(V_1, q_1) \arrow[r] \arrow[dr, "\beta_1"'] & C\ell(V_1, q_1)\hat{\otimes}C\ell(V_2, q_2) \arrow[d, dashed, "\beta"] & C\ell(V_2, q_2) \arrow[l] \arrow[dl, "\beta_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

现在我们把所有的交换图表放在一起得出下图是交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\alpha"'] & C \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

$\square$

6.3.5 张量积构成的 Clifford 代数

我们回想, 对于 F 上的一个有限维向量空间 V, 我们已经构造了它的张量代数

$$TV = \oplus_{p=0}^{\infty} T^p V,$$

其中

$$T^pV = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{ 次}}.$$

设 q 为 V 上的二次型. 使用如下集合

$$\{v \otimes v - q(v) : v \in V\}$$

生成 F 代数 TV 的理想 Q. 设 $\iota : V \to TV$ 是自然包含映射, 取商代数 $C_q := TV/Q$ 和自然投影 $\pi : TV \to C_q$, 取

$$\rho : V \to C_q$$

为 $\rho = \pi \circ \iota$.

命题 6.33 设 A 是一个 F 代数, $\alpha : V \to A$ 是线性映射使得 $\alpha(v)^2 = q(v)$. 则存在唯一的 F 代数同态 $\beta : C_q \to A$ 使得 $\alpha = \beta \circ \rho$.

证明 由张量代数的泛映射性质可知, 给定 α, 存在唯一的 F 代数同态 $h : TV \to A$ 使得 $\alpha = h \circ \iota$ 其中 $\iota : V \to TV$ 是自然包含. 于是, 对于 $v \in V$, 我们有

$$h(v \otimes v) = h(v)^2 = \alpha(v)^2 = q(v),$$

从而 $h(Q) = 0$. 因此我们可以定义一个唯一的 F 代数同态 $\beta : C_q \to A$ 使得 $h = \beta \circ \pi$, 其中 $\pi : TV \to C_q$ 是到商代数上的自然投影. 现在容易验证 β 就是所求的映射.

设 $\eta : (V, q) \to (V, q)$ 是二次空间的一个等距同构. 我们取 $\alpha = \rho \circ \eta$, 则由 C_q 的构造知有代数同态 $\beta : C_q \to C_q$ 延拓了 α:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta"] & C_q \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[r, "\rho"] & C_q \end{tikzcd}$$

我们用 $\tilde{\eta}$ 表示映射 β. 如果我们取 η 为映射 $-\mathrm{Id} : V \to V : v \mapsto -v$, 则 $(-\mathrm{Id})\tilde{} : C_q \to C_q$ 满足 $((-\mathrm{Id})\tilde{})^2 = \mathrm{Id}$. 从此得知 $(-\mathrm{Id})\tilde{}$ 的特征值为 ± 1, 于是有特征空间分解

$$C_q = C_q^0 \oplus C_q^1,$$

其中 C_q^0 是特征值为 1 的特征向量所组成的空间, C_q^1 是特征值为 -1 的特征向量所组成的空间. 现在容易验证 C_q 是和 Clifford 代数 $C\ell(V, q)$ 同构的 $\mathbb{Z}/2$ 分级代数.

如此便知如何从张量代数构造出 Clifford 代数. □

6.4 正交和旋群

6.4.1

给定域 F 上向量空间 V 的一个非退化二次型 q. 由所有从 (V,q) 到 (V,q) 的等距双射所组成的集合构成一个群, 称为 q 的**正交群** (orthogonal group), 记作 $O(q)$. 行列式 $\det: O(q)\to F^{\times}$ 的核称为**特殊正交群** (special orthogonal group), 记为 $SO(q)$.

如果 V 是 F^n 并且使用 F^n 的标准基时二次型 q 的矩阵是单位矩阵, 我们用 $O(n)$ 表示 $O(q)$. 这样

$$O(n)=\{M\in GL(n,F): {}^TMM=I\}.$$

设 (V,q) 是一个非退化二次空间, 及 $q(x)=b(x,x)$.

用 (V,q) 内非迷向向量 y 来定义的对称

$$\tau_y: V\to V: x\mapsto x-\frac{2b(x,y)}{b(y,y)}y$$

是正交群 $O(q)$ 的元素. 称这样得来的 τ_y 为 $O(q)$ 内的对称.

定理 6.34 (Cartan-Dieudonne) $O(q)$ 中的每一个元都是对称的乘积.

E. Cartan (嘉当, 1869 — 1951) 是法国数学家, 在李群理论及其几何应用方面奠定基础, 对微分几何做出了重大贡献. 他的儿子 H. Cartan (1904 — 2008) 亦是名数学家.

J. Dieudonné (1906 — 1992) 是法国代数学家.

证明 对 V 的维数用归纳法. 设 $T\in O(q)$, 取 $x\in V$ 使得 $q(x)\neq 0$, 令 $y=Tx$. 则 $q(y)\neq 0$. 正如 Witt 消去定理的证明的开始部分, 我们可以找到一个对称 τ_w, 其中 $w=x+\varepsilon y$, ε 或者是 1 或者是 -1, $\tau_w y=-\varepsilon x$. 令 $T'=\tau_w T$. 则 T' 将 $x^{\perp}$ 映射到 $x^{\perp}$, 且 $x^{\perp}$ 是一个 $n-1$ 维非退化子空间, 其中 n 是 V 的维数. 由归纳可知, 限制 $T'\mid x^{\perp}=\tau'_{w_1}\tau'_{w_2}\cdots\tau'_{w_k}$, 其中 τ'_{w_i} 是 $x^{\perp}$ 中的对称, 由 $w_i\in x^{\perp}$ 给出.

由 $x\perp w_i$, 我们看出 $\tau'_{w_i}(x)=x$. 同样, $\tau'_{w_i}=\tau_{w_i}\mid x^{\perp}$. 则 $T'':=\tau'_{w_k}\tau'_{w_2}\cdots\tau'_{w_1}T'$ 是 $x^{\perp}$ 上的单位元, 而且 $T''x=T'x=\pm x$. 如果 $T''x=x$, $T''=1$, 并且如果 $T''x=-x$, 则 $T''=\tau_x$. 不论哪种情况, T' 是一个对称积, 因此 $T=\tau_w T'$ 也是一个对称积. □

这个定理可以加以改进为: 一个 n 维向量空间上的任一正交变换都是不超过 n 个对称的乘积.

6.4.2

在二次型 q 的 Clifford 代数 $C\ell(q)$ 上, 我们设定一个反自同构 $x \to x^T$ 如下: 当 $x \in V$ 时, 我们设 $x^T = x$, 然后设

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)^T = x_n \otimes \cdots \otimes x_1.$$

由 q 的 Clifford 代数 $C\ell(q)$ 的泛性质可知, 任一 $\sigma \in O(q)$ 定义 $C\ell(q)$ 的一个代数自同构. 这给出一个群同态

$$c : O(q) \to \mathrm{Aut}(C\ell(q)).$$

$O(q)$ 有元素 $-\mathrm{Id} : V \to V : v \mapsto -v$. 令 $\gamma := c(-\mathrm{Id})$.

设 $\bar{x} = \gamma(x^T)$. 则

$$^{-} : C\ell(q) \to C\ell(q) : x \mapsto \bar{x}$$

为 $C(q)$ 的对合, 即 $\bar{\bar{x}} = x$. 用 $N(x) = x\bar{x}$ 定义一个范数 $N : C\ell(q) \to C\ell(q)$. 则对于 $x \in V$, 有 $N(x) = -q(x)$.

称 $s \in C\ell(q)$ 为 Clifford 代数 $C\ell(q)$ 的可逆元, 如果存在 $t \in C\ell(q)$ 使得 $ts = st = 1$. 用 $C\ell(q)$ 的可逆元组成的乘法群记为 $C\ell(q)^\times$. 这个群包含所有的元 $v \in V$ 使得 $q(v) \neq 0$.

二次型 q 的 **Clifford 群**定义为

$$\Gamma(q) = \{s \in C\ell(q)^\times : \gamma(s)Vs^{-1} = V\}.$$

由 Γ 的定义可知, 对于 Γ 中的任一元 s,

$$\alpha_s : x \mapsto \gamma(s)xs^{-1}$$

是 V 的一个自同构. 这样我们得到一个同态

$$\alpha : \Gamma(q) \to \mathrm{Aut}_F(V).$$

特殊正交群在 α 下的逆像称为特殊 Clifford 群, 记为 $S\Gamma$, 即 $S\Gamma = \alpha^{-1}(SO(q))$.

命题 6.35 (1) $\mathrm{Ker}\,\alpha = F^\times$.

(2) $N(\Gamma(q)) \subset F^\times$.

(3) $N : \Gamma(q) \to F^\times$ 是一个同态.

(4) $\alpha(\Gamma(q)) = O(q)$.

(5) $1 \to F^\times \to \Gamma(q) \xrightarrow{\alpha} O(q) \to 1$ 是一个正合序列.

证明 (1) 为了证明 $\mathrm{Ker}\,\alpha = F^\times$, 回想 Clifford 代数是 mod 2 分次的: $C\ell(q) = C\ell^0(q) \oplus C\ell^1(q)$, 且 γ 是 $C\ell^0(q)$ 的单位元, 其包含 F. 因此 $F^\times \subset \mathrm{Ker}\,\alpha$.

记 $s = s_0 + s_1$, 其中 $s_i \in C^i(q)$. 取 $s \in \mathrm{Ker}(\alpha)$. 于是, 对于所有的 $x \in V$, 有 $\gamma(s)x = xs$, 即 $(s_0 - s_1)x = x((s_0 + s_1)$. 因此 $s_0x = xs_0$ 且 $-s_1x = xs_1$. 这就是说, s_0 包含在 $C(q)$ 的中心且在 $C\ell^0(q)$ 的中心. 由于这两个代数中一个是中心的, 我们推出 $s_0 \in F$.

如果能够证明 $s_1 = 0$, 我们就完成了. 我们通过归纳法这样做. 记 $q = q' \boxplus \langle a\rangle$. 则 $C\ell(q) = C\ell(q')\hat{\otimes}\{a\}$, 其中 $\{a\} = F + Fe$ 和 $e^2 = a$. 利用这个分解, 我们记 $s_1 = x + ey$, 其中 $x \in C\ell^1(q')$ 和 $y \in C\ell^0(q')$. 由 $e(x + ey) = ex + ay$ 和

$$e(x + ey) = -(x + ey)e = -xe - eye = ex - ay.$$

我们可得 $y = 0$. 由归纳假设我们可得 $x = 0$.

(2) 为了证明 $N(\Gamma(q)) \subset F^\times$. 这可由部分 (1) 推出, 通过证明, 对于 $s \in \Gamma(q)$, 我们有 $\alpha(N(s))$ 是一个单位元. 为此, 我们首先需要 $N(s) \in \Gamma(q)$. 这可由下式推出

$$\gamma(s)s^TV(s\gamma(s^T))^{-1} = V.$$

现在, 对于 $x \in V$, 我们有

$$\gamma(s)xs^{-1} = \alpha(x).$$

由 $\alpha_s(x)^T = \alpha_s(x)$, 我们可得

$$\gamma(s)xs^{-1} = (s^T)^{-1}x\gamma(s)^T$$

和

$$s^T\gamma(s)x = x\gamma(s)^Ts.$$

因此 $\gamma(s^T)s \in \mathrm{Ker}\,\alpha$. 利用 $\gamma(s^T)s = N(\gamma(s^T))$ 和 $s = \gamma(\gamma(s^T))^T$, 我们完成了证明.

(3) 由于 $N(y) \in F^\times$, 我们得到

$$N(xy) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = N(x)N(y).$$

(4) 为了证明 $\alpha(\Gamma(q)) = O(q)$, 取 $s \in \Gamma(q)$ 和 $x \in V$ 使得 $q(x) \neq 0$. 则

$$\begin{aligned} -q(\alpha_s x) &= N(\alpha_s x) = N(\gamma(s)xs^{-1}) \\ &= N(\gamma(s))N(x)N(s^{-1}) = N(x) = -q(x). \end{aligned}$$

由于非迷向向量生成 V, 所以以上等式说明 α_s 是一个等距映射. 这证明了 $\alpha(\Gamma(q)) \subset O(q)$.

我们证明, 对于非迷向的 $x \in V$, 有 $\alpha_x = \tau_x$. 事实上,

$$\alpha_x(x) = \gamma(x)xx^{-1} = -x,$$

且对于 $y \perp x$, 有

$$\alpha_x(y) = -xyx^{-1} = (yx)x^{-1} = y.$$

结论 $\alpha(\Gamma(q)) \supseteq O(q)$ 现在可由 Cartan-Dieudonné 定理推出.

(5) 是容易证明的.

范数映射 N 是 $\Gamma(q)$ 上的一个同态. N 的核记为 $\mathrm{Pin}(q)$. q 的**旋群** (spin group) $\mathrm{Spin}(q)$ 定义为 $S\Gamma \cap \mathrm{Pin}(q)$. □

命题 6.36 如果 $F^{\times 2} = F^{\times}$, 则我们有一个正合序列

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Spin}(q) \xrightarrow{\alpha} SO(q) \to 1.$$

6.5 旋量

由于 Dirac 的工作, 实 Clifford 代数在电子相对论量子场论中占有重要的地位. 在本节, 我们给出实 Clifford 代数的一些性质. 我们将不给出证明. 读者可以把本节看作一个很长的习题.

P. Dirac (1902—1984) 是英国理论物理学家, 量子力学的奠基者之一, 1933 年诺贝尔物理学奖获得者.

首先, 由 Sylvester 定理可知, 实数域 $\mathbb{R}$ 上的每一个二次型都可以对角化, 使得 $\pm$ 在对角线上. 因此, 只要考虑实向量空间 $V = \mathbb{R}^{r+s}$ 上的二次型

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2.$$

在这种情况下, 我们用 $C\ell_{r,s}$ 表示 Clifford 代数 $C\ell(V,q)$. 在二次空间内 $(\mathbb{R}^{r+s}, q)$ 取法正交基 $\{e_\mu\}$. 则我们可以说 Clifford 代数 $C\ell_{r,s}$ 是由 $\{e_\mu\}$ 所生成的实结合代数, 使得生成元满足以下条件

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu} q(e_\mu) \cdot 1.$$

Clifford 代数 $C\ell_{r,s}$ 是 $\mathbb{Z}/2$ 分级的, 即

$$C\ell_{r,s} = C\ell_{r,s}^0 \oplus C\ell_{r,s}^1.$$

偶数个基元的乘积得出集合

$$\{1, e_{\mu_1}e_{\mu_2}, e_{\mu_1}e_{\mu_2}e_{\mu_3}e_{\mu_4}, \cdots\}.$$

这个集合是向量空间 $C\ell_{r,s}^0$ 的基底.

$C\ell_{r,s}$ 的可逆元集合 $C\ell_{r,s}^{\times}$ 形成一个乘法群.

二次型 q 的 $\mathrm{Pin}(q)$ 群现在记为 $\mathrm{Pin}_{r,s}$. 这个 $C\ell_{r,s}^{\times}$ 的子群是由集 $\{v \in V : q(v) = \pm 1\}$ 生成的. 在这种情况下, $\mathrm{Spin}(q)$ 记为 $\mathrm{Spin}_{r,s}$ 并且

$$\mathrm{Spin}_{r,s} = \mathrm{Pin}_{r,s} \cap C\ell_{r,s}^0.$$

$C\ell_{r,s}$ 的一个表示是指一个结合代数同态 $\pi : C\ell_{r,s} \to \mathrm{End}(V)$, 其中 $\mathrm{End}(V)$ 是从向量空间 V 到 V 的线性映射所组成的 $\mathbb{R}$ 代数. 我们说 π 是不可约表示, 如果 V 没有子空间 W 使得 $\pi(C\ell_{r,s})(W) \subset W$.

如果 $r+s$ 是偶数, 则单代数 $C\ell_{r,s}$ 的所有不可约表示是等价的. 我们选择其中之一, 比如 (π, V), 且我们称表示 π 为 $C\ell_{r,s}$ 的**旋量表示** (spinor representation); 这个表示的空间 V 被称为旋量空间.

如果 $r+s$ 是奇数, 则 $C\ell_{r,s}^0$ 是中心单代数, 并且它的不可约表示都是彼此等价的. 我们选择其中之一, 比如 (π^0, V), 我们称它为旋量表示; 这个表示的空间 V 被称为旋量空间.

旋量空间 V 里的向量称为**旋量** (spinor). (比如, 参考 Chevalley 的旋量书籍 *Algebraic Theory of Spinors* 第 2.4 和 2.5 节).

然而, 这没有给出旋量的任何感觉. 我们将考虑一个例子. 取 $\mathbb{C}^3$ 的标准基 $\{e_1, e_2, e_3\}$. 任一向量 $x \in \mathbb{C}^3$ 可表为 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. 考虑二次型

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

设

$$\mathscr{N} := \{x \in \mathbb{C}^3 : q(x) = 0\}.$$

$\mathscr{N}$ 的非零元素是 q 的迷向向量. 例如 $(1, i, 0) \in \mathscr{N}$.

取 $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{C}^2$. 设

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2, \quad x_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2), \quad x_3 = -2\xi_0\xi_1.$$

则 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{N}$ 从这些方程可解得

$$\xi_0^2 = \frac{x_1 - ix_2}{2}, \quad \xi_1^2 = \frac{-x_1 - ix_2}{2}.$$

这表明, 映射

$$\rho : \mathbb{C}^2 \to \mathscr{N} : (\xi_0, \xi_1) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$$

是 $\mathscr{N}$ 的一个 4 重覆盖.

以 e_3 为轴, 沿着从 e_1 到 e_2 的方向, 穿过一个角度 θ 的旋转记为 R_θ. 用坐标可以写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

我们把 ξ_0^2 看作一个映射来考虑, 即

$$\xi_0^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - ix_2}{2},$$

则 R_θ 把映射 ξ_0^2 旋转为 $\xi_0^2 \circ R_\theta$, 即

$$\xi_0^2 \circ R_\theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}((\cos\theta x_1 - \sin\theta x_2) - i(\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2)) = e^{i\theta}\frac{x_1 - ix_2}{2}.$$

所以 R_θ 把 ξ_0 旋转为 $e^{i\theta/2}\xi_0$. 于是, 当旋转角度 θ 为 2π 时, 向量 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{N}$ 返回到它最初的位置, 但 ξ_0 变为 $e^{i\pi}\xi_0 = -\xi_0$.

让我们把 $(\xi_0\,\xi_1)$ 看作一种带正负极的迷向向量. 沿一个坐标轴通过一个 2π 度的旋转后 $(\xi_0\,\xi_1)$ 由正极转为负极. 因为这种现象我们把 4 重覆盖 $\rho : \mathbb{C}^2 \to \mathscr{N}$ 的纤维 $\rho^{-1}(x)$ 中的点 $(\xi_0\,\xi_1)$ 称为旋量.

6.5.1 $C\ell_3$

3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基记为

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

取二次型为

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

这个二次型的特殊正交群是 $SO(3)$. 这是 $\mathbb{R}^3$ 的旋转群.

把这个二次型的 Clifford 代数 $C\ell_{3,0}$ 记为 $C\ell_3$. 这是一个由集合 $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ 所生成的结合代数, 并且生成元满足下面的条件

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \cdot 1, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant 3.$$

作为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $C\ell_3$ 是 8 维的, 它的基 (作为向量空间) 是

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3.$$

这样我们可以将 $C\ell_3$ 中的任一元表示为如下形式

$$v = \langle v\rangle_0 + \langle v\rangle_1 + \langle v\rangle_2 + \langle v\rangle_3,$$

其中 $\langle v\rangle_0 = c_0 1$, $\langle v\rangle_1 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$, $\langle v\rangle_2 = c_{12}e_1e_2 + c_{13}e_1e_3 + c_{23}e_2e_3$, $\langle v\rangle_3 = d\, e_1e_2e_3$. 则我们可以在 $C\ell_3$ 上引入对合如下

$$\tilde{v} = \langle v\rangle_0 + \langle v\rangle_1 - \langle v\rangle_2 - \langle v\rangle_3,$$

$$\bar{v} = \langle v\rangle_0 - \langle v\rangle_1 - \langle v\rangle_2 + \langle v\rangle_3.$$

设 $M_2(\mathbb{C})$ 是 2×2 复矩阵代数. 作为实数域上的一个代数来考虑的话, 这个代数是 8 维的. 下面 $M_2(\mathbb{C})$ 中的矩阵称为 Pauli 矩阵

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

并且满足如下关系

$$\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\nu\sigma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\cdot 1, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant 3,$$

上式是用矩阵乘和加写成的.

W. Pauli (1900—1958) 是奥地利物理学家, 1945 年诺贝尔物理学奖获得者. 他的博士生导师 A. Sommerfeld (1868—1951) 被提名诺贝尔物理学奖 81 次但没有得奖. 不过 Sommerfeld 却有 7 个学生得诺贝尔奖! 他们是 Heisenberg, Pauli, Debye, Bethe Pauling, Rabi 和 von Laue.

我们用 e_0 代表 $C\ell_3$ 中的元 1. 我们可以验证, 映射

$$C\ell_3 \to M_2(\mathbb{C}) : e_j \mapsto \sigma_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant 3$$

是一个实代数的同构. 这个同构是 Clifford 代数 $C\ell_3$ 的一个表示.

$C\ell_3$ 中的旋量群是

$$\mathrm{Spin}(3) = \{s \in C\ell_3 : \tilde{s}s = 1,\ \bar{s}s = 1\}.$$

在由 Pauli 矩阵给出的上述同构 $C\ell_3 \to M_2(\mathbb{C})$ 下, Spin(3) 的像是

$$SU(2) = \{s \in M_2(\mathbb{C}) : s^\dagger s = I,\ \det s = 1\},$$

其中 $s^\dagger = \bar{s}^T$ 表示矩阵 s 的复共轭转置.

取 $s \in SU(2)$, $x \in M_2(\mathbb{C})$. 按公式 $p(s)x = sxs^\dagger$ 定义 $M_2(\mathbb{C})$ 的同态 $p(s)$. 设

$$\mathfrak{S} := \{x \in M_2(\mathbb{C}) : \mathrm{Tr}(x) = 0, x^\dagger = x\}.$$

则有实向量空间同构 $\Phi : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^3$. 同态 $p(s)$ 对应于 $\mathbb{R}^3$ 的同态 $r(s)$, 即 $r(s) = \Phi p(s)\Phi^{-1}$, 见下图:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p(s)"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "r(s)"] \\
\mathfrak{S} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

不难证明 $r(s) \in SO(3)$ 并且 $r(-s) = r(s)$. 这样映射 $s \mapsto r(s)$ 给出正合序列

$$1 \to \{\pm 1\} \to SU(2) \to SO(3) \to 1.$$

我们已有同构 $\mathrm{Spin}(3) \cong SU(2)$. 正如下图所示, 由此我们可以看出, $\mathrm{Spin}(3)$ 是 $SO(3)$ 的一个二重覆盖.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Spin}(3) \arrow[d, "\cong"'] & & \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] & SU(2) \arrow[r] & SO(3) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

6.5.2 $C\ell_{1,3}$

$\mathbb{R}^4$ 的标准基记为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. 在 $\mathbb{R}^4$ 的标准基下这一次用的二次型是

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

我们有时用 $\mathbb{R}^{1,3}$ 表示这个二次空间 $(\mathbb{R}^4, q)$, 此时记 $\mathrm{Spin}(q)$ 为 $\mathrm{Spin}_{1,3}$.

这个二次空间的 Clifford 代数 $C\ell_{1,3}$ 是一个由集合 $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 所生成的结合 $\mathbb{R}$ 代数, 并且生成元满足下面的条件

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu} q(e_\mu) \cdot 1, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant 4.$$

设 $M_4(\mathbb{C})$ 是由 4×4 复矩阵构成的代数. 考虑 $M_4(\mathbb{C})$ 中的如下矩阵

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

其中 σ_j 是 Pauli 矩阵, $1 \leqslant j \leqslant 3$. 它们满足条件

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} I,$$

其中 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. 有 $\eta_{00} = 1$, 且在 $\mu = 1, 2, 3$ 时, $\eta_{\mu\mu} = -1$. 如果 $\mu \neq \nu$, 则 $\eta_{\mu\nu} = 0$.

这样我们可以定义表示 $\pi : C\ell_{1,3} \to M_4(\mathbb{C})$ 为 $\pi(1) = I$ (单位矩阵), $\pi(e_j) = \gamma_{j-1}$.

二次型 q 的正交群 $O(q)$ 记为 $O(1,3)$, 这也称为**齐次 Lorentz 群** (homogeneous Lorentz group). 这是一个 6 维非紧的非交换实李群.

二次型 q 的特殊正交群 $SO(q)$ 记为 $SO(1,3)$, 这也称为**真齐次 Lorentz 群** (proper homogeneous Lorentz group).

$SO(1,3)$ 有个子群

$$SO^+(1,3) = \{(a_{ij}) \in SO(1,3) : a_{11} > 0\}.$$

这称为**限制 Lorentz 群** (restricted Lorentz group) 或者**正交时序真齐次 Lorentz 群** (orthochronous proper homogeneous Lorentz group).

$O(1,3)$ 不是连通的, 它的所有四个连同分支都不是单连通的. $O(1,3)$ 的单位元连通分支 (即包含单位元的分支) 是 $SO^+(1,3)$ (亦记为 $SO(1,3)^o$), 它也是 $SO(1,3)$ 的单位元分支.

称半直积 $\mathbb{R}^4 \times O(1,3)$ 为非齐次 Lorentz 群或者 Poincaré 群 ($\mathbb{R}^4$ 是正规子群). 群定律是

$$(a,\Lambda)(a',\Lambda') = (a+\Lambda a', \Lambda\Lambda').$$

Poincaré 群由

$$(a,\Lambda) : x \mapsto a + \Lambda x$$

作用在 $\mathbb{R}^4$ 上.

上述群被用于相对论; 它们的有限和无限维表示已有深入研究.

设 $\mathscr{H}$ 是复 Hermite 矩阵的集合,

$$\mathscr{H} = \{s \in M_2(\mathbb{C}) : s^\dagger s = I\},$$

其中 $s^\dagger$ 表示矩阵 s 的复共轭转置. 4 维实空间 $\mathscr{H}$ 的任一向量可以唯一表达为 $\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu$, 其中 σ_μ 是 Pauli 矩阵.

按如下方式对应得双射 $\mathscr{H} \leftrightarrow \mathbb{R}^{1,3}$:

$$\sum_\mu x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

矩阵 σ_μ 是 Pauli 矩阵.

行列式为 1 的 2×2 复矩阵构成的群 $SL_2(\mathbb{C})$ 由如下方式作用在 $\mathscr{H}$ 上

$$X \mapsto AXA^\dagger,$$

其中 $X \in \mathscr{H}$, $A \in SL_2(\mathbb{C})$.

另一方面, 可逆 4×4 实矩阵构成的群 $GL_4(\mathbb{R})$ 可由左乘法作用在 $\mathbb{R}^4$ 上: $x \mapsto Ax$, 其中 $x \in \mathbb{R}^4$ 和 $A \in GL_4(\mathbb{R})$.

在双射下 $\mathscr{H} \leftrightarrow \mathbb{R}^{1,3}$, 则 $A \in SL_2(\mathbb{C})$ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用对应于 $B \in GL_4(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^{1,3}$ 上的作用.

通过简单的计算, 我们可得矩阵 B 的元为

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A\sigma_\nu A^\dagger \sigma_\mu), \quad 0 \leqslant \mu,\nu \leqslant 3,$$

并且可以验证 $B \in SO^+(1,3)$ 和同态

$$SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+(1,3) : A \mapsto B$$

是一个二重覆盖. 于是有下面的正合序列

$$1 \to \{\pm 1\} \to SL_2(\mathbb{C}) \to SO^+(1,3) \to 1.$$

利用 $\mathrm{Spin}_{1,3}$ 与 $SL_2(\mathbb{C})$ 同构便知 $\mathrm{Spin}_{1,3}$ 是 $SO^+(1,3)$ 的一个二重覆盖.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Spin}_{1,3} \arrow[d, "\cong"'] & & \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] & SL_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & SO^+(1,3) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

后记 关于二次型的教科书很多, 例如

[1] T. Y. Lam, *Introduction to Quadratic Forms over Fields*, Amer Math Soc, 2005.
[2] O. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, 1973.
[3] C. L. Siegel, *Lectures on Quadratic Forms*, TATA Institute, 1959.
[4] G. Shimura, *Arithmetic of Quadratic Forms*, Springer, 2010.

近年最有创意的关于二次型的工作是

[1] M. Bhargava, Higher composition laws and applications, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006, 271–294.

关于本章所述的正交群、自旋群和上一章的酉群、辛群以及第一章的一般线性群、特殊线性群组成所谓典型群, 可参看

[1] 华罗庚, 万哲先, 典型群, 上海: 上海科技出版社, 1963.
[2] H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1939.
[3] J. Carrell, J. Dieudonne, *Invariant Theory, Old and New*, Academic Press, 1970.
[4] R. Goodman, N. Wallach, Symmetry, representations and Invariants, Springer GTM, 2009.
[5] R. Howe, Perspectives on invariant theory, in: The Schur Lectures (1992) (Israel Mathematical Conference Proceedings 8), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1995, 1–182.

典型群都是李群, 可参看

[1] 严志达, 许以超, Lie 群及其 Lie 代数, 北京: 高等教育出版社, 1958.
[2] V. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Springer, 1974.
[3] A. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhauser, 2002.
[4] R. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, 1972.
[5] R. Carter, *Finite Groups of Lie Type*, Wiley, 1985.

[6] S. Helgason, *Differential Geometry Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

以下两本书用矩阵来介绍李群, 这样是比较容易些.

[1] M. Curis, *Matrix Groups*, Springer, 1984.
[2] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Springer, 2003.

当然李群是拓扑群, 请看

[1] 黎景群, 冯绪宁, 拓扑群引论, 北京: 科学出版社, 2014.

典型群亦是代数群 (algebraic group). 代数群的标准教科书有

[1] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1991.
[2] J. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1975.
[3] A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhauser, 1998.

从 Siegel 关于二次型的亏数公式出发, Weil 导得玉河数猜想 (Tamagawa number conjecture). 可参看

[1] 黎景辉, 陈志杰, 赵春来, 代数群引论, 北京: 科学出版社, 2006.

这方面最新的工作可看哈佛大学的 J. Lurie 的网页.

关于 building 理论可看

[1] J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs* (Lecture Notes in Mathematics), Springer, 1986.
[2] F. Bruhat and J. Tits, Groupes reductifs sur un corps local, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* No. 41 (1972), 5–251; 60 (1984), 197–376.
[3] E. Landvogt, *A Compactification of the Bruhat-Tits Building* (Lecture Notes in Mathematics 1619), Springer, 1995.
[4] P. Abramenko, K. Brown, *Buildings*, Springer, 2008.
[5] R. Weiss, *The Structure of Spherical Buildings*, Princeton University Press, 2003.
[6] R. Weiss, *The Structure of Affine Buildings*, Princeton University Press, 2008.

Clifford 代数可参看

[1] I. R. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press, 2009.
[2] G. Shimura, *Arithmetic and Analytic Theories of Quadratic Forms and Clifford Groups* (Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs), 2004.
[3] J. Gilbert, M. Murray, *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2008.
[4] H. Blaine Lawson, M-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

习 题

1. 证明: 二次型 $q(x,y)=x^2-y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 是非退化的, 但 $q(x,y,z)=x^2-y^2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 是退化的.

2. 称一个线性映射 $N:V\to V$ 是**幂零的**, 如果 $N^k=0$ 对于某个非负整数 k. 称 $T:V\to V$ 是**幂幺的**, 如果 $T-1$ 是幂零的.

(a) 证明: 如果 T 是幂幺的, 则存在一个非零向量 u, 使得 $Tu=u$. (提示: 取任一向量 $v\neq 0$, 且设 u 是如下序列中最后一个非零向量 $v,(T-1)v,(T-1)^2v,\cdots$.) 如果 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 在域 F 上的基且 $v_1=u$, 证明: $\{v_2+Fu,\cdots,v_n+Fu\}$ 是 V/Fu 的一个基.

(b) 用归纳法证明: 如果 T 是幂幺的, 则 $\det T$ (T 的任一矩阵的行列式) 是 1.

3. 二次空间 (V,q) 的一个线性双射 $T:V\to V$ 称为是一个正交变换, 如果 $q(Tx)=q(x)$ 对所有的 $x\in V$ 都成立. 证明: 如果 T 是正交的且 $V_0:\{x\in V:Tx=x\}$, 则 $\dim V=\dim V_0+\dim(1-T)V$. 证明: $V_0=((1-T)V)^{\perp}$, 从而 $V_0^{\perp}=(1-T)V$.

4. 我们称一个非退化二次型 q 为迷向的, 如果存在一个非零向量 v, 使得 $q(v)=0$. 如果 q 不是迷向的, 我们称它为非迷向的. 设 q 是有限域上一个 $n\geqslant 3$ 维向量空间上的一个非退化二次型. 证明: q 是迷向的.

5. 设 y 一个非退化二次空间 (V,q) 中的一个非迷向向量. 我们用 y 定义一个对称

$$\begin{aligned}\tau_y: V&\to V\\ x&\mapsto x-\frac{2b(x,y)}{b(y,y)}y.\end{aligned}$$

(a) $q(\tau_y,x)=q(x)$ 对所有的 x.

(b) $\tau_y=x\Leftrightarrow x\perp y$, 即 $\tau_y|_y^{\perp}$ 是单位映射.

(c) $\tau_y=-y$.

(d) $\tau_y\tau_y$ 是单位映射.

6. 给定域 F 上的一个 n^2 维代数 A. 设 L 是一个包含 F 的域. 证明: 一个 L 表示的延拓 $\rho_L:A\otimes_F L\to M_n(L)$ 是一个同构.

7. 设 AK 上的一个 n^2 维中心单代数.

(a) 证明: 存在一个非零 F 线性形式 $\tau:A\to F$ 和一个函数 $\nu:A\to F$, 使得如果 L 是任何一个包含 F 的域, 并且 $\rho:A\to M_n(L)$ 是 A 的任意一个 L 表示,

$$\tau(a)=\mathrm{Tr}(\rho(a))\ \ \text{和}\ \ \nu(a)=\det(\rho(a))$$

对所有的 $a\in A$ 成立.

(b) 证明: $\tau(xy)=\tau(yx)$ 和 $\nu(xy)=\nu(x)\nu(y)$.

(c) 对于 $x\in A$, 引入 F 线性映射

$$M_x:A\to A:y\mapsto xy.$$

证明: 线性映射 M_x 的行列式 $\det M_x$ 满足 $\det(M_x)=\nu(x)^n$.

8. 设 (V,q) 是一个二次空间. 设 b 是一个与 q 相伴的双线性形式. 一个 (V,q) 的**双曲对**是指 V 中的一对线性无关的向量 $\{u,v\}$, 使得

$$b(u,u)=0=b(v,v),\quad b(u,v)=1=b(v,u).$$

设 $\{u,v\}$ 是一个双曲对, 且 $w\in(Fu+Fv)^{\perp}$ 是非迷向的.

(a) 证明: $q(w-q(w)u)\neq 0$.

(b) 设 S 是由 $u\mapsto u$ 定义的线性映射, $v\mapsto v-q(w)u-w$ 和 $x\mapsto x+b(x,w)u$ 对于 $x\in(Fu+Fv)^{\perp}$. 证明: $S=\tau_w\tau_{w-q(w)u}$.

(c) 证明: S 是幂幺的.

(d) 证明: 如果 $\dim V\geqslant 3$ 且 q 是迷向的, 则正交群 $O(V,q)$ 包含幂幺变换 $\neq 1$.

9. (a) 证明: $C\ell_{0,8}$ 同构于 16×16 实矩阵构成的代数 $M_{16}(\mathbb{R})$.

(b) 设 $n=r+S$. 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{n+8}\}$ 是 $\mathbb{R}^{r,s+8}$ 的一个规范正交基. 证明: 由 $\{e_{n+1},\cdots,e_{n+8}\}$ 产生的子代数 $C\ell_{r,s+8}$ 同构于 $C\ell_{0,8}$.

(c) 令

$$e_j'=e_je_{n+1}\cdots e_{n+8},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

证明: $C\ell_{r,s+8}$ 的子集 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 是对于 $C\ell_{r,s}$ 的一个生成子集.

(d) 证明: 我们有同构

$$C\ell_{r,s+8}\cong C\ell_{r,s}\otimes M_{16}(\mathbb{R})\cong M_{16}(C\ell_{r,s}).$$

(e) 证明: $C\ell_{1,1}$ 同构于 $M_2(\mathbb{R})$, 从而可推出, $C\ell_{1,9}\cong M_{32}(\mathbb{R})$.

10. 我们用 $\mathbb{R}^{r,s}$ 表示带有二次型 $x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2$ 的二次空间. 令 $n=r+s$, 取 $\mathbb{R}^{r,s}$ 的一个规范正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$. 设 $r\geqslant 4$ 且 $h=e_1e_2e_3e_4$, 如果 $j>4$, $e_j'=e_j$; 如果 $j\leqslant 4$, $e_j'=e_jh$. 证明: $C\ell_{r,s}$ 的子集 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 是对于 $C\ell_{r-4,s+4}$ 的一个生成集合; 从而证明:

$$C\ell_{r,s}\cong C\ell_{r-4,s+4}.$$

11. 设 $\mathbb{H}$ 表示四元数代数 $(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}})$. 证明: $C\ell_6$ 同构于 $M_4(\mathbb{H})$, 从而可以推出 $C\ell_{2,4}\cong M_4(\mathbb{H})$.

12. 设 B_i 是 F 向量空间 V_i 的双线性型, $i=1,2$. 证明:

$$B_1\otimes B_2(u_1\otimes u_2,v_1\otimes v_2)=B_1(u_1,v_1)B_2(u_2,v_2)$$

是 $V_1\otimes_F V_2$ 的双线性型.

13. 设 q_i 是 F 向量空间 V_i 的二次型, $i=1,2$. 证明:

(a)

$$q_1\otimes q_2(v_1\otimes v_2)=q_1(v_1)q_2(v_2)$$

是 $V_1\otimes_F V_2$ 的二次型.

(b) 与 $q_1\otimes q_2$ 相应的双线性型

$$b_{q_1\otimes q_2}=b_{q_1}\otimes b_{q_2}.$$

第七章　模

设 V 是域 F 上的有限维向量空间, $\phi: V \to V$ 是 F 线性映射. 这部分的一个目的是利用 V 看作 $F[\phi]$ 模的结构来分析 ϕ 的结构, 这样便得出线性映射的矩阵的典范形式.

本章从模的定义开始.

我们将假设所有的环都带有乘法的单位元 (或称作幺元). 记 1_R 为 R 的单位元.

7.1　模和同态

引入环上模这个概念的一个方法是从域 F 上的向量空间 V 的定义开始. 假设我们保持域 F 上的向量空间 V 的公理系统, 但把域 F 换成环 R, 那么就得到模的定义.

定义 7.1　首先给定环 R. 如果交换群 $(M,+)$ 附有映射 $R \times M \to M : (r,x) \to rx$ 使得对任意 $r,s \in R$, $x,y \in M$ 以下条件成立

(1) $r(x+y) = rx + ry$,

(2) $(r+s)x = rx + sx$,

(3) $(rs)x = r(sx)$,

(4) $1_R x = x$,

则称 M 为 R **模** (R-module).

在上面的定义中, 环 R 上的元素 r 是在 M 的元素 x 的左边相乘, 我们称 M 为左 R 模; 那么右 R 模 N 是通过映射 $N \times R \to N : (y,r) \to yr$ 来定义, 其满足类似的公理. 例如, 公理 (1) 将会替换成

$(1)'$ $(x+y)r = xr + yr$.

以后我们所提到模 R, 一般是指左 R 模. 此外, 我们称映射 $(r,x) \to rx$ 为 R 在 M 上的标量乘法或 R 在 M 上的作用.

例 7.2　域 F 上的任一向量空间 V 自然是一个 F 模.

例 7.3 设 R 是环, $M = R$. 我们把 M 看作为 R 中的加法群. 在这个例子中, 标量乘法其实就是由环 R 上的乘法给出.

例 7.4 设 R 为整数环, M 为任一交换群. 对任意正整数 n 和 $x \in M$, 记

$$nx := \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{ 个}}, \quad (-n)x := -(nx), \quad 0x := 0.$$

例 7.5 读者会觉得域 F 上的 n 维向量空间 V 是很自然出现的结构, 那为什么要有模呢? 设 R 是所有从 V 到 V 的线性映射. 若 $n > 1$, 则 R 是个非交换环. 定义

$$R \times V \to V : (\phi, v) \mapsto \phi(v).$$

容易验证, 透过这个映射 V 是 R 模. 这样我们看见只要有向量空间就自然有模了.

在域中任一非零元对乘法是可逆的, 但是一个环里不是每一个非零元对乘法都可逆. 这就是说, 在向量空间内讨论一组向量是线性无关的方法在模里便不一定可用了, 这样模的理论便不可能是向量空间理论的简单翻版.

我们需牢记这个重要例子. 事实上, 因为在介绍群论的时候, 很多定理及其证明都会用这例子来做讨论. 在这里, 建议读者可以复习一下群论并且比较一下二者之间的区别. 我们可以把环 R 上的元素看作一个算子. 那么 R 模就是一个带有算子环的交换群.

定义 7.6 设 M 为 R 模. 给定 M 的一子集 N. 对任意 $x, y \in N$, 我们有 $x + y \in M$ 以及对任意 $r \in R, x \in N$, 我们得知 $rx \in M$, 这是由于 M 为 R 模. 我们称 N 为 M 的**子模** (submodule), 如果

(1) $x, y \in N \Rightarrow x + y \in N$,

(2) $r \in R, x \in N \Rightarrow rx \in N$.

显然, $x \in N \Rightarrow -x \in N$ 和 $0 \in N$.

定义 7.7 设 M, N 为 R 模. 我们称映射 $\varphi : M \to N$ 为 R **模同态** (module homomorphism), 如果满足以下条件: 对所有 $r \in R$, $x, y \in M$, 我们有

(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

(2) $\varphi(rx) = r\varphi(x)$.

我们称双射同态为 R **模同构** (isomorphism). 当一 R 同态 φ 为单射的话, 我们称它为**单同态** (monomorphism); 当它为满射时, 我们称它为**满同态** (epimorphism).

设 $\varphi : M \to N$ 是 R 模同态. 定义 φ 的**核**为

$$\operatorname{Ker} \varphi := \{x \in M : \varphi(x) = 0\}.$$

同时, 我们定义 φ 的**像**为

$$\operatorname{Img} \varphi = \{\varphi(x) : x \in M\}.$$

给定两个 R 模 M, N, 我们可以考虑由全体从 M 到 N 全体 R 模同态构成的集合. 我们把这集合记作 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. 对 $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 我们可以定义它们的和为

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x),$$

其中 $x \in M$. 易知 $\phi + \psi$ 也是 R 模同态. 此外, 对 $r \in R$ 和 $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 现在定义映射 $r\phi : M \to N$, 对任意 $x \in M$, $(r\phi)(x) = r(\phi(x))$. 我们可以验证映射 $r\phi$ 事实上也是 R 模同态. 可以简单验证, 对于加法 $\phi + \psi$ 和标量乘法 $r\phi$, 集合 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是一个 R 模. 事实上, 这是从一个给定的模来构造一个新模的重要方法.

R 模 M 的对偶 R 模 M^* 是指 R 模 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$.

在这里, 我们讨论一下零模 $\mathbf{0}$, 即作为只含有一个元素 0 的模. 对于任意 R 模 M, 模 $\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{0})$ 只有一个元素, 其元素即为零映射, 换句话说, 把 M 中的每个元素都映到 0. 另外, $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{0}, M)$ 也是只含有一个元素, 其中元素为从 0 到 M 的包含映射. 用范畴语言来说, 零模 $\mathbf{0}$ 就是零对象.

7.2 商模

我们可以把商群的构造方法, 即任一群对其正规子群取商, 或商空间的构造方法, 即任一空间对其子空间取商过渡到模上来进行.

设 N 为 M 子模. 对 $x \in M$, 我们记

$$x + N = \{x + y : y \in N\}.$$

我们称 $x + N$ 为在 M 中 N 的一个**陪集**. 由全体这样的陪集所构成的集合 $\{x + N : x \in M\}$ 被记作为 M/N, 即

$$M/N = \{x + N : x \in M\}.$$

注意到 M/N 上的任一元素事实上是在 M 中形为 $x + N$ 的元素所构成的**子集**.

我们称 M/N 为**商模** (quotient module), 称 π 为**自然投射** (natural projection).

我们把一列 R 模同态

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \to 0$$

称为**短正合序列**, 如果 φ_1 是单射, φ_2 为满射且 $\mathrm{Img}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$. 这样的同态形式是十分常见的, 以下是一个典型例子.

命题 7.8 设 N 为 M 的子模, $i : N \to M : x \mapsto x$ 是包含同态和 $\pi : M \to M/N : x \mapsto \pi(x) := x + N$ 是一个投射. 那么

$$O \to N \to M \to M/N \to O$$

为一正合列.

证明 作为包含映射, i 是单射的而且 $\operatorname{Img} i = i(N) = N$. 剩下来是计算 π 的核. 注意到 M/N 中的零元素是 $0 + N$, 其中 $0 \in M$, 所以由 π 的定义, 得知

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\pi &= \{x \in M | \pi(x) = 0 + N\} \\ &= \{x \in M | x + N = 0 + N\}.\end{aligned}$$

由于 N 是 M 的子模, 这意味着 M 中的零元素也在 N 中. 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\pi &= \{x \in M | x + N = N\} \\ &= \{x \in M | x \in N\} \ (x + N = N \Leftrightarrow x \in N) \\ &= N.\end{aligned}$$

因此我们已经证明了 $\operatorname{Img} i = \operatorname{Ker}\pi$. □

命题 7.9 设 $\varphi : M \to N$ 是 R 模同态. 令 M' 为 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的子模, $\pi : M \to M/M'$ 为投射. 那么存在 R 模同态 $\bar{\varphi} : M/M' \to N$ 使得 $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. 亦即是说, 下图为**交换图表** (commutative diagram):

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\
M/M' \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

证明 (1) 定义 $\bar{\varphi} : M/M' \to N$ 如下: 对于 $x \in M$, 我们记

$$\bar{\varphi}(x + M') := \varphi(x).$$

现验证其为良定义的. 事实上, 如果对 $x \in M, x_1 \in M$ 有 $x + M' = x_1 + M'$, 那么存在 $y \in M'$, 使得 $x_1 = x + y$. 而且由于 φ 为同态及 $M' \subset \operatorname{Ker}\varphi$, 即得

$$\bar{\varphi}(x_1 + M') = \varphi(x_1) = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x) = \bar{\varphi}(x + M').$$

(2) 现需要证明 $\bar{\varphi}$ 是 R 模同态.

首先验证 $\bar{\varphi}$ 是可加的. 取 $x + M', y + M' \in M/M'$. 计算

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}((x + M') + (y + M')) &= \bar{\varphi}(x + y + M') \\ &= \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= \bar{\varphi}(x + M') + \bar{\varphi}(y + M').\end{aligned}$$

接着验证 $\bar{\varphi}$ 是 R 线性的. 对任意 $r \in R$ 和 $x + M' \in M/M'$, 我们有

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(r(x+M')) &= \bar{\varphi}(rx+M') \\ &= \varphi(rx) = r\varphi(x) \\ &= r\bar{\varphi}(x+M').\end{aligned}$$

(3) 最后, 验证 $\bar{\varphi} \cdot \pi = \varphi$. 事实上, 对任意 $x \in M$, 有

$$\bar{\varphi} \cdot \pi(x) = \bar{\varphi}(x+M') = \varphi(x).$$ □

7.3 循环模

命题 7.10 设 M 为 R 模. 如果 $x \in M$, 那么

$$Rx = \{rx : r \in R\}$$

是 M 的 R 子模.

证明 (1) 我们称 $x_1, x_2 \in Rx$ 是指对于某些 $r_1, r_2 \in R$, 我们有 $x_1 = r_1 x$, $x_2 = r_2 x$. 那么得知当 $r_1 + r_2$ 在 R 中时, 元素 $x_1 + x_2 = r_1 x + r_2 x = (r_1 + r_2)x$ 在 Rx 中.

(2) 对任意 $r \in R, y \in Rx$, 存在 $s \in R$ 使得 $y = sx$. 那么 $ry = r(sx) = (rs)x \in Rx$ 是由于 rs 为 R 的元素. □

定义 7.11 设 M 为 R 模, $x \in M$. 我们称模 Rx 为**循环模** (cyclic module). 对 $x \in M$, 我们称 $\operatorname{Ann} x = \{r \in R : rx = 0\}$ 为 x 的**零化子** (annihilator). 我们称非零元 x 为 M 的**挠元素** (torsion element) 如果它的零化子 $\operatorname{Ann} x \neq \{0\}$. 对不含有非零挠元素的模, 我们称作为**无挠的** (torsion free). 如果每一个非零元都是挠元素的话, 我们称 M 为**挠模** (torsion module).

例 取正整数 n, 把商环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 看作 $\mathbb{Z}$ 模. 这样 $n \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$, 所以 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是挠模.

设有 R 模 M 和 $r \in R$ 使得 $r \cdot M = 0$. 这样当然 M 是挠模. 此时条件 $r \cdot M = 0$ 让我们定义

$$(a + RrR) \cdot x = a \cdot x, \quad a \in R, x \in M,$$

于是 M 便成为 R/RrR 模了.

命题 7.12 设 M 为 R 模, $x \in M$, 则映射

$$\varphi : R \to Rx : r \mapsto \varphi(r) = rx$$

是 R 模同态并且 $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ann} x$.

证明 从定义立得 $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ann} x$. 现证 φ 为一 R 模同态. 对任意 $r_1, r_2 \in R$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + r_2) &= (r_1 + r_2)x = r_1 x + r_2 x \\ &= \varphi(r_1) + \varphi(r_2)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 r_2) &= (r_1 r_2)x = r_1(r_2 x) \\ &= r_1 \varphi(r_2).\end{aligned}$$

□

命题 7.13 设 M 为 R 模, $x \in M$. 令

$$\varphi : R \to Rx : r \mapsto rx$$

和

$$\pi : R \to R/\operatorname{Ann} x : r \mapsto r + \operatorname{Ann} x.$$

那么映射

$$\bar{\varphi} : R/\operatorname{Ann} x \to Rx : r + \operatorname{Ann} x \mapsto rx$$

是 R 模同构并且 $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. 亦即是说, 我们有交换图表:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & R_x \\ R/\operatorname{Ann} X \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

证明 由于 $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ann} x$, 从之前的性质, 我们知道 $\bar{\varphi}$ 的存在性以及 $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. 因此我们只需证明 $\bar{\varphi}$ 是双射的.

首先我们证明 $\bar{\varphi}$ 是单射. 这样, 我们需要证明如果 $\bar{\varphi}(r + \operatorname{Ann} x) = \bar{\varphi}(r_1 + \operatorname{Ann} x)$, 那么 $r + \operatorname{Ann} x = r_1 + \operatorname{Ann} x$.

因为 $\bar{\varphi}(r+\operatorname{Ann} x) = \bar{\varphi}(r_1+\operatorname{Ann} x)$, 由定义得知 $\varphi(r) = \varphi(r_1)$. 这意味着 $\varphi(r-r_1) = 0$, 即 $r - r_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$. 但我们知道 $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ann} x$, 所以 $r - r_1 \in \operatorname{Ann} x$. 这样就存在 $s \in \operatorname{Ann} x$, 使得 $r - r_1 = s$, 因此, $r + \operatorname{Ann} x = r_1 + s + \operatorname{Ann} x = r_1 + \operatorname{Ann} x$. 由此, 可见映射为单射.

接着, 由

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(R/\operatorname{Ann} x) &= \{\bar{\varphi}(r + \operatorname{Ann} x) : r \in R\} \\ &= \{\varphi(x) : r \in R\} = \{rx) : r \in R\} = Rx\end{aligned}$$

可知 φ 是满射.

□

给定 R 模 M 上的一个子集 X. X 中元素的一个有限**线性组合** (linear combination) 是指 M 中形如

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n$$

的元素, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ 和 $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$. 由 X 中的元素的所有线性组合所构成的集合实质上是 M 的一个子模, 我们记作为 $\langle X\rangle$. 我们称 M 的子集**生成** M, 如果 $M = \langle X\rangle$. 此外, 我们说 M 是**有限生成模** (finitely generated module), 如果集合 X 是有限的. 我们将会研究有限生成挠模的结构.

我们称 R 模 M 的子集 X 为**线性无关** (linearly independent) 是指如果对任意有限个互不相同的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ 构成的集合和 $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$, 则

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0.$$

如果 M 是由一个线性无关的子集 X 所生成的模, 那么我们称 M 为**自由** R 模以及 X 是 M 的一组**基底** (basis).

7.4 有限直和

设 $M_1, \cdots, M_n$ 为环 R 上的模. 我们首先不把 M_j 看作模, 而是把它看作一个集合; 这样我们可以形成集合 M_j 的直积 M, 即 $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ 是所有 n 元组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所有组成的集合, 其中 $x_j \in M_j$. 现在我们介绍其加法和标量乘法, 通过

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$
$$a(x_1, \cdots, x_n) = (ax_1, \cdots, ax_n),$$

其中 $a \in R$. 容易验证 M 对于这些运算来说, 实质上是一个 R 模, 其中 $(0, \cdots, 0)$ 是加法零元. 我们称 R 模 M 为模 $M_1, \cdots, M_n$ 的**直和**, 并且我们记 M 为 $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ 或 $\oplus_1^n M_j$.

这个构造的基本例子是对全体指标 j, 取 $M_j = R$. 我们把它记为

$$R^n = \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n\text{ 个}}.$$

记 $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0. \cdots, 0)$, 其中在第 j 位取 1, 其余位取 0. 这样在 R^n 中, 我们有

$$(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_je_j.$$

给定 R 模 M, 假设我们有 R 模同构 $\phi : R^n \to M$, 令 $u_j = \phi(e_j) \in M$. 那么称 M 是秩为 n 的**自由 R 模** (rank n free R module), 并称集合 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 为 M 的一组基

底. 事实上, 由于 ϕ 是满射, M 中的任意元素可表为 $\phi((x_1,\cdots,x_n))$, 并且也可表为 u_j 的一个线性组合:

$$\phi((x_1,\cdots,x_n))=\phi\left(\sum_{j=1}^n x_je_j\right)=\sum_{j=1}^n x_j\phi(e_j)=\sum_{j=1}^n x_ju_j.$$

同时, 如果 $\sum_{j=1}^n x_ju_j=0$, 则可知全部 $x_j=0$, 这是由于

$$0=\sum_{j=1}^n x_ju_j=\phi((x_1,\cdots,x_n)),$$

于是得知 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 ϕ 的核中, 因为 ϕ 是单射可知为零.

定理 7.14 设 M 为模. 假设 $M_1,\cdots,M_n$ 为满足以下条件的子模:

(1) $M=M_1+\cdots+M_n$,

(2) $M_i\cap(M_1+\cdots+M_{i-1}+M_{i+1}+\cdots+M_n)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$.

那么映射

$$\oplus_1^n\to M:(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\sum_{i=1}^n x_i$$

是同构.

7.5 Artin 模和 Noether 模

定义 7.15 模 M 被称作 **Noether 模**, 如果它满足**升链条件**: M 中不存在无穷严格上升子模序列 $M_1\underset{\neq}{\subset}M_2\underset{\neq}{\subset}M_3\underset{\neq}{\subset}\cdots$.

E. Noether (1882—1935) 是德国女代数学家, Gordan 的博士生, 她是现代代数学的创始人之一. 本章 “模” 的概念是她在 1921 年的文章引入的. 她的父亲 M. Noether 是杰出的代数几何学家. 她的学生之一曾炯之 (C. C. Tsen, 1897—1940) 教授是我国最早从事抽象代数研究的学者, 在函数域上的代数研究中获得重要成果.

换句话说, 如果 $M_1\subset M_2\subset M_3\subset\cdots$ 是 M 的一个上升子模序列, 那么存在整数 n 使得 $M_n=M_{n+1}=\cdots$.

这也等价于极大条件: 每一个由 M 的子模构成的非空集合 $\mathscr{S}$ 必含有一个 $\mathscr{S}$ 中极大的子模, 亦即是说, 存在模 $X\in\mathscr{S}$ 使得若 $N\in\mathscr{S}$ 和 $N\supset X$, 则有 $N=X$.

我们假定了模 M 是左 R 模, 因而其子模为左 R 子模. 然而, 我们只定义了左 Noether 模. 除非有必要的时候, 我们才会指定 “左” 或 “右”.

我们把 $\subset$ 翻转为 $\supset$, 因此得到以下概念.

定义 7.16 模 M 被称作 **Artin 模**, 如果它满足**降链条件**: M 中不存在无穷严格下降子模序列 $M_1 \underset{\neq}{\supset} M_2 \underset{\neq}{\supset} M_3 \underset{\neq}{\supset} \cdots$.

E. Artin (1898—1962) 是奥地利代数学家, Herglotz 的博士生, Hilbert 的博士后. 他有好几个优秀博士生: Dwork, Lang, Tate, 王湘浩 (1915—1993), Zassenhaus, Zorn. 他有一个很著名的关于 L 函数解析性的猜想. 今天所谓的朗兰兹纲领 (Langlands program) 就是为解决这个猜想而发起的. 他的儿子 M. Artin 亦是著名的代数几何学家.

换句话说, 如果 $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$ 是 M 的一个下降子模序列, 那么存在整数 n 使得 $M_n = M_{n+1} = \cdots$.

这等价于极小条件: 每一个由 M 的子模构成的非空集合 $\mathscr{S}$ 必含有一个 $\mathscr{S}$ 中极小的子模, 亦即是说, 存在模 $Z \in \mathscr{S}$ 使得若 $N \in \mathscr{S}$ 和 $N \subset Z$, 则有 $N = Z$.

我们把环 R 看成 R 模, 因而在这个情况下 R 的一个 R 子模其实是环 R 的一个左理想. 环 R 被称为 Noether 环 (Artin 环), 若它作为 R 模时是 Noether 模 (Artin 模).

Noether 环 (模) 和 Artin 环 (模) 二者的概念并不是对称的. 事实上, 任何 Artin 环皆是 Noether 环.

给定任一模 M, 我们称有限下降子模序列

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0,$$
$$M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_s = 0$$

等价, 如果 $r = s$ 以及存在 $\{1, 2, \cdots, r\}$ 中的一个置换映射 $i \mapsto i'$ 使得

$$M_i/M_{i+1} \approx N_{i'}/N_{i'+1}.$$

我们称 $M = N_0 \supset \cdots \supset N_s = 0$ 是 $M = M_0 \supset \cdots \supset M_r = 0$ 的一个**加细** (refinement), 如果子模集合 $\{M_i\}$ 是子模集合 $\{N_j\}$ 的子集.

引理 7.17 (Zassenhaus 引理) 假设 $N_1 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq M_2$ 为模 M 的子模. 那么

$$\frac{(M_1 \cap M_2)N_1}{(M_1 \cap N_2)N_1} \cong \frac{M_1 \cap M_2}{(N_1 \cap M_2)(M_1 \cap N_2)} \cong \frac{(M_1 \cap M_2)N_2}{(N_1 \cap M_2)N_2}.$$

其证明跟群论的情况是一样的.

定理 7.18 (Schreier 加细定理) 给定模 M, 其任意两个有限子模降链均有等价的加细.

证明 给定两个有限子模降链

$$M = M_1 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{s+1} = 0,$$
$$M = N_1 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_{t+1} = 0.$$

对 $1 \leqslant i \leqslant s+1$ 和 $1 \leqslant k \leqslant t+1$, 记

$$M_{ik} = (M_i \cap N_k)M_{i+1}, \quad N_{ki} = (N_k \cap M_i)N_{k+1}.$$

由 Zassenhaus 引理得知

$$M_{ik}/M_{i,k+1} \cong N_{ki}/N_{k,i+1}.$$

考虑以下子模链的加细

$$\begin{aligned} M = M_1 &\supseteq M_{12} \supseteq M_{13} \supseteq \cdots \supseteq M_{1t} \\ &\supseteq M_2 \supseteq M_{22} \supseteq M_{23} \supseteq \cdots \supseteq M_{2t} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\supseteq M_s \supseteq M_{s2} \supseteq M_{s3} \supseteq \cdots \supseteq M_{st} \supseteq M_{s+1} = 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} M = N_1 &\supseteq N_{12} \supseteq N_{13} \supseteq \cdots \supseteq N_{1s} \\ &\supseteq N_2 \supseteq N_{22} \supseteq N_{23} \supseteq \cdots \supseteq N_{2s} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\supseteq N_t \supseteq N_{t2} \supseteq N_{t3} \supseteq \cdots \supseteq N_{ts} \supseteq N_{t+1} = 0, \end{aligned}$$

那么 M_{ik} 的余因子为

$$\begin{aligned} &M_{11}/M_{12}, M_{12}/M_{13}, \cdots, M_{1t}/M_{1,t+1}, \\ &M_{21}/M_{22}, M_{22}/M_{23}, \cdots, M_{2t}/M_{2,t+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &M_{s1}/M_{s2}, M_{s2}/M_{s3}, \cdots, M_{st}/M_{s,t+1}. \end{aligned}$$

上述的第 (i,k) 位的因子同构于下面第 (k,i) 位的因子

$$\begin{aligned} &N_{11}/N_{12}, N_{12}/N_{13}, \cdots, N_{1s}/N_{1,s+1}, \\ &N_{21}/N_{22}, N_{22}/N_{23}, \cdots, N_{2s}/N_{2,s+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &N_{t1}/N_{t2}, N_{t2}/N_{t3}, \cdots, N_{ts}/N_{t,s+1}. \end{aligned}$$

定理得证. □

给定任一模 M, 一个有限真下降子模序列

$$M = M_0 \underset{\neq}{\supset} M_1 \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} M_r = 0$$

被称为**合成序列** (composition series), 如果对任意 i, 不存在子模 N 使得

$$M_i \supsetneq N \supsetneq M_{i+1}.$$

我们把整数 r 称为合成序列的**长度** (length), 把商模 M_i/M_{i+1} 称为合成因子.

定理 7.19 (Jordan-Hölder)　模的任意两个合成序列是等价的.

特别地, 模 M 的任意两个合成序列都是等长的. 因此, 我们把它称为 M 的长度并记作为 $\ell(M)$. 我们省略这个定理的证明, 因为其证明跟群的情况是一致的.

定理 7.20　模 M 有合成序列当且仅当它是 Artin 模和 Noether 模.

证明　($\Rightarrow$). 取任意非零子模链 $N_2 \supsetneq \cdots \supsetneq N_r$. 假定 M 有合成序列

$$M = M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_{s+1} = 0,$$

那么这个合成序列和子模链

$$M = N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \cdots \supsetneq N_{r+1} = 0$$

有等价加细. 因而有 $r \leqslant s$. 立知 M 是 Artin 模和 Noether 模.

($\Leftarrow$). 相反地, 假设 M 是 Artin 模和 Noether 模. 若 $M = 0$, 则没有什么可证的. 因此假设 $M \neq 0$, 那么子模 $N \subsetneq M$ 所构成的集合 $\mathscr{S}$ 是非空的. 令 M_2 为 $\mathscr{S}$ 中最大的元素, 则这里不存在 M 的子模 N 满足 $M \supsetneq N \supsetneq M_2$. 假设 $M_2 \neq 0$. 我们重复这些论述继而得到 M_3. 这样, 我们会得一个真降子模链 $M = M_1 \supsetneq M_2 \cdots$. 因为 M 是 Artin 环, 从而该子模链必停止并同时给出合成序列

$$M = M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_{s+1} = 0. \qquad \square$$

习　题

1. 以下习题是同态的第一个例子. 设 M 为一 R 模, N 为 M 的 R 子模. 令 $\iota : N \to M$ 为集合的包含映像, 即对任意 $x \in N$, 有 $\iota(x) = x$. 证明: ι 为一 R 模同态.
2. 设 $\varphi : M \to N$ 为 R 模同态. 证明:
   (a) $\operatorname{Ker}\varphi$ 为 M 的 R 子模;
   (b) φ 为单射当且仅当 $\operatorname{Ker}\varphi = 0$;
   (c) $\operatorname{Img}\varphi$ 为 N 的 R 子模;
   (d) φ 为满射当且仅当 $\operatorname{Img}\varphi = N$;
   (e) 若 P 为 N 的 R 子模, 则 $\varphi^{-1}P$ 为 M 的 R 子模.

3. (a) 设 N 为 M 的子模. 证明: 以下映射

$$(x+N)+(y+N)=x+y+N, \quad \forall x+N, y+N \in M/N$$

是良定义的, 亦即是说, 如果

$$(x+N)=(x_1+N) \quad 和 \quad (y+N)=(y_1+N),$$

验证

$$x+y+N=x_1+y_1+N.$$

利用上面的映射来定义 M/N 上的加法律, 证明: M/N 是交换群.

(b) 定义标量乘法映射

$$R\times M/N \to M/N:(r,x+N)\to r(x+N):=rx+N.$$

证明: M/N 为 R 模.

(c) 定义映射

$$\pi: M\to M/N: x\mapsto x+N.$$

证明: π 是核为 N 的 R 模满同态.

4. 设 R 为环, $I\subseteq R$, I 为 R 的一个理想. 证明: I 是 R 的一个子模以及商模 R/I 实质上是商环 R/I.

5. 设 R 是**交换环** (含幺元), M 为自由 R 模. 假定 M 有一组有限元素组成的基底, 那么 M 的任意两组基底的元素个数皆相同. 在这种情况下, 我们称元素的个素为模 M 的**秩**.

6. 设 $M=\{\frac{m}{p^r}|m\in\mathbb{Z}, r=0,1,2,\cdots\}$, p 为素数. 则 M 为加法群. 设 M_k 为由 $\frac{1}{p^k}$ 所生成 M 的子群. 则 $M_k\supseteq \mathbb{Z}\cup\{\frac{m}{p^l}|l\leqslant k, m\in\mathbb{Z}\}$ 及 $\mathbb{Z}\subseteq M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$. 由此证明: 商模 $M/\mathbb{Z}$ 为 Artin 模但非 Noether 模; 证明: M 既非 Artin 模, 亦非 Noether 模.

7. 证明: $\mathbb{Z}$ 为 Noether 模. (提示: 对任一升链 $I_1\subseteq I_2\cdots$ 考虑主理想 $\oplus I_j$.) 证明: $\mathbb{Z}$ 非 Artin 模. (提示: 对 $\pm1\neq m\in\mathbb{Z}$ 考虑 $(m)\supset(m^2)\supset(m^3)\supset\cdots$.)

8. 证明: 任何有限交换群均是 Artin 模及 Noether 模.

9. 设 V 是向量空间, 证明: $\dim V<\infty \Leftrightarrow V$ 为 Artin 模 $\Leftrightarrow V$ 为 Noether 模.

10. 证明: R 模 M 为 Noether 模当且仅当 M 的任一子模是有限生成模. (提示: $(\Rightarrow)$ N 为 M 的子模, $N=\{N_1$ 为 N 的有限生成子模$\}$, N 的极大元 N' 存在, 考虑 $N'+x, x\in N$, 证明: $N=N'$. 反过来 $(\Leftarrow)$ 对升链 $N_1\subset N_2\subset\cdots$ 做子模 $\cup_j N_j$.)

11. 设 $\varphi\in\mathrm{Hom}(M,M)$, 证明: 如果 M 是 Noether (Artin) 模及 φ 满 (单) 同态, 则 φ 是同构.

12. (Hilbert 基定理) 设 R 为交换 Noether 环, 证明: 多项式环 $R[X_1,\cdots,X_n]$ 亦为 Noether 环.

13. R 为含 1 的交换环, 证明: R 为 Artin 环当且仅当 R 为 Noether 环及 R 中任一真素理想为极大理想.

14. $\ell(M)$ 记 M 的长度. 设 N 为 M 的子模, 证明: $\ell(M)=\ell(N)+\ell(M/N)$. (提示: 从真序列 $N=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_t=(0)$ 及 $M/N=L_0/N\supset\cdots\supset L_s/N$ 得 M 的真正规则 $M=L_0\supset\cdots\supset L_s\supset N_1\supset\cdots\supset\cdots\supset N_t=(0)$.)

15. 设 M 为秩 n 的自由 R 模. 证明:

(a) M 的对偶 R 模 M^* 是秩 n 的自由 R 模;

(b) $M \cong (M^*)^*$.

16. 把有理数域 $\mathbb{Q}$ 看作 $\mathbb{Q}$ 模, 证明: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ 与 $\mathbb{Q}$ 同构. 把 $\mathbb{Q}$ 看作 $\mathbb{Z}$ 模, 证明: $\mathbb{Q}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$. (提示: 取 $f \in \mathbb{Q}^*$, 取任意 $r \in \mathbb{Q}$. 则 $f(r) \in \mathbb{Z}$, $f(r/2^n) \in \mathbb{Z}$, 但 $f(r) = 2^n f(r/2^n)$, 于是对任意 n, 整数 $f(r)$ 被 2^n 整除, 所以 $f(r) = 0$.)

17. 设 R 模 M, N. 证明: $(M \oplus N)^* \cong M^* \oplus N^*$.

18. 设 R 模 M, N, $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. 定义

$$\phi^* : N^* \to M^* : f \mapsto f \circ \phi.$$

证明: $\phi^* \in \mathrm{Hom}_R(N^*, M^*)$ 以及

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(N^*, M^*) : \phi \mapsto \phi^*$$

是 R 线性的.

第八章　主理想整环上的模

8.1　主理想整环

在这部分中, 所有环都含有单位元 1. 设 R 为环. 如果对所有 $x, y \in R$ 满足 $xy = yx$, 我们称 R 是**交换的**.

元素 $x, y \in R$ 被称为**零除子**是指如果 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$, 且有 $xy = 0$. 如果 R 是交换环, $1 \neq 0$ 和 R 不含有任何零除子, 则环 R 叫作**整环**.

交换环 R 的任一理想 I 被称为**主理想**, 如果存在 $x \in R$ 使得 $I = Rx$. **主理想整环** (principal ideal domain, PID) 是整环且其理想皆为主理想.

例　(1) 整数环 $\mathbb{Z}$ 是 PID. (2) 令 F 为域, X 为一变量. 由变量为 X, 系数为 F 的全体多项式所构成的环是 PID.

设 R 为整环, $a, b \in R$. 如果存在 $c \in R$ 使得 $b = ac$, 我们称 a **整除** b 或 a 是 b 的除子, 并记 $a|b$. 我们记 $a \nmid b$ 为 a 不能整除 b. 如果 $a|b$ 和 $b|a$, 则我们称 a 和 b 是相伴的. 如果 $a|1$, 则称 a 为**单位**或可逆元. 如果 $b = ac$ 且 c 不是单位, 则称 a 是 b 的一个真因子. 元素 $a \neq 0$ 被称为**不可约**是指如果它本身不是单位, 并且如果当 $a = bc$, 其中 $b \in R$ 和 $c \in R$, 则必有 b 或 c 为单位. 元素 $a \in R$, $a \neq 0$ 被称为可**唯一分解**到不可约元素是指如果存在单位 u 和 R 中的不可约元素 p_i $(i = 1, \cdots, r)$ 使得

$$a = u \prod_{i=1}^{r} p_i,$$

以及如果给定两个到不可约元素的分解

$$a = u \prod_{i=1}^{r} p_i = v \prod_{j=1}^{s} q_j,$$

有 $r = s$, 且经过指标 i 的置换, 可得 $p_i = u_i q_i$, 其中 $u_i \in R$, $i = 1, \cdots, r$ 为单位.

我们称环 R 为**唯一分解整环** (unique factorization domain, UFD) 是指如果 R 是整环且如果 R 中的任一非零元皆可唯一分解到不可约元素.

交换环 R 的任一理想 P 被称为素理想是指如果 $P \neq R$ 并且当 $a, b \in R$ 和 $ab \in P$ 时, 那么 $a \in P$ 或 $b \in P$. 如果 R 是唯一分解整环, 那么不可约元素 p 生成素理想 Rp. 这样, 在唯一分解整环中, 不可约元素同时被称作为**素元**.

命题 8.1 设 R 为 PID, $a, b \in R$, $a, b \neq 0$, 令 $(a, b) = (c)$. 那么 c 是 a 和 b 的最大公除子.

证明 $a, b \in (c)$ 即指 $c \mid a$, $c \mid b$. 现令 d 皆可整除 a 和 b, 因而可写为 $a = de$, $b = df$, 其中 $e, f \in R$. 由于 c 在由 a 和 b 所生成的理想 (a, b) 中, 所以可写为 $c = ha + kb$, 其中 $h, k \in R$. 则有 $c = hde + kdf = d(he + kf)$, 可见 $d|c$. □

命题 8.2 如果 p 是 PID R 的不可约元素, 且 $a, b \in R$, $p|ab$, 那么有 $p|a$ 或 $p|b$.

证明 假设 $p \nmid a$, 且 p 作为不可约元素, 由此得知 p, a 的最大可除子为 1. 因此有 $(p, a) = R$. 因为 $1 = xp + ya$, 其中 $x, y \in R$, 得知 $1 \in R$. 那么有 $b = bxp + yab$, 而且由 $p|ab$, 立知 $p|b$. □

命题 8.3 PID 是 Noether 环, 即如果

$$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \cdots I_n \subsetneqq \cdots$$

是其任一理想链, 则存在指标 m 使得 $I_m = I_{m+1} = \cdots$.

证明 由于每一个 I_k 都是理想, 所有这些理想 I_k 的并集 I 也是理想. 同时, 由于是在 PID 中, 立知 $I = (a)$, 其中 a 为某元素. 因而元素 a 必在某一理想 I_k 中. 假设 $a \in I_m$. 那么得知 $I \subseteq I_m$, 并且由 I 的定义可知 $I_m \subseteq I$. 因此 $I_m = I_{m+1} = \cdots$. □

定理 8.4 PID 是 UFD.

证明 (1) 首先我们通过反证法来证明分解的存在性. 令 R 为 PID. 假设元素 $a \in R$ 不能分解到不可约元. 这样, a 本身不是不可约元, 那么有 $a = a_1 b_1$, 且 a_1, b_1 皆不是单位. 但如果 a_1, b_1 都能分解为不可约元素的话, 它们二者的乘积便给出了 a 的一个分解. 现设 a_1 不能分解为不可约元的乘积. 我们对 a_1 重复刚才的论述, 从而有 $a_1 = a_2 b_2$, 其中 a_2 不能分解到不可约元. 由此, 我们构造出一个无穷序列 a_j, 且 a_{j+1} 是 a_j 的真除子. 因此, 我们得到一个无穷严格升链

$$(a_1) \subsetneqq (a_2) \subsetneqq \cdots (a_n) \subsetneqq \cdots,$$

但是这与上述命题矛盾.

(2) 现证分解的唯一性. 我们通过不可约因子的个数来使用数学归纳法. 假设 $a = p$ 不可约, 即存在唯一分解. 现归纳假设任意元素其分解中的不可约因子个数少于 r 的分解唯一性是成立的. 假设 a 有两种到不可约元的分解

$$a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

由之前论述可知 p_1 整除 $\prod q_j$, 元素 p_1 必整除其中某一因子, 我们记该因子为 q_1 (如有必要我们会重新标记这些因子). 因为 p_1, q_1 都是不可约的, 所以存在单位元 u_1 使得 $q_1 = u_l p_l$. 我们可以从等式两边把 p_1 消去并得

$$p_2 \cdots p_r = u_1 q_2 \cdots q_s.$$

由归纳假设, 定理得证. □

8.2 主理想整环上的矩阵

我们先固定主理想整环 (PID) D. 对于矩阵 $A = (a_{ij})$, 如果 $a_{ij} \in D$, 我们称 A 有 D 中的元素. 由元素在 D 中的全体 $m \times n$ 矩阵组成的集合被记为 $M_{m,n}(D)$, 我们把 $M_{n,n}(D)$ 记为 $M_n(D)$. 由元素在 D 中的全体 $m \times n$ 不可逆矩阵所组成的集合被记为 $GL_n(D)$.

如同矩阵系数为实数时的情况一样, 在 $M_{m,n}(D)$ 中的矩阵有所谓的**初等行变换**, 这些变换包括:

(1) 任何两行互换;

(2) 对任一行乘以 D 中的一个不可逆元;

(3) 把任一行乘以 D 的任一元素后加到另一行.

我们也有**初等列变换**. 如上述初等行变换一样, 只是把上述变换中的 "行" 变为 "列" 即可.

所谓初等矩阵是指一矩阵是经由单位矩阵经过初等行变换或初等列变换所得到的. 任何初等矩阵皆是可逆的.

在矩阵 A 上的行 (列) 变换等同把相对应的初等矩阵乘在 A 的左 (右) 边.

例如, 把单位矩阵的第 i 行和 j 行互换, 得到初等矩阵 P_{ij}, 该矩阵可表为 $1 - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 其中 1 是单位矩阵, E_{ij} 是在第 i 行第 j 列为 1、其他地方为 0 的矩阵. 当我们要把矩阵 A 的第 i 行和 j 行互换, 其余地方保持不变, 因而得到 $P_{ij}A$. 当我们要把矩阵 A 的第 i 列和 j 列互换, 其余地方保持不变, 我们会得到 AP_{ij}.

定义在 PID 上, 我们为了扩展初等矩阵的意义, 需要包含以下几种矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } X \in GL_2(D);$$

一个 $m \times n$ 对角矩阵 $\delta(d_1. \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$ 是指

$$\begin{pmatrix} D & 0 \end{pmatrix} \text{ 若 } m \leqslant n \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 若 } m \geqslant n,$$

其中 D 是对角方阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $r \leqslant m$ 或 $r \leqslant n$.

矩阵 $A, B \in M_{m,n}(D)$ 是**等价的**, 如果存在 $P \in GL_m(D)$ 和 $Q \in GL_n(D)$ 使得 $B = PAQ$.

定理 8.5 定义在主理想整环上的任何矩阵等价于某一对角矩阵 $\delta(d_1. \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$, 其中 $d_i \neq 0$, 当 $i \leqslant j$ 有 $d_i | d_j$.

证明 在 PID 上, 我们可以用高斯消元法通过初等行或列变换把矩阵对角化. 这等同于在所给定矩阵的左边和右边乘上初等矩阵. 这些初等矩阵的乘积给出了定理所述的矩阵 P, Q. 现给出具体描述.

我们定义非零元素 $a \in D$ 的长度 $\ell(a)$ 为 a 任一分解中的素因子的个数; 即指如果 $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ 是其素分解, 则 $\ell(a) = r$. 当 a 是可逆元时, 记 $\ell(a) = 0$.

给定矩阵 A. 如果 $A = 0$, 显然满足所要求的表达式. 如果 $A \neq 0$, 我们先计算它的每个矩阵元素的长度. 令 a_{ij} 为 A 中的非零矩阵元素, 其长度为 $\ell(a_{ij})$ 为当中最小的. 现通过初等行和列变换使得该元素置换到 $(1,1)$ 位置. 于是, 我们可以假设 $a_{11} \neq 0$ 以及对每一个 $a_{ij} \neq 0$ 有 $\ell(a_{11}) \leqslant \ell(a_{ij})$.

若 $a_{12} = a_{11} b$, 那么通过把第一列乘以 $-b$ 后加到第二列的初等列变换后, 可得一矩阵其第一行为 $(a_{11}, 0, \cdots)$. 若 $a_{11} \nmid a_{12}$ 且 $d = (a_{11}, a_{12})$, 则有 $\ell(d) < \ell(a_{11})$. 取决于 d 的选择, 存在元素 $x, y \in D$ 使得 t $a_{11}x + a_{12}y = d$, 以及元素 $u, v \in D$ 使得 $a_{11} = ud$, $a_{12} = vd$. 因此在 D 的分式域中, 我们可以运算

$$ux + vy = (d^{-1}d)(ux + vy) = (d^{-1})(a_{11}x + a_{12}y) = 1.$$

有

$$\begin{pmatrix} u & v \\ y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & v \\ y & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$E = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 其中\ X = \begin{pmatrix} x & v \\ y & -u \end{pmatrix}.$$

则矩阵 AE 的第一列为 $(d, 0, a_{13}, \cdots, a_{1n})$, 其中 $\ell(d) < \ell(a_{11})$.

无论如何, 我们得到矩阵 (g_{ij}) 其元素 $g_{12}=0$. 我们接着化简, 如果 $g_{11}\mid g_{13}$, 则初等变换会生成一个等价矩阵, 其中第一列元素是 $(g_{11},0,0,\cdots)$. 如果 $g_{11}\nmid d_{13}$, 那么把第二行和第三行互换, 然后重复上面的操作并得到一个等价矩阵, 其首列为 $(g_{11},0,0,\cdots)$. 我们继续这样的操作, 直至使得第一行中除了第一个元素 g_{11} 外皆为零. 然后我们对第一列重复上述步骤. 最终我们得到一个与 A 等价的矩阵, 其形式如下

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

我们可假设 $b_{11}\mid c_{jk}$. 不然, 即 $b_{11}\nmid c_{jk}$, 那么我们把第 j 行加到第一行, 从而得到矩阵, 其第一列为 $(b_{11},c_{j2},\cdots,c_{jn})$. 现重复上述操作得到一个形式如 $(\star)$ 的等价矩阵, 其中第 $(1,1)$ 位的元素的长度小于 $\ell(b_{11})$.

由于第 $(1,1)$ 位元素的长度为一非负整数, 意味着不能一直无穷递减, 因而这些处理是有限的, 且当第 $(1,1)$ 位元素皆可整除全部矩阵元素时而停止.

下一步是对子矩阵 (c_{ij}) 重复上述的整个步骤. 继而给出其等价矩阵, 形式如下

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & d_{m3} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}, \tag{$\star$}$$

其中 $c_{22}\mid d_{ij}$. 我们应观察到在子矩阵 (c_{ij}) 上的初等行和列变换并不影响整除性条件. 因此, $b_{11}\mid c_{22}$ 以及 $b_{11}\mid d_{ij}$.

很清楚, 如果继续这些操作, 我们将会得到一个与矩阵 A 等价的对角矩阵并且其满足所要求的整除性质. □

8.3 有限生成模

我们固定主理想整环 D. 我们将在这部分讨论 D 上的有限生成挠模的结构.

回顾一下我们之前记 D^n 为由 n 个 D 的直和组成的 D 模. 设 $e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, 其中第 j 位为 1, 其余地方为 0.

定理 8.6 如果 D 为主理想整环, 则 D^n 的任何子模 N 是秩为 $m\leqslant n$ 的自由子模.

证明 我们对 n 用数学归纳法. 按惯例零模的秩为 0. 显然当 $n=0$ 时定理成立. 接着假设 $n>0$ 且由归纳假设, 假设对任何 D^{n-1} 的子模定理皆成立. 我们把 D^{n-1} 看成子

模 $\sum_{j=2}^{n} De_j$.

现取 D^n 的子模 N. 若 $N \subseteq D^{n-1}$, 则由归纳假设定理得证. 若 $N \not\subseteq D^{n-1}$, 则我们考虑 $N \cap D^{n-1}$ 和 $N \setminus D^{n-1}$ 两种情况.

由归纳假设可知 D^{n-1} 的子模 $N \cap D^{n-1}$ 是自由模, 因而令 $\{f_2, \cdots, f_m\}$ 为它的一组基, $m \leqslant n$. 引入集合

$$I = \left\{d \in D : de_1 + y \in N,\ \text{对某}\ y \in D^{n-1}\right\}.$$

那么 I 是 D 的一个理想因而对某非零元素 $a \in D$, 有 $I = (a)$. 特别地, N 有元素 $f_1 = ae_1 + y_1$, 其中 $y_1 \in D^{n-1}$.

为了完成证明, 需证 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 是 N 的一组基.

在 N 内取任一元素 x. 那么有 $x \in D^n$, 从而有 $x = de_1 + y$, 其中 $d \in D$ 和 $y \in D^{n-1}$. 由 I 的定义可知 $d = ba$, 其中 b 为 D 中某元素. 所以 $N \cap D^{n-1}$ 含有

$$x - bf_1 = bae_1 + y - b(ae_1 + y_1) = y - by_1,$$

这是因为 x 和 f_1 在 N 中, 以及 $y - by_1 \in D^{n-1}$. 这样有 $x - bf_1 = \sum_{j=2}^{m} b_j f_j$. 从 $x = bf_1 + \sum_{j=2}^{m} b_j f_j$ 可知 f_j 生成 N.

为了证明 f_j 的无关性, 先假设 $\sum_{j=1}^{m} b_j f_j = 0$, 即 $b_1(ae_1 + y_1) + \sum_{j=2}^{m} b_j f_j = 0$. 我们可以把 D^{n-1} 的元素 $b_1 y_1 + \sum_{j=2}^{m} b_j f_j = 0$ 写成 $\sum_{j=2}^{n} c_j e_j$, 得到 $b_1 ae_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j e_j = 0$. 由于 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 D^n 的一组基, 有 $b_1 a = 0$. 同时, 因为 D 是整环, $b_1 a = 0$ 和 $a \neq 0$ 意味 $b_1 = 0$, 这使得 $\sum_{j=2}^{m} b_j f_j = 0$. 但因为 f_j 形成了一组基, 这逼使 $b_j = 0$, 其中 $2 \leqslant j \leqslant m$. 因而 $\sum_{j=1}^{m} b_j f_j = 0$ 意味着对于全体 j 有 $b_j = 0$. □

D 模 M 被称为有限生成的, 如果存在正整数 n, 有 D 模满同态 $D^n \to M$.

定理 8.7 (循环分解定理) 主理想整环上的任意非零有限生成模皆为某些循环模的直和, 其中这些循环模的零化因子构成真理想降链.

如果 $0 \neq M$ 为主理想整环上的有限生成模, 定理是指

$$M \xrightarrow{\approx} Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_t,$$

其中 Z_i 是循环 D 子模以及

$$D \neq \operatorname{Ann} Z_1 \supset \operatorname{Ann} Z_2 \supset \cdots \supset \operatorname{Ann} Z_t.$$

证明 因为 M 是有限生成, 所以有满同态 $\phi : D^n \to M$. 记 $\phi(e_j) = u_j$. 则有 $M = \sum Du_j$. 设 $N = \operatorname{Ker} \phi$. 那么 $M \cong D^n/N$. 由之前的定理得知 N 可以由基 $f_1, \cdots, f_m$ 所生成, 它可以用基 $e_1, \cdots, e_n$ 来表示出来. 令 $f_i = \sum a_{ij} e_j$. 现在, 我们必须弄清楚商 D^n/N 所对应矩阵 $A = (a_{ij})$.

PID 上的等价矩阵定理指出, 我们总能找出其元素在 D 中的可逆矩阵 P, Q 使得

$$QAP = \delta(d_1, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0) \quad 和 \quad d_i \mid d_{i+1}.$$

如果我们把 N 的一组基换成 $f_i' = \sum q_{is} f_s$, 并选择 D^n 的一组基为 e_j' 使得 $e_k = \sum p_{kj} e_j'$, 那么

$$f_i' = \sum q_{is} f_s = \sum q_{is} a_{sk} e_k = \sum q_{is} a_{sk} p_{kj} e_j'.$$

我们可知 $f_i' = d_i e_i'$, $1 \leqslant i \leqslant r$ 以及当 $i > r$ 时, 有 $f_i' = 0$. 这意味着

$$D^n/N \xrightarrow{\approx} \bigoplus_{i=1}^{r} D/(d_i) \oplus \underbrace{D \oplus \cdots \oplus D}_{n-r\text{ 次}}.$$

如果 d_i 是可逆的话, 我们可知 $(d_i) = D$ 和 $D/(d_i) = 0$. 所以我们令 d_i, $1 \leqslant i \leqslant s$ 为可逆元. 我们重新命名 $d_{s+1}, \cdots, d_r$ 为 $\delta_1, \cdots, \delta_{r-s}$, 且令 $\delta_j = 0$, 其中 $r - s < j \leqslant n - s$. 这样, 我们有

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n-s} D/(\delta_i).$$

因而得证. □

8.4 挠模

首先固定主理想整环 D.

令 M 为主理想整环 D 上的模. 对 $x \in M$, x 的零化子是

$$\operatorname{Ann} x = \{a \in D : ax = 0\}.$$

如果 $\operatorname{Ann} x \neq 0$, 我们称 x 为**挠元素** (torsion element). 那么 $\operatorname{Ann} x$ 是 D 的非零理想因而有 $\operatorname{Ann} x = (d)$, 其中 d 为 D 中的某一非零元. 称这个元素 d 为 x 的**阶**. 除 D 中的可逆因子外 d 是唯一的. 又称 (d) 为元 x 的**阶理想** (order ideal).

说 M 是**挠模** (torsion module) 是指 M 的任一元素皆为挠元素.

假设 T 是有限生成 D 扭模. 令 $x_1, \cdots, x_n$ 为 T 的一个生成集合以及 $d_1, \cdots, d_n$ 为其相应的阶, 那么乘积 $d_1 \cdots d_n$ 是非零的, 且为

$$\operatorname{Ann} T = \{a \in D : ax = 0,\ 对全体\ x \in T\}$$

的元素. 因此是 D 的一个非零理想. 若 $\operatorname{Ann} T = (d)$, 则称 d 为 T 的一个阶. d 是唯一的, 取决于只差一个 D 的可逆元.

如果有限生成 D-挠模 T 的阶为 p^k, 其中 p 为 D 中某素元, 整数 $k > 0$, 那么, T 被称为一个 p 准素模或简称为**准素模** (primary module).

引理 8.8 设 x 为主理想整环 D 上的某模的一个扭元且其零化子 $\mathrm{Ann}(x)=(d)$. 假设 $d=d_1d_2$, $(d_1,d_2)=(1)$. 那么存在 $x_1,x_2\in Dx$ 使得 $Dx=Dx_1\oplus Dx_2$ 和 $\mathrm{Ann}(x_1)=(d_1),\mathrm{Ann}(x_2)=(d_2)$. 因此我们可以找到 $a_1,a_2\in D$ 使得映射

$$Dx\to Dx_1: y\mapsto a_2d_2y,$$
$$Dx\to Dx_2: y\mapsto a_1d_1y$$

为投射.

证明 条件 $(d_1,d_2)=(1)$ 即是指存在 $a_1,a_2\in D$ 使得 $a_1d_1+a_2d_2=1$. 令 $x_1=a_2d_2x, x_2=a_1d_1x$. 那么

$$x=(a_1d_1+a_2d_2)x=a_1d_1x+a_2d_2x=x_1+x_2,$$

因而有 $Dx=Dx_1+Dx_2$.

现假设 $z\in Dx_1\cap Dx_2$. 从 x_1,x_2 的定义可得 $d_1z=d_2z=0$. 这样, 有 $z=(a_1d_1+a_2d_2)z=0$ 和 $Dx_1\cap Dx_2=0$. 因此, 我们得知 $Dx=Dx_1\oplus Dx_2$.

设 $\mathrm{Ann}(x_1)=(a)$. 那么 $d_1x_1=a_2dx=0$. 由此, 可知 $d_1\in\mathrm{Ann}(x_1)$, 所以有 $a|d_1$. 另一方面

$$ad_2x=ad_2(a_1d_1+a_2d_2)x=aa_1dx+d_2ax_1=0,$$

可知 $ad_2\in\mathrm{Ann}\,x$ 或 $d_1d_2|ad_2$. 但由于 $(d_1,d_2)=(1)$, 所以有 $d_1|a$. 因此 $\mathrm{Ann}(x_1)=(d_1)$. 类似地, 我们可证 $\mathrm{Ann}(x_2)=(d_2)$.

清楚可见映射 $Dx\to Dx_1: y\mapsto a_2d_2y$ 和 $Dx\to Dx_2: y\mapsto a_1d_1y$ 皆为投射. □

引理 8.9 (1) 设 $T=Dx_1\oplus Dx_2$ 为扭模, 其中 $\mathrm{Ann}(x_1)=(d_1)$ 和 $\mathrm{Ann}(x_2)=(d_2)$ 使得 $(d_1,d_2)=(1)$, 则存在 $x\in T$ 使得 $T=Dx$ 以及 $\mathrm{Ann}(x)=(d)$, 其中 $d=d_1d_2$.

(2) 设 T 是阶为 m 的有限生成 D 扭模. 假设 $m=m_1m_2$ 和 $(m_1,m_2)=(1)$. 对于 $i=1,2$, 记 $T_i=\{x\in T|m_ix=0\}$. 则有 $T=T_1\oplus T_2$.

证明 (1) 当 $(d_1,d_2)=(1)$ 时, 我们可以找到 $a_1,a_2\in D$ 使得 $a_1d_1+a_2d_2=1$. 记 $x=x_1+x_2$, 那么有

$$a_2d_2x=a_2d_2(x_1+x_2)=a_2d_2x_1=(a_1d_1+a_2d_2)x_1=x_1.$$

这样可得 $x_1\in Dx$. 类似地 $x_2\in Dx$, 因此 $Dx=Dx_1+Dx_2=T$.

假设 $\mathrm{Ann}(x)=(d)$. 因为 D 是交换的, 很清楚 $d_1d_2\in(d)$, 即 $d|d_1d_2$. 另一方面 $dx_1=d(a_2d_2x)=0$. 这样有 $d\in(d_1)$, 即 $d_1|d$. 类似地 $d_2|d$. 但 $(d_1,d_2)=(1)$. 则有 $d_1d_2|d$. 因此 $d=d_1d_2$.

(2) 取定 $a_1,a_2\in D$ 使得 $a_1m_1+a_2m_2=1$. 取任意 $x\in T$. 我们有

$$x=(a_1m_1+a_2m_2)x=a_1m_1x+a_2m_2x.$$

清晰可知 $a_2m_2x\in T_1$, 以及 $a_1m_1x\in T_2$. 这样 $T=T_1+T_2$. 现考虑 $z\in T_1\cap T_2$. 这样 $m_1z=m_2z=0$ 意味着 $z=(a_1m_1+a_2m_2)z=0$. 我们已经证明 $T_1\cap T_2=0$. 因此 $T=T_1\oplus T_2$. □

定理 8.10 (准素分解定理) 任何主理想整环上的有限生成挠模皆为准素模的直和.

更准确来说, 令 T 为有限生成 D-挠模, 满足 $\operatorname{Ann}T=(m)$. 假设 $m=p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$, 其中整数 $k_j\geqslant 1$, $p_1,\cdots,p_r$ 是 D 的素元, 且任意两个素元皆不相伴. 这样

$$T=T_{p_1}\oplus\cdots\oplus T_{p_r},$$

其中

$$T_{p_j}:=\{x\in T:p_j^hx=0\text{ 对某些正整数 }h\}$$

是 T 中的最大的 p_j 准素模, 以及 $\operatorname{Ann}T_{p_j}=(p_j^{k_j})$. 对于在直和中的每一个因子, 这个分解是唯一的, 而且对于素元 p 它是 T 最大的 p 子模.

证明 我们对 r 用归纳法来证明. 当 $r=1$ 显然成立.

假设 $r>1$. 记 $m=d'd''$, 其中 $d'=p_1^{k_1}\cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}$ 和 $d''=p_r^{k_r}$. 这样我们有 $(d',d'')=(1)$. 根据之前的引理, 我们有 $T=T'\oplus T''$, 其中 $T'=\{x\in T|d'x=0\}$ 和 $T''=\{x\in T|d''x=0\}$.

我们断言 $T''=T_{p_r}$. 明确地 $T''\subseteq T_{p_r}$. 另一方面若 $x\in T_{p_r}$, 则对某正整数 h, 有 $p_r^hx=0$. 选取 h 为最小的整数满足条件. 这样的话, 必须有 $p_r^h\nmid p_r^{k_r}$, 否则 $k>k_r\geqslant 0$. 从 $d'(p_r^{h-1}x)=0$ 和 $d''(p_r^{h-1}x)=0$, 有 $p_r^{h-1}x\in T_1\cap T_2=0$, 从而 $p_r^{h-1}x=0$. 但这跟 h 为最小整数相矛盾. 于是可知 $k\leqslant k_r$, 所以有 $x\in T''$. 从而得知 $T''=T_{p_r}$.

回想我们记 $T'=\{x\in T:p_1^{k_1}\cdots p_{r-1}^{k_{r-1}}x=0\}$, 则有 $\operatorname{Ann}T'=(p_1^{k_1}\cdots p_{r-1}^{k_{r-1}})$. 由归纳假设可得

$$T'=T'_{p_1}\oplus\cdots\oplus T'_{p_{r-1}},$$

其中 $T'_{p_j}=\{x\in T':p_j^hx=0\text{ 对某些 }h\}$.

我们断言 $T'_{p_j}=T_{p_j}$. 因为 $T'\subseteq T$, 我们有 $T'_{p_j}\subseteq T_{p_j}$. 相反地, 对任意 $x\in T_{p_j}$ 可以写成 $x=x'+x''$, 其中 $x'\in T'$, $x''\in T''$, 以及对于某正整数 h 有 $p_j^hx=0$. 同理, 也可以选择 $h\leqslant k_j$. 从 $0=p_j^hx'+p_j^hx''$ 可见 $p_j^hx''=-p_j^hx'\in T'\cap T''=0$, 所以有 $p_j^hx''=0$. 因为 $j\leqslant r-1$, 那么有

$$d'x''=\prod_{i\neq j}p_i^{k_i}\cdot p_j^{k_j-h}\cdot p_j^hx=0,$$

这即告诉我们 $x''\in T'$, 因此 $x''\in T'\cap T''=0$ 意味着 $x=x'\in T'_{p_j}$.

将上述所证的放在一起, 我们有

$$T=T'\oplus T''=T_{p_1}\oplus\cdots\oplus T_{p_{r-1}}\oplus T_{p_r}.$$

因此, 由之前的引理, 得 $\operatorname{Ann} T_{p_j} = (p_j^{k_j})$. □

定理 8.11 (循环准素分解定理) 任何主理想整环上的有限生成挠模皆为准素循环模的直和.

证明 设 T 是主理想整环 D 上的有限生成扭模. 由循环分解定理可知

$$T \cong Dz_1 \oplus \cdots \oplus Dz_t,$$

其中 $\operatorname{Ann} z_i = (d_i) \neq 0$ 满足 $d_1|d_2|\cdots|d_t$ 和 $\operatorname{Ann} T = (d_t)$. 元素 d_i 是可以被决定的, 其中只相差一个可逆元, 我们可以假设

$$d_i = p_1^{k_{1i}} \cdots p_h^{k_{hi}}$$

且 $k_{j1} \leqslant \cdots \leqslant k_{jt}$, $1 \leqslant j \leqslant h$. 下一步, 我们对每一个循环模 Dz_i 使用准素分解定理, 之后结合前面的引理, 由循环分解定理, 可得

$$Dz_i \cong Dz_{1i} \oplus \cdots \oplus Dz_{hi}$$

和 $\operatorname{Ann} z_{ji} = (p_j^{k_{ji}})$. 因此 $T = \oplus Dz_{ji}$ 是准素循环模的直和. □

其中, 我们称 $d_1, \cdots, d_t$ 为**不变因子** (invariant factor) 以及 $p_j^{k_{ji}}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $1 \leqslant i \leqslant t$ 为模 T 的**初等因子** (elementary divisor). 又说 $(d_1), \cdots, (d_t)$ 为不变因子理想以及 $(p_j^{k_{ji}})$ 为模 T 的初等因子理想.

习 题

1. 以 N 记非负整数. 设整环 D 有影射 $\delta : D \to N$. 若 δ 有以下性质: 对 $a, b \neq 0 \in D$, 则有 $q, r \in D$ 使得 $a = bq + r$ 及 $\delta(r) < \delta(b)$. 我们便称 D 为欧几里得整环. 证明: 欧几里得整环为主理想整环.

2. 以 $\mathbb{Z}$ 记整数环. 证明: 若取 $\delta(m + n\sqrt{-1}) = m^2 + n^2$,

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{m + n\sqrt{-1} : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

为欧几里得整环.

3. 以 R 记以下环

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\sqrt{-5} : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

证明: $3, 2 + \sqrt{-5}, 2 - \sqrt{-5}$ 都是 R 内的不可约元, 并且并不互除. 从等式

$$3 \cdot 3 = 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$$

证明: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是 UFD.

4. 问 $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ 是不是 UFD ?

5. 设 F 为域, X 为变量. 所有系数在 F 以 X 为变量的多项式组成的环记为 $F[X]$. 以 $\deg f$ 记 $f \in F[X]$ 的次数, 设 $\delta(f) = 2^{\deg f}$. 证明: $F[X]$ 为欧几里得整环, 所以是主理想整环.

6. (a) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取 $v \in \mathbb{R}^2$. 设 $A^2 v = A(A(v))$, $A^3 v = A(A^2(v)), \cdots$. 在 $\mathbb{R}[X]$ 取 $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. 设

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

及

$$f(A)v = a_0 v + a_1 A v + \cdots + a_n A^n v.$$

证明: $\mathbb{R}^2$ 成为主理想整环 $\mathbb{R}[X]$ 的模. 取 $p(X) = 1 - 2X + X^2$, 证明: $p(A) = 0$. 证明: 用这个 A 所定义得来的 $\mathbb{R}[X]$ 模 $\mathbb{R}^2_A$ 是挠模.

(b) 又取

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

问 $\mathbb{R}[X]$ 模 $\mathbb{R}^2_A$ 及 $\mathbb{R}^2_B$ 是否同构?

7. 请把主理想整环 $\mathbb{R}[\lambda]$ 上的矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

对角化.

8. 设 $R = \mathbb{R}[\lambda]$, $M = Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus Rx_3 \oplus Rx_4$, $\mathrm{Ann}(x_1) = R(\lambda-1)^3$, $\mathrm{Ann}(x_2) = R(\lambda^2+1)^2$, $\mathrm{Ann}(x_3) = R(\lambda-1)(\lambda^2+1)^4$, $\mathrm{Ann}(x_4) = R(\lambda+2)(\lambda^2+1)^2$. 计算 R 模 M 的不变因子及初等因子.

第九章　典范型

9.1　Jordan 典范型

9.1.1　怎样得到 Jordan 典范型?

我们从怎样得到 Jordan 典范型开始, 然后用模理论来研究线性映射的结构, 以此解释为什么会有这样的典范型.

对任意环 R, 记 $M_n(R)$ 为由系数取值于 R 的 $n \times n$ 矩阵所构成的环.

(1) 从矩阵 $A \in M_n(f)$ 开始. 令 λ 为一变量, $F[\lambda]$ 为系数在 F 取值、变量 λ 的全体多项式环. 记 $M_n(F)$ 中的单位矩阵为 I, 得到矩阵 $\lambda I - A \in M_n(F[\lambda])$.

(2) 我们将论证, 通过初等行和列变换, 能把矩阵 $\lambda I - A$ 约化到对角矩阵

$$\delta(1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_s(\lambda)),$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式, 且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$. 我们称多项式 $d_i(\lambda)$ 为矩阵 A 的**不变因子**.

(3) 对应于每一个 $d_i(\lambda)$, 将构造一矩阵 B_i. 把 d_i 分解为多项式 p_j 的幂的乘积, 其中多项式在域 F 上不可约,

$$d_i = p_1^{k_{1i}} \cdots p_h^{k_{hi}}.$$

称每一个幂因子 $p_j^{k_{ji}}$ 为**初等因子**. 例如, 若 F 为复数域, 那么每个 p_j 皆为线性. 矩阵 B_i 为分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{pmatrix},$$

其中分块 J_j 为幂因子 $p_j^{k_{ji}}$.

(4) 假设

$$p_j = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \lambda^r,$$

则

$$J_j = \begin{pmatrix} C_j & & & & \\ N & C_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & C_j & \\ & & & N & C_j \end{pmatrix}.$$

可知在 J_j 中, 有 k_{ji} 个 C_j 的分块.

N 为在 $(1, r)$ 处为 1、其余地方为 0 的 $r \times r$ 矩阵, r 为多项式 p_j 的次数. 矩阵 C_j 是从 p_j 的系数所构造出来的:

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & & -a_3 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & -a_{r-2} \\ & & & & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

(5) 最后, 得到矩阵

$$X = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}.$$

任一 B_i 对应于矩阵 A 中的不变因子 $d_i(\lambda)$.

给定矩阵 $A \in M_n(F)$, 将证明存在可逆矩阵 $S \in M_n(F)$ 使得 $S^{-1}AS = X$, 其中 X 如上所述.

我们称 X 为 A 的 **Jordan 典范型** (Jordan canonical form), 至此便完成了构造. C. Jordan (1838—1922) 是从巴黎理工学院毕业的法国工程师数学家.

9.1.2 例子

撇开理论来说, Jordan 典范型的实际计算是相当容易的, 现通过例子来说明一下.

例 9.1 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

应用高斯消元法

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} : c_1 \leftrightarrow c_3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$: c_3 + (\lambda-1)c_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-2 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$
$$: r_3 + (\lambda-2)r_1; (-1)r_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix},$$

不变因子为 $\lambda-1$ 和 $(\lambda-1)(\lambda-2)$, 初等因子是 $\lambda-1$, $\lambda-1$ 和 $\lambda-2$. Jordan 典范型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 9.2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

应用高斯消元

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} : r_1 \leftrightarrow r_2 : \begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$
$$: c_2 + (\lambda-1)c_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ -2 & -2\lambda-1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$
$$: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda-2 \end{pmatrix} : r_2 \leftrightarrow r_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$: c_2 + 2c_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda-2 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
: c_3 + \frac{\lambda-2}{5}c_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\frac{\lambda-2}{5})(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}
$$

$$
: r_3 + \frac{(\lambda-1)^2}{5}r_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda-2}{5}(\lambda-1)^2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix},
$$

不变因子是 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 初等因子是 $(\lambda-1)^2$ 和 $(\lambda-2)$. A 的 Jordan 典范型为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

注意例 9.1 和例 9.2 中的矩阵具有相同的特征多项式 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 但其初等因子并不相同, 从而 Jordan 典范型也不相同.

例 9.3 矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

利用高斯消元法生成对角矩阵

$$
\begin{pmatrix} I_6 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2+1)(\lambda^2-2)^2 \end{pmatrix}.
$$

不变因子为 λ^2-2, $(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)^2 = x^6 - 3x^4 + 4$.

A 的有理典范形式为分块对角矩阵, 其每一分块对应每一个不变因子:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现可知初等因子到底是什么, 这取决于基域 F.

首先取 F 为有理数域, 那么初等因子为 λ^2-2, (λ^2+1) 和 $(\lambda^2-2)^2$. 在这种情况下, A 的 Jordan 典范形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

接着取 F 为实数域, 那么在实数上 $\lambda^2-2=(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$. 可知初等因子 $(\lambda+\sqrt{2})$, $(\lambda-\sqrt{2})$, (λ^2+1), $(\lambda+\sqrt{2})^2$ 和 $(\lambda-\sqrt{2})^2$. 其 Jordan 典范形式为

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & & & & & \\ & \sqrt{2} & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & -\sqrt{2} & 0 & & \\ & & & & 1 & -\sqrt{2} & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & 0 \\ & & & & & & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

最后, 取 F 为复数域. 则有 $(\lambda^2+1)=(\lambda+i)(\lambda-i)$, 其中 $i=\sqrt{-1}$. 初等因子为

$(\lambda+\sqrt{2})$, $(\lambda-\sqrt{2})$, $(\lambda+i)$, $(\lambda-i)$, $(\lambda+\sqrt{2})^2$ 和 $(\lambda-\sqrt{2})^2$. A 的 Jordan 典范形式为

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & & & & & \\ & \sqrt{2} & & & & & & \\ & & -i & 0 & & & & \\ & & 0 & i & & & & \\ & & & & -\sqrt{2} & 0 & & \\ & & & & 1 & -\sqrt{2} & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & 0 \\ & & & & & & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

9.1.3 为什么?

给定有限维向量空间 V 和线性映射 $\phi: V \to V$, 我们可用 ϕ 把 V 转成为在多项式环 $F[\lambda]$ 上的有限生成扭模 V_ϕ. 回忆一下, $F[\lambda]$ 实际是 PID, 可把 V_ϕ 分解为循环模的直和, 每一直和项 V_i 为一个不变因子. 接着, 根据第 i 个不变因子到不可约多项式的分解, 进一步把每一个 V_i 分解为 p_j 个准素环子模的直和. 那样, 对于某一组基, 映射 ϕ 的矩阵的 Jordan 典范形式取决于这个分解.

9.2 线性映射所决定的模

给定任一域 F, 引入变量 λ, 并记 $F[\lambda]$ 为变量为 λ 的多项式环.

令 V 为 F 上的向量空间, $\phi: V \to V$ 为 F 线性映射, 接着用 ϕ 在 V 上定义 $F[\lambda]$ 模结构. 如下所述: 取 $F[\lambda]$ 中的多项式

$$f = f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n,$$

即 $a_j \in F$.

对任一向量 $v \in V$ 定义 fv:

$$fv = f(\phi)v = a_0 v + a_1\phi v + \cdots + a_n\phi^n v,$$

其中 $\phi^2 v$ 是指 $\phi(\phi(v))$, 其他情况类同. 容易验证, 通过 $F[\lambda]$ 中的元素进行的 "标量" 乘法以及其自身向量的加法, V 成为环 $F[\lambda]$ 上的模, 我们称之为线性影射 ϕ 的模, 有时记这个 $F[\lambda]$ 模为 V_ϕ 以区分原来的 F 向量空间 V.

记 End_F 为全体配对 (V,ϕ) 所组成的集合, 这里 $\phi: V \to V$ 是 F 线性映射. 记 $\mathfrak{Mod}_{F[\lambda]}$ 为全体 $F[\lambda]$ 模块成的集合.

命题 9.4 映射 $\mathrm{End}_F \to \mathfrak{Mod}_{F[\lambda]} : (V,\phi) \mapsto V_\phi$ 是双射.

证明 我们定义逆映射. 给定一 $F[\lambda]$ 模 V. 先撇开 λ, V 可视为 F 上的向量空间, 而且由 λ 的乘法定义了由 V 到 V 的 F 线性映射 ϕ. □

若向量空间 V 是域 F 上的有限维向量空间, 则对向量 $v \in V$, 若 n 充分大时 ($\leqslant$ V 的维数), 集合 $v, \phi v, \phi^2 v, \phi^3 v, \cdots, \phi^n v$ 将会是线性相关. 这样便存在非全体为零元素 $a_j \in F$, 使得 $a_0 v + a_1 \phi v + \cdots + a_n \phi^n v = 0$. 若记 $f = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n \lambda^n$, 那么在 $F[\lambda]$ 模 V_ϕ 中, 有 $fv = 0$. 即是说任意向量 $v \in V$ 是 V_ϕ 中的扭元素.

给定 F 线性映射 $\phi : V \to V$. 对系数在 F 内的首一多项式 $m(\lambda)$ 考虑以下两个条件: (1) $m(\phi) = 0$, (2) 若有系数在 F 内的多项式 $f(\lambda)$ 使得 $f(\phi) = 0$, 则必有 $m|f$. 如果 m 满足以上两个条件, 则称 m 为 ϕ 的**最小多项式** (minimal polynomial). 不难验证: 全体满足 $fV_\phi = 0$ 的多项式 $f(\lambda) \in F[\lambda]$ 所组成的集合实际上就是由 m 所生成的主理想.

同时我们已证明了下面的命题.

命题 9.5 如果 V 是有限维, 那么 V_ϕ 是有限生成 $F[\lambda]$ 扭模, 其零化子是 $\operatorname{Ann} V_\phi = (m)$, 这里 m 是 ϕ 的最小多项式.

假设 V_ϕ 是循环 $F[\lambda]$ 扭模, 即 $V_\phi = F[\lambda]v$. 这样 $\operatorname{Ann} v = (m)$, 这里 m 为 ϕ 的最小多项式. 现令

$$m = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

由于 m 是非零最小次多项式, 满足 $mv = 0$, 从而由向量 $v, \lambda v, \cdots, \lambda^{n-1} v$ 所构成的集合是线性无关的, 这样便给出了 F 上的向量空间 V 的一组基. 现计算对于这组基的 ϕ 所对应的矩阵:

$$\begin{aligned}
\phi v &= \lambda v, \\
\phi(\lambda v) &= \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v, \\
&\cdots \\
\phi(\lambda^{n-2} v) &= \lambda^{n-1} v, \\
\phi(\lambda^{n-1} v) &= \lambda^n v = -a_0 v - a_1(\lambda v) - \cdots - a_{n-1}(\lambda^{n-1} v).
\end{aligned}$$

这样, ϕ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix}
0 & & & & & -a_0 \\
1 & 0 & & & & -a_1 \\
 & 1 & 0 & & & -a_3 \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\
 & & & & 1 & -a_{n-1}
\end{pmatrix},$$

这个矩阵便称作为多项式 m 的**友矩阵** (companion matrix).

下一步我们假设最小多项式为 $m = p^k$, 其中 $p = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{r-1}\lambda^{r-1} + \lambda^r$. 这时对于以下的一组基底

$$v, \lambda v, \cdots, \lambda^{r-1}v, p(\lambda)v, p(\lambda)\lambda v, \cdots, p(\lambda)\lambda^{r-1}v, p(\lambda)^2 v, \cdots, p(\lambda)^{k-1}\lambda^{r-1}v,$$

ϕ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} C & & & & \\ N & C & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & C & \\ & & & N & C \end{pmatrix},$$

这里 N 是在 $(1, r)$ 处取值为 1、其余地方取值为零的 $r \times r$ 矩阵, C 为 p 的友矩阵. 例如, 若 $m = (\lambda - a)^k$, 则 ϕ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}.$$

9.3 典范型

现回到一般情形. 回想一下, 我们记 $F[\lambda]^n$ 为由 n 个 $F[\lambda]$ 所构成的直和所得到的 $F[\lambda]$ 模. 记 $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, 其中在第 j 处取 1, 其余处取 0. 集合 $(e_1, \cdots, e_n)$ 便是 $F[\lambda]^n$ 的一组基底.

令 $\phi : V \to V$ 为 F 上的有限维向量空间 V 的 F 线性映射, 令 $(u_1, \cdots, u_n)$ 为 F 上的向量空间 V 的基底. 那么 $(u_1, \cdots, u_n)$ 便是 $F[\lambda]$ 模 V_ϕ 的一个生成元集合 (一般来说, 这个并不一组基底). 现可用这生成元集合来定义一个 $F[\lambda]$ 模满同态

$$\pi : F[\lambda]^n \to V_\phi,$$

其中 $\pi(e_j) = u_j$. 令 N 为 π 的核. 这样, 便有

$$V_\phi \cong F[\lambda]^n / N.$$

所以, 我们便需要考虑一个问题, 如何把 $F[\lambda]^n$ 和 N 的基底找出来. 易知商模 $F[\lambda]^n/N$ 可写成准素循环模的和. 现在开始找出 N 的一组基.

命题 9.6 假设 $(u_1, \cdots, u_n)$ 是 V 在 F 上的基底. 令

$$\phi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i.$$

则元素

$$f_j := \lambda e_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

组成 $F[\lambda]$ 模 N 的基底.

证明 首先在 V_ϕ 中可以通过以下形式计算 $\pi(f_j)$,

$$\pi(f_j) = \lambda \cdot u_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i = \phi(u_j) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i = 0,$$

即 $f_j \in N$.

由于 N 可视作为 $F[\lambda]^n$ 的子模, N 的任何元素皆可写作 $\sum g_j(\lambda) e_j$. 由 f_j 的定义可以写成 $\lambda e_j = f_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, 从而可以用此表达式把任意 $\lambda^k e_j$ 写成 f_j 和 e_i 的和. 因为每一个 $g_i(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式, 可写成

$$\sum g_j(\lambda) e_j = \sum h_j(\lambda) f_j + \sum b_i e_i, \quad b_i \in F.$$

因为已知 $\sum g_j(\lambda) e_j$ 是在 N 中, 并已经证明了 f_j 在 N 中, 从上式立知 $\sum b_i e_i$ 也在 N 中, 这样便有 $0 = \pi(\sum b_i e_i) = \sum b_i u_i$. 但是从 $b_i \in F$ 和 u_i 形成 V 的基底可知全体 $b_i = 0$ (u_j 的线性无关性), 因而 N 的任意元素皆可写成 f_j 的线性组合, 其系数取值于 $F[\lambda]$.

现在只剩下验证 f_j 是线性无关的. 假定 $\sum_{j=1}^{n} q_j(\lambda) f_j = 0$, 替换到定义 f_j 的表达式中, 得

$$\sum_{j=1}^{n} q_j(\lambda) \lambda e_j = \sum_{i,j=1}^{n} q_j(\lambda) a_{ij} e_i.$$

从 e_j 的系数皆相同可知

$$q_j(\lambda) \lambda = \sum_{i=1}^{n} q_i(\lambda) a_{ji},$$

因为 e_j 形成了 $F[\lambda]^n$ 的一组基. 若全体 $q_j(\lambda)$ 皆为零的话, 这里便没有什么可证的. 否则, 在那些非零元 $q_j(\lambda)$ 中, 令 $q_s(\lambda)$ 为有最大次数的多项式, 并记次数为 r. 这样, 便有等式

$$q_s(\lambda) \lambda = \sum_{i=1}^{n} q_i(\lambda) a_{si}.$$

观察到等式左边的次数为 $r+1$, 而等式右边的次数是 $\leqslant r$, 从而得出矛盾, 可知全体 $q_j(\lambda)$ 皆零. $\square$

现回到 $F[\lambda]$ 模的商模 $F[\lambda]^n/N$ 的讨论. 自由模 $F[\lambda]^n$ 有基底 $(e_1,\cdots,e_n)$, 其取决于子模 N 的基底 $(f_1,\cdots,f_n)$ 和

$$f_j := \lambda e_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i,$$

这里 $A=(a_{ij})$ 是 F 线性映射 $\phi : V \to V$ 的矩阵, $(u_1,\cdots,u_n)$ 为向量空间 V 的一组基.

对于基底 (f_j) 和 (e_j), 包含映射 $N \hookrightarrow F[\lambda]^n$ 的矩阵为

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

接着应用高斯消元化把矩阵 $\lambda I - A$ 约化到一个跟它等价的对角矩阵, 即找出可逆矩阵 Q, P, 其矩阵元素在 $F[\lambda]$ 中取值, 使得

$$Q^{-1}(\lambda I - A)P = \delta(1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)).$$

现用 $P=(p_{ij}(\lambda))$, $Q=(q_{ij}(\lambda))$ 引入一组新基底,

$$f'_j = \sum_i q_{ij}(\lambda) f_i \quad \text{和} \quad e'_j = \sum_i p_{ij}(\lambda) e_i.$$

对于新基底 (f'_j) 和 (e'_j), 包含映射 $N \hookrightarrow F[\lambda]^n$ 有矩阵 $\delta(1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda))$, 其中 $d_j(\lambda)$ 为首一多项式和 $d_j(\lambda) \mid d_{j+1}(\lambda)$.

这样, 使用以上的新基底时, 映射 $\pi : V \to F[\lambda]^n$ 把 e'_j 映为 $v_j := \sum_i q_{ij}(\phi) u_i$. 让我们更改符号, 记 $z_j := v_{n-s+j}$. 于是便得

$$F[\lambda] z_j \cong F[\lambda]/(d_j).$$

总结以上的讨论, 我们得知 V_ϕ 有以下循环分解 $V_\phi = F[\lambda]z_1 \oplus \cdots \oplus F[\lambda]z_s$, 其中 $\operatorname{Ann} z_i = (d_i(\lambda))$. 我们称多项式 $d_j(\lambda)$ 为 F 线性映射 ϕ 的**不变因子** (invariant factor).

通过我们对 ϕ 的矩阵所知的内容, 当 V_ϕ 为循环 $F[\lambda]$ 模时, 立即可知对于 V 的一组基和 V_ϕ 的循环分解, 映射 ϕ 的矩阵现可写为

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s \end{pmatrix},$$

这里 C_j 为不变因子 $d_j(\lambda)$ 的友矩阵. 我们称此为映射 ϕ 的矩阵的**有理典范形式** (rational canonical form).

我们可进一步讨论. 可把循环 $F[\lambda]$ 模 $F[\lambda]z_i$ 分解为准素循环模的直和, 亦即是说 V 准素循环模的直和. 若用这准素循环分解来选取 V 的基底, ϕ 的矩阵可写为分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

其中分块 B_i 对应于不变因子 d_i. 假设

$$d_i = p_1^{k_{1i}} \cdots p_h^{k_{hi}}$$

为多项式 d_i 到在域 F 上不可约多项式 p_j 的幂乘积分解. 则分块矩阵 B_i 是分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{pmatrix},$$

其中分块 J_j 对应于 d_i 的素幂因子 $p_j^{k_{ji}}$. 分块 J_j 是来自于循环子模, 其零化因子是 $p_j^{k_{ji}}$, 所以有

$$J_j = \begin{pmatrix} C_j & & & & \\ N & C_j & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & C_j & \\ & & & N & C_j \end{pmatrix},$$

这里 C_j 是 p_j 的友矩阵, N 是在 $(1, r)$ 处取 1、其余地方取 0 的 $r \times r$ 矩阵, r 是 p_j 的次数, 且在 J_j 中有 k_{ji} 个 C_j.

这样得到的 F 线性映射 ϕ 的矩阵被称为 **Jordan 典范形式** (Jordan canonical form) .

习 题

1. 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域, V 为 $\mathbb{Q}^4$. $\phi: V \to V$ 对标准基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

以 ϕ 决定的 $\mathbb{Q}[\lambda]$ 模记为 V_ϕ. 求 V_ϕ 的准素分解和循环准素分解.

2. 求以下矩阵的特征多项式、最小多项式、不变因子、初等因子和 Jordan 典范型.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -8 & -12 & 14 \\ 46 & -22 & -35 & 41 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. 设矩阵 A 的不等于 1 的不变因子是 $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ 和 $\lambda^6 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1$. 求 A 的初等因子、有理典范形式和 Jordan 典范型.

4. 设矩阵 A 的初等因子是 $(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)$, $(\lambda^2+1)^4$, $(\lambda^2+1)^2$, (λ^2+1) 和 $(\lambda+2)$. 求 A 的不变因子.

5. 系数在环 R 中的 $n \times n$ 矩阵记为 $M_n(R)$. 设 $n \times n$ 矩阵 A, B 的系数在域 F 中. 证明: 存在 $T \in M_n(F)$ 使得 $B = TAT^{-1}$ 当且仅当 $\lambda - A$, $\lambda - B$ 在 $M_n(F[\lambda])$ 中有相同的不变因子.

6. 设矩阵 A 的系数在域 F 中. 设 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda - A)$, $\lambda - A$ 的所有 $(n-1)\times(n-1)$ 子行列式的最大公因子记为 $\eta_A(\lambda)$. 设 $\mu_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)\eta_A(\lambda)^{-1}$. 证明:

(a) $\chi_A(A) = \mu_A(A) = 0$;

(b) 如果多项式 $\nu(\lambda)$ 满足条件 $\nu(A) = 0$, 则 $\mu_A(\lambda) | \nu(\lambda)$;

(c) $\mu_A(\lambda)$ 和 $\chi_A(\lambda)$ 有相同的不可约因子.

7. 设矩阵 A 满足条件 $A^n = 0$, 其中 n 为正整数. 证明: A 所有的不变因子是 λ^m. 求 A 的 Jordan 典范型.

8. 设矩阵 A 满足 $A^2 = A$. 证明: A 的初等因子是 λ 或 $\lambda - 1$.

9. 设 5×5 复数矩阵 A 的特征多项式是 $(\lambda-2)^3(\lambda+7)^2$, 最小多项式是 $(\lambda-2)^2(\lambda+7)$. 求 A 的 Jordan 典范型.

第十章　复矩阵

本章主要介绍复矩阵的谱定理、范数的定义和性质、Hermite 矩阵特征值的极大极小定理以及求解线性系统 $Ax = b$ 的共轭梯度法及其预处理.

一个 $n \times m$ 列的复矩阵是指一个 n 行 m 列的数组 $A = (a_{ij})$, 其中元素 a_{ij} 为复数 $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$. 全体 $n \times m$ 复矩阵组成的复向量空间记作 $M_{n\times m}$. $M_{n\times n}$ 简记为 M_n, 这样 $M_{n\times 1} = \mathbb{C}^n$.

A 的**共轭矩阵** (conjugate matrix) 是 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, 其中 $\bar{a}_{ij}$ 表示复数 a_{ij} 的共轭复数. A 的**转置矩阵** (transposed matrix) A^T 是指将矩阵 A 的行都变为同序数的列所得到的矩阵, 即若 $A \in M_{n\times m}$, 则 $A^T \in M_{m\times n}$. A 的 (i, j) 元素是 a_{ij}, 常简记 $A^T = (a_{ji})$. A 的共轭转置矩阵 $\bar{A}^T$ 记作 A^*. 如果 $A \in M_n$ 是可逆的, 其逆矩阵记作 A^{-1}. 如下三种运算 $A \mapsto \bar{A}$, $A \mapsto A^T$ 及 $A \mapsto A^{-1}$ 都是非常重要的矩阵对合.

设 $A \in M_n$. 如果存在数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称 λ 是 A 的特征值, x 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. A 的全体特征值的集合称为 A 的**谱** (spectrum), 以 $\sigma(A)$ 记 A 的谱. A 的**谱半径** (spectral radius) $\rho(A)$ 定义为 $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

在本章中, 我们令 I 表示单位矩阵, $\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ 表示对角线元素为 $d_1, \cdots, d_n$ 的对角矩阵.

10.1　谱定理

10.1.1　Gram-Schmidt

如果 $y^*x = 0$, 则称 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 是正交的. 如果 $x^*x = 1$, 则称 x 是一个单位向量. 令 $|x|$ 表示 $\sqrt{x^*x}$.

设 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关的向量组. 我们能够找到 $\mathbb{C}^n$ 中的相互正交的单位向量组 $\{u_1, \cdots, u_m\}$, 使得 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 和 $\{u_1, \cdots, u_m\}$ 生成相同的空间. 设

向量 x_j 形成矩阵 $X=(x_1x_2\cdots x_m)$ 的列. 同样地, 令 $U=(u_1u_2\cdots u_m)$. 则我们能够找到一个可逆矩阵 $R=(r_{ij})$, 使得 $U=XR$, 其中 R 是上三角的, 即 $r_{ij}=0$, $i>j$. 这可以通过如下 **Gram-Schmidt 过程**来实现.

令 $y_1=x_1$, $u_1=y_1/|y_1|$. 令

$$y_2=x_2-(u_1^*x_2)u_1.$$

则 $u_1^*y_2=0$, 即 u_1,y_2 是正交的. 令 $u_2=y_2/|y_2|$. 假设我们已经找到 $u_i,\cdots,u_{k-1}$. 令

$$y_k=x_k-(u_{k-1}^*x_k)u_{k-1}-(u_{k-2}^*x_k)u_{k-2}-\cdots-(u_1^*x_k)u_1.$$

则 y_k 与 $u_1,\cdots,u_{k-1}$ 正交. 再令 $u_k=y_k/|y_k|$, 继续直至 $k=m$, 其余的就很清楚了.

10.1.2 Schur

我们称一个矩阵 $U\in M_n$ 是**酉矩阵** (unitary matrix), 如果 $U^*U=I$, 其中 I 表示单位矩阵.

定理 10.1 设 $A\in M_n$, 其特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则存在一个酉矩阵 $U\in M_n$, 使得 $U^*AU=T=(t_{ij})$ 是上三角的且 $t_{ii}=\lambda_i$.

证明 设 x_1 是 A 的对应于特征值 λ_1 的单位特征向量. 将向量组 $\{x_1\}$ 扩张成 $\mathbb{C}^n$ 的一个基 $x_1,y_2,\cdots,y_n$, 然后我们运用 Gram-Schmidt 过程产生 $\mathbb{C}^n$ 的一个规范正交基 $x_1,u_2,\cdots,u_n$. 利用这个规范正交基作为矩阵 $U_1=(x_1u_2\cdots u_n)$ 的列, 因此 AU_1 的第一列是 λ_1x_1. 这些向量相互正交的事实意味着 U 是酉矩阵且

$$U_1^*AU_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star\\ 0 & A_1\end{pmatrix}.$$

我们知道矩阵 A_1 的特征值为 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 根据 A_1 的对应于特征值 λ_2 的单位特征向量 x_2, 我们重复以上构造过程既得一个酉矩阵 $U_2\in M_{n-1}$, 使得

$$U_2^*A_1U_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & \star\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

令

$$V_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_2\end{pmatrix}.$$

则 V_2 和 U_1V_2 都是酉矩阵. 再者

$$V_2^*U_1^*AU_1V_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \star\\ 0 & \lambda_2 & \star\\ 0 & 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

接下来, 我们对 A_2 应用同样的构造过程可得一个酉矩阵 $U_3 \in M_{n-2}$ 且令

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}.$$

这样继续下去, 我们可得酉矩阵 $U_i \in M_{n-i_1}$ 和 $V_i \in M-n$, 使得

$$U = U_1 V_2 \cdots V_{n-1}$$

是一个酉矩阵且 U^*AU 满足定理. □

10.1.3 正规矩阵

一个矩阵 A 称为**正规矩阵** (normal matrix), 如果 $A^*A = AA^*$; 称 A 为 **Hermite 矩阵**, 如果 $A = A^*$. 酉矩阵和 Hermite 矩阵都是正规矩阵.

定理 10.2 (谱定理) *如果 $A \in M_n$ 是正规矩阵, 则存在酉矩阵 $U \in M_n$, 使得 U^*AU 是对角矩阵, 且其对角元素是 A 的特征值.*

证明 首先, 由 Schur 定理可知, 存在酉矩阵 $U \in M_n$, 使得 $T = U^*AU$ 是上三角的. 由于 A 是正规矩阵, 则 T 也是正规矩阵. 因此 T^*T 的 $(1,1)$ 元等于 TT^* 的 $(1,1)$ 元, 即

$$\bar{t}_{11}t_{11} = t_{11}\bar{t}_{11} + \sum_{j=2}^{n} t_{1j}\bar{t}_{1j} = |t_{11}|^2 + \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2.$$

这表明我们可得一个非负数之和 $\sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2 = 0$, 则其每项必须为零. 因此,

$$t_{1j} = 0, \quad j = 2, \cdots, n.$$

再者, T 是上三角的, 我们可得 $t_{21} = 0$. 由 T^*T 和 TT^* 的 $(2,2)$ 元相等可得

$$\bar{t}_{22}t_{22} = t_{22}\bar{t}_{22} + \sum_{j=3}^{n} t_{2j}\bar{t}_{2j} = |t_{22}|^2 + \sum_{j=3}^{n} |t_{2j}|^2,$$

从而我们有

$$t_{2j} = 0, \quad j = 3, \cdots, n.$$

继续上述过程, 我们有

$$t_{ij} = 0, \quad j > i, i = 1, \cdots, n.$$

这连同 T 是上三角矩阵的事实证明了定理的结论. □

10.2 范数

设 V 是复数域上的向量空间. 一个定义在 V 上的非负实值函数 $x \mapsto \|x\|$ 称为一个向量空间**范数** (norm), 如果

(1) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

例如, 在 $\mathbb{C}^n$ 上, 我们有

(1) ℓ_2 范数: $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x}$;

(2) ℓ_1 范数: $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$;

(3) ℓ_∞ 范数: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$.

命题 10.3 对有限维复向量空间 V 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, 存在常数 C_1, C_2, 使得对所有的 $x \in V$ 都有

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1.$$

证明 取 V 的一个基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 取 $z = (z_1, \cdots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ 表示 $x(z) = \sum_j z_j e_j$, 我们可将 $\mathbb{C}^n$ 认同为 V. 既然如下正值函数

$$h(z) = \frac{\|x(z)\|_2}{\|x(z)\|_1}$$

在紧集 $S := \{z \in \mathbb{C}^n : z^* z = 1\}$ 上是连续的, 我们可得 S 上的一个最小值 C_1 和一个最大值 C_2. 因此对所有的 $z \in S$ 都有

$$C_1\|x(z)\|_1 \leqslant \|x(z)\|_2 \leqslant C_2\|x(z)\|_1.$$

但是这对所有的 $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ 也成立, 因为

$$\|\alpha x\|_m = |\alpha|\|x\|_m, \quad m = 1, 2.$$

再者, 此不等式对 $z = 0$ 显然成立. 由每个 $x \in V$ 都是 $x(z)$ 可得命题的结论. $\square$

定义 10.4 一个复代数是复数域上的向量空间 A, 其中定义了一个结合积和分配积, 即对任意的 $x, y, z \in A$, 有

$$x(yz) = (xy)z, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz,$$

且对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y.$$

一个复代数 A 上的非负实值函数 $x \mapsto \|x\|$ 称为**代数范数** (algebra norm), 如果

(1) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
(4) $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

M_n 是一个复代数且可在其上定义许多范数. 再者, 如果 $\|\cdot\|$ 是 M_n 上的一个代数范数且 $R \in M_n$ 是可逆的, 则 $A \mapsto \|R^{-1}AR\|$ 亦是 V 上的一个代数范数.

我们给出一些例子并留给读者去证明它们都是代数范数. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n$.

(1) ℓ_1 范数

$$\|A\|_1 := \sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|.$$

(2) ℓ_2 范数

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

这也称为 Frobenius 范数或者 Hilbert-Schmidt 范数.

(3) 列范数

$$|||A|||_1 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(4) 行范数

$$|||A|||_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(5) 谱范数

$$|||A|||_2 := \{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ 是 } A^*A \text{ 的一个特征值}\}.$$

我们可以将一个矩阵 $A \in M_n$ 看作向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的线性算子:

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : x \mapsto Ax.$$

从而, 对 $\mathbb{C}^n$ 上的任意向量空间范数 $\|\cdot\|$, 我们可以定义 A 的**算子范数** (operator norm)

$$|||A||| := \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\right\}.$$

容易证明 $|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, 这定义了 M_n 上的一个代数范数.

定义 10.5 一个矩阵 $A \in M_n$ 的**谱半径** (spectral radius) $\rho(A)$ 定义为

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ 是 } A \text{ 的一个特征值}\}.$$

命题 10.6 如果 $\|\cdot\|$ 是 M_n 上的一个代数范数, 则对任意的 $A \in M_n$ 都有

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

证明 设 λ 是 A 的一个特征值, 使得 $\|\lambda\| = \rho(A)$. 设 x 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量. 令 X 表示所有列等于 x 的矩阵. 因此, $AX = \lambda X$. 由代数范数的定义, 我们有

$$|\lambda| |||X||| = |||\lambda X||| = |||AX||| \leqslant |||A||| |||X|||.$$

所以 $\rho(A) = || \leqslant |||A|||$. □

命题 10.7 设 $A \in M_n$ 和 $\epsilon > 0$. 则存在 M_n 上的一个代数范数 $\|\cdot\|$, 使得

$$\rho(A) \leqslant \|A\| \leqslant \rho(A) + \epsilon.$$

证明 由 Schur 定理可知, 存在一个酉矩阵 U, 使得 $U^*AU = T$ 是一个上三角矩阵, 其所有对角元素等于 A 的特征值. 设 $D_t = \operatorname{diag}(t, t^2, \cdots, t^n)$. 则

$$D_tTD_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}t_{12} & t^{-2}t_{13} & \cdots & t^{-n+1}t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}t_{23} & \cdots & t^{-n+2}t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t^{-n+3}t_{3n} \\ . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^{-1}t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

这表明对充分大的 $t > 0$, $D_tTD_t^{-1}$ 的非对角元素的绝对值之和可以充分地小. 特别地, 对充分大的 t, 我们可得列范数的估计式:

$$|||D_tTD_t^{-1}|||_1 \leqslant \rho(A) + \epsilon.$$

下面我们定义 M_n 上的一个新范数如下: 对任意的 $B \in M_n$, 设

$$|||B||| = |||(UD_t^{-1})^{-1}B(UD_t^{-1})|||_1 = |||D_tU^*BUD_t^{-1}|||_1.$$

这个范数满足定理的要求. □

命题 10.8 设谱半径 $\rho(A) < 1$. 则 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. 这表明, 如果我们将 A^k 的 (i, j) 元记作 $a_{ij}(k)$, 则 $\lim_{k\to\infty} a_{ij}(k) = 0$.

证明 由前面的命题可知, $\rho(A) < 1$ 意味着存在一个代数范数 $|||\cdot|||$, 使得 $|||A||| < 1$ 且当 $k \to \infty$ 时, 有 $|||A^k||| \leqslant |||A|||^k \to 0$. 这就是说, 在范数 $|||\cdot|||$ 意义下, $A^k \to 0$. 现在, 由 n^2 维向量空间 M_n 上的所有向量空间范数等价的事实, 我们可以得出结论: 在 ℓ_∞ 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 意义下, $A^k \to 0$. □

定理 10.9　设 $A \in M_n$. 则对 M_n 上的任意的代数范数 $\|\cdot\|$, A 的谱半径满足

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

证明　设 $\epsilon > 0$. 令 $A' := (\rho(A)+\epsilon)^{-1}A$. 则 $\rho(A') < 1$. 从而, 由前面的命题可得, $\lim_{k\to\infty} A'^k = 0$. 因此, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $\|A'^k\| \to 0$. 我们可以推出, 存在一个 N, 使得对所有 $k \geqslant N$, 有 $\|A^k\| \leqslant (\rho(A)+\epsilon)^k$. 所以, 对所有 $k \geqslant N$, 有 $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leqslant (\rho(A)+\epsilon)$.

另一方面, 对任意的代数范数 $\|\cdot\|$, 我们有 $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leqslant \|A^k\|$. 因此, $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. 证毕. □

10.3　极大极小定理

一个 $n\times n$ Hermite 矩阵 A 的特征值都是实数, 其特征值可按递增顺序排列

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

我们用 $\lambda_k(A)$ 表示 λ_k.

定理 10.10 (Rayleigh-Ritz 定理)　设 A 是一个 $n\times n$ Hermite 矩阵. 则

$$\lambda_{\min} x^*x \leqslant x^*Ax \leqslant \lambda_{\max} x^*x, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$
$$\lambda_{\max} = \max_{x\neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{x^*x=1} x^*Ax,$$
$$\lambda_{\min} = \min_{x\neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{x^*x=1} x^*Ax.$$

表达式 $\frac{x^*Ax}{x^*x}$ 称为一个 **Rayleigh-Ritz 比率**.

证明　取一个酉矩阵 U, 使得 $A = U\Lambda U^*$, 其中 Λ 是一个对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 这里, λ_j 是 A 的特征值. 对任意的 $x\in\mathbb{C}^n$, 我们有

$$\begin{aligned} x^*Ax &= x^*U\Lambda U^*x = (U^*x)^*\Lambda(U^*) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j |(U^*x)_j|^2. \end{aligned}$$

由于 $|(U^*x)_j|^2 \geqslant 0$, 我们有

$$\lambda_{\min}\sum_{j=1}^n |(U^*x)_j|^2 \leqslant x^*Ax = \sum_{j=1}^n \lambda_j|(U^*x)_j|^2 \leqslant \lambda_{\max}\sum_{j=1}^n |(U^*x)_j|^2.$$

因为 U 是酉矩阵, 所以

$$\sum_{j=1}^n |(U^*x)_j|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = x^*x,$$

从而

$$\lambda_{\min} x^* x \leqslant x^* A x \leqslant \lambda_{\max} x^* x.$$

由此可知, 如果 $x \neq 0$, 则

$$\frac{x^* A x}{x^* x} \leqslant \lambda_{\max},$$

其中当 x 是特征值 $\lambda_{\max}$ 的一个特征向量时等式成立. 因此

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_{\max},$$

由此可得

$$\max_{x^* x = 1} x^* A x = \lambda_{\max},$$

因为

$$\frac{x^* A x}{x^* x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)^* A \left(\frac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)$$

且

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^* x}}\right)^* \left(\frac{x}{\sqrt{x^* x}}\right) = 1. \qquad \square$$

定理 10.11 (Courant-Fischer 定理) 设 A 是一个 $n \times n$ Hermite 矩阵, 其特征值为

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

则对每一个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 有

$$\min_{w_1, \cdots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{\substack{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp w_1, \cdots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

和

$$\max_{w_1, \cdots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp w_1, \cdots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k.$$

证明　取酉矩阵 U 使得 $A = U \Lambda U^*$, 这里 Λ 是一个对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 λ_j 是 A 的特征值. 如果 $x \neq 0$, 则

$$\frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{(U^* x)^* \Lambda (U^*)}{x^* x} = \frac{(U^* x)^* \Lambda (U^*)}{(U^* x)^* (U^*)}$$

且

$$\{U^* x : x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\} = \{y \in \mathbb{C}^n : y \neq 0\}.$$

因此如果 $w_1, \cdots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n$, 则

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} &= \sup_{\substack{y\neq 0\\ y\perp U^*w_1,\cdots,U^*w_{n-k}}} \frac{y^*\Lambda y}{y^*y}\\
&= \sup_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,\cdots,U^*w_{n-k}}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |y_j|^2\\
&= \sup_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,\cdots,U^*w_{n-k}\\ y_1=y_2=\cdots=y_{k-1}=0}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |y_j|^2\\
&= \sup_{\substack{|y_k|^2+\cdots+|y_n|^2=1\\ y\perp U^*w_1,\cdots,U^*w_{n-k}}} \sum_{j=k}^{n} \lambda_j |y_j|^2 \geqslant \lambda_k.
\end{aligned}$$

这表明对任意的向量 $w_1, \cdots, w_{n-k}$, 都有

$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geqslant \lambda_k.$$

若在上式中取 $w_j = u_{n-j+1}$ 与 $U = [u_1 \cdots u_n]$,

$$\max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp u_n,u_{n-1},\cdots,u_{n-j+1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{x^*x=1\\ x\perp u_n,u_{n-1},\cdots,u_{n-j+1}}} x^*Ax = \lambda_{n-j},$$

即等式成立. 因此

$$\inf_{w_1,\cdots,w_{n-k}} \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k.$$

既然极值可以达到, “inf” 和 “sup” 就是 “min” 和 “max”. □

定理 10.12 (Weyl 定理) 设 A, B 是 $n\times n$ Hermite 矩阵, 其特征值 $\lambda_j(A)$, $\lambda_j(B)$, $\lambda_j(A+B)$ 均按递增顺序排列. 则对每个 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$\lambda_k(A)+\lambda_1(B)\leqslant \lambda_k(A+B)\leqslant \lambda_k(A)+\lambda_n(B).$$

证明 对于 $0\neq x\in\mathbb{C}^n$, 由 Rayleigh-Ritz 定理, 我们有

$$\lambda_1(B)\leqslant \frac{x^*Bx}{x^*x}\leqslant \lambda_n(B),$$

从而由 Courant-Fischer 定理可得

$$\begin{aligned}
\lambda_k(A+B) &= \min_{w_1,\cdots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \\
&= \min_{w_1,\cdots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \left(\frac{x^*Ax}{x^*x}+\frac{x^*Bx}{x^*x}\right) \\
&\geqslant \min_{w_1,\cdots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \left(\frac{x^*Ax}{x^*x}+\lambda_1(B)\right) \\
&= \lambda_k(A)+\lambda_1(B).
\end{aligned}$$

□

定理 10.13 (Cauchy 交错定理, Cauchy's Interlacing Theorem) 设 $\hat{A}$ 是一个 $(n+1)\times(n+1)$ Hermite 矩阵, 其特征值 $\{\hat{\lambda}_j\}$ 按递增顺序排列. 设 A 是 $\hat{A}$ 的 n 阶主子阵, 其特征值 $\{\lambda_j\}$ 按递增顺序排列. 则

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \hat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \hat{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \hat{\lambda}_{n+1}.$$

证明 如有必要, 同时交换行列, 我们不妨假设

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & y \\ y^* & a \end{pmatrix}.$$

可以证明: 对任意的 $1\leqslant k\leqslant n$, 有 $\hat{\lambda}_k \leqslant \lambda_k \leqslant \hat{\lambda}_{k+1}$. 设 $\hat{x}=[x^T c]^T\in\mathbb{C}^{n+1}$, $x\in\mathbb{C}^n$, $c\in\mathbb{C}$, 且 $\hat{w}_j=[w_i^T d]^T\in\mathbb{C}^{n+1}$, $w_j\in\mathbb{C}^n$, $d\in\mathbb{C}$. 根据 Courant-Fischer 定理, 我们有

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{k+1} &= \min_{\hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{(n+1)-(k+1)}} \max_{\substack{\hat{x}\neq 0\\ \hat{x}\perp \hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{(n+1)-(k+1)}}} \frac{\hat{x}^*\hat{A}\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&\geqslant \min_{\hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{n-k}} \max_{\substack{\hat{x}\neq 0\\ \hat{x}\perp \hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{n-k},e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^*\hat{A}\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&= \min_{w_1,\cdots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\neq 0,x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\cdots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k.
\end{aligned}$$

另一方面, 由 Courant-Fischer 定理可得

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_k &= \max_{\hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{k-1}} \min_{\substack{\hat{x}\neq 0\\ \hat{x}\perp \hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{k-1}}} \frac{\hat{x}^*\hat{A}\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&\leqslant \max_{\hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{k-1}} \min_{\substack{\hat{x}\neq 0\\ \hat{x}\perp \hat{w}_1,\cdots,\hat{w}_{k-1},e_{n+1}}} \frac{\hat{x}^*\hat{A}\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}} \\
&= \max_{w_1,\cdots,w_{k-1}\in\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\neq 0,x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,\cdots,w_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k.
\end{aligned}$$

□

由 Cauchy 交错定理可以推出以下定理.

定理 10.14 设 A 是一个 $n\times n$ Hermite 矩阵, B 是任意除去 A 中 $n-r$ 行和相应的列得到的 $r\times r$ 主子阵. 则对任意的 $1\leqslant k\leqslant r$, 有

$$\lambda_k(A)\leqslant\lambda_k(B)\leqslant\lambda_{k+n-r}(A).$$

10.4 共轭梯度法

10.4.1 在直线上搜索最小值

我们给出求解线性系统 $Ax=b$ 的一种迭代解法. 我们限制在实数范围内, 例如 x,b 属于 $\mathbb{R}^n$, 即为 $n\times 1$ 列矩阵. 我们假设 A 是一个 $n\times n$ 对称正定矩阵, 这里正定性是指对任意的非零向量 $y\in\mathbb{R}^n$, 有 $y^TAy>0$.

定理 10.15 设 A 是对称正定矩阵且 b 是一个向量. 则 x 是 $Ax=b$ 的一个解当且仅当函数

$$\phi(x)=x^TAx-2b^Tx$$

在点 x 处达到最小值.

注 寻找函数 $\phi(x)$ 的最小值问题可以取代线性系统 $Ax=b$ 的求解问题.

引理 10.16 给定对称正定矩阵 A 和向量 b, 令 $\phi(x)=x^TAx-2b^Tx$, 固定向量 x,p, 引入一个函数

$$f(\alpha)=\phi(x+\alpha p).$$

如果 $p^TAp>0$, 则 f 在点

$$\alpha=\frac{(b-Ax)^Tp}{p^TAp}$$

处达到最小值.

证明 由

$$f(\alpha)=\alpha^2p^TAp-2\alpha(b-Ax)^Tp+\phi(x),$$

我们有

$$\frac{df}{d\alpha}=2\alpha p^TAp-2(b-Ax)^Tp,\quad \frac{d^2f}{d\alpha^2}=2p^TAp,$$

从而利用通常的微积分极值定律, 我们可得引理的结论. □

注 以 α 为变元, 我们把 $y+\alpha p$ 看作通过 y 以 p 为方向的直线. 如果 $p^TAp>0$, 则以上引理告诉我们 $\phi(x)$ 在那一点取最小值.

10.4.2 共轭向量

假如我们沿着一条线寻找函数 $\phi(x)$ 的一个最小值点. 我们在这条线上找到这个点之后, 为了继续沿着一条线做新的搜索, 我们必须选择一个方向 p. **共轭梯度法** (conjugate gradient method) 提出采取新方向 p, 使得 p 和我们使用的上一个方向是 A 垂直的, 其长度和误差成比例. 为了解释后者, 我们需要详细阐述一下.

既然 A 是正定的, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一个新的内积: 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\langle x, y\rangle_A = x^T A y, \quad \|x\|_A = \sqrt{x^T A x}.$$

如果 $\langle x, y\rangle_A = 0$, 则称两个向量 x, y 是共轭的或者 A 共轭的或者 A 垂直的.

给定对称正定矩阵 A 和向量 b, 我们通过迭代寻找函数 $\phi(x) = x^T A x - 2b^T x$ 的最小值点来求解 $Ax = b$.

假设我们已经通过在一条线 $x_{k-1} + \alpha p_{k-1}$ 上寻找最小值找到了点 x_k. 因此, x_k 具有如下形式: $x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1}$.

在点 x_k 处, 误差项为 $r_k = b - Ax_k$. 这个误差项表明 x_k 离解点有多远. 例如, 如果 $r_k = 0$, 则 x_k 是 $Ax = b$ 的解. r_k 也称为残差.

根据**共轭梯度法**的建议, 我们取下一个搜索方向 p_k 为误差项 r_k 沿着和 p_{k-1} A 垂直的方向上的投影. 即我们令

$$p_k = r_k - \frac{r_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}} p_{k-1}.$$

接下来, 我们在线 $x_k + \alpha p_k$ 上取最小值, 即令

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad \text{其中 } \alpha_k = \frac{(b - Ax_k)^T p_k}{p_k^T A p_k}.$$

现在我们继续. 也许应该加上一句: 我们从任一点 x_0 出发且令 $r_0 = p_0 = b - Ax_0$.

10.4.3 Krylov 子空间

矩阵 A 的一个 **Krylov 子空间**是指由向量组 $\{y, Ay, \cdots, A^k y\}$ 生成的子空间 $\mathcal{K}(A, y, k)$, 其中 y 是一个向量, k 是一个正整数.

命题 10.17 (1) 对 $0 \leqslant i < j \leqslant k$, 有 $p_i^T r_j = 0$.

(2) 对 $i \neq j$, $0 \leqslant i, j \leqslant k$, 有 $r_i^T r_j = 0$.

(3) 对 $i \neq j$, $0 \leqslant i, j \leqslant k$, 有 $\langle p_i, p_j\rangle_A = 0$.

(4) $\mathcal{K}(A, p_0, k)$ 是由 $\{r_0, \cdots, r_k\}$ 或者 $\{p_0, \cdots, p_k\}$ 生成的.

证明 我们利用归纳法同时证明三个结论. 对 $k = 1$, 我们有

$$p_0 = r_0, \quad r_1 = r_0 - \alpha_0 A p_0,$$

然后我们取 p_1 为 r_0 沿着与 p_0 A 垂直的方向上的投影, 即 $\langle p_1, p_0\rangle_A = 0$.

接下来我们转向从 k 到 $k+1$ 的归纳步骤.

首先, 我们可以验证

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} A p_{k-1}.$$

通过直接计算, 我们可以推出结论 (1).

对结论 (2), 如上述证明, 对 $0 \leqslant i \leqslant k$, 我们有 $p_i^T r_{k+1} = 0$, 即 r_{k+1} 与 $p_0, \cdots, p_k$ 都是垂直的. 根据归纳假设可得 $\{r_0, \cdots, r_k\}$ 和 $\{p_0, \cdots, p_k\}$ 生成同样的空间, 从而推出结论 (2).

对结论 (3), 由以上取法可知, $\langle p_{k+1}, p_k\rangle_A = 0$. 下面取 $0 \leqslant i \leqslant k-1$, 由 p_{k+1} 的定义, 我们有

$$\langle p_{k+1}, p_i\rangle_A = \langle r_{k+1}, p_i\rangle_A - \frac{\langle r_{k+1}, p_k\rangle_A}{\langle p_k, p_k\rangle_A}\langle p_k, p_i\rangle_A.$$

由归纳假设可得 $\langle p_k, p_i\rangle_A = 0$. 由结论 (2) 的归纳假设, 用 $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i$ 得到

$$\langle r_{k+1}, p_i\rangle_A = \frac{1}{\alpha_i} r_{k+1}^T (r_i - r_{i-1}).$$

对结论 (4), 由归纳假设可知, r_k, p_k 属于 $\mathcal{K}(A, p_0, k)$. 因此, 由如下公式

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k,$$

我们有 r_{k+1}, p_{k+1} 属于 $\mathcal{K}(A, p_0, k+1)$. 由结论 (2) 和结论 (3) 可得, 向量组 $r_0, \cdots, r_{k+1}$ 是线性无关的, 且 $p_0, \cdots, p_{k+1}$ 也是线性无关的. □

因为 Krylov 子空间是有限维的且每次我们增加一个新的 r_j, 其与所有的 r_i 是垂直的, 其中 $i < j$, 从而, 存在一个 $j \leqslant n$ (n 是矩阵 A 的尺寸), 使得 $r_j = 0$. 从而, 从这个命题我们立即可得如下推论: 共轭梯度最多在 n 步内产生 $Ax = b$ 的一个解, 其中 A 是一个 $n \times n$ 矩阵. 但是除非 n 非常大, 否则我们不会应用这样的一个方法.

10.4.4 收敛速度

引理 10.18 如果 $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 是对称正定矩阵 A 的特征值, $p(X)$ 是实系数多项式, $x \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\|p(A)x\|_A \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} |p(\lambda_j)| \cdot \|x\|_A.$$

证明 可取 A 的对应于特征值 λ_j 的特征向量 y_j, 使得若 $x = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j$, 则

$$\|x\|_A = x^T A x = \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^2.$$

于是

$$
\begin{aligned}
x^T p(A) A p(A) x &= \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j p(\lambda_j) y_j\right)^T A \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j p(\lambda_j) y_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta_j^2 p(\lambda_j)^2 \leqslant \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} p(\lambda_j)^2\right) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \beta_j^2 \\
&= \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} p(\lambda_j)^2\right) x^T A x.
\end{aligned}
$$

□

定理 10.19 设 A 是对称正定矩阵. 以 $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ 分别记 A 的最小和最大特征值. 令 $\kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. 设 x_* 是 $Ax = b$ 的精确解, 且 x_k 是由共轭梯度法产生的近似解. 则

$$
\frac{\|x_* - x_k\|_A}{\|x_* - x_0\|_A} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.
$$

证明 由命题 10.17 (4) 可知, 对任意的 $x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k-1)$, 存在一个 $k-1$ 次多项式 $p_k(\lambda)$ 使得

$$
x = x_0 + p_k(A) r_0.
$$

从而

$$
x_* - x = x_* - x_0 - p_k(A) r_0 = A^{-1}(I - A p_k(A)) r_0 \equiv A^{-1} q_k(A) r_0,
$$

其中 $q_k(\lambda) = 1 - \lambda p_k(\lambda)$ 是一个 k 次多项式, 且 $q_k(0) = 1$.

注意到 $x_k \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k-1)$, 从而 $x_k - x \in \mathcal{K}(A, r_0, k-1)$. 另外,$x_* - x_0 = A^{-1} r_0$, 于是 $x_* - x_k \in \mathcal{K}(A, r_0, k-1)$. 由命题 10.17 (3) 可知, $\langle x_* - x_k, x_k - x\rangle = 0$, 且

$$
\|x_* - x\|_A^2 = \|x_* - x_k\|_A^2 + \|x_k - x\|_A^2 \geqslant \|x_* - x_k\|_A^2.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\|x_* - x_k\|_A &\leqslant \min\{\|x_* - x\|_A : x \in x_0 + \mathcal{K}(A, r_0, k-1)\} \\
&= \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1} \|A^{-1} q_k(A) r_0\|_A = \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1} \|q_k(A) A^{-1} r_0\|_A \\
&= \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1} \|q_k(A)(x_* - x_0)\|_A \\
&\leqslant \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |q_k(\lambda_j)| \|(x_* - x_0)\|_A \\
&\leqslant \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1} \max_{\lambda_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}} |q_k(\lambda)| \|x_* - x_0\|_A,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{P}_k$ 表示所有 k 次多项式的集合. 如果 $0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n = \lambda_{\max}$ 是 A 的特征值.

设

$$
T_k(X) = \frac{1}{2}\left[\left(X + \sqrt{X^2-1}\right)^k + \left(X + \sqrt{X^2-1}\right)^{-k}\right]
$$

为 k 次 Chebyshev 多项式, 取 $0<a<b$, 设

$$C_k(X)=T_k\left(\frac{b+a-2X}{b-a}\right)/T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right).$$

则由著名的 Chebyshev 多项式逼近定理知有

$$\min_{q\in\mathcal{P}_k,q(0)=1}\max_{a\leqslant X\leqslant b}|q(X)|=\max_{a\leqslant X\leqslant b}|C_k(X)|.$$

由

$$T_k(\cos\theta)=\cos(k\theta),\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$$

得 $\max_{-1\leqslant X\leqslant 1}|T_k(X)|=1$. 所以

$$\max_{a\leqslant X\leqslant b}\left|T_k\left(\frac{b+a-2X}{b-a}\right)\right|=1.$$

于是

$$\max_{a\leqslant X\leqslant b}|C_k(X)|=T_k\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)^{-1},\quad \text{其中 } \kappa=\frac{b}{a}.$$

进一步利用

$$T_k(X)\geqslant\frac{1}{2}\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)^k,$$

得

$$T_k\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{\kappa+1}{\kappa-1}+\sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)^2-1}\right]^k=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1}\right]^k,$$

从而可得估计

$$\max_{\lambda_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}}|C_k(\lambda)|\leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k,\quad \text{其中 } \kappa=\lambda_{\max}/\lambda_{\min},$$

于是我们有

$$\|x_*-x_k\|_A\leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\|x_*-x_0\|_A.$$

□

定理 10.20 设 A 是 $n\times n$ 对称正定矩阵, 其特征值为 λ_j. 取两个常数 b_1,b_2, 令 $\gamma=\sqrt{b_2/b_1}$. 设

$$0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_r\leqslant b_1\leqslant\lambda_{r+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-s}\leqslant b_2\leqslant\lambda_{n-s+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n.$$

设 x_* 是 $Ax=b$ 的精确解, 且 x_k 是共轭梯度法产生的近似解, 其中 $k\geqslant r+s$. 则

$$\frac{\|x_*-x_k\|_A}{\|x_*-x_0\|_A}\leqslant 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{k-r-s}\max_{b_1\leqslant\lambda\leqslant b_2}\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_j}\right).$$

证明 从上述定理的证明过程, 我们有

$$\begin{aligned}
\|x_*-x_k\|_A &\leqslant \min_{q_k\in\mathcal{P}_k, q_k(0)=1}\ \max_{\lambda_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}} |q_k(\lambda)|\|x_*-x_0\|_A \\
&\leqslant \left\{\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_j}\right)\prod_{j=n-s+1}^{n}\left(\frac{\lambda_j-\lambda}{\lambda_j}\right)\right\}\times \\
&\qquad \min_{\substack{q_{k-r-s}\in\mathcal{P}_{k-r-s}\\ q_{k-r-s}(0)=1}}\ \max_{b_1\leqslant\lambda\leqslant b_2}|q_{k-r-s}(\lambda)|\max_{b_1\leqslant\lambda\leqslant b_2}\|x_*-x_0\|_A.
\end{aligned}$$

注意到, 对于任意的 $n-s+1\leqslant j\leqslant n$, 有

$$0\leqslant\frac{\lambda_j-\lambda}{\lambda_j}\leqslant 1$$

对于所有的 $\lambda\in[b_1,b_2]$ 都成立. 从而由上述定理的证明可得

$$\|x_*-x_k\|_A\leqslant 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{k-r-s}\max_{b_1\leqslant\lambda\leqslant b_2}\left\{\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_j}\right)\right\}\|x_*-x_0\|_A. \qquad \square$$

例 10.21 设 A 是 $n\times n$ 实对称正定矩阵, 令 $\kappa=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2$. 设 x_* 是 $Ax=b$ 的精确解, 且 x_k 是由共轭梯度法产生的近似解. 则

$$\frac{\|x_k-A^{-1}b\|_2}{\|x_0-A^{-1}b\|_2}\leqslant 2\sqrt{\kappa}\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.$$

证明 设 A 的最小特征值和最大特征值分别为 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$. 则对任意 n 维实向量 w,

$$\lambda_{\min}\|w\|_2^2\leqslant\|w\|_A^2=w^TAw\leqslant\lambda_{\max}\|w\|^2.$$

由 $x=A^{-1}b$ 和定理 10.19 可知

$$\begin{aligned}
\|x_k-A^{-1}b\|_2 &= \|x-x_k\| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}\|x-x_k\|_A \\
&\leqslant 2\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\|x-x_0\|_A \\
&\leqslant 2\frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}}}\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\|x-x_0\|_2 \\
&= 2\sqrt{\kappa}\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\|x_0-A^{-1}b\|_2. \qquad \square
\end{aligned}$$

10.4.5 预处理共轭梯度法

我们的目标是求解方程组 $Ax = b$. 从计算的观点, 如果容易算出 A^{-1}, 则解是 $x = A^{-1}b$, 否则便需要找其他的算法.

现取一矩阵 C 使得很容易计算 C^{-1}. 显然方程组 $Ax = b$ 和 $C^{-1}Ax = C^{-1}b$ 是同解的. 让我们把 $C^{-1}Ax = C^{-1}b$ 改写为 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, 其中取 $\tilde{A} = C^{-1}AC^{-1}$, $\tilde{x} = Cx$ 和 $\tilde{b} = C^{-1}b$. 下一步让我们加一个假设: $C^{-1}A = D$ 是一个对角矩阵. 容易计算对角矩阵的逆矩阵, 这样便容易计算 $\tilde{A} = DC^{-1}$ 的逆矩阵, 于是便容易计算方程组 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ 的解 $\tilde{x} = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$, 并最终获得方程组 $Ax = b$ 的解 $x = C^{-1}\tilde{x}$.

当然在实际计算的时候我们不一定会找到 C 使得 $C^{-1}A = D$ 是一个对角矩阵, 但是我们可以逼近这个条件: 就是要求控制 $\tilde{A} = DC^{-1}$ 的特征值. 我们的做法如下. 我们把共轭梯度法运用到变换了的方程组 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. 由初始向量 $\tilde{x}_0$, $\tilde{r}_0 = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}_0$ 及 $\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$ 出发, 则可计算 $\tilde{x}_{k+1}$ 和 $\tilde{p}_{k+1}$ 如下

$$\alpha_k = \frac{\tilde{r}_k^T \tilde{p}_k}{\tilde{p}_k^T A \tilde{p}_k}, \quad \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \alpha_k \tilde{p}_k, \quad \tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \alpha_k \tilde{A}\tilde{p}_k,$$
$$\beta_k = \frac{\tilde{r}_{k+1}^T \tilde{r}_{k+1}}{\tilde{r}_k^T \tilde{r}_k}, \quad \tilde{p}_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k.$$

现在变换变量

$$\tilde{x}_k = Cx_k, \quad \tilde{r}_k = C^{-1}r_k, \quad \tilde{p}_k = Cp_k, \quad w_k = Ap_k, \quad M = C^2.$$

则上述计算公式变为

$$\alpha_k = \rho_k / p_k^T w_k, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k w_k, \quad z_{k+1} = M^{-1} r_{k+1},$$
$$\rho_{k+1} = r_{k+1}^T z_{k+1}, \quad \beta_k = \rho_{k+1}/\rho_k, \quad p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k p_k.$$

这些公式用于迭代从而得到**预处理共轭梯度法** (Preconditioned Conjugate Gradient Method, PCGM).

定理 10.22 设 λ_n (λ_1) 是 $M^{-1}A$ 的最大 (最小) 特征值. 令 $\kappa = \lambda_n/\lambda_1$. 设 x_* 是 $Ax = b$ 的精确解, 且 x_k 是由预处理共轭梯度法产生的. 则

$$\frac{\|x_* - x_k\|_{\tilde{A}}}{\|x_* - x_0\|_{\tilde{A}}} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k.$$

证明 我们注意到, 用预处理共轭梯度法求解线性方程组 $Ax = b$ 就是用共轭梯度法求解等价方程组 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. 由于 A 是对称正定矩阵, 则 $\tilde{A} = C^{-1}AC^{-1}$ 也是对称正定矩阵. 由 $M^{-1}A = C^{-1}C^{-1}AC^{-1}C = C^{-1}\tilde{A}C$ 可知, $M^{-1}A$ 相似于 $\tilde{A}$, 从而 $M^{-1}A$ 和 $\tilde{A}$ 有相同的特征值. 由题设可知, $\tilde{x}_* = Cx_*$ 是 $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ 的精确解, 且 $\tilde{x}_k = Cx_k$ 是由共轭梯度法产生的近似解.

由定理 10.19 可得

$$\frac{\|\tilde{x}_* - \tilde{x}_k\|_{\tilde{A}}}{\|\tilde{x}_* - \tilde{x}_0\|_{\tilde{A}}} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\|x_* - x_k\|_A}{\|x_* - x_0\|_A} &= \frac{\|C^{-1}\tilde{x}_* - C^{-1}\tilde{x}_k\|_A}{\|C^{-1}\tilde{x}_* - C^{-1}\tilde{x}_0\|_A} \\ &= \frac{\|\tilde{x}_* - \tilde{x}_k\|_{\tilde{A}}}{\|\tilde{x}_* - \tilde{x}_0\|_{\tilde{A}}} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.\end{aligned}$$

□

我们说 C 或 $M = C^2$ 对 $Ax = b$ 来说是一个好的预处理因子, 如果

(1) C^{-1} 容易计算,

(2) $M^{-1}A$ 的特征值聚集在 1 附近.

习 题

1. 证明: M_n 上的列范数 (行范数) 是来自于向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的 ℓ_1 范数 (ℓ_∞ 范数) 的算子范数.

2. 证明: 如果 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, 则 $\rho(A) < 1$.

3. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 实数矩阵, 给定实向量 b, 设 x_* 满足 $Ax_* = b$, 取 $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $B = D^{-1}(L+U)$, $g = D^{-1}b$, 引入迭代 $x_k = Bx_{k-1} + g$. 证明:

(a) $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$ 当且仅当 $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$;

(b) $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$ 当且仅当 $\rho(B) < 1$;

(c) 如果对所有 i 有

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

则 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$.

4. 设 M 为 $n \times n$ 对称矩阵, 有正整数 k 使 $\|M^k\| < 1$. 定义

$$R_k(M) = \log((\|M^k\|)^{-1/k}).$$

设 $I - M$ 为可逆, 给定向量 g, 设 x_* 满足 $(I-M)x_* = g$. 考虑迭代 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 的误差 $y_k = x_k - x_*$. 证明:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\|y_k\|}{\|y_0\|}\right)^{1/k} = \rho(M).$$

5. 设 A 是 $n\times n$ 可逆矩阵. 扰动 A, 即引入矩阵 $A+E$, 其中矩阵 E 满足 $\rho(A^{-1}E)<1$.

(a) 证明: $A+E$ 是可逆矩阵.

(b) 证明: $A^{-1}-(A+E)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(A^{-1}E)^{k}A^{-1}$.

(c) 给定向量 b. 考虑方程 $Ax=b$ 和 $(A+E)\hat{x}=b$ 的解误差 $x-\hat{x}$. 引入矩阵范数 $|||\cdot|||$. 设 $\kappa(A)=|||A^{-1}|||\,|||A|||$. 证明: 若 $|||A^{-1}|||\,|||E|||<1$, 则

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)(|||A|||^{-1}|||E|||)}\frac{|||E|||}{|||A|||}.$$

6. (a) 设 A 是 $n\times n$ 实对称正定矩阵, 且有 m 个互不相同的特征值. 证明: 对于任给 n 维实列向量 r_0, 下列子空间

$$\langle\{r_0,Ar_0,\cdots,A^{n-1}r_0\}\rangle$$

的维数不超过 m.

(b) 证明: 共轭梯度法最多不超过 $m+1$ 步就可以收敛到线性系统 $Ax=b$ 的精确解.

第十一章 构造

我们可以把一个向量空间称为一个代数结构. 同样, 一个群是一个代数结构; 一个环是一个代数结构; 一个模亦是一个代数结构. 给出一个代数结构, 可以问有什么子结构, 又可以问怎样构造商结构? 例如当这个代数结构是一个群 G 的时候, 这个代数结构的子结构就是指 G 的子群. 设 H 是交换群 G 的子群, 我们便可以构造商群 G/H. 同样, 如果给出的代数结构是一个向量空间 V, 我们便可以研究 V 的子空间 W 和构造商空间 V/W. 这样我们看到, 不论是群或是向量空间, 只要是一个代数结构, 便有子结构和商结构. 我们的意思是说: 在学习群论和向量空间理论时所遇到的初等构造方法是适用于一般的代数结构的.

比较复杂一点的情形是: 如果给出一组代数结构或一组代数结构的同态, 我们希望解决的问题是, 从这些数据或资料我们可以构造出一些什么新的代数结构呢? 为了避免说得太抽象, 我们在这一章利用模来说明一些方法 ——这些方法告诉我们怎样从已有的代数结构构造出新的代数结构. 作为第一个例子. 设有环 R. 假如我们已经有一个右 R 模 M 和一个左 R 模 N, 我们可以构造出它们的张量积 $M \otimes_R N$. 这个张量积只是一个群.

如果给出一组模 $\{M_\iota : \iota \in I\}$, 其中 I 可以是不可数的无穷集合, 例如 I 是实数区间 $[0,1]$. 我们可以构造出两个新的模, 一个是直积 $\prod_{\iota\in I} M_\iota$, 另一个是直和 $\oplus_{\iota\in I} M_\iota$.

另一方面, 如果我们已有两个模同态 $M \to S$, $N \to S$, 我们可以构造出它们的纤维积 $M \times_S N$. 但是从模同态 $T \to M$, $T \to N$, 我们则是构造它们的纤维和 $M +_T N$. 我们会说清楚这些新结构的性质.

对于一组满足适当条件的 R 模同态 $\mu_{ji} : M_j \to M_i$, 我们将构造出它们的逆极限 $\varprojlim_i M_i$. 从一组满足适当条件的 R 模同态 $\rho_{ij} : M_i \to M_j$, 我们还会构造出与逆极限对偶的一种结构, 称为正极限 $\varinjlim_i M_i$.

有了以上的各种结构, 我们便可以在最后一节讲过滤模.

以上这些构造方法可以推广到范畴里, 部分详请见第十四章. 有张量积的范畴是最重要的一种结构, 这是 Tannakian 范畴理论, 可惜超出本书范围了.

这里, 我们将假设所有的环都有一个乘法单位元. 我们用 1_R 表示一个环 R 的单位元.

11.1 直积和直和

我们将常常用 I 表示一个指标集, I 可能是一个无穷或者有限集合.

11.1.1 直积

定义 11.1 我们称一个模 P 是一个模族 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ 的一个**直积** (direct product), 如果存在一个模同态族 $\{p_\alpha : P \to M_\alpha : \alpha \in I\}$, 使得对于任意的模 M 和任意的模同态族 $\{f_\alpha : M \to M_\alpha : \alpha \in I\}$, 都存在唯一的模同态 $f : M \to P$, 使得 $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ 对所有的 $\alpha \in I$ 都成立.

这就是说, 我们想要下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd}$$

例 11.2 称一个模 P 是两个模 M_1 和 M_2 (这里, $I = \{1, 2\}$) 的直积, 是指存在两个模同态 $p_1 : P \to M_1$ 和 $p_2 : P \to M_2$, 使得对于任意的一对模同态, 存在唯一的模同态 $f : M \to P$ 使得

$$p_1 \circ f = f_1 \quad 和 \quad p_2 \circ f = f_2.$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, dashed, "f"'] & \\ M_2 & & M_1 \\ & P \arrow[ul, "p_2"] \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

关于这个定义, 我们可以立即做出如下推论. 如果 $\{p_\alpha : P \to M_\alpha\}$ 定义了 $\{M_\alpha\}$ 上的一个直积, 并且如果我们有模同态的交换图表:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

则 f 是单位同态 1. 这是因为对于单位同态 1, 我们显然有交换图表:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

则定义中的 "唯一性" 要求迫使 $f = 1$. 这个推论也可以在下面的命题中加以阐明.

命题 11.3 一个模族 $\{M_\alpha\}$ 的直积 $\{p_\alpha : P \to M_\alpha\}$ 在同构的意义下是唯一的. 这就是说, 如果我们有 $\{p'_\alpha : P' \to M_\alpha\}$ 满足 $p'_\alpha \circ f = f_\alpha$, 对于所有的 α, P' 同构于 P.

证明 首先, 取 $(P, \{p_\alpha\})$ 是直积, $\{p'_\alpha\}$ 仅是一个同态族. 则由直积的定义, 我们可得唯一的同态 $p' : P' \to P$, 使得 $p'_\alpha = p_\alpha p'$,

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "p'"] \arrow[dr, "p'_\alpha"'] & & P \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

下面将 $(P', \{p'_\alpha\})$ 作为直积的定义用于族 $\{p_\alpha\}$, 我们可得唯一的同态 $p : P \to P'$, 使得 $p_\alpha = p'_\alpha p$,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & & P' \arrow[dl, "p'_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

现在将这些交换图表合在一起:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "p'_\alpha"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_\alpha"] & P' \arrow[dl, "p'_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \quad \text{或} \quad \begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "pp'"] \arrow[dr, "p'_\alpha"'] & & P' \arrow[dl, "p'_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

则前面的推论告诉我们 $pp' = 1$. 类似地, 我们可以证明 $p'p = 1$. 因此, p 是一个同构, 且 p' 为其逆. □

我们构造模直积. 给定一族 $\{M_\alpha | \alpha \in I\}$ R 模. 首先我们把每一个 M_α 看作集合, 然后构造这些集合的直积. 这就是说, 我们令

$$\prod_{\alpha \in I} M_\alpha = \left\{ I \xrightarrow{x} \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha : x(\alpha) \in M_\alpha \right\}.$$

下一个要做的是把这个映射集变成一个 R 模. 设 x, y 属于 $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$, 我们定义 $x+y$ 为映射

$$x+y:\ I \to \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha:\ (x+y)(\alpha) = x(\alpha)+y(\alpha).$$

零元取为映射

$$O:\ I \to \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha:\ O(\alpha) = 0,$$

注意, 0 是 M_α 的零元. x 的 “负” 元是

$$-x:\ I \to \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha:\ (-x)(\alpha) = -(x(\alpha)).$$

对于 $r \in R$, $x \in \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$, 我们定义 $rx:\ I \to \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha$,

$$(rx)(\alpha) = r(x(\alpha)).$$

利用以上定义的运算: $x+y$ 和 rx, 容易验证 $\prod_\alpha M_\alpha$ 是 R 模, 并且投影映射

$$p_\alpha:\ \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \to M_\alpha:\ x \mapsto x(\alpha)$$

是 R 模同态.

为了让读者相信这只是通常的构造, 我们取 I 为 n 个元的有限集 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 在这种情况下, 我们有环 R 上的 n 个模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$. 一个元 $x \in \prod M_\alpha$ 是一个映射

$$x: \{1, 2, \cdots, n\} \to M_1 \bigcup M_2 \bigcup \cdots \bigcup M_n,$$

使得 $x(j) \in M_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. 这意味着, 我们将 x 看作它的像 $(x(1), x(2), \cdots, x(n))$. 这就是说, $\prod M_\alpha$ 只是通常的 $M_1 \times \cdots \times M_n$, 且 p_j 仅是通常的到第 j 个坐标上的投影. 加法和数乘是通常的坐标定义.

命题 11.4 $(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha, \{p_\alpha\})$ 是 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ 的一个直积.

证明 这意味着我们必须验证: $\{p_\alpha\}$ 满足直积的定义. 因此让我们给定一个 R 模同态族 $\{f_\alpha : M \to M_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 对于 $x \in M$, 我们令 $f(x)$ 为映射

$$I \to \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha:\ \alpha \mapsto f_\alpha(x).$$

这给出一个映射

$$f : M \to \prod_{\alpha\in I} M_\alpha : x \mapsto f(x).$$

让我们验证 f 是一个 R 模同态.

取 $\alpha \in I$ 和 $x, y \in M$. 则由 f_α 是一个同态, 我们得到

$$\begin{aligned} f(x+y)(\alpha) &= f_\alpha(x+y) \\ &= f_\alpha(x) + f_\alpha(y) \\ &= (f(x)+f(y))(\alpha), \end{aligned}$$

其中在最后一行, 我们利用了 $\prod M_\alpha$ 中加法的定义. 这说明, 在 $\prod M_\alpha$ 中, 我们有

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

下面我们要验证 f 是 R 线性的. 为此, 取 $\alpha \in I$, $r \in R$ 和 $x \in M$. 则 $f(rx)$ 是一个映射

$$\alpha \mapsto f_\alpha(rx).$$

由 f_α 是一个同态, 我们可得 $f_\alpha(rx) = rf_\alpha(x)$. 这意味着 $f(rx)$ 是一个映射

$$\alpha \mapsto rf_\alpha(x),$$

并且根据 $\prod M_\alpha$ 中数乘的定义, 我们得到

$$f(rx) = r(f(x)).$$

由

$$p_\alpha f(x) = f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$$

我们可以说

$$p_\alpha \circ f = f_\alpha \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \prod M_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

还需验证 f 是唯一的, 这可通过元上的计算来完成. 我们把这个问题留给读者. $\square$

约定 11.5 既然在同构的意义下, 直积已明确定义, 从现在开始, 我们将用 $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ 表示一个 R 模族 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ 的直积.

对于一个有限模族, 我们可以通过一个态射族表示直积的特征. 下面的命题容易证明.

命题 11.6 给定有限个模 $M_1, \cdots, M_m$. 则一个模 M 是 $M_1, \cdots, M_m$ 的直积当且仅当存在同态

$$p_j : M \to M_j, \quad i_j : M_j \to M, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

满足

$$p_j i_j = 1_{M_j}, \quad p_k i_j = 0 \quad (j \neq k), \quad \sum_{j=1}^{m} i_j p_j = 1_M.$$

给定一个 R 模族 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$. 由此和一个 R 模 M, 我们可得另一个 R 模族 $\{\mathrm{Hom}(M, M_\alpha) : \alpha \in I\}$ 且形成直积 $\prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$. 如果 $f \in \prod \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$, 则 f 是一个映射

$$I \to \bigcup \mathrm{Hom}(M, M_\alpha) \ : \ \alpha \to f(\alpha).$$

我们也用 f_α 表示 $f(\alpha)$, 用 f 的像 (f_α) 表示 f.

命题 11.7 给定模 M 和 $M_\alpha, \alpha \in I$. 设

$$p_\alpha : \prod M_\alpha \to M_\alpha$$

是到直积的投影. 由 f 在 $\mathrm{Hom}(M, \prod M_\alpha)$ 中, 我们可得 $p_\alpha \circ f$ 在 $\mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$ 中. 设 $(p_\alpha f)$ 表示映射

$$I \to \bigcup \mathrm{Hom}(M, M_\alpha) : \alpha \mapsto p_\alpha \circ f,$$

这就是说, $(p_\alpha f)$ 在 $\prod \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$ 中. 则映射

$$\Theta : \mathrm{Hom}\left(M, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right) \to \prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}(M, M_\alpha) : f \to (p_\alpha f)$$

是一个同构.

证明　容易验证, 映射 Θ 是一个同态. 我们省略证明细节.

(1) 为了验证 Θ 是满射, 我们取 $(f_\alpha) \in \prod \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$. 则由直积 $\prod M_\alpha$ 的定义可知, 存在 $f : M \to \prod M_\alpha$ 使得 $p_\alpha f = f_\alpha$ 对所有的 $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \prod M_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad \forall \alpha \in I$$

则由 Θ 的定义, 我们可得 $\Theta(f) = (p_\alpha f)$, 从而我们证明了: 给定 $(f_\alpha) \in \prod \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$, 存在一个 $f : M \to \prod M_\alpha$ 使得 $\Theta(f) = (f_\alpha)$.

(2) 我们证明 Θ 是单射. 设 $f \in \mathrm{Hom}(M, M_\alpha)$ 和 $\Theta(f) = 0$, 这意味着 $(p_\alpha f) = 0$. 这就是说, $p_\alpha f = O_\alpha$ 对所有的 $\alpha \in I$, 其中 O_α 表示零映射 $M \overset{O_\alpha}{\to} M_\alpha$. 我们把这些数据放在一个图表中:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "O_\alpha"'] & & \prod M_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

但是, 零映射 $O : M \to \prod M_\alpha$ 也给出 $p_\alpha O = O_\alpha$ 和下面的图表:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "O"] \arrow[dr, "O_\alpha"'] & & \prod M_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha & \end{tikzcd} \qquad (\forall \alpha \in I)$$

因此, 由直积定义中的唯一性, 我们可得 $f = O$. □

11.1.2 和

设 M 是一个模. 对于 $j = 1, \cdots, k$, 设 M_j 是 M 的一个子模. 如果对每个 j, 我们取一个元 $x_j \in M_j$. 我们可以在 M 中把它们加起来:

$$x_1 + \cdots + x_k.$$

我们用 $M_1 + \cdots + M_k$ 表示所有这样的元的和的集合.

让我们推广这样的构造法. 设有一个集合 I, 且对每个 $\alpha \in I$, 都有 M 的一个子模 M_α. 我们可以在 M 中构造**有限**和:

$$x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_k},$$

其中 $x_{\alpha_j} \in M_{\alpha_j}$. 现以 $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 记由所有这样的有限和组成的集合. 显然, $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 是所有以下的有限和

$$M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2} + \cdots + M_{\alpha_k}, \quad \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} \subset I$$

的并集. 不难证明 $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 是 M 的一个子模.

我们称 $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ 为族 $\{M_\alpha\}$ 的**和** (sum).

设 X 是一个给定模 M 的子集. 我们可以形成 X 中元的有限线性组合, 系数来自于 R:

$$r_1 x_1 + \cdots + r_k x_k,$$

其中 $x_j \in X$ 和 $r_j \in R$. 我们用 $\langle X \rangle$ 表示所有这样的有限和的集合. 事实上, $\langle X \rangle$ 是 M 的一个子模.

我们称 $\langle X \rangle$ 是由 X **生成** (generate) 或者**张成** (span) 的 M 的子模.

命题 11.8 给定一个模 M 的子集 X. 设 $\mathscr{N}$ 是 M 的所有子模 N 的集合, 使得 $N \supseteq X$. 则

$$\langle X\rangle = \bigcap_{N\in\mathscr{N}} N.$$

因此 $\langle X\rangle$ 是 M 中包含 X 的最小子模.

证明 (1) 由构造可知, $\langle X\rangle$ 是 M 中包含 X 的一个子模, 从而 $\langle X\rangle \in \mathscr{N}$. 于是,

$$\langle X\rangle \supseteq \bigcap_{N\in\mathscr{N}} N.$$

(2) 取 $\langle X\rangle$ 中的任一元 x. 则

$$x = r_1x_1 + \cdots + r_kx_k,$$

其中 $x_j \in X$ 和 $r_j \in R$. 对任意的 $N \in \mathscr{N}$, 一定有 $x_i \in X \subseteq N$. 因为 N 是子模, 所以 $x \in N$. 由于 N 是 $\mathscr{N}$ 中的任一元, 因此 $x \in \bigcap_{N\in\mathscr{N}} N$. 这就证明了

$$\langle X\rangle \subseteq \bigcap_{N\in\mathscr{N}} N. \qquad \square$$

11.1.3 直和

定义 11.9 我们说一个模 S 是一个给定模族 $\{M_\alpha : \alpha\in I\}$ 的**直和** (direct sum), 如果我们有一个模同态族 $\{M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} S : \alpha\in I\}$, 使得对于任意的模同态族 $\{M_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} M : \alpha\in I\}$, 存在唯一的模同态 $S \xrightarrow{g} M$ 满足条件 $g\circ i_\alpha = g_\alpha$ 对所有的 $\alpha\in I$.

$$\begin{tikzcd} M & & S \arrow[ll, "g"'] \\ & M_\alpha \arrow[ul, "g_\alpha"] \arrow[ur, "i_\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad (\forall\alpha\in I)$$

把定义应用到同态族 $\{g_\beta | g_\alpha = 1_{M_\alpha}, g_\beta = 0 \text{ 若 } \beta\neq\alpha\}$ 上便得同态 $p_\alpha : S\to M_\alpha$ 使 $p_\alpha i_\alpha = 1_{M_\alpha}$

注意, 直和与直积是 “对偶” 概念. 意思是指: 通过反转所有的箭头可以从直积的性质得到直和的性质. 作为一个例子, 读者可以用这个方法去证明以下关于直和的性质.

一个族 $\{M_\alpha : \alpha\in I\}$ 的直和, 在同构的意义下是唯一的. 这就是说, 如果两个模 S 和 S' 满足族 $\{M_\alpha : \alpha\in I\}$ 的直和的定义, 则 S 和 S' 是同构的.

我们的下一个工作是通过构造证明直和是存在的.

给定一个模族 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$, 我们首先形成它们的直积 $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$. 对于 $x \in M_\alpha$, 我们构造 $\prod_\alpha M_\alpha$ 中的一个元

$$i_\alpha x : I \to \bigcup_\alpha M_\alpha,$$

并令 $i_\alpha x(\beta) = x\delta_{\alpha\beta}$ 对于 $\beta \in I$. 我们注意到, $i_\alpha x$ 仅是 $x\delta_\alpha$, 这给出一个同态

$$i_\alpha :\ M_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$$

对每个 $\alpha \in I$, 而且每个 $i_\alpha M_\alpha$ 是 $\prod M_\alpha$ 的一个子模. 我们现在可以形成这些子模 $i_\alpha M_\alpha$ 在 $\prod M_\alpha$ 中的和, 将这个和记为 $\oplus_\alpha M_\alpha$. 这就是说, 我们已经构造了

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha = \sum_{\alpha\in I} i_\alpha M_\alpha.$$

命题 11.10 $(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha, i_\alpha)$ 是 $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ 的一个直和.

证明 取任意的模同态族 $\{g_\alpha : M_\alpha \to M : \alpha \in I\}$. 我们需要一个同态 $g : \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \to M$. 一个元 $x \in \oplus_\alpha M_\alpha$ 可以表示为一个和

$$x = i_{\alpha_1} x_{\alpha_1} + \cdots + i_{\alpha_n} x_{\alpha_n},$$

其中 $x_{\alpha_j} \in M_{\alpha_j}$, 且如有必要, 由合并项我们可以假设所有的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是互不相同的. 然而, 由于 $\alpha \neq \beta$ 暗示 $i_\alpha M_\alpha \bigcap i_\beta M_\beta = 0$, 我们可以看出, x 的这个表示是唯一的. 因此, 我们可以定义

$$g(x) = g_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) + \cdots + g_{\alpha_n}(x_{\alpha_n}).$$

现在容易验证 g 是唯一的同态使得 $g \circ i_\alpha = g_\alpha$ 对所有的 $\alpha \in I$, 所以 $\oplus_\alpha M_\alpha$ 是一个直和. □

下面我们将用 $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ 表示一个给定模族 $\{M_\alpha | \alpha \in I\}$ 的直和.

11.1.4 自由模

定义 11.11 *我们说一个 R 模 M 的子集 X 是***线性无关的***, 如果对于 X 内两两不同的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意有限集和 $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$, 我们有*

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0.$$

*M 的一个子集 X 生成的子模记为 $\langle X\rangle$. 如果 M 有一个线性无关的子集 $X \subseteq M$ 使得 $M = \langle X\rangle$, 则我们说, M 是一个***自由 R 模***, X 是 M 的***基***或***基底*** (basis). 又说 M 是以 X 为基的自由 R 模.*

如果 M 是一个自由 R 模, 其基为 X, 则显然, 任意的 $x \in M$ 可唯一地表示为 $x = \sum r_i x_i$, 其中 $r_i \in R$, $x_i \in X$.

命题 11.12 给定一个集合 X, 存在一个以 $\overline{X}$ 为基的自由 R 模 M 和一个双射 $X \to \bar{X}$.

证明　对于 $x \in X$, 设 $M_x = R$. 我们用 X 作为一个指标集形成直和

$$F_X = \bigoplus_{x \in X} M_x.$$

然后我们用直和的构造引入映射

$$i_x : R = M_x \to \bigoplus_{x \in X} M_x = F_X : r \mapsto i_x r,$$

其中映射 $i_x r : X \to \bigcup M_x = R$ 由下式给出 $i_x r(y) = r\delta_{xy}$ $(y \in X)$. 最后, 我们形成集合 $\bar{X}$ 为 F_X 的基. 对于 $x \in X$, 设

$$\overline{x} = i_x\, 1 : X \to \cup M_x : y \mapsto 1\delta_{xy},$$

这里, 1 是环 R 的单位元. 令 $\overline{X} = \{\overline{x} | x \in X\}$. 则我们知道

$$F_X = \sum_{x \in X} i_x M_x \subseteq \prod_{x \in X} M_x = \sum R\overline{x} = \langle \overline{X} \rangle.$$

还需证明, 集合 $\bar{X}$ 是线性无关的. 设 $\overline{x}_k \in \overline{X}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是 $\overline{X}$ 的 n 个互不相同的元. 对于 $r_k \in R$, $1 \leqslant k \leqslant n$ 形成映射

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \overline{x}_k : X \to \cup M_x : y \mapsto \sum_{k=1}^{n} r_k \overline{x}_k(y) = \sum_{k=1}^{n} r_k \delta_{x_k y}.$$

如果 $\sum r_k \overline{x}_k = 0$, 则对于任意的 $y \in X$, 我们有 $\sum r_k \overline{x}(y) = 0$. 特别地, 对于任意的 $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$0 = \sum_k r_k \overline{x}_k(x_j) = \sum_k r_k \delta_{x_k x_j} = r_j.$$

因此, 我们证明了: 如果 $\sum r_k \overline{x}_k = 0$, 则 $r_j = 0$ 对所有的 j. □

下面我将用 X 表示 $\overline{X}$, 用 F_X 表示以 X 为基的自由 R 模.

命题 11.13 (1) 设 F 是一个自由 R 模, 其基为 X. 给定任意映射 $\varphi : X \to N$, 其中 N 是一个 R 模. 则存在唯一的 R 模同态 $\overline{\varphi} : F \to N$, 使得对于任意的 $x \in X$ 有 $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

(2) 任意 R 模是自由 R 模的像, 即给定一个 R 模 M, 存在一个 R 模同态 $\varphi : F \to M$, 其中 F 是一个自由 R 模.

(3) 设 $\varphi : M \to M'$ 和 $\varphi : F \to M'$ 都是 R 模同态. 如果 φ 是满射且 F 是自由模, 则存在一个 R 模同态 $\overline{\theta} : F \to M$, 使得 $\varphi\overline{\theta} = \psi$.

证明 (1) 由于 F 是自由的, 除了有限个 x, 任意的 $y \in F$ 有唯一的表示 $y = \sum_{x\in X} r_x x$, 其中 $r_x \in R$ 和 $r_x = 0$. 通过定义

$$\overline{\varphi}(y) = \sum_{x\in X} r_x \varphi(x),$$

结论得证.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dashed, "\overline{\varphi}"] & \\
X \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\varphi"'] & N
\end{tikzcd}$$

(2) 把 M 作为一个集合且设 F_M 是 R 模, 其基为 M. 将部分 1 用于 F_M 和单位映射 $i : M \to M$, 我们得到一个交换图表:

$$\begin{tikzcd}
F_M \arrow[dr, dashed, "\overline{i}"] & \\
M \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "i"'] & M
\end{tikzcd}$$

和

$$\overline{i}(F_M) \supseteq \overline{i}(M) = i(M) = M.$$

称 $\overline{i}$ 是一个满射同态.

(3) 设 X 是 F 得一组基. 由 φ 是满射可推出 $\varphi^{-1}(\psi(x))$ 对于任意的 $x \in X$ 非空. 选取一个 y_x 在 $\varphi^{-1}(\psi(x))$ 中且定义一个映射 $\theta : X \to M$, $\theta(x) = y_x$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dashed, "\theta"'] & F \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\overline{\theta}"'] & \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由步骤 (1), 我们可以将 θ 延拓到一个 R 模同态 $\overline{\theta} : F \to M$ 且由条件 $\varphi\overline{\theta} = \psi$ 立即推出. □

11.1.5 双积

对于模的一个有限集, 比如 $\{M_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, 它们的直积和直和是同构的. 阐述这个问题的一个好办法如下.

定义 11.14　我们称一个模 B 是模族 $\{M_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 的一个**双积** (bi-product), 如果存在 $2n$ 个同态

$$B \xrightarrow{p_k} M_k \quad 和 \quad M_k \xrightarrow{i_k} B \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

满足

$$p_k i_l = \delta_{kl} \quad (1\leqslant k,l\leqslant n) \quad 和 \quad \sum_{k=1}^{n} i_k p_k = 1,$$

其中如果 $k=l$, 则 δ_{kl} 是单位映射; 否则是零映射.

命题 11.15　设 M_j 对于 $1\leqslant j\leqslant m$ 是右 R 模, $N_{j'}$ 对于 $1\leqslant j'\leqslant n$ 是左 R 模. 则

(1) $(\prod_1^m M_j)\otimes(\prod_1^n N_{j'})\cong\prod_{j,j'} M_j\otimes N_{j'}$.

(2) $(\oplus_1^m M_j)\otimes(\oplus_1^n N_{j'})\cong\oplus_{j,j'} M_j\otimes N_{j'}$.

证明　(1) 的证明. 记 $M=\prod_1^m M_j$ 和 $N=\prod_1^n N_{j'}$. 重点是我们必须找到投影映射和单射

$$p_{jj'}: M\otimes N\to M_j\otimes N_{j'}, \quad i_{jj'}: M_j\otimes N_{j'}\to M\otimes N,$$

使得 $(M\otimes N, p_{jj'}, i_{jj'})$ 满足给出直积 $\prod M_j\otimes N_{j'}$ 特征的条件.

由直积 M, 我们有映射

$$p_j: M\to M_j, \quad i_j: M_j\to M$$

满足

$$p_j i_j = 1_{M_j}, \quad p_k i_j = 0 \quad (j\neq k), \quad \sum_{j=1}^{m} i_j p_j = 1_M.$$

而且

$$q_{j'}: N\to N_{j'}, \quad r_{j'}: N_{j'}\to N$$

满足

$$q_{j'} r_{j'} = 1_{N_{j'}}, \quad q_{k'} r_{j'} = 0 \quad (j'\neq k'), \quad \sum_{j'=1}^{n} r_{j'} q_{j'} = 1_N.$$

还需验证 $p_{jj'}=p_j\otimes q_{j'}$, $i_{jj'}=i_j\otimes r_{j'}$ 是所要求的映射. □

11.2　张量积

我们已经讨论了向量空间的张量积, 本节将讨论模的张量积. 如果关于模张量积的性质的证明和向量空间的证明类似, 我们会省略一些细节.

模可以定义在一个非交换环上, 比如我们可以研究微分算子环上的模, 这时我们便要谨慎区分左模和右模了.

给定一个环 R. 设 M 是一个右 R 模, N 是一个左 R 模. 我们称一个映射 $f: M \times N \to A$ 是一个平衡映射, 如果 A 是一个 Abel 群, 且对于任意的 $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ 和 $a \in R$, 下面的说法成立:

(1) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$;
(2) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$;
(3) $f(xa, y) = f(x, ay)$.

我们也称 (A, f) 是 M 和 N 的一个**平衡积** (balanced product).

定义 11.16 设一个平衡映射 $\otimes : M \times N \to P$ 有如下性质: 对于任意的平衡映射 $f: M \times N \to A$, 存在唯一的群同态 $h: P \to G$, 使得 $f = h \circ \otimes$. 我们称 P 是 M 和 N 在 R 上的一个**张量积**, 记 P 为 $M \otimes_R N$, 并记 $\otimes(x, y)$ 为 $x \otimes y$.

命题 11.17 设 M 为右 R 模, N 为左 R 模. 引入集合

$$S = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$$

和

$$T = \{(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y), (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2), (xa, y) - (x, ay)\}.$$

在 T 中我们取所有的 $x, x_1, x_2 \in M$, $y, y_1, y_2 \in N$ 和 $a \in R$. 用集合 S 生成的自由 Abel 群记为 F, 在 F 内用 T 生成的子群记为 G. 令 $P = F/G$, 定义映射

$$\otimes : M \times N \to P : (x, y) \mapsto (x, y) + G.$$

则 $(P, \otimes)$ 是 M 和 N 在 R 上的一个张量积.

证明 容易验证 $(P, \otimes)$ 是一个平衡积. 给定任意其他的平衡积 (A, f), 我们验证映射

$$F \to A : \sum n_i(x_i, y_i) \mapsto \sum n_i f(x_i, y_i)$$

的核包含 G, 并且定义唯一的映射 $h: P \to A$ 满足所要求的条件. □

命题 11.18 $M \cong M \otimes_R R$ 和 $N \cong R \otimes_R N$.

证明 对于 $x \in M$, $a \in R$, 定义 $x \star a = xa$. 则 $(M, \star)$ 是 M 和 N 的一个平衡积. 因此我们可得一个群同态

$$h : M \otimes R \to M : x \otimes a \mapsto x \star a = xa.$$

考虑映射

$$M \to M \otimes R : x \mapsto x \otimes 1.$$

显然, 在这个映射下, xa 被映射到 $xa \otimes 1 = x \otimes a1 = x \otimes a$. 而且, 这个映射和上面的 h 互为逆映射, 所以它们是同构映射. □

命题 11.19 设 $\phi: M \to M'$ 和 $\psi: N \to N'$ 是模同态.

(1) 则 $x \otimes y \mapsto \phi x \otimes \psi y$ 定义了一个群同态 $M \otimes N \to M' \otimes N'$. 记此同态为 $\phi \otimes \psi$.
设 $\phi': M' \to M''$ 和 $\psi': N' \to N''$ 是模同态.

(2) 则

$$(\phi' \otimes \psi') \circ (\phi \otimes \psi) = (\phi' \circ \phi) \otimes (\psi' \circ \psi).$$

(3) $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N}$, 从而如果 ϕ 和 ψ 是同构映射, 则 $\phi \otimes \psi$ 是一个同构映射.

设 $\phi_i: M \to M'$ 和 $\psi_i: N \to N'$ 是模同态.

(4) 则

$$(\phi_1 + \phi_2) \otimes \psi = \phi_1 \otimes \psi + \phi_2 \otimes \psi,$$
$$\phi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \phi \otimes \psi_1 + \phi \otimes \psi_2.$$

证明 (1) 事实上, 映射

$$M \times N \to M' \otimes N' : (x, y) \mapsto \phi x \otimes \psi y$$

是一个平衡映射, 从而存在一个从张量积 $M \otimes N$ 到 $M' \otimes N'$ 的映射, 且这是上面给出的映射.

(2) 双边映射对元素 $x \otimes y$ $(x \in M, y \in N)$ 是一致的, 且这些元素生成 $M \otimes N$.

(3) 可由 (2) 推出.

(4) 可通过在 $x \otimes y$ 上如部分 (2) 那样验证得以证明. □

给定环 R 和 S. 称 Abel 群 M 为 $S-R$ **双模** (bi-module), 如果 M 同时是左 S 模和右 R 模, 并且对所有的 $s \in S$, $r \in R$ 和 $x \in M$, 等式 $(sx)r = s(xr)$ 都成立.

如果 T 也是一个环, 且 N 是一个 $R-T$ 双模. 则 M (作为一个右 R 模) 和 N (作为一个左 R 模) 的张量积 $M \otimes_R N$ 是一个 $S-T$ 双模, 我们只需定义 $s(x \otimes y)t = (sx) \otimes (yt)$.

设 U 也是一个环, 且 P 是一个 $T-U$ 双模.

命题 11.20 我们有一个 $R-U$ 双模同构

$$(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P) : (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z).$$

证明 首先固定一个 $z \in P$. 验证映射

$$M \times N \to M \otimes (N \otimes P) : (x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$$

是一个平衡映射. 于是, 我们得到一个映射

$$M \otimes N \to M \otimes (N \otimes P) : \sum x_i \otimes y_i \mapsto \sum x_i \otimes (y_i \otimes z).$$

下一步验证

$$(M\otimes N)\times P\to M\otimes(N\otimes P):\left(\sum x_i\otimes y_i, z\right)\mapsto\sum x_i\otimes(y_i\otimes z)$$

是 $M\otimes N$ 和 P 的一个平衡积. 这给出命题所述的映射 $(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes(N\otimes P)$.

最后一步, 我们应用上述同样的过程构造逆映射

$$M\otimes(N\otimes P)\to(M\otimes N)\otimes P: x\otimes(y\otimes z)\mapsto(x\otimes y)\otimes z.$$ □

11.3 纤维积和纤维和

首先, 我们给出两个模同态 $\alpha: M\to S$ 和 $\beta: N\to S$ 的纤维积的定义.

定义 11.21 给定两个模同态

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

我们将称下面的图表

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & N \\ M & \end{tikzcd}$$

定义了 M 和 N 在 S 上的纤维积, 或者我们称 P 是 M 和 N 在 S 上的**纤维积** (fibre product) 或**拉回** (pullback), 如果

(1) 下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

(2) 对于任意的交换图表

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

存在唯一的模同态 $r: P'\to P$ 使得下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "r"] \arrow[drr, bend left, "\psi'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
& M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}$$

如果纤维积 P 存在, 我们常常记为 $M \times_S N$.

命题 11.22 (1) 对任意两个模同态 $\alpha : M \to S$ 和 $\beta : N \to S$, 纤维积 $M \times_S N$ 存在; (2) $M \times_S N$ 在同构的意义下是唯一的.

证明 首先, 我们证明存在性. 从直积 $M \times N$ 开始, 其随着投影 $p : M \times N \to M$, $q : M \times N \to M$ 而来. 则同态 $\alpha p - \beta q : M \times N \to S$ 是

$$(\alpha p - \beta q)(x, y) = \alpha p(x, y) - \beta q(x, y) = \alpha(x) - \beta(y).$$

设 $P = \mathrm{Ker}(\alpha p - \beta q)$ 且用同样的符号表示 p, q 在 P 上的限制. 由定义可知, 对于所有的 $(x, y) \in P$, 我们有 $\alpha p(x, y) - \beta q(x, y) = 0$, 即 $\alpha p = \beta q$ 或者下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}$$

下面设我们有一个模同态的交换图表

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}$$

则由直积 $M \times N$ 的定义可知, 存在唯一的模同态 $r : P' \to M \times N$ 使得下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "\psi'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi'"'] & & \\
& M \times N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & N \\
& M &
\end{tikzcd}$$

则通过简单的计算, 我们证明 r 的像位于 $P = \mathrm{Ker}(\alpha p - \beta q)$: 取 $z \in P'$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha p - \beta q)(rz) &= \alpha(pr)(z) - \beta(qr)(z) \\
&= \alpha\varphi'(z) - \beta\psi'(z) = 0.
\end{aligned}
$$

因为给定 P' 的交换图表, 从而 $rz \in P$. 因此, 我们可以创建下面的交换图表

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "\psi'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi'"'] & & \\
& P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
& M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}
$$

唯一性证明和直积中的唯一性证明是一样的, 故省略. $\square$

命题 11.23 给定一个纤维积

$$
\begin{tikzcd}
M \times_S N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}
$$

如果 ψ 是单射, 则 α 也是单射.

证明 只需证明 $\mathrm{Ker}\,\alpha = \varphi(\mathrm{Ker}\,\psi)$ 即可.

首先我们证明 $\varphi(\mathrm{Ker}\,\psi) \subseteq \mathrm{Ker}\,\alpha$. 事实上, 对于 $x \in \mathrm{Ker}\,\psi$, 即 $\psi(x) = 0$, 我们有

$$
\alpha\varphi(z) = \beta\psi(x) = 0,
$$

即 $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}\,\alpha$.

下面我们证明 $\mathrm{Ker}\,\alpha \subseteq \varphi(\mathrm{Ker}\,\psi)$. 设对所有的 x, O 是零同态 $O(x) = 0$. 设 $j : \mathrm{Ker}\,\alpha \to M$ 是包含同态 $j(x) = x$. 则对于 $x \in \mathrm{Ker}\,\alpha$, 我们有 $\alpha j(x) = \alpha(x) = 0 = \beta O(x)$. 这给出一个交换图表

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\alpha \arrow[r, "O"] \arrow[d, "j"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}
$$

由纤维积 $M\times_S N$ 的定义, 我们可知存在唯一的同态 $\lambda:\operatorname{Ker}\alpha\to M\times_S N$, 使得下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\alpha \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "O"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& M\times_S N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
& M \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}$$

现在取 $x\in\operatorname{Ker}\alpha$, 我们有

$$\psi\lambda(x)=O(x)=0$$

使得 $\lambda(x)\in\operatorname{Ker}\psi$, 但我们也有

$$x=j(x)=\varphi\lambda(x).$$

这表明, 如果 $x\in\operatorname{Ker}\alpha$, 则 $x\in\varphi(\operatorname{Ker}\psi)$. $\square$

在上述讨论中, 我们可以反转箭头并获得与纤维积的定义 “对偶” 的纤维和的概念.

定义 11.24 我们称

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[d, "\psi"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & S
\end{tikzcd}$$

是下图的**纤维和** (fibre sum) 或**推出** (pushout)

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \\
M &
\end{tikzcd}$$

如果下面的两个条件成立.

(1) 下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & S
\end{tikzcd}$$

(2) 对于任意交换图表

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi'"] \\ M \arrow[r, "\varphi'"'] & S' \end{tikzcd}$$

存在唯一的同态 $r: S' \to S$ 使得下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi"] \arrow[ddr, "\psi'"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, "\varphi'"'] & S \arrow[dr, dashed, "r"] & \\ & & S' \end{tikzcd}$$

命题 11.25　(1) 任意两个模同态的纤维和是存在的.

(2) 纤维和在同构的意义下是唯一的.

命题 11.26　给定一个交换图表

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & M +_T N \end{tikzcd}$$

其中我们用 $M +_T N$ 表示 $\alpha: T \to M$ 和 $\beta: T \to N$ 的纤维和. 如果 β 是满射, 则 φ 也是满射.

11.4　逆极限和正极限

一个集合 I 上的**偏序** (partial order) 是一个自反、反对称和可递的二元关系. 若将这个二元关系记为 $\leqslant$, 则称 $\leqslant$ 为偏序是说对所有的 $a, b, c \in I$, 下面的条件成立:

(1) $a \leqslant a$ (自反性);

(2) 如果 $a \leqslant b$ 和 $b \leqslant a$, 则 $a = b$ (反对称性);

(3) 如果 $a \leqslant b$ 和 $b \leqslant c$, 则 $a \leqslant c$ (传递性).

一个具有偏序的集合称为是一个**偏序集**.

一个**有向集** (directed set) 是一个非空集合 I, 并赋予一个自反和可递的二元关系 $\leqslant$, 使得每一元素对都有一个上界, 即对于任意的 $a, b \in I$, 都必定存在一个 $c \in I$ 使得 $a \leqslant c$ 和 $b \leqslant c$.

设 R 是环, I 是一个非空偏序集. 指标为 I 的 R 模**逆系统** (inverse system) $\{M_i, \mu_{ji}\}$ 是指一个 R 模族 $\{M_i : i \in I\}$ 连同一个 R 模同态族 $\{\mu_{ji} : M_j \to M_i, i, j \in I, i \leqslant j\}$ 中, 使得

(1) 若 $i \leqslant j \leqslant k$, 则 $\mu_{ji} \circ \mu_{kj} = \mu_{ki}$;
(2) 对于所有的 $i \in I$, 则 $\mu_{ii} = 1$ (单位映射).

R 模的逆系统 $\{M_i, \mu_{ji}\}$ 的**逆极限** (inverse limit) $\{M, \mu_i\}$ 是指一个 R 模 M 连同一族 R 模同态 $\{\mu_i : M \to M_i\}$ 使得对所有的 $i \leqslant j$ 有 $\mu_{ji} \circ \mu_j = \mu_i$, 并且要求满足下面的泛性: 如果 N 是一个 R 模, 且 $\psi_i : N \to M_i$ 是一个 R 模同态族, 使得每当 $i \leqslant j$, 我们有 $\mu_{ji} \circ \psi_j = \psi_i$, 则存在**唯一的** R 模同态 $\Psi : N \to M$, 使得 $\mu_i \circ \Psi = \psi_i$ 对所有的 $i \in I$. 这就是说, 存在唯一的同态 Ψ 对于所有的 $i \leqslant j$ 下图是交换的

$$\begin{tikzcd}
 & & M_i \\
N \arrow[urr, bend left, "\psi_j"] \arrow[r, dotted, "\Psi"] \arrow[drr, bend right, "\psi_j"'] & M \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\
 & & M_j \arrow[uu, "\mu_{j,i}"']
\end{tikzcd}$$

逆极限常常记为 $\varprojlim_i M_i$, 有时它被称为逆系统的**投影极限** (projective limit), 这个概念相当于范畴学中的**极限** (limit).

定理 11.27 *对于任意模的逆系统, 逆极限都存在.*

证明 我们将验证 M_i (关于 μ_{ji}) 的逆极限可被定义为直积 $\prod_i M_i$ 的子集

$$M = \{(m_i) \in \prod_i M_i : \mu_{ij}(x_j) = x_i \text{ 每当 } i \leqslant j\}.$$

这是一个 R 模.

首先, 由于 μ_{ji} 是一个模同态, 我们有 $\mu_{ji}(0) = 0$ 对于所有的 $i \leqslant j$, 从而 $0 \in M$, 因此 M 是非空的. 现在取 (x_i), (y_i) 在 M 中. 则在 R 模 $\prod_i M_i$ 中, 我们有 $(x_i - y_i) \in \prod_i M_i$. 而且, 对于 $i \leqslant j$, 我们有

$$\mu_{ji}(x_j - y_j) = \mu_{ji}(x_j) - \mu_{ji}(y_j) = x_j - y_j,$$

从而 $(x_i) - (y_i) \in M$. 这表明, M 是 $\prod_i M_i$ 的一个子群, 所以它是一个 Abel 群.

下面我们证明 M 是 $\prod_i M_i$ 的一个子模. 为了达到这个目的, 设 $r \in R$ 和 $(x_i) \in M$. 由于每当 $i \leqslant j$,

$$\mu_{ji}(r \cdot x_j) = r \cdot \mu_{ji}(x_j) = r \cdot x_i,$$

即

$$r \cdot (x_i) = (r \cdot x_i)$$

在 M 中.

对于每个 $i \in I$, 设 $\mu_i : M \to M_i$ 是直积 $\prod_i M_i$ 的投影同态到第 i 个分量的限制. 由于这样的 μ_i 已经是一个群同态. 另外, 对于所有的 $i \in I$, 我们有

$$\mu_i(r \cdot (x_k)) = \mu_i((r \cdot x_k)) = r \cdot x_i = r \cdot \mu_i((x_k)).$$

因此, 投影 μ_i 是 R 模同态. 当然, 我们有 $\mu_{ji} \circ \mu_j = \mu_i$ 对于所有的 $i \leqslant j$.

我们断言 M 有所要求的泛性. 如果 N 是一个 R 模, 且 $\psi_i : N \to M_i$ 是 R 模同态族, 使得每当 $i \leqslant j$, 我们有 $\mu_{ji} \circ \psi_j = \psi_i$.

我们首先定义 $\Psi : N \to M$ 使得对于 $x \in N$, $\Psi(x) = (\psi_i(x))$. 则当然

$$\mu_i(\Psi(x)) = \mu_i((\psi_i(x))) = \psi_i(x).$$

显然, Ψ 是一个群同态因为每个 ψ_i 也是. 同样, 我们可以验证 Ψ 是一个模同态. 设 $r \in R$ 和 $x \in N$. 则

$$\Psi(r \cdot x) = (\psi_i(r \cdot x)) = (r \cdot \psi_i(x)) = r \cdot (\psi_i(x)) = r \cdot \Psi(x).$$

于是, Ψ 是一个模同态.

对于唯一性, 设 Θ 是另一个 R 模同态, 使得对所有的 i, $\mu_i \circ \Theta = \psi_i$. 则对于任意的 $x \in N$, 我们有

$$\mu_i \circ \Theta(x) = \psi_i(x) = \mu_i \circ \Psi(x),$$

并且回想 μ_i 仅是投影, 从而 $(\Theta(x))_i = (\Psi(x))_i$, 即 $\Theta = \Psi$. □

如果我们反转上述讨论逆极限时所用到的箭头方向, 我们得到的 “对偶” 结构便称为正极限.

设 I 是一个非空偏序集. 指标为 I 的 R 模的一个**正系统** (direct system) $\{M_i, \rho_{ij}\}$ 是指一个 R 模族 $\{M_i : i \in I\}$ 连同一个 R 模同态族 $\{\rho_{ij} : M_i \to M_j, i, j \in I, i \leqslant j\}$, 使得

(1) 若 $i \leqslant j \leqslant k$, 则 $\rho_{jk} \circ \rho_{ij} = \rho_{ik}$;
(2) 对于所有的 $i \in I$ 有 $\rho_{ii} = 1$ (单位映射).

R 模方向系统 $\{M_i, \rho_{ij}\}$ 的一个**正极限** (direct limit) $\{M, \rho_i\}$ 是指一个 R 模 M 连同一族 R 模同态 $\{\rho_i : M_i \to M\}$ 使得对所有的 $i \leqslant j$, $\rho_j \circ \rho_{ij} = \rho_i$, 并且满足下面的泛

性: 如果 N 是一个 R 模, 且 $\psi_i : M_i \to N$ 是一个 R 模同态族, 使得每当 $i \leqslant j$, 我们有 $\psi_j \circ \rho_{ij} = \psi_i$, 则存在**唯一的** R 模同态 $\Psi : M \to N$ 使得 $\Psi \circ \rho_i = \psi_i$ 对所有的 $i \in I$. 这就是说, 存在唯一的同态 Ψ, 使得对所有的 $i \leqslant j$, 下面的图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[dr, "\rho_j"] \arrow[drr, bend left, "\psi_j"] & & \\
& M \arrow[r, dotted, "\Psi"] & N \\
M_i \arrow[uu, "\rho_{i,j}"] \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[urr, bend right, "\psi_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

正极限常常记为 $\varinjlim_i M_i$, 有时它被称为**内射极限** (injective limit), 这个概念相当于范畴学中的**上极限** (co-limit).

定理 11.28 对于任意模的正系统, 正极限都存在.

证明 我们不可能从对于逆极限的证明里通过反转箭头得到证明. 我们将通过取 M_i 的不相交并集, 并通过一个等价关系划分来构造正极限, 这启发性地表明, 不相交并集中的两个元素是等价的当且仅当它们在正系统中 "最终相等", 这意味着 $\rho_{ik}(x_i) = \rho_{jk}(x_j)$, 如果 k 充分大于 i 和 j. 我们现在给出正式的构造.

(1) 设 $U = \cup_i M_i \times \{i\}$ 是 M_i 的不相交并集. 我们称两个元素 (x, i), (y, j) 相关当且仅当存在 $k \geqslant i$ 和 $k \geqslant j$, 使得 $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$. 在这种情况下, 我们记 $(x, i) \sim (y, j)$. 我们断言, $\sim$ 是一个等价关系.

1) $\sim$ 是自反的: 对于 $i \in I$, 我们有 $i \leqslant i$ 且 ρ_{ii} 是恒等式, 从而 $(x, i) \sim (x, i)$.

2) $\sim$ 是对称的: $(x, i) \sim (y, j)$ 是指一个等式 $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$ 对于某些 $k \geqslant i, j$ 成立, 从而 $(y, j) \sim (x, i)$.

3) $\sim$ 是可递的: 如果 $(w, h) \sim (x, i)$ 和 $(x, i) \sim (y, j)$, 则

$$\rho_{hn}(w) = \rho_{in}(x) \quad 和 \quad \rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$$

对于某些 $n \geqslant h, i$ 和 $k \geqslant i, j$. 由于 I 是有向的, 我们可以找到一个 $m \geqslant n, k$, 从而

$$\begin{aligned}
\rho_{hm}(w) &= \rho_{nm}(\rho_{hn}(w)) = \rho_{nm}(\rho_{in}(x)) \\
&= \rho_{im}(x) = \rho_{km}(\rho_{ik}(x)) = \rho_{km}(\rho_{jk}(y)) \\
&= \rho_{jm}(y).
\end{aligned}$$

因此, $\rho_{hm}(w) \sim \rho_{jm}(y)$.

(2) 设 $M = U/\sim$ 是 U 模的所有等价类的集合 $\sim$. 对于 (x, i) 在 U 中, 用 $[x, i]$ 表示 M 中 (x, i) 的等价. 在 M 中, 我们引入一个加法

$$[x, i] + [y, j] = [\rho_{ik}(x) + \rho_{jk}(y), k],$$

其中 k 是 i 和 j 的任一上界. 我们将验证, 这与等价类的表示选取无关.

设 $[x_1, i_1] = [x_2, i_2]$ 和 $[y_1, j_1] = [y_2, j_2]$. 则存在 $s \geqslant i_1, i_2$ 使得 $\rho_{i_1 s}(x_1) = \rho_{i_2 s}(x_2)$, 存在 $r \geqslant j_1, j_2$ 使得 $\rho_{j_1 r}(y_1) = \rho_{j_2 r}(y_2)$. 现在选取 $k_1 \geqslant i_1, j_1$ 和 $k_2 \geqslant i_2, j_2$, 于是 $t \geqslant k_1, k_2, r, s$, 则

$$\begin{aligned}
&\rho_{k_1 t}(\rho_{i_1 k_1}(x_1) + \rho_{j_1 k_1}(y_1)) = \rho_{i_1 t}(x_1) + \rho_{j_1 t}(y_1) \\
&\quad = \rho_{st}(\rho_{i_1 s}(x_1)) + \rho_{rt}(\rho_{j_1 r}(y_1)) = \rho_{st}(\rho_{i_2 s}(x_2)) + \rho_{rt}(\rho_{j_2 r}(y_2)) \\
&\quad = \rho_{i_2 t}(x_2) + \rho_{j_2 t}(y_2) = \rho_{k_2 t}(\rho_{i_2 k_2}(x_2) + \rho_{j_2 k_2}(y_2)),
\end{aligned}$$

这就是说,

$$[x_1, i_1] + [y_1, j_1] = [x_2, i_2] + [y_2, j_2],$$

即我们的加法是明确定义的.

(3) 我们断言, M 是一个 Abel 群. 显然,

$$[x, i] + [y, j] = [y, j] + [x, i].$$

对于所有的 $i, j \in I$, 存在 $k \geqslant i, j$ 和 $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y) = 0$, 从而 $[0, i] = [0, j]$ 对所有的 i, j. 可以令 $\mathbf{0} = [0, i]$ 对于任意的 i, 则我们可以验证, 对于这个加法, $\mathbf{0}$ 是零元素且

$$[x, i] + [-x, i] = \mathbf{0}.$$

我们留给读者去验证结合律.

(4) 对于 $r \in R$ 和 $[x, i] \in M$, 令 $r[x, i] = [rx, i]$. 这是明确定义的, 因为 ρ_{ij} 是模同态. 事实上, 如果 $[x, i] = [y, j]$, 则 $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$ 对于某个 $k \geqslant i, j$. 则

$$\rho_{ik}(rx) = r\rho_{ik}(x) = r\rho_{jk}(y) = \rho_{jk}(ry),$$

即 $r[x, i] = r[y, j]$. 易证 M 是一个 R 模.

(5) 我们定义映射 $\rho_i : M_i \to M$ 并且 $\rho_i(x) = [x, i]$. 由定义立即推出 ρ_i 是一个模同态且当 $i \leqslant j$ 在 I 中时, $\rho_j \circ \rho_{ij} = \rho_i$.

(6) 还需验证泛性. 设我们有一个 R 模 N 和一个 R 模同态族 $\psi_i : M_i \to N$, 使得每当 $i \leqslant j$, 我们有 $\psi_j \circ \rho_{ij} = \psi_i$. 则我们定义 $\Psi : M \to N$ 并且 $\Psi([x, i]) = \psi_i(x)$. 如上我们需验证, 如果 $[x, i] = [y, j]$, 则 $\Psi[x, i] = \Psi[y, j]$. 而且, 由加法和数乘定义的方式, 我们容易看出 Ψ 是一个模同态且对所有的 i,

$$\psi_i = \Psi \circ \rho_i.$$

至于唯一性, 设 $\Theta : M \to N$ 是另一个模同态, 使得 $\Theta \circ \rho_i = \psi_i$ 对于所有的 i. 则只要对有关元素来验证,

$$\Theta([x,i]) = \Theta\rho_i(x) = \psi_i(x) = \Psi([x,i]). \qquad \square$$

11.5 分级和过滤

设环 A 有加法子群 A_n, $n \geqslant 0$ 为整数, 使得

(1) 当我们把环 A 看作加法群时, A 是 A_n 的加法群直和: $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$;

(2) 对所有 n, m, 有 $A_n A_m \subset A_{n+m}$.

则称 A 为**分级环** (graded ring).

设 A 为分级环, M 为左 A 模. 如果 M 有加法子群 M_n, $n \geqslant 0$ 为整数, 使得

(1) $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$ (加法群直和);

(2) $A_n M_m \subset M_{n+m}$ 对所有 n, m.

则称 M 为分级环 A 上的**分级模** (graded module). 称 M_n 的元素为 n **次齐次元素** (homogeneous of degree n).

设 M 为分级环 A 上的分级模, N 为 M 的子 A 模. 如果 $N = \oplus_n (N \cap M_n)$, 则称 N 为 M 的**分级子模** (graded submodule).

设有分级环 A, A'. 称环同态 $h : A \to A'$ 为**分级环同态** (graded homomorphism), 如果对所有 n 有 $h(A_n) \subset A'_n$.

设 M, N 为分级环 A 上的分级模, $u : M \to N$ 为 A 模同态. 如果有整数 $d \geqslant 0$, 使得 $u(M_n) \subset N_{n+d}$, 则称 u 为 d **次分级同态** (graded homomorphism of degree d). 不难验证以下命题.

命题 11.29 (1) 像 $\mathrm{Img}(u)$ 是 N 的分级子模.

(2) 核 $\mathrm{Ker}(u)$ 是 N 的分级子模.

(3) 如果 $d = 0$, 则由 A 模同态 u 所决定的 A 模同构 $M/\mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Img}(u)$ 是分级模同构.

让我们给个标准例子. 设 A 是交换环. $R = A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元的多项式环. 设 $(i) = (i_1, \cdots, i_n)$, $i_k \geqslant 0$ 为整数. 设 $x^{(i)} = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. R 内的单项式 $a_{(i)} x^{(i)}$ ($a_{(i)} \in A$) 的次数是 $d = i_1 + \cdots + i_n$. 以 R_d 记由 0 及所有次数是 d 的单项式的有限和所组成的集合, 则 R_d 的元素便是 d 次齐次多项式. R 的任一元素 f 可以唯一地表示成有限和 $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d + \cdots$, 其中 $f_d \in R_d$. 所以 $R = \oplus_d R_d$, 显然有 $R_n R_m \subset R_{n+m}$. 这样我们利用次数把多项式环写成分级环.

环 A 的一个**递减过滤** (decreasing filtration) 是指 A 的一组加法子群 A_n, $n \geqslant 0$ 为整数, 使得

(1) $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$;

(2) $A_n A_m \subset A_{n+m}$ 对所有 n, m

例 设 I 为交换环 A 的理想. 称递减过滤

$$A \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$$

为 A 的 I **进过滤** (I-adic filtration).

设 A 为递减过滤环, M 为左 A 模. 如果 M 有加法子群 M_n, $n \geqslant 0$ 为整数, 使得

(1) $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$;

(2) $A_n M_m \subset M_{n+m}$ 对所有 n, m.

则说 M 有递减过滤.

环 A 递减过滤

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

的**关联分级环** (associated graded ring) 是指

$$\mathrm{gr}(A) := \oplus_{n=0}^{\infty} A_n/A_{n+1} \quad (\text{加群直和}),$$

其中的乘法由以下公式定义

$$A_n/A_{n+1} \times A_m/A_{m+1} \to A_{n+m}/A_{n+m+1} : (a + A_{n+1}, b + A_{m+1}) \mapsto ab + A_{n+m+1}.$$

设递减过滤环 A 的左 A 模 M 有递减过滤 $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$. 这个过滤的**关联分级模** (associated graded module) 是指

$$\mathrm{gr}(M) := \oplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1} \quad (\text{加群直和}),$$

其中系数的乘法由以下公式定义

$$A_n/A_{n+1} \times M_m/M_{m+1} \to M_{n+m}/M_{n+m+1} : (a + A_{n+1}, x + M_{m+1}) \mapsto ax + M_{n+m+1}.$$

我们举一个比较难的例子. 设 X 是复数上的光滑仿射簇, $\mathscr{O}_X$ 是 X 的结构层. 设 D 是从 $\mathscr{O}_X$ 到 $\mathscr{O}_X$ 的 $\mathbb{C}$ 线性映射. 如果有 $f \in \mathscr{O}_X$ 使 $Du = fu$, 则称 D 为 0 阶微分算子. 称 D 为 k 阶微分算子, 若对所有 $f \in \mathscr{O}_X$, $fD - Df$ 是 $k-1$ 阶微分算子. 所有阶 $\leqslant k$ 的微分算子组成复向量空间 $\mathfrak{D}_k$, 这样微分算子环 $\mathfrak{D} = \cup_k \mathfrak{D}_k$ 是非交换环, 而且 $\mathfrak{D}$ 有递增过滤

$$\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 \subset \cdots .$$

可以证明过滤环 $\mathfrak{D}$ 的关联分级环 $\mathrm{gr}(\mathfrak{D})$ 是交换环, 并同构于 X 的张量丛 TX 的对称代数 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} TX$.

习 题

1. 设有正整数 a,b. 以 d 记最大公因子 (a,b). 证明: $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (看作 $\mathbb{Z}$ 模张量积). 所以如果 a,b 互质, 即 $d=1$, 则 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}=0$.

2. 设 I,J 为交换环 R 的理想. 证明: $R/I\otimes_R R/J\cong R/(I+J)$.

3. 设 I 为交换环 R 的理想, M 为 R 模. 证明: $(R/I)\otimes_R M\cong M/IM$.

4. 设 F 为交换环 R 上的自由模, $\{e_j\}$ 为 F 的基. 设 F 的秩 $=2$. 证明: 不存在 F 的元素 $u=a_1e_1+a_2e_2$, $v=b_1e_1+b_2e_2$, 使得在 $F\otimes_R F$ 有 $e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2=u\otimes v$. 设 F 的秩 $=n$. 证明: 如有 $u,v\in F$ 使 $u\otimes v=\sum c_{ij}e_i\otimes e_j$, 则 $c_{ii}c_{jj}=c_{ij}c_{ji}$.

5. 设 E,F 为交换环 R 上的自由模, $\{e_i:i\in I\}$ 为 E 的基, $\{f_j:j\in J\}$ 为 F 的基. 证明: $\{e_i\otimes_R f_j:(i,j)\in I\times J\}$ 为自由 R 模 $E\otimes_R F$ 的基.

6. R 为交换环, M 为 R 模, F 为自由 R 模, $\{e_i:i\in I\}$ 为 F 的基. 取 $v\in M\otimes_R F$. 证明: 存在唯一的 m_i, $i\in I$ 使得 $v=\sum_i m_i\otimes e_i$, 其中只有有限个 m_i 不等于 0.

7. 设 M_j 是 M 的子模对于 $1\leqslant j\leqslant k$. 证明: $M_1+\cdots+M_k$ 是 M 的一个子模.

8. M 是模. 设我们有一个集合 I, 对每个 $\alpha\in I$ 都有 M 的一个子模 M_α. 我们可以形成 M_α 中元的**有限**和:

$$x_{\alpha_1}+\cdots+x_{\alpha_k},$$

其中 $x_{\alpha_j}\in M_{\alpha_j}$. 以 $\sum_{\alpha\in I}M_\alpha$ 记所有这样的有限和的集合. 证明: $\sum_{\alpha\in I}M_\alpha$ 是有限和的并

$$M_{\alpha_1}+M_{\alpha_2}+\cdots+M_{\alpha_k}$$

对于 I 的所有子集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$. 证明: $\sum_{\alpha\in I}M_\alpha$ 是 M 的一个子模.

9. 设 X 是一个给定模 M 的子集. 我们可以形成 X 中元的有限线性组合, 系数来自于 R:

$$r_1x_1+\cdots+r_kx_k,$$

其中 $x_j\in X$ 和 $r_j\in R$. 我们用 $\langle X\rangle$ 表示所有这样的有限和的集合. 证明: $\langle X\rangle$ 是 M 的一个子模.

10. 对于 M 的一个子模族 $\{M_\alpha|\alpha,nI\}$, 证明:

$$\sum_{\alpha\in I}M_\alpha=\left\langle\bigcup_{\alpha\in I}M_\alpha\right\rangle.$$

11. 证明: 一个族 $\{M_\alpha:\alpha\in I\}$ 的直和在同构的意义下是唯一的. 这就是说, 如果两个模 S 和 S' 满足族 $\{M_\alpha:\alpha\in I\}$ 的直和的定义, 则 S 和 S' 是同构的.

12. 给定模同态

$$B\overset{p_k}{\to}M_k\quad 和\quad M_k\overset{i_k}{\to}B\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

满足

$$p_ki_l=\delta_{kl}\quad(1\leqslant k,l\leqslant n).$$

证明: 下面的说法是等价的.

(a) $\{B,\ p_k(1 \leqslant k \leqslant n)\}$ 是 $\{M_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 的一个直积.

(b) $\{B,\ i_k(1 \leqslant k \leqslant n)\}$ 是 $\{M_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 的一个直和.

(c) $\{B,\ i_k, p_k(1 \leqslant k \leqslant n)\}$ 是 $\{M_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 的一个双积.

13. 对于 R 模正系统 $\{M_i, \rho_{ij}\}$, 证明:

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim_i M_i, N) = \varprojlim_i \operatorname{Hom}(M_i, N)$$

对于任意的 R 模 N 都成立.

14. 给定模同态

$$\begin{tikzcd} & N \\ T \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

令 $W = \{(\alpha t, -\beta t) | t \in T\}$. 证明: W 是直和 $M \oplus N$ 的一个子模. 设 $S = M \oplus N/W$. 令

$$\varphi:\ M \to S:\ x \mapsto (x, 0) + W,$$
$$\psi:\ N \to S:\ y \mapsto (0, y) + W.$$

证明: (S, φ, ψ) 是 M, N 在 T 下的一个纤维和.

15. 设 D 是主理想整环, $M = x_1D \oplus \cdots \oplus x_nD$, $N = Dy_1 \oplus \cdots \oplus Dy_m$. 设 $\operatorname{Ann} x_i = (d_i)$, $\operatorname{Ann} y_j = (f_j)$. 证明: $M \otimes N$ 同构于 $\prod D/(d_i, f_j)$.

16. 设 G 是有限交换群, $\mathbb{Q}$ 是有理数加法群. 证明: $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

17. 设 $M \xleftarrow{\phi} P \xrightarrow{\psi} N$ 是 $M \xrightarrow{\alpha} S \xleftarrow{\beta} N$ 的纤维积, $P \xleftarrow{\phi'} P' \xrightarrow{\psi'} N'$ 是 $P \xrightarrow{\psi} N \xleftarrow{\beta'} N'$ 的纤维积. 证明: 设 $M \xleftarrow{\phi\phi'} P' \xrightarrow{\psi'} N'$ 是 $M \xrightarrow{\alpha} S \xleftarrow{\beta\psi'} N$ 的纤维积. 对纤维和证明类似的结果.

第十二章　表示

12.1　群表示

本章介绍代数学里的重要概念 —— “表示”. 群表示论是用来研究群结构和性质的重要工具之一. 在数论中, 著名的朗兰兹纲领的主要内容, 就是研究数域的 Galois 群的表示和线性代数群的表示的关系. 为了结合本书的主旨, 我们将会用模的语言来叙述群表示的基本理论.

设有群 G 和域 F. 称以下和为有限形式和

$$a = \sum_{g \in G} a_g g,$$

其中 $a_g \in F$ 并且只有有限个 a_g 非零. 设另有有限形式和

$$b = \sum_{g \in G} b_g g.$$

如果对所有 $g \in G$ 有 $a_g = b_g$, 则称 $a = b$. 显然

$$\sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

亦是有限形式和. 我们称此和为 $a + b$. 所有如此有限形式和所组成的集合记为 $F[G]$. 易见, 对于以上加法 $F[G]$ 是交换群.

我们利用群 G 的乘法在 $F[G]$ 里定义乘法如下. 如前, 设 $a, b \in F[G]$, 定义

$$ab = \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

在 $F[G]$ 内使用以上定义的加法与乘法不难证明 $F[G]$ 是带单位的环, 单位就是群 G 的单位 1_G. 称 $F[G]$ 为 G 的**群环** (group ring), $F[G]$ 同时亦是 F 代数. 我们亦称 $F[G]$ 为 G 的**群代数** (group algebra).

设 V 为域 F 上的向量空间. 所有从 V 到 V 的 F 线性双射组成一个群, 这个群的乘法是映射的合成, 以 $\mathrm{Aut}_F(V)$ 或 $GL(V)$ 记此群, 这个群的单位就是 V 的恒等映射

$$\mathrm{Id}_V : V \to V : v \mapsto v.$$

设 V 为域 F 上的向量空间. 群 G 在 V 上的**表示** (representation) 是指如下的一个群同态

$$\pi : G \to \mathrm{Aut}_F(V),$$

所以对任一 $g \in G$ 有线性双射 $\pi(g) : V \to V$. 常简单说 (V, π) 或 (π, V) 为群 G 的表示.

现取群环 $F[G]$ 的元素 $a = \sum_{g \in G} a_g g$, 向量 $v \in V$ 定义

$$a \cdot v = \sum_{g \in G} a_g \pi(g)(v).$$

于是便得映射

$$F[G] \times V \to V : (a, v) \mapsto a \cdot v.$$

这样利用群 G 的表示 π 我们便令向量空间 V 成为 $F[G]$ 模. 这类模可以说是模的主要例子之一.

常以 Hom_G 或 $\mathrm{Hom}_{F[G]}$ 指 $F[G]$ 模同态.

设群 G 有 F 向量空间 V 上的表示 π 和 F 向量空间 V' 上的表示 π'. 则 V 和 V' 为 $F[G]$ 模. 此时 $F[G]$ 模同态 $T : V \to V'$ 等同于要求对任意 $g \in G$ 必有

$$T\pi(g) = \pi'(g)T,$$

亦称这样的 T 为表示 π 与 π' 的**缠结算子** (intertwining operator). 若 $\pi = \pi'$, 则亦称 T 为 π 的缠结算子.

若表示 π 与 π' 有缠结算子 T 使得 T 为 F 向量空间同构, 则称 π 与 π' 为**等价表示** (equivalent representation). 此时 T 实为 $F[G]-$ 模同构.

12.2 不可分模

给定环 R, 设 M 为 R 模. 以 $\mathrm{End}_R M$ 记所有 M 到 M 的 R 模同态所组成的集合. 利用映射的合成

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "e \circ f"] & M \arrow[r, "e"'] & M \end{tikzcd}$$

在 $\mathrm{End}_R M$ 中定义乘法

$$\mathrm{End}_R M \times \mathrm{End}_R M \to \mathrm{End}_R M : (e, f) \mapsto e \circ f.$$

以 ef 记 $e \circ f$, 则 $\mathrm{End}_R M$ 是环并有单位

$$1_M : M \to M : x \mapsto x.$$

称 $e \in \mathrm{End}_R M$ 为**等幂元** (idempotent), 若 $e^2 = e$. 我们说等幂元 e 是非平凡等幂元, 若 $e \neq 0, 1$.

称 M 的子模 N 为真子模, 若 $N \neq M$.

定义 12.1 说 R 模 M 是**不可分模** (indecomposable module), 若 $M \neq 0$ 且不可以把 M 表达为两个或更多个真子模的直和.

命题 12.2 M 是不可分 R 模的充分必要条件是 $\mathrm{End}_R M$ 内没有非平凡幂等元.

证明 ($\Leftarrow$). 设 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n, M_j \neq 0, M$. 则按直和性质投射 $e_j : M \to M_j \in \mathrm{End}_R M$ 满足条件 $e_j^2 = e_j \neq 0, 1$.

($\Rightarrow$). 若 $e \in \mathrm{End}_R M, e^2 = e \neq 0, 1$, 设 $e_1 = e, e_2 = 1 - e$, 则

$$\forall x \in M \Rightarrow x = (e + 1 - e)x = e_1 x + e_2 x \Rightarrow M = e_1 M + e_2 M.$$

但是 $e_1^2 = e^2 = e$ 及 $e_2^2 = (1-e)(1-e) = 1-2e+e^2 = 1-e = e_2$, 并且 $e_1 e_2 = e(1-e) = e-e^2 = 0$, 同样 $e_2 e_1 = 0$. 按直和性质得, $M = e_1 M \oplus e_2 M$. 因为 $e \neq 0$, 便得 $e_1 M \neq 0$. 从 $e \neq 1, 1-e \neq 0$, 得 $e_2 \neq 0$, 于是 $e_2 M \neq 0$. 从此易见 $e_1 M \neq M, e_2 M \neq M$. □

定义 12.3 若非零 R 模 M 的任意两个自同构的和仍然是自同构, 则称 M 为**强不可分模** (strongly indecomposable module).

命题 12.4 M 是强不可分模 $\Rightarrow$ M 是不可分模.

证明 设 M 是强不可分模但又是可分模. 则按前一命题 $\exists e \in \mathrm{End}\, M, e^2 = e \neq 0, 1$. 取 $e_1 = e, e_2 = 1 - e$. 则 $e_1 + e_2 = 1$, 即 e_1, e_2 的和是自同构. 现证 e_1, e_2 均非可逆. 若 e_1 为可逆元, 则 $\exists f \in \mathrm{End}_R M$, 使得 $ef = 1$, 于是 $e = e(ef) = e^2 f = ef = 1$. 与对 e 所下之假设相矛盾. 同样可证 e_2 非可逆. □

设有模同态 $\varphi : M \to N$ 及 M 的子模 S. 我们可以把 φ 限制到 S 上而得出一个从 S 到 N 的模同态. 我们把这个模同态记为 $\varphi|_S$ 或 $\varphi|S$.

设有整数 $k \geqslant 0$ 使得模同态 $\varphi : M \to N$ 满足条件 $\varphi^k = 0$. 则称 φ 为**幂零同态** (nilpotent homomorphism).

定理 12.5 (Fitting 引理) 设 M 是 Noether 及 Artin 模, $\varphi : M \to M$ 是同态. 则有子模 M_0, M_1 使得

(1) $M = M_0 \oplus M_1$;
(2) $\varphi\,|_{M_0}$ 是幂零的, $\varphi\,|_{M_1}$ 是同构;
(3) $M_0 = \cup_{r\geqslant 0}\operatorname{Ker}\varphi^r$, $M_1 = \cap_{s\geqslant 0}\operatorname{Img}\varphi^r$.

证明 使用同态 φ 建立两个子模序列:

$$M \supseteq \varphi(M) \supseteq \varphi^2(M) \supseteq \cdots \quad 和 \quad O \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots.$$

按假设存在 l 使得 $M_1 = \varphi^l(M) = \varphi^{l+1}(M) = \cdots$ 及 $M_0 = \operatorname{Ker}\varphi^l = \operatorname{Ker}\varphi^{l+1} = \cdots$.

(1) 的证明. 取 $x \in M_0 \cap M_1$. 则 $\exists y \in M$, 使得 $x = \varphi^l(y)$ 及 $\varphi^l(x) = 0$. 于是 $\varphi^{2l}(y) = \varphi^l(\varphi^l(y)) = \varphi^l(x) = 0$, 由此得 $y \in \operatorname{Ker}\varphi^{2l} = \operatorname{Ker}\varphi^l \Rightarrow x = \varphi^l(y) = 0$, 所以 $M_0 \cap M_1 = 0$.

对任一 $x \in M$ 必有 $\varphi^l(x) \in M_1 = \varphi^l(M) = \varphi^{2l}(M)$, 于是 $\exists y \in M$, 使得 $\varphi^l(x) = \varphi^{2l}(y)$. 设 $z = x - \varphi^l(y)$. 则 $\varphi^l(z) = \varphi^l(x) - \varphi^{2l}(y) = 0$, 即 $z \in \operatorname{Ker}\varphi^l = M_0$. 所以

$$x = z + \varphi^l(y),$$

其中 $z \in M_0, \varphi^l(y) \in M_1$. 这样证明了 $M = M_0 + M_1$. 于是证毕 (1).

(2) 的证明. 因为 $\operatorname{Ker}\varphi^l = \operatorname{Ker}\varphi^{l+1}$, 便得 $\varphi(M_0) \subseteq M_0$.

现记 $\varphi\,|_{M_0}$ 是幂零的. 首先 $\forall x \in M_0 = \operatorname{Ker}\varphi^l \Rightarrow \varphi^l(x) = 0 \Rightarrow (\varphi\,|_{M_0})^l(x) = 0 \Rightarrow (\varphi\,|_{M_0})^l = 0$.

接着考虑 $\varphi\,|_{M_1}$. 从 $\varphi(\varphi^l(M)) = \varphi^{l+1}(M) = \varphi^l(M) = M_1$, 得知 $\varphi\,|_{M_1}$ 是满射.

现取 $x \in M_1$, 使得 $\varphi(x) = 0$. 则 $\varphi^l(x) = \varphi^{l-1}(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow x \in M_0 = \operatorname{Ker}\varphi^l \Rightarrow x \in M_0 \cap M_1 = 0 \Rightarrow x = 0$. 这样得到 $\operatorname{Ker}(\varphi \mid M_1) = 0$. 所以 $\varphi\,|_{M_1}$ 是同构.

(3) 从构造可见. □

命题 12.6 设不可分 R 模 M 同时是 Artin 模和 Noether 模. 则

(1) 任意同态 $\varphi: M \to M$ 必是幂零的或是同构,
(2) M 是强不可分 R 模.

证明 (1) 由 Fitting 引理, $M = M_0$ 或 $M = M_1$, 所以 φ 幂零或是同构.

(2) 若 M 不是强可分模. 则 $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{End} M$, 使得 φ_1 和 φ_2 是不可逆的, 但是 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 是可逆的. 取 $\zeta_i = \varphi^{-1}\varphi_i$, 其中 $i = 1, 2$. 则 ζ_i 是不可逆的, 且 $1 = \zeta_1 + \zeta_2$. 由第一部分得 ζ_i 是幂零的, 即 $\exists k$, 使得 $\zeta_i^k = 0$. 现有

$$1 = 1 - \zeta_i^k = (1 - \zeta_i)(1 + \zeta_i + \cdots + \zeta_i^{k-1}) = (1 + \zeta_i + \cdots + \zeta_i^{k-1})(1 - \zeta_i),$$

即 $\zeta_1 = 1 - \zeta_2$ 以 $(1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_2^{k-1})$ 为逆元. 这与 ζ_1 是幂零的相矛盾. □

引理 12.7 给定 R 模同态 $M \xrightarrow{\varphi} N, N \xrightarrow{\psi} M$. 假定 $M \neq 0$, N 是不可分模且 $\psi\varphi$ 是同构, 则 ψ 及 φ 是同构.

证明 因为 $\psi\varphi$ 是自同构, 便存在可逆同态 μ, 使得 $\mu(\psi\varphi) = (\psi\varphi)\mu = 1$.

取 $\rho = \mu\psi : N \to M$. 则 $\rho\varphi = 1$. 再取 $\zeta = \varphi\rho : N \to N$. 则

$$\zeta^2 = \varphi(\rho\varphi)\rho = \varphi\rho = \zeta.$$

即 ζ 是等幂元. 因为我们假设 N 是不可分模, 所以 $\zeta = 0$ 或 1. 如果 $\zeta = 0$, 则

$$1_M = 1_M^2 = (\rho\varphi)(\rho\varphi) = \rho\zeta\varphi = 0.$$

这是不可能的, 所以 $\zeta = \varphi\rho = 1_N$.

显然 $\varphi\rho = 1_N$ 及 $\rho\varphi = 1_M$, 即 φ 和 ρ 是同构, 于是 μ 是同构. 所以 $\mu^{-1}\rho = \psi$ 是同构. □

定理 12.8 设 R 模 M 有两个直和分解:

(1) $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$, 其中 M_j 是强不可分的,

(2) $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$, 其中 N_k 是不可分的.

则 $m = n$, 并且在适当重新排列后可得 $M_j \approx N_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. 再者还可证明

(3) $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus M_{k+1} \oplus \cdots \oplus M_m, k = 0, 1, \cdots, n$.

证明 对 (3) 中的整数 k 做归纳证明. 当 $k = 0$ 时定理成立.

设有映射 $\varphi : M \to N$ 及 M 的子集 M', 并且 $\varphi(M') = N'$. 引入限制记号 $\varphi \mid M' \to N'$.

当 $k \leqslant r - 1$ 时, 设定理成立. 由直和分解 (3) 所决定的投射记为 $g_1, \cdots, g_m$, 由直和分解 (2) 所决定的投射记为 $f_1, \cdots, f_n$.

按归纳假设引入 $v_i = f_i \mid M_r \to N_i$, $w_r = g_r \mid N_i \to M_r$ 和 $u_j = g_r f_j \mid M_r \to M_r$.

$$\begin{tikzcd}
N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus N_r \oplus \cdots \oplus N_n \arrow[r, equal] & M \arrow[d, "f_i"] \arrow[r, phantom, "\supset"] & M_r \arrow[dd, "f_i \mid M_r \to N_i = v_i"] \\
 & N_i & \\
N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_r \oplus \cdots \oplus M_m \arrow[r, equal] & M \arrow[d, "g_r"] \arrow[r, phantom, "\supset"] & N_i \arrow[dl, "g_r \mid N_i \to M_r = w_r"] \\
 & M_r &
\end{tikzcd}$$

一方面 $g_r \mid M_r \to M_r = 1_{M_r}$, 另一方面

$$g_r = g_r \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right) = \sum_{j=1}^{n} g_r f_j = \sum_{j=1}^{n} u_j,$$

因为当 $j \leqslant r$, 有 $g_r f_j = 0$.

由于 M_r 是强不可分模, $\exists i \geqslant r$ 使得 u_i 可逆. 可设 i 是 r, 于是 $u_r = w_r v_r$. 因 N 是不可分模, 由前一引理知 v_r 和 w_r 是同构, 即 $N_r \approx M_r$.

余下证

(4) $(N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_{r+1} \oplus \cdots \oplus M_m) \oplus N_r = M$.

取 $x \in (N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_{r+1} \oplus \cdots \oplus M_m) \cap N_r$.

因 $x \in N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_{r+1} \oplus \cdots \oplus M_m$, 得 $g_r x = 0$. 但 $x \in N_r$ 和 w_r 是同构, 得 $g_r x = 0$, 于是 $x = 0$. 如此证出

$$(N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_{r+1} \oplus \cdots \oplus M_m) \cap N_r = 0.$$

下一步设 $(N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_{r+1} \oplus \cdots \oplus M_m) + N_r = M'$.

若 $x \in N_r$, 取 $x = g_1 x + \cdots + g_r x + g_{r+1} x + \cdots + g_m x$. 则 $g_r x = x - g_1 x - \cdots - g_{r-1} x - g_{r+1} x - \cdots - g_m x \in M'$, 于是 $M_r = g_r N_r \subseteq M'$. 所以

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-1} \oplus M_r \oplus \cdots \oplus M_m \subseteq M'.$$

但是

$$M' = (N_1 + \cdots + N_{r-1} + M_{r+1} + \cdots + M_m) + N_r \subseteq M.$$

这就得到 $M' = M$. 得证 (4). □

定理 12.9 (Krull-Schmidt 定理) 设 R 模 M 同时是 Artin 模和 Noether 模. 则

(1) 存在分解 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, 其中 M_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 是不可分模.

(2) 以上分解是唯一的, 即如果

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n,$$

则 $m = n$, 并且在适当排列后有 $M_j \approx N_j$ 及

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus M_{k+1} \oplus \cdots \oplus M_m, \text{ 对任意 } 0 \leqslant k \leqslant m.$$

证明 (1) 因为 M 同时是 Artin 横和 Noether 模, M 有长度 $\ell(M)$. 证明将是对 M 的长度做归纳.

如果 M 是不可分模则证毕, 否则 $M = M' \oplus M''$, 其中 $\ell(M') < \ell(M)$, $\ell(M'') < \ell(M)$. 由归纳假设

$$M' = M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_{m_1}$$

和

$$M' = M''_1 \oplus \cdots \oplus M''_{m_2},$$

其中 M_j', M_k'' 是不可分模. 于是有

$$M' = M' \oplus M'' = M_1' \oplus \cdots \oplus M_{m_1}' \oplus M_1'' \oplus \cdots \oplus M_{m_2}''.$$

(2) 如果 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, 其中 M_j 是不可分模, 则从假设推出 M_j 是强不可分模, 于是得证 (2). □

12.3 不可约模

定义 12.10 *R 是环. 称 R 模 M 为***不可约的** *(irreducible), 如果 $M \neq 0$ 且 M 没有非零真子模 N, 即 $0 \neq N \underset{\neq}{\subset} m$; 称群 G 在 F 向量空间 V 上的表示为不可约的, 如果 $F[G]$ 模 V 为不可约的.*

命题 12.11 *M 为不可约模当且仅当 $M \neq 0$ 且存在非零元 $x \in M$ 使得 $M = Rx$.*

证明 $(\Rightarrow)$. 取 M 内 $x \neq 0$. 则得非零子模 Rx. 若 M 为不可约模, 则 $M = Rx$.

$(\Leftarrow)$. 设有 M 的非零子模 N. 则 N 有 $x \neq 0$. 于是

$$M = Rx \subseteq N \subseteq M,$$

所以 $N = M$. 如此证得 M 为不可约模. □

命题 12.12 (Schur 引理) *设 M 和 N 为不可约模. 则任何非零同态 $\phi : M \to N$ 必是同构.*

证明 考虑正合序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi \to M \to \operatorname{Img}\phi \to 0.$$

由 $\phi \neq 0$ 得 $\operatorname{Ker}\phi \neq M$, 但是 M 为不可约模, 所以子模 $\operatorname{Ker}\phi$ 为 0, 即 ϕ 是单射. 当 M 为不可约模, 便有 $M \neq 0$ 存在非零元 $x \in M$. 由 ϕ 为单射得 $\phi(x) \neq 0$, 于是 $\operatorname{Img}\phi \neq 0$. 但 N 为不可约模, 所以子模 $\operatorname{Img}\phi$ 是 N, 即 ϕ 是满射. □

定义 12.13 *称 R 模 M 为***完全可约模** *(completely reducible module), 如果对任一子模 N 存在子模 N', 使得 $M = N \oplus N'$.*

命题 12.14 *完全可约模的子模是完全可约模.*

证明 设 N 是完全可约模 M 的子模, N_1 是模 N 的子模. 则 N_1 为 M 的子模, 所以存在 M 的子模 M', 使得 $M = N_1 \oplus M'$. 取 $N_1' = M' \cap N$. 则 $N = N_1 \oplus N_1'$. □

引理 12.15 *设 $M \neq 0$ 是完全可约模, $N \neq 0$ 是 M 的子模. 则 N 有不可约子模.*

证明 在 N 中取 $n \neq 0$. 考虑集合

$$\mathscr{N} = \{N' : N' \text{ 为 } N \text{ 的子模以及 } n \notin N'\}.$$

$\mathscr{N}$ 内上升链的并集仍在 $\mathscr{N}$ 内, 所以集合 $\mathscr{N}$ 满足 Zorn 引理, 由此知 $\mathscr{N}$ 有极大元 N_0. 按前一命题 N 是完全可约模, 于是 N 有子模 N_1 使得 $N = N_0 \oplus N_1$.

现在证明 N_1 是不可约模, 否则存在子模 N_2 使得 $0 \neq N_2 \underset{\neq}{\subset} N_1$. 在 N_1 中取子模 N_3 使得 $N_1 = N_2 \oplus N_3$, 这样

$$N = N_0 \oplus N_2 \oplus N_3.$$

如果 $n \in N_0 \oplus N_2$, $n \in N_0 \oplus N_3$, 则

$$n \in (N_0 \oplus N_2) \cap (N_0 \oplus N_3) = N_0,$$

但这与 $N_0 \in \mathscr{N}$ 相矛盾. 于是 $n \notin N_0 \oplus N_2$ 或 $n \notin N_0 \oplus N_3$, 但这又与 N_0 是 $\mathscr{N}$ 的极大元相矛盾. □

定理 12.16 *R 是环, M 是 R 模. 以下命题等价:*

(1) *M 为完全可约模;*

(2) *M 为不可约之子模的直和;*

(3) *M 为不可约之子模的和.*

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 若 $M = 0$, 则定理成立. 设 $M \neq 0$. 则按前一引理 M 有不可约子模. 设 $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 M 所有不可约子模. 在 A 内取子集 S, 要求由 S 所决定的和 $\sum_{\alpha \in S} M_\alpha$ 是子模集 M_α 对于 $\alpha \in S$ 的直和. 由所有有这样性质的 S 所组成的集合记为 $\mathscr{S}$. 此集内上升链的并集仍在 $\mathscr{S}$ 内, 所以集合 $\mathscr{S}$ 满足 Zorn 引理. 从此知 $\mathscr{S}$ 有极大元 S_0. 设

$$M' = \oplus_{\alpha \in S_0} M_\alpha.$$

现在假设 $M = M'$. 否则, 由 M 为完全可约模, 知其有子模 $M'' \neq 0$ 使得 $M = M' \oplus M''$. 则 M'' 有不可约子模 $M_{\alpha'}$ 及

$$\oplus_{\alpha \in S_0} M_\alpha + M_{\alpha'}$$

是直和, 这是与 S_0 是极大元相矛盾. 所以 $M' = M$.

显然 (2) $\Rightarrow$ (3), 余下证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 取 M 的子模 N, 考虑集合

$$\mathscr{P} = \{L : L \text{ 是 } M \text{ 的子模; } L \cap N = 0\}.$$

以 P 记 $\mathscr{P}$ 的极大元, 于是 $N \cap P = 0$, 因此 $N + P$ 是直和. 设 $x \in M$ 及 $x \notin N + P$. 由条件 (3) 有不约子模 M_j 内元素 x_j 使得 $x = x_1 + \cdots + x_r$. 因为 $x \notin N + P$, 必存在 j 使得 $x_j \notin N + P$, 于是 $N + P$ 不包含 M_j, 所以由 M_j 是不可约的便得 $(N + P) \cap M_j = 0$. 但这与 P 是极大元相矛盾, 所以不可能存在这样的 x. 结论是 $M = N \oplus P$. 这证明了 M 为完全可约模. □

定理 12.17 (Maschke 定理) 设 G 为有限群, F 为域, 且 F 的特征 p 不能整除 G 的阶. 则任一 $F[G]$ 模都是完全可约模.

证明 取 $F[G]$ 模 M, 即 M 是域 F 上的有限维向量空间, 并有群表示 $\pi : G \to \mathrm{Aut}_F(M)$.

在 F 向量空间 M 内取子空间 P 使得 $M = N \oplus P$, 于是得 F 线性投射 $\rho : M \to N$. 取平均值

$$\sigma = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\pi(g)\rho\pi(g)^{-1},$$

其中 G 有 n 个元素. 取 $y \in G$, 则 $yG = G$, 于是

$$\pi(y)\sigma\pi(y)^{-1} = \sigma.$$

取 $x \in M$ 和 $g \in G$. 由于 N 是 $F[G]$ 子模, 便知 $\pi(g)\rho\pi(g)^{-1}x \in N$, 这样便得 $\sigma(M) \subseteq N$. 现取 $x \in N$, 则 $\pi(g)^{-1}x \in N$ 且至 N 之投射 ρ 是 N 上的恒等映射, 于是 $\rho\pi(g)^{-1}x = \pi(g)^{-1}x$. 这样便可从 $x \in N$ 推出 $\sigma(x) = x$.

如此得出分解 $M = \sigma M \oplus (1-\sigma)M = N \oplus (1-\sigma)M$, 但按条件 $\pi(y)\sigma = \sigma\pi(y)$ 知 $(1-\sigma)M$ 是 $F[G]$ 子模, 这就证明了 M 是完全可约 $F[G]$ 模. □

12.4 有限群的表示

只有有限个元素的群称为**有限群** (finite group).

12.4.1 矩阵表示

从前节 Maschke 定理可得以下推论.

推论 12.18 设有限群 G 有矩阵表示 $\pi : G \to GL(n, F)$, 且 G 有 $|G|$ 个元素. 假设域 F 的特征 p 不是 $|G|$ 的因子. 则有矩阵 $T \in GL(n, F)$ 使得对任意 $g \in G$

$$T\pi(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & & & 0 \\ & \pi_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi_k(g) \end{pmatrix},$$

其中 π_i 是 G 的不可约表示.

设群 G 在 n 维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V 上有表示 $\pi : G \to GL(V)$. 对应于 V 的基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 可由以下公式定义表示 π 的**矩阵系数** (matrix coefficient) $\pi_{ij}(g)$:

$$\pi(g)e_i = \sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}(g)e_j.$$

称有限群 G 在内积空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的表示 π 为**酉表示** (unitary representation), 如果对任意 $g\in G$ 及 $u,v\in V$ 必有

$$\langle\pi(g)u,\pi(g)v\rangle=\langle u,v\rangle.$$

若 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 V 的**法正交基底** (orthonormal basis), 即 $\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$, 则对应此基底的矩阵系数为**酉矩阵** (unitary matrix)

$$[\overline{\pi_{ji}(g)}]=[\pi_{ij}(g)]^{-1}.$$

定理 12.19 有限群 G 在内积空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的表示 π 必等价于 V 上的酉表示.

证明 设 G 有 N 个元素. 对 $u,v\in V$, 设

$$(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle\pi(g)u,\pi(g)v\rangle.$$

易证 $(\cdot,\cdot)$ 亦为 V 的内积. 取 $h\in G$, 当 g 遍历 G 的元素时, hg 亦遍历 G 的元素, 所以

$$(\pi(h)u,\pi(h)v)=(u,v).$$

取 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的法正交基底 $\{v_1,\cdots,v_n\}$, $(V,(\cdot,\cdot))$ 的法正交基底 $\{u_1,\cdots,u_n\}$. 用 $Tu_i=v_i$ 来定义线性映射 $T:V\to V$. 取 $w=\sum a_iu_i$, $x=\sum b_ju_j$. 则

$$\langle Tw,Tx\rangle=\sum_{i,j}a_i\overline{b_j}\langle Tu_i,Tu_j\rangle=\sum_{i,j}a_i\overline{b_j}=(w,x).$$

于是

$$\begin{aligned}\langle T\pi(g)T^{-1}w,T\pi(g)T^{-1}x\rangle&=\langle\pi(g)T^{-1}w,\pi(g)T^{-1}x\rangle\\&=\langle T^{-1}w,T^{-1}x\rangle=\langle w,x\rangle.\end{aligned}$$

取 $\pi'(g)=T\pi(g)T^{-1}$. 则知 π' 与 π 等价, 并且 π' 为 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的酉表示. □

这个非常有用的定理可以推广至紧拓扑群上. 参见黎景辉, 拓扑群引论, 北京: 科学出版社, 2014.

考虑有 N 个元素的群 G 的不可约表示的所有等价类. 由于有限群的任一表示均同构于酉表示, 固在一等价类中必可取酉表示为代表. 现从 G 的不可约表示的每一个等价类中取一酉表示 $\pi^\mu:G\to GL(V_\mu)$ 为代表, 这样得出集合 $\{\pi^\mu\}$. 在 V_μ 取法正交基底

$$e_\mu=\{e_{\mu,1},\cdots,e_{\mu,n_\mu}\}.$$

对应此基底 π^μ 的矩阵系数为酉矩阵 $[\pi^\mu_{ij}(g)]$.

补充 Schur 引理.

命题 12.20 设有限群 G 在有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V 上有表示 π. 则 π 为不可约表示的充要条件是: 若 T 为表示 π 的缠结算子, 则有复数 λ 使 $T=\lambda\,\mathrm{Id}$, 其中 $\mathrm{Id}: V\to V$ 为恒等映射.

证明 因为有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V 上的线性映射必有特征根. 设 λ 为 π 的缠结算子 T 的特征根. 则有非零特征向量空间

$$V_\lambda=\{v\in V: Tv=\lambda v\}.$$

但是若 $v\in V_\lambda$, 则

$$T\pi(g)v=\pi(g)Tv=\lambda\pi(g)v,$$

即 $\pi(g)(v)\in V_\lambda$, 这样 $\pi(g)(V_\lambda)\subset V_\lambda$. 由于 π 是不可约的, 故 $V_\lambda=V$ 且 $Tv=\lambda v$.

反过来. 设 π 为可约的, 且有子空间 $0\neq V_1\neq V$ 满足 $\pi(G)V_1\subset V_1$. 按 Maschke 定理有满足同样性质的子空间 V_2, 使得 $V=V_1\oplus V_2$. 任一 $v\in V$ 可唯一表示成 $v=v_1+v_2$, $v_j\in V_j$. 可以定义投射算子

$$P: V\to V: v\mapsto v_1,$$

则从 $\pi(g)v_2\in V_2$ 知 $P\pi(g)v=\pi(g)Pv$. 显然 P 并不等于 $\lambda\,\mathrm{Id}$. □

推论 12.21 设 π 和 π' 是有限群 G 在有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间的不可约表示. 若 T 为表示 π 和 π' 的缠结算子, 则有复数 λ 使 $T=\lambda\,\mathrm{Id}$; 若 π 和 π' 不等价, 则 $\lambda=0$.

设群 G 有 N 个元素. 群 G 在有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V 上有表示 π, 在有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V' 上有表示 π'. 取线性映射 $B: V'\to V$. 设

$$A=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\pi(g)B\pi'(g^{-1}).$$

取 $h\in G$, 则

$$\begin{aligned}\pi(h)A&=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\pi(h)\pi(g)B\pi'(g^{-1})\\&=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\pi(hg)B\pi'((hg)^{-1})\pi'(h)\\&=A\pi'(h),\end{aligned}$$

即 A 是 π 和 π' 的缠结算子. 若 π 和 π' 为不可约表示, 则当 π 和 π' 等价时, 有复数 λ 使 $A=\lambda\,\mathrm{Id}$; 当 π 和 π' 不等价时, $A=0$.

如前集合 $\{\pi^\mu\}$ 为群 G 的不可约表示的所有等价类的酉表示代表. 现取 B 为所有的 $n_\mu\times n_\nu$ 复矩阵 $B^{\ell,m}=(B^{\ell,m}_{j,k})$, 其中 $1\leqslant j\leqslant n_\mu$, $1\leqslant k\leqslant n_\nu$,

$$B^{\ell,m}_{j,k}=\begin{cases}1, & \text{若 } j=\ell, k=m,\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

这样以上关于缠结算子 A 的结果可以表达为

$$\sum_{g\in G}\pi^{\mu}_{i\ell}(g)\pi^{\nu}_{ms}(g^{-1})=N\lambda\delta_{\mu\nu}\delta_{is},\quad 1\leqslant i,\ell\leqslant n_\mu,1\leqslant m,s\leqslant n_\nu.$$

非零常数 λ 与 μ,ℓ,m 有关, 与 i,s 无关. 可取 $\mu=\nu$, $s=i$, 然后对 i 求和, 得

$$n_\mu N\lambda=\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n_\mu}\pi^{\mu}_{m,i}(g^{-1})\pi^{\mu}_{i\ell}(g)=\sum_{g\in G}\pi^{\mu}_{m\ell}(1)=N\delta_{m\ell}.$$

因此 $\lambda=\delta_{m\ell}n_\mu^{-1}$.

下一步用上 $(\pi^{\nu}_{ms}(g))$ 为酉矩阵, 于是得出不可约酉表示矩阵系数的**正交性关系** (orthogonality relation)

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\pi^{\mu}_{i\ell}(g)\overline{\pi^{\nu}_{sm}(g)}=\frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{is}\delta_{\ell m}.$$

12.4.2 函数环

研究群结构的一个重要工具是由定义在群上的函数所组成的环. 有限群 G 的情况是比较简单直接的. 我们把复群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的元素看作 G 上的函数: 把

$$x=\sum_{g\in G}x(g)\cdot g\in\mathbb{C}[G],\quad x(g)\in\mathbb{C}$$

看作函数

$$x:G\to\mathbb{C}:g\mapsto x(g).$$

如此向量空间 $\mathbb{C}[G]$ 的加法与数乘便对应为函数的加法 $(x+y)(g)=x(g)+y(g)$ 与数乘 $(ax)(g)=a(x(g))$, 但代数 $\mathbb{C}[G]$ 的乘法 xy 变为函数的**卷积** (convolution product):

$$(xy)(g)=\sum_{h\in G}x(h)y(h^{-1}g),$$

这样我们把 $\mathbb{C}[G]$ 看作函数环.

因此当我们把 G 的元素 h 看作 $\mathbb{C}[G]$ 的元素 $1\cdot h$ $(1\in\mathbb{C})$ 时, h 便对应为以下的函数

$$h(g)=\begin{cases}1, & \text{若 } g=h,\\ 0, & \text{若 } g\neq h,\end{cases}$$

由此可见函数 $h:G\to\mathbb{C}$, $h\in G$ 为向量空间 $\mathbb{C}[G]$ 的基底. 于是若 G 有 N 个元素, 则 $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[G]=N$.

群 G 在复群代数 $\mathbb{C}[G]$ 有一个很自然的表示 $R:G\to GL(\mathbb{C}[G])$:

$$R(g)x=xg^{-1},\quad g\in G,x\in\mathbb{C}[G].$$

取 $x=\sum_{g\in G}x(g)g\in\mathbb{C}[G]$. 设 $h\in G$. 则

$$R(h)x=xh^{-1}=\sum_{g\in G}x(g)gh^{-1}=\sum_{g\in G}x(gh)g.$$

现把 $R(h)x$ 看作 G 上的函数: 我们要从表达式 $R(h)x=\sum_{g\in G}[R(h)x](g)g$ 得出函数 $R(h)x$ 在点 g 的取值 $[R(h)x](g)$. 与前面公式比较便知

$$[R(h)x](g)=x(gh).$$

称 R 为 G 的**右正则表示** (right regular representation), 这是群表示论的一个重要的表示. 当 G 是拓扑群时, 可参见黎景辉, 拓扑群引论, 北京: 科学出版社, 2014.

若 G 有 N 个元素, 则在 $\mathbb{C}[G]$ 上引入内积

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}x(g)\overline{y(g)},\quad x,y\in\mathbb{C}[G],$$

对应于此内积右正则表示为酉表示.

群 G 的一个表示的矩阵系数是 G 的函数, 所以是 $\mathbb{C}[G]$ 的元素. 如前集合 $\{\pi^\mu\, 1\leqslant\mu\leqslant\alpha\}$ 为群 G 的不可约表示的所有等价类的酉表示代表. 设 $\phi^\mu_{ij}(g)=\sqrt{n_\mu}\pi^\mu_{ij}(g)$. 使用以上内积, 按不可约酉表示矩阵系数的正交性关系, 当取遍 G 的所有不可约表示的等价类时, 集合 $\{\phi^\mu_{ij}\}$ 为 $\mathbb{C}[G]$ 的一个法正交函数集合. 从 N 个元素的群 G 所得的 $\mathbb{C}[G]$ 是 N 维复向量空间, 于是 $\mathbb{C}[G]$ 的任一个法正交集合不能有超过 N 个的元素, 故得以下定理.

定理 12.22 除等价外有限群只有有限个不可约表示.

可设 $1\leqslant\mu\leqslant\alpha<\infty$. 因为对固定的 μ, 集合 $\{\phi^\mu_{ij}\}$ 有 n_μ^2 个元素, 于是

$$n_1^2+\cdots+n_\mu^2\leqslant N.$$

由 $\{\phi^\mu_{ij}:1\leqslant i,j\leqslant n_\mu;1\leqslant\mu\leqslant\alpha\}$ 生成的 $\mathbb{C}[G]$ 的子空间记为 V, 右正则表示为酉表示, 所以 $\mathbb{C}[G]=V\oplus V^\perp$ 和 $R(V^\perp)\subseteq V^\perp$. 若 $V^\perp\neq 0$, 则有在 R 作用下的不变子空间 $W\subseteq V^\perp$, 但 W 必等价于某一个 π^ν, 于是 W 有法正交基底 $x_1,\cdots,x_{n_\nu}$, 并且

$$(R(g)x_i)(h)=x_i(hg)=\sum_j\pi^\nu_{ji}(g)x_j(h).$$

取 $h=1$,

$$x_i(g)=\sum_j\pi^\nu_{ji}(g)x_j(1)=\sum_j\frac{x_j(1)}{\sqrt{n_\nu}}\phi^\nu_{ji}(g),$$

从此得 $x_i\in V$. 这告诉我们 $W\subseteq V\cap V^\perp=0$. 结论是: $\{\phi^\mu_{ij}\}$ 生成 $\mathbb{C}[G]$ 并是 $\mathbb{C}[G]$ 的法正交基底.

固定 μ 和 i, 则 $\{\phi_{ij}^{\mu} : 1 \leqslant j \leqslant n_\mu\}$ 是它所生成的 $\mathbb{C}[G]$ 的子空间 V_i^μ 的法正交基底. $R(g)(V_i^\mu) \subseteq V_i^\mu$ 并且 R 在 V_i^μ 上的表示等价于 π^μ. 显然

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\substack{1\leqslant\mu\leqslant\alpha \\ 1\leqslant i\leqslant n_\mu}} V_i^\mu.$$

以上讨论得出如下定理.

定理 12.23 (1) $\mathbb{C}[G]$ 的任一元素 x 可用矩阵系数唯一地表示为

$$x(g) = \sum_{i,j,\mu} a_{ij}^\mu \phi_{ij}^\mu(g),$$

其中 $a_{ij}^\mu = \langle x, \phi_{ij}^\mu \rangle$.

(2) $n_1^2 + \cdots + n_\mu^2 = N$.

(3) $R = \oplus_{\mu=1}^{\alpha} n_\mu \pi^\mu$.

设有限群 G 在 n 维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V 上有表示 π. 在 V 内取基底 $e = \{e_1, \cdots\}$, 则有同构 $V \cong \mathbb{C}^n$. 通过这同构 π 决定矩阵表示 $\pi_e : G \to GL_n(\mathbb{C})$. 在 V 内另取基底 $e' = \{e'_1, \cdots\}$, 则有可逆矩阵 T 使得 $\pi_{e'}(g) = T\pi_e(g)T^{-1}$, $g \in G$.

矩阵 $A = (a_{ij})$ 的**迹** (trace) 定义为 $\mathrm{Tr}\, A = \sum_i a_{ii}$. 若矩阵 T 可逆, 则 $\mathrm{Tr}\,(TAT^{-1}) = \mathrm{Tr}\, A$. 所以从表示 $\pi : G \to GL(V)$ 便可决定与基底 e 的选取无关的函数

$$\chi^\pi(g) = \mathrm{Tr}\, \pi_e(g),$$

称 χ^π 为 π 的**特征标** (character).

如前集合 $\{\pi^\mu : 1 \leqslant \mu \leqslant \alpha\}$ 为群 G 的不可约表示的所有等价类的酉表示代表. 记 π^μ 的特征标为 χ^μ, 从矩阵系数正交性关系得

$$\sum_{g\in G} \chi^\mu(g)\chi^\nu(g^{-1}) = N\delta_{\mu\nu}.$$

把 χ^μ 看作 $\mathbb{C}[G]$ 的元素, 并用 $\mathbb{C}[G]$ 的内积来表示上式为特征标正交关系式

$$\langle \chi^\mu, \chi^\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}.$$

按 Maschke 定理有限群 G 的任一表示 π 均可以表示为不可约表示的直和, 即 $\pi = \oplus_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu(\pi)\pi^\mu$, $m_\mu(\pi) \geqslant 0$ 称为 π 的**重数** (multiplicity). 于是有对应的等式

$$\chi^\pi = \sum_{\mu=1}^{\alpha} m_\mu(\pi)\chi^\mu,$$

并且 $m_\mu(\pi) = \langle \chi^\pi, \chi^\mu \rangle$. 显然 $m_\mu(\pi) = m_\mu(\pi')$, 则 π 与 π' 等价. 于是从以上公式便推出如下定理.

定理 12.24 若 $\chi^\pi = \chi^{\pi'}$, 则 π 与 π' 等价.

若函数 $\psi : G \to \mathbb{C}$ 满足条件

$$\psi(hgh^{-1}) = \psi(g), \quad g, h \in G,$$

则称 ψ 为 G 上的**类函数** (class function). 以 $\mathcal{F}$ 记由 G 上的所有类函数生成的复向量空间, $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{C}[G]$ 的子空间. 设有限群 G 有 c 个**共轭类** (conjugacy class). 则 $\psi \in \mathcal{F}$ 由 ψ 在 c 个共轭类所取之值决定, 即 ψ 由 c 个复数决定, 所以 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = c$.

另一方面, 以 $\mathcal{E}$ 记由法正交集 $\{\chi^\mu : 1 \leqslant \mu \leqslant \alpha\}$ 生成的复向量空间, 则 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

现取 $\psi \in \mathcal{F} \subset \mathbb{C}[G]$, 用矩阵系数表示

$$\psi(g) = \sum_{i,j,\mu} a^\mu_{ij} \pi^\mu_{ij}(g).$$

设群 G 有 N 个元素.

$$\begin{aligned}
\psi(g) &= \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \psi(hgh^{-1}) \\
&= \frac{1}{N} \sum a^\mu_{ij} \pi^\mu_{i\ell}(h) \pi^\mu_{\ell m}(g) \pi^\mu_{mj}(h^{-1}) \\
&= \sum a^\mu_{ij} \pi^\mu_{\ell m}(g) \langle \pi^\mu_{i\ell}, \pi^\mu_{mj} \rangle \\
&= \sum_{i,\mu} \frac{a^\mu_{ii}}{n_\mu} \chi^\mu(g).
\end{aligned}$$

这就证明了 $\psi \in \mathcal{E}$, 于是 $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, 所以 $c = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E} = \alpha$. 由此得如下定理.

定理 12.25 有限群 G 的不可约表示等价类的个数等于 G 的共轭类的个数.

12.4.3 表示的张量积

我们利用张量积构造新的表示.

设 $(V, \pi), (V', \pi')$ 是群 G 的两个表示. 令

$$\pi \otimes \pi' : G \to GL(V \otimes V')$$

为如下映射: $(\pi \otimes \pi')(g) = \pi(g) \otimes \pi'(g), \forall g \in G$. 容易验证 $\pi \otimes \pi'$ 是群同态:

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \pi')(g_1 \cdot g_2) &= \pi(g_1 \cdot g_2) \otimes \pi'(g_1 \cdot g_2) \\
&= (\pi(g_1) \cdot \pi(g_2)) \otimes (\pi'(g_1) \cdot \pi'(g_2)) \\
&= (\pi(g_1) \otimes \pi'(g_1)) \cdot (\pi(g_2) \otimes \pi'(g_2)) \\
&= (\pi \otimes \pi')(g_1) \cdot (\pi \otimes \pi')(g_2),
\end{aligned}$$

从而 $(V\otimes V',\pi\otimes\pi')$ 是群 G 的表示, 我们称其为表示 π 与表示 π' 的张量积.

取 V 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, V' 的基 $\{e'_1,\cdots,e'_n\}$. 则 $\{e_i\otimes e'_j\}$ 为 $V\otimes V'$ 的基. 对应此基 $\pi\otimes\pi'$ 的矩阵系数按如下决定:

$$\begin{aligned}(\pi\times\pi')(g)(e_i\otimes e'_j)&=\pi(g)e_i\otimes\pi'(g)e'_j\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n'}\pi_{\ell i}(g)\pi'_{kj}(g)e_\ell\otimes e'_k.\end{aligned}$$

以 $[\pi(g)]$ 记矩阵 $(\pi_{ij}(g))$. 则按矩阵的张量积有 $[\pi\otimes\pi'(g)]=[\pi(g)]\otimes[\pi'(g)]$.

集合 $\{\pi^\mu:1\leqslant\mu\leqslant\alpha\}$ 为群 G 的不可约表示的所有等价类的代表.

表示 $\pi^\mu\otimes\pi^\nu$ 可以表为直和

$$\pi^\mu\otimes\pi^\nu=\oplus_{\xi=1}^{\alpha}m_\xi\pi^\xi.$$

在 $V_\mu\otimes V_\nu$ 有基底 $w=\{w_\ell^{\xi,s}\}$, $1\leqslant\xi\leqslant\alpha$, $1\leqslant s\leqslant m_\xi$, $1\leqslant\ell\leqslant n_\xi$, 使得当固定 ξ 和 s 时, 由 $\{w_1^{\xi,s},\cdots,w_{n_\xi}^{\xi,s}\}$ 所生成的子空间 $W^{\xi,s}$ 在 $\pi^\mu\otimes\pi^\nu$ 的作用下不变, 且等价于 π^ξ. 这样对应于基底 $w=\{w_\ell^{\xi,s}\}$, $\pi^\mu\otimes\pi^\nu$ 的矩阵是对角方块矩阵

$$\begin{pmatrix}\pi^1(g)&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&\\&&\pi^1(g)&&&&&&&\\&&&\pi^2(g)&&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&\pi^2(g)&&&&\\&&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&&\pi^\alpha(g)&&\\&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&\pi^\alpha(g)\end{pmatrix},$$

其中 $\pi^i(g)$ 重复 m_i 次.

在 (V_ξ,π^ξ) 取基底

$$e_\xi=\{e_{\xi,1},\cdots,e_{\xi,n_\xi}\}.$$

$V_\mu\otimes V_\nu$ 的基底 $\{e_{\mu,i}\otimes e_{\nu,j}\}$ 和 $w=\{w_\ell^{\xi,s}\}$ 可以相互表达

$$w_\ell^{\xi,s}=\sum_{i,j}(\mu i,\nu j|\xi s\ell)e_{\mu,i}\otimes e_{\nu,j}$$

和

$$e_{\mu,i}\otimes e_{\nu,j}=\sum_{\xi,k,\ell}(\xi s\ell|\mu i,\nu j)w_j^{\xi,s}.$$

称 $(\mu i,\nu j|\xi s\ell)$ 为 Clebsch-Gordan 系数.

12.4.4 诱导表示和限制表示

设 H 为有限群 G 的子群, $\rho: H \to GL(W)$ 为 H 在 F 向量空间 W 的表示, 即 W 是 $F[H]$ 模. 请留意 $F[G]$ 同时是左 $F[G]$ 模和右 $F[H]$ 模, 取张量积后, $F[G] \otimes_{F[H]} W$ 是左 $F[G]$ 模, 或等价地说, 是 G 在 F 向量空间 $F[G] \otimes_{F[H]} W$ 的表示. 我们称这个 G 的表示为从 ρ 所得的**诱导表示** (induced representation), 并记此表示为 $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ 或 $\mathrm{Ind}_H^G(W)$.

取 W 的基 $w_1, \cdots, w_r$. 我们以 $\{g \otimes w_i : g \in G, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ 为符号在 F 上生成的向量空间记为 V. 设 $\rho(h)(w_i) = \sum_j \rho(h)_{ji} w_j$. 由以下向量

$$gh \otimes w_i - \sum_{j=1}^{T} \rho(h)_{ji} g \otimes w_j, \quad h \in H, g \in G$$

在 V 内生成的子空间记为 U. 则 $F[G] \otimes_{F[H]} W \cong V/U$.

对应于每一个 $g \in G$ 取一份 W, 并记它为 $g \otimes W$. 做和 $X = \sum_{g \in G} g \otimes W$. 设 Y 是 X 内由以下向量所生成的子空间

$$\{gh \otimes w - g \otimes \rho(h)(w), h \in H\}.$$

则亦可证明 $F[G] \otimes_{F[H]} W \cong X/Y$. 此时 G 在 $F[G] \otimes_{F[H]} W$ 上的左作用由以下公式算出

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)(g' \otimes w) = \sum_{g \in G} gg' \otimes a_g w.$$

进一步, 取左陪集分解

$$G = g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_t H,$$

其中 t 是 G/H 的元素个数. 常以 $[G:H]$ 记 t, 这样 $F[G]$ 的任一元素可唯一表示为 $\sum_1^T g_i r_i$, 其中 $r_i \in F[H]$. 从此得知 $F[G]$ 是自由右 $F[H]$ 模, 可见

$$F[G] = g_1 F[H] \oplus \cdots \oplus g_t F[H],$$

及

$$\begin{aligned} F[G] \otimes_{F[H]} W &\cong g_1 F[H] \otimes_{F[H]} W \oplus \cdots \oplus g_t F[H] \otimes_{F[H]} W \\ &\cong g_1 \otimes W \oplus \cdots \oplus g_t \otimes W. \end{aligned}$$

易证

$$\dim_F(\mathrm{Ind}_H^G(\rho)) = [G:H] \dim_F(\rho).$$

表示 $\pi : G \to GL(V)$ 的**逆步表示** (contragredient representation) 是指 $\hat{\pi} : G \to \hat{V}$, 其中 $\hat{V} = \mathrm{Hom}(V, F)$, 且对 $g \in G$, $v \in V$, $f \in \hat{V}$,

$$\hat{\pi}(g)(f)(v) = f(\pi(g^{-1})v).$$

现取 G 的子群 H, 把 π 限制到 H 所得的 H 的表示记为 $\mathrm{Res}_H^G(\pi)$ 或 $\mathrm{Res}_H^G(V)$.

定理 12.26 设 H 是有限群 G 的子群, G 有表示在 F 向量空间 V, H 有表示在 F 向量空间 W. 则

(1) $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(W), V) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G(V))$,
(2) $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Hom}(W, F)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G(W), F)$ 作为 G 表示,
(3) $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G(W)) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(V), W)$,
(4) $\mathrm{Ind}_H^G(W \otimes \mathrm{Res}_H^G(V)) \cong \mathrm{Ind}_H^G(W) \otimes V$ 作为 G 同构.

证明 (1) 设 $G = \cup_1^T g_i H$. 则 $\mathrm{Ind}_H^G W$ 是 $\sum_1^T g_i \otimes W$. 可以假设 g_1 是 1. 在 $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(W), V)$ 中取 f, 考虑它的限制 $f \mid g_1 \otimes W : 1 \otimes W \cong W \to V$. 因为

$$\begin{aligned} f(h \cdot w) &= f(1 \otimes h \cdot w) = f(h(1 \otimes w)) \\ &= h \cdot (f(1 \otimes w)) = h \cdot f(w), \end{aligned}$$

所以 $f \mid g_1 \otimes W \in \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G(V))$. 由于 $f(g_i \otimes w) = g_i(f(1 \otimes w))$, 所以得出单射. 再从两边的维数得知此仍同构.

(2) 定义映射

$$\Phi : \mathrm{Hom}(W, F) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G(W), F)$$

为 $\Phi(f)(g_i \otimes w) = f(w)$, 若 $i = 1$; 其他情形为零. Φ 是 H 单射. 这样由 (1) 得 G 单射

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Hom}(W, F) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G(W), F).$$

由维数得知此仍同构.

(3) 可从 (1) 及 (2) 推出:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G(W)) &\cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_H^G(W), F), \hat{V}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(\hat{W}, \hat{V}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_H(\hat{W}, \mathrm{Res}_H^G(\hat{V})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_H(V, W). \end{aligned}$$

(4) 取 $h \in H$, $w \in W$ 及 $v \in V$ 有

$$(g_i h^{-1} \otimes hw) \otimes g_i h^{-1} hwv = g_i \otimes w \otimes g_i v.$$

若设 $\Psi(g_i \otimes w \otimes v) = (g_i \otimes w) \otimes g_i v$, 则得出 $\Psi(g_i h^{-1} \otimes hw \otimes hv) = \Psi(g_i \otimes w \otimes v)$. 这样便得映射

$$\Psi : \mathrm{Ind}_H^G(W \otimes \mathrm{Res}_H^G(V)) \to \mathrm{Ind}_H^G(W) \otimes V.$$

可以证明 Ψ 是 G 映射, 即有

$$g(\Psi(g_i \otimes w \otimes v)) = \Psi(gg_i \otimes w \otimes v).$$

现设

$$\Phi((g_i \otimes w) \otimes v) = g_i \otimes w \otimes g_i^{-1} v.$$

则 Ψ 与 Φ 互为逆射. □

常称以上定理 (3) 或 (4) 中的同构为 **Frobenius 互反律** (Frobenius reciprocity).

设有表示 $\pi : G \to GL(V)$ 及 $\eta : H \hookrightarrow G$ 为包含群同态. 则限制表示 $\mathrm{Res}_H^G(\pi)$ 实为 $\pi \circ \eta$, 这个想法当然可以推广一点.

给定群同态 $\eta : G_1 \to G_2$ 和 G_2 的表示 $\pi : G_2 \to GL(V)$. 可知, 其复合 $\rho = \pi \circ \eta : G_1 \to GL(V)$ 是 G_1 的一个表示, 并称此表示为 π 通过 η 的**提升** (lifting).

12.5 对称群的表示

这一节介绍对称群的表示理论, 目的是找出对称群的全体不可约表示.

12.5.1 杨表

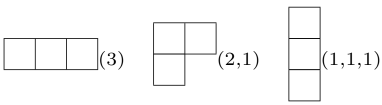
首先, 我们回顾一下对称群的性质. 事实上, 在对称群内, 任一置换皆可以分解为若干个互不相交的轮换的乘积. 例如: $\mathscr{S}_5$ 的元素 (12)(345) 是两个轮换 (12) 和 (345) 的乘积. 称元素 (12)(345) 的轮换类型为 $\langle 2, 3 \rangle$. 注意, 对称群的共轭类是由轮换类型来确定的. 两个置换是共轭的当且仅当它们有相同的轮换类型.

定义 12.27 给定一正整数 n, 我们称 n 的一个**分划** (partition) 是一列正整数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$, 其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l$ 且 $n = \sum_i \lambda_i$, 并记作 $\lambda \vdash n$.

例如 $(1, 1, 1, 2, 3, 3)$ 是 11 的一个分划, 常记为 $(1^3, 2, 3^2)$.

定义 12.28 λ **杨图** (Young diagram) 由方格组成. 对任一分划 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$, 其相关的 λ 杨图由 l 列方格所组成, 其中第 i 列有 λ_i 个方格.

以 $n = 3$ 为例, 其分划所对应的杨图如下:



定义 12.29 设有 n 的分划 λ. 在 λ 所决定的杨图的每一个方格填入数字 $1, 2, \cdots, n$, 并且要求不能重复, 称此为 λ **杨表** (Young tableau), 或简称为 λ 表.

例 12.30 以下为分划 $(2, 1)$ 的所有杨表:

$$\begin{ytableau} 2 & 1 \\ 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 2 & 3 \\ 1 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 1 \\ 2 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 3 & 2 \\ 1 \end{ytableau}$$

定义 12.31 给定一杨表, 若表中的方格内的数字在列和行中均递增的话, 或换句话说, 从左到右和从上到下数字是递增的话, 称该杨表为**标准杨表** (standard Young tableau).

例 12.32 对于分划 $\lambda = (2, 1)$, 其标准杨表只有两种, 分别是

$$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}$$

定义 12.33 给定 λ 表 t_1, t_2, 称它们是**行等价**的, 若它们中的每一行所含有的数字皆相同. 以 $t_1 \sim t_2$ 记行等价. 用这个等价关系构造出的等价类记为 $\{t\} = \{t_1 : t_1 \sim t\}$, 称这等价类为 λ **表类** (tabloid).

例 12.34 如果 $t = \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau}$, 那么 $\{t\}$ 包含 4 个元素

$$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{ytableau}$$

我们记此例的表类 $\{t\}$ 为

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}\right\}.$$

12.5.2 模 M^λ

对称群 $\mathscr{S}_n$ 上的元素是集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的双射. 设有 n 的分划 λ, 取 $\sigma \in \mathscr{S}_n$. 则 σ 把 λ 表 t 中的数字进行置换, 这样便得 $\sigma(t)$.

例如, 轮换 $(124) \in \mathscr{S}_4$ 的作用

$$(124)\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau} = \begin{ytableau} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{ytableau}$$

例如,

$$(174)(25)\begin{ytableau} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 \end{ytableau} = \begin{ytableau} 7 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 \end{ytableau}$$

同理, 容易验证利用公式 $\sigma(\{t\}) = \{\sigma(t)\}$ 得知 $\mathscr{S}_n$ 作用在由 λ 表类所组成的集合上.

定义 12.35 设有 n 的分划 λ. 用所有 λ 表类作为基底所生成的 $\mathbb{C}$ 向量空间记为 M^λ.

利用以上所说的 $\mathscr{S}_n$ 在 λ 表类的作用得知 M^λ 为 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 模, 即有对称群 $\mathscr{S}_n$ 的表示 M^λ.

例 12.36 考虑 $\lambda=(n)$, M^λ 只由一个元素 $\{12\cdots n\}$ 所生成. 显然, 这是 $\mathscr{S}_n$ 的一维平凡表示.

例 12.37 若 $\lambda=(n-1,1)$. 以 t_i 记对应第二列方格内数字为 i 的 λ 表. 则 M^λ 的基的元素为 λ 表类 $\{t_1\},\{t_2\},\cdots,\{t_n\}$.

取 $\sigma\in\mathscr{S}_n$. 则 $\sigma(t_i)=t_{\sigma(i)}$. 于是得知表示 $M^{(n-1,1)}$ 同构于 $\mathbb{C}\langle\vec{1},\vec{2},\cdots,\vec{n}\rangle$, 即 $\mathscr{S}_n$ 的标准表示: $\sigma(\vec{i})=\overrightarrow{\sigma(i)}$.

以 $n=3$ 为例, $M^{(2,1)}$ 的基底为 $\{t_1\},\{t_2\},\{t_3\}$, 且

$$t_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\quad t_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad t_3=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

定义 12.38 设有 n 的分划 λ, 取 λ 表 t. 若 $c_1,\cdots,c_k$ 为 t 的列, 则设 t 的**列群** (column group) 为 $\mathscr{S}_n$ 的子群

$$C_t=\mathscr{S}_{c_1}\times\cdots\times\mathscr{S}_{c_k},$$

即 C_t 的元素是 $\mathscr{S}_n$ 的元素 σ 使 σ 只置换 t 同一列的元素.

类似地, 记 t 的**行群** (row group) 为 R_t, 其群元素只置换表 t 中同一行的元素.

例 12.39 若

$$t=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&3&2\\\hline 6&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

则有

$$R_t=\mathscr{S}_{\{1,2,3,4\}}\times\mathscr{S}_{\{5,6\}},\quad C_t=\mathscr{S}_{\{4,6\}}\times\mathscr{S}_{\{1,5\}}\times\mathscr{S}_{\{3\}}\times\mathscr{S}_{\{2\}}.$$

定义 12.40 设有 n 的分划 λ, 取 λ 表 t. 引入 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 的元素

$$\kappa_t=\sum_{\sigma\in C_t}\delta(\sigma)\sigma,$$

这里, $\delta(\pi)=(-1)^{\mathrm{sgn}(\pi)}$ 为 π 的奇偶性, 它的取值规则如下: 若 π 进行了奇次列置换, 取值为 -1; 相反, 若 π 进行了偶次列置换, 取值为 1.

定义杨表 t 的**多表类** (polytabloid) e_t 为 M^λ 的元素 $e_t=\kappa_t(\{t\})$.

显然对置换 σ 有 $e_{\sigma t}=\sigma e_t$.

例 12.41 如果 $t=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&3&2\\\hline 6&5\\\cline{1-2}\end{array}$, 可知

$$e_t=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&1&3&2\\\hline 6&5\\\cline{1-2}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&1&3&2\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&5&3&2\\\hline 6&1\\\cline{1-2}\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&5&3&2\\\hline 4&1\\\cline{1-2}\end{array}$$

设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ 为整数 n 的分划. 若对所有 $i\geqslant 1$

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_i\geqslant \mu_1+\cdots+\mu_i,$$

则记 $\lambda\trianglerighteq\mu$. 在以上的不等式中: 若 $i>\ell$, 则取 $\lambda_i=0$; 若 $i>m$, 则取 $\mu_i=0$.

例如, 若 $n=6$, $\lambda=(3,3)$, $\mu=(1,1,2,2)$, 则 $\lambda\trianglerighteq\mu$.

引理 12.42 设 λ,μ 为整数 n 的分划.

(1) 若有 λ 表 t 和 μ 表 s 使得 s 的每一行元素是分布在 t 的不同列中, 则 $\lambda\trianglerighteq\mu$.

(2) 设 H 为 $\mathscr{S}_n$ 的子群. 定义

$$\sigma_H=\sum_{\pi\in H}\delta(\pi)\pi.$$

取 $\eta\in H$, 则 $\eta\sigma_H=\sigma_H\eta=\delta(\eta)\sigma_H$.

(3) 若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 M^λ 上的 $\mathscr{S}_n$ **不变内积**, 即对 $u,v\in M^\lambda$, $\pi\in\mathscr{S}_n$ 有

$$\langle\pi u,\pi v\rangle=\langle u,v\rangle,$$

则 $\langle\sigma_H u,v\rangle=\langle u,\sigma_H v\rangle$.

(4) 若转置 $(b,c)\in H$, 则有因子分解

$$\sigma_H=g(1-(b,c)),\quad g\in\mathbb{C}[\mathscr{S}_n].$$

(5) 设整数 b 和 c 同属于杨表 t 的同一行, 并且转置 $(b,c)\in H$. 则在 M^λ 内有 $\sigma_H(\{t\})=0$.

(6) 设有 λ 表 t 和 μ 表 s. 若 $\kappa_t\{s\}\neq 0$, 则 $\lambda\trianglerighteq\mu$; 若 $\lambda=\mu$, 则 $\kappa_t\{s\}=\pm e_t$.

(7) 设有 λ 表 t 和 $u\in M^\lambda$. 则有常数 a 使得 $\kappa_t u=ae_t$.

证明 (1)

$$\begin{aligned}\lambda_1+\cdots+\lambda_i&=t\ \text{的前}\ i\ \text{行的元素个数的总和}\\&\geqslant\ \text{在}\ t\ \text{的前}\ i\ \text{行中属于}\ s\ \text{的元素的个数的总和}\\&=\mu_1+\cdots+\mu_i.\end{aligned}$$

(2) $\eta\sum\delta(\pi)\pi=\delta(\eta^{-1})\sum\delta(\eta\pi)\eta\pi$.

(3) $\sum_{\pi\in H}\langle(\delta(\pi))\pi u,v\rangle=\sum_{\pi\in H}\langle u,(\mathrm{sgn}(\pi))\pi^{-1}v\rangle$.

(4) 1 和 (b,c) 生成 H 的子群记为 K, 取陪集分解 $H=\sqcup_i h_iK$. 则

$$\sigma_H=\left(\sum_i\delta(h_i)h_i\right)(1-(b,c)).$$

(5) 由表类 $\{t\}$ 的定义及假定知 $(b,c)\{t\}=\{t\}$. 于是

$$\sigma_H\{t\}=g(1-(b,c))\{t\}=g(\{t\}-\{t\})=0.$$

(6) 若有 b, c 在 s 的同一行, 但同时又在 t 的同一列, 则按本引理之 (4) 和 (5) 有 $\kappa_t = g(1-(b,c))$ 和 $\kappa_t\{s\} = 0$. 由假设知满足本引理之 (1), 得 $\lambda \rhd \mu$.

若 $\lambda = \mu$, 则同本引理之 (1) 的证明一样, 有 $\pi \in C_t$ 使 $\{s\} = \pi\{t\}$. 这样

$$\kappa_t\{s\} = \kappa_t \pi\{t\} = (\delta(\pi))\kappa_t\{t\} = \pm e_t.$$

(7) $u = \sum_i a_i\{t_i\}$, t_i 为 λ 表. 按本引理之 (6) 得 $\kappa_t u = \sum_i \pm a_i e_t$. □

12.5.3 模 S^λ

定义 12.43 设有 n 的分划 λ. 使 t 取遍所有 λ 表所得出的多表类 e_t 在 M^λ 内生成子模, 记此为 S^λ.

由于对任意 $\pi \in \mathscr{S}_n$ 有 $e_{\pi t} = \pi e_t$, 可知 S^λ 为循环 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 模, 任一多表类均生成 S^λ.

引理 12.44 设 λ, μ 为整数 n 的分划. 设有 $0 \neq \theta \in \mathrm{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$. 则 $\lambda \rhd \mu$. 若有 $\lambda = \mu$, 则 $\theta = c\,\mathrm{Id}$, c 为常数.

证明 从 $0 \neq \theta$ 知有基底向量 e_t 使 $\theta(e_t) \neq 0$. 利用 $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$, 可设 $\theta((S^\lambda)^\perp) = 0$, 于是得 $\theta \in \mathrm{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$. 这样

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(\kappa_t\{t\}) = \kappa_t\theta\{t\} = \kappa_t\left(\sum c_i\{s_i\}\right),$$

其中 s_i 是 μ 表. 按上小节最后引理之 (6), 得 $\lambda \rhd \mu$. □

定理 12.45 (子模定理) 设 U 为 M^μ 的子模. 则 $U \supseteq S^\mu$ 或 $U \subseteq (S^\mu)^\perp$.

证明 考虑 $u \in U$ 和 μ 表 t. 按之前引理 $\kappa_t u = c e_t$, c 为常数.

设有 u 和 t 使 $c \neq 0$, 由 $u \in U$ 得 $ce_t = \kappa_t u \in U$, 于是 $e_t \in U$. 因为 S^μ 是循环 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 模, 所以 $S^\mu \subset U$.

另一方面, 若都是 $\kappa_t u = 0$, 取 $u \in U$, 取任一 μ 表 t, 按上小节最后引理之 (3), 得

$$\langle u, e_t\rangle = \langle u, \kappa_t\{t\}\rangle = \langle \kappa_t u, \{t\}\rangle = \langle 0, \{t\}\rangle = 0.$$

由于 S^μ 由 e_t 生成, 便得 $u \in (S^\mu)^\perp$, 所以 $U \subseteq (S^\mu)^\perp$. □

定理 12.46 取 n 的所有分划 λ 得出的 S^λ 便是 $\mathscr{S}_n$ 全体在 $\mathbb{C}$ 上的不可约表示.

证明 设 $0 \neq U$ 为 S^λ 的 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 子模. 则 U 亦为 M^λ 的子模. 于是按子模定理 $U \supseteq S^\lambda$ 或 $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$, 但在 $\mathbb{C}$ 上 $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$, 从 $U \subseteq S^\lambda$ 知不可能有 $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$. 于是 $U = S^\lambda$, 这证得 S^λ 为不可约 $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ 模.

设 λ, μ 为整数 n 的分划, 并且 $S^\lambda \cong S^\mu$, 这就有 $0 \neq \theta \in \mathrm{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$, 所以 $\lambda \rhd \mu$. 同样可证 $\mu \rhd \lambda$, 于是 $\lambda = \mu$, 这样 $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ 内的元素各不同构. 这个集合的元素个

数就是 n 的分划个数, 但这个数字正是 $\mathscr{S}_n$ 的共轭类的个数, 且又是 $\mathscr{S}_n$ 的不可约模同构类的个数, 于是 $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ 是 $\mathscr{S}_n$ 全体在 $\mathbb{C}$ 上的不可约表示. $\square$

现在看一些例子.

例 12.47 若 $\lambda = (n)$. 立知只有一种多表类, 即

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}$$

由于这个多项表被 S_n 所固定, 从而 $S^{(n)}$ 为一维平凡表示.

例 12.48 考察 $\lambda = (1^n) = (1, 1, \cdots, 1)$. 令

$$t = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$$

我们知道, e_t 是取全体 λ 表类乘上其对应的 sgn 的值求和所得的. 易见, 若 k 为某一 λ 表, 根据其之间的置换次数的奇偶性, 只有两种可能, 即 $e_t = e_k$ 或 $e_t = -e_k$. 立知 S^λ 为一维表示. 由 $e_{\pi t} = \pi e_t$, 可知 $S^{(1^n)}$ 为符号表示.

例 12.49 考察 $\lambda = (n-1, 1)$, 由例 12.37, 我们用 $\{t_i\}$ 记第二列方格内数字为 i 所对应的 λ 表类, 可知多表类皆形如 $\{t_i\} - \{t_j\}$. 事实上, 由杨表

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline i & a & b & \cdots \\ \hline j \\ \cline{1-1}\end{array}$$

所构成的多表类是

$$\{t_i\} - \{t_j\}.$$

把表类 $\{t_i\}$ 记作 v_i, 那么 S^λ 是由形如 $v_i - v_j$ 的元素所生成的, 从而

$$S^{(n-1,1)} = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n | \sum_{i=1}^{n} c_i = 0\}.$$

易见, $S^{(n-1,1)}$ 为不可约表示, 并称为**标准表示** (standard representation). 回忆一下, 模 $M^{(n-1,1)}$ 表示空间的结构, 可知它实为平凡表示和标准表示的直和, 即

$$M^{(n-1,1)} = S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n)}.$$

习　题

1. 设 G_1, G_2 为有限群, F 为域. 证明:

$$F[G_1 \times G_2] \cong F[G_1] \otimes_F F[G_2]$$

为 F 代数同构.

2. 设 $\phi : V \to V$, $\psi : W \to W$ 为线性映射. 取 V 的基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, W 的基 $\{w_1, \cdots, w_m\}$. 证明:

$$\phi \otimes \psi(v_i \otimes w_j) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ri} b_{kj} (v_r \otimes w_k).$$

设 ϕ 对应于基 $\{v_i\}$ 的矩阵为 $[\phi] = [a_{ij}] = A$, ψ 对应于基 $\{w_i\}$ 的矩阵为 $[\psi] = [b_{ij}]$, 即

$$\phi v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j, \quad \psi w_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} w_j.$$

把 $V \otimes W$ 的基 $\{v_i \otimes w_j\}$ 按以下次序

$$v_1 \otimes w_j, \cdots, v_n \otimes w_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

排成 m 块, 每块 n 个向量. 证明: 对应于如此排的基 $\phi \otimes \psi$ 的矩阵为 m^2 块, 每块为如下的 $n \times n$ 矩阵:

$$\begin{bmatrix} b_{11}A & & \cdots & & b_{1n}A \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & b_{kj}A & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ b_{n1}A & & \cdots & & b_{nn}A \end{bmatrix},$$

其中第 (k, j) 块为矩阵 $b_{kj}A$.

3. 给定群 G 的表示 $\pi : G \to GL(V)$, $\rho : G \to GL(W)$, 定义

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g).$$

证明: $\pi \otimes \rho$ 为 G 在空间 $V \otimes W$ 上的表示.

4. 设 H 为有限群 G 的子群, $\rho : H \to GL(W)$ 为 H 的表示,

$$G = g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_t H$$

对应于 H 的陪集分解, $\{w_1, \cdots, w_r\}$ 为 W 的 F 基. 对 $h \in H$, 设 $[a_{ij}(h)]$ 为 $\rho(h)$ 对应于此基的矩阵, 即

$$\rho(h) w_i = \sum a_{ji}(h) w_j.$$

按以下原则把 $a_{ij(\bullet)}$ 从 H 扩充至 G : $a_{ij}(g) = 0$, 若 $g \in G$ 及 $g \notin H$. 证明: 对任意 $g \in G$ 和 $1 \leqslant i \leqslant t$,

$$g(g_i \otimes w_j) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{T} a_{sj}(g_k^{-1} g g_i) \cdot g_k \otimes w_s.$$

按以下次序排列 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 的基

$$g_1 \otimes w_1, \cdots, g_1 \otimes w_n, g_2 \otimes w_1, \cdots, g_t \otimes w_1, \cdots g_t \otimes w_n.$$

记诱导表示为 $\pi = \operatorname{Ind}_H^G(\rho)$, 证明: 对应于如此排的基 $\pi(g)$ (其中 $g \in G$) 是 $r \times r$ 块的矩阵, 其 (j, i) 块是如下矩阵 $[\rho(g_j^{-1} g g_i)]$, 即有

$$\pi(g) = \begin{bmatrix} \rho(g_1^{-1} g g_1) & \cdots & \rho(g_1^{-1} g g_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho(g_t^{-1} g g_1) & \cdots & \rho(g_t^{-1} g g_t) \end{bmatrix}.$$

5. 设模 M 有合成序列, 并且 $M = M_0^1 \oplus M_1^1 = M_0^2 \oplus M_1^2$. 设 $\varphi \in \operatorname{End} M$, 使得对 $j = 1, 2$ 有 $\varphi(M_0^j) \subset M_0^j$, 其中 $\varphi \mid M_0^j$ 为幂零的, 且 $\varphi(M_1^j) \subset M_1^j$ 有同构 $\varphi \mid M_1^j$. 证明: $M_0 = M_0'$ 和 $M_1 = M_1'$.

6. 证明: $\mathbb{Z}$ 是不可分模.

7. 设模 M 有合成序列, 且 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. 已给同构 $\varphi_i : M_i \to N_i$. 证明: 有同构 $\varphi : M \to M$ 使得 $\varphi_i = \varphi \mid M_i$.

8. 找一个反例来证明: 一般从 "不可分" 不可推出 "强不可分".

9. 举一个模 M 使得 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$, 其中 M_i, N_j 是不可分模, 若 $m \neq n$, M_i 不同构于任何 N_j.

10. 设 M_α 为不可约模. 问直积 $\prod M_\alpha$ 是否完全可约?

11. 设 M 是完全可约模. 证明: M 是 Artin 的充分必要条件是 M 是 Noether.

12. 设 M 是有限个不可约模的和. 证明: (1) M 是完全可约模及长度 $\ell(M)$ 是有限的; (2) M 是 $\ell(M)$ 个不可约子模的直和.

13. 设有环 R, 左 R 模 M 有直和

$$M = \sum_{j=1}^{T} \sum_{i=1}^{n_j} M_{ij},$$

其中 M_{ij} 为不可约 R 模, 使得 $M_{ij} \cong M_{rs}$ 当且仅当 $j = s$. 设

$$N_j = \sum_{i=1}^{n_j} M_{ij}.$$

对 $f \in \operatorname{Hom}_R(M, M)$ 及 $x \in m_{rs}$, 记 $f(x) = \sum_{i,j} x_{ij}$, 其中 $x_{ij} \in M_{ij}$. 证明: 映射 $x \mapsto x_{ij}$ 是从 M_{rs} 到 M_{ij} 的 R 同态, 而且是零映射, 如果 $j \neq s$. 在 N_j 外设 f_j 取零便扩充 f_j 为 M 上的映射. 证明: $F = \sum_j f_j$. 再证明:

$$\operatorname{Hom}_R(M, M) \cong \oplus_{j=1}^{T} \operatorname{Hom}_R(N_j, N_j).$$

14. 设 V, W 为 G 的表示. 证明: 有 G 模同构 $V^* \otimes W \cong \operatorname{Hom}_F(V, W)$.

15. 令 t 为一杨表, e_t 为其相应的多表类, π 为某一置换. 证明: $e_{\pi t} = \pi e_t$.

16. 若 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ 为 n 的分划, 证明:

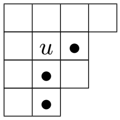
$$\dim_{\mathbb{C}} M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_l!}.$$

17. 令 λ 为任一划分. 把 S^λ 看成向量空间, 证明: 集合

$$\{e_t : t \text{ 是标准 } \lambda \text{ 杨表}\}$$

是 S^λ 的一个基底. 把 f^λ 记为标准 λ 杨表的个数. 证明: 若 $\lambda \vdash n$, 则 $\dim S^\lambda = f^\lambda$.

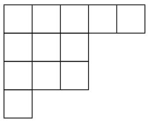
18. 给定一正整数 n 的一个分划 λ. 由 λ 所决定的杨图中, 在 $u = (i,j)$ 位置的方格所定义的**钩** (hook) 为从 (i,j) 开始向右数起或向下数起的格所组成的集合, 其中也包括 (i,j) 本身. 称 (i,j) 的钩的方格总数为**钩长** (hook length), 记为 $h_{(i,j)}(\lambda)$. 以分划 $\lambda = (4,3,3,2)$ 为例,



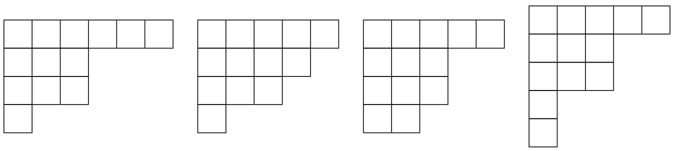
$h_{(2,2)}((4,3,3,2)) = 4$. 证明: 钩长公式

$$\dim S^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{(i,j)}(\lambda)}.$$

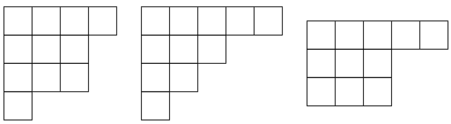
19. 令 λ 为 n 的划分, μ 为 $n+1$ 的划分. 如果可以通过在 λ 杨图中添加一个方格而得到 μ 杨图, 则记 $\lambda \nearrow \mu$. 设 $\lambda = (5,3,3,1)$, 即 λ 杨图为



证明: 如果 $\lambda \nearrow \mu$, 则 μ 杨图是以下之一:



证明: 如果 $\mu \nearrow \lambda$, 则 μ 杨图是以下之一:



20. 令 λ 为 n 的划分. 证明:

$$\mathrm{Res}^{\mathscr{S}_n}_{\mathscr{S}_{n-1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\mu\nearrow\lambda} S^\mu \quad \text{和} \quad \mathrm{Ind}^{S_{n+1}}_{S_n} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^\mu.$$

以上称为**分支法则** (branching rule). 证明:

$$\mathrm{Res}^{\mathscr{S}_{12}}_{\mathscr{S}_{11}} S^{(5,3,3,1)} = S^{(4,3,3,1)} \oplus S^{(5,3,2,1)} \oplus S^{(5,3,3,1)}$$

和

$$\mathrm{Ind}^{\mathscr{S}_{13}}_{\mathscr{S}_{12}} S^{(5,3,3,1)} = S^{(6,3,3,1)} \oplus S^{(5,4,3,1)} \oplus S^{(5,3,3,2)} \oplus S^{(5,3,3,1,1)}.$$

第十三章　同调

本章介绍一些简单的同调代数. 我们用范畴和函子的概念做简化说明, 建议读者先看第 14.1 节以了解范畴和函子的定义. 我们从学习同态模 Hom_R 和张量积 $\otimes_R$ 的正合性的概念开始, 以群上同调结束.

在这一章中, 除非特别指明, 所有模皆是定义在交换环上.

让我们用范畴的语言谈一下本章与第十四章的关系. 因为模范畴的对象是模, 模是有元素、有加法的结构, 所以可以模同态的核和像是子模, 同调群是商模, 这样在执行计算同调群时就直接多了. 在一般的范畴没有这样直接的处理办法, 我们用态射来代替相应的概念. 例如模同态的核是子模, 但在 Abel 范畴定义态射的核就不这么简单了, 核被定义为一个极限 (详情见第十四章). 一方面本章同调的可计算性有它的价值, 另一方面我们可以把本章看作第十四章的一个预演, 让我们念第十四章时不会觉得太抽象.

13.1　正合序列

设 R 为环, M, N 为 R 模, $\lambda : M \to N$ 为 R 模同态. λ 的核 (Kernel) 是指 M 的子模

$$\mathrm{Ker}\,\lambda := \{m \in M : \lambda(m) = 0\};$$

λ 的**像** (image) 是指 N 的子模

$$\mathrm{Img}\,\lambda := \{\lambda(m) : m \in M\}.$$

定义 13.1　令 M, N, P 为 R 模. 设 $\lambda : M \to N$ 和 $\pi : N \to P$ 是 R 模同态. 如果

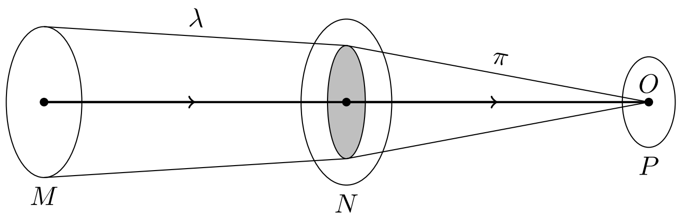
$$\mathrm{Img}\,\lambda = \mathrm{Ker}\,\pi,$$

称

$$M \overset{\lambda}{\to} N \overset{\pi}{\to} P$$

为 R 模同态的一个**正合序列**.

如下图所示.



一般来说, 称以下的模同态序列是正合的

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{\lambda_{i-1}} M_i \xrightarrow{\lambda_i} M_{i+1} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} M_{i+2} \xrightarrow{\lambda_{i+2}} \cdots,$$

若对所有 i 有 $\operatorname{Img}\lambda_{i-1} = \operatorname{Ker}\lambda_i$.

在第十四章, 我们将会看到在任一 Abel 范畴亦可以定义正合序列.

例 13.2 设 $\lambda : M \to N$ 为 R 模同态. 记 0 为只有一个元素的 R 模, 这个 R 模的唯一元素是零元素.

(1) 设 $\varphi : 0 \to M : 0 \mapsto 0$ 为**包含映射** (inclusion map). 则序列 $0 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\lambda} N$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是单同态.

(2) 设 $\theta : N \to 0$ 为零映射, 即 $\theta(N) = 0$. 则序列 $M \xrightarrow{\lambda} N \xrightarrow{\theta} 0$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是满同态.

(3) 序列 $0 \to M \xrightarrow{\lambda} N \to 0$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是同构.

利用正合我们可以说清楚两个概念. 已给 R 模 M, 若有正整数 n 且存在正合序列

$$R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0,$$

则我们说 M 是**有限生成 R 模** (finitely generated R-module). 这是说 M 内有有限个元素 $\{x_1, \cdots, x_n\}$, 使得 M 内任一元素均可表示为有限和 $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, 其中 $a_1, \cdots, a_n \in R$. 事实上, 若设 $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 为 R^n 的元素, 即 1 在第 j 位置, 其余位都是 0, 再取 $x_j = \alpha(e_j)$ 便可以了.

如果有正整数 n, m 且存在正合序列

$$R^m \xrightarrow{\beta} R^n \xrightarrow{\alpha} M \to 0,$$

则我们说 M 是**有限展示 R 模** (finitely presented R-module). 态射 α 的核便是所有的 $(b_1, \cdots, b_n) \in R^n$ 使得 $\sum_j b_j x_x = 0$, 即我们可以把 $\operatorname{Ker}\alpha$ 看成生成元 $x_1, \cdots, x_n$ 所满足的关系. 所以有限展示是说 $\operatorname{Img}\beta = \operatorname{Ker}\alpha$, 即 R 模 M 的生成元之间的关系所组成的子模也是有限生成的, 这样我们知道 “有限展示” 就是在说两个 “有限生成”.

如此你就可以了解 Hilbert 在一百年前引入这些东西的奥妙了. 请读者不要把代数看作一堆符号, 要理解各种结构之间的关系. 说代数是抽象的论调是无知和不公平的.

命题 13.3 从任一 R 模同态 $\lambda : M \to N$ 可构造以下的正合列

$$O \to \operatorname{Ker}\lambda \to M \xrightarrow{\lambda} N \to N/\operatorname{Img}\lambda \to O.$$

证明 首先, 定义若干映射:

$\varphi_1 : 0 \to \operatorname{Ker}\lambda : 0 \mapsto 0$;

$i : \operatorname{Ker}\lambda \to M : x \mapsto x$ (包含映射);

$\pi : N \to N/\operatorname{Img}\lambda : y \mapsto y + \operatorname{Img}\lambda$ (投射);

$\varphi_2 : N/\operatorname{Img}\lambda \to 0 \quad y + \operatorname{Img}\lambda \mapsto 0$ (满映射).

现按以下步骤证明命题中的序列是正合的.

(1) $\varphi_1, i, P, \varphi_2$ 皆是同态映射.

(2) 由于包含映射 i 是单射, $\operatorname{Ker} i = 0$, 因此 $0 \to \operatorname{Ker}\lambda \xrightarrow{i} M$ 是正合的.

(3) 因为 i 是包含映像, $\operatorname{Img} i = \operatorname{Ker}\lambda$, 即指 $\operatorname{Ker}\lambda \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\lambda} N$ 是正合的.

(4) 计算

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\pi &= \{y \in N : \pi(y) = 0 + \operatorname{Img}\lambda\} \\ &= \{y \in N : y + \operatorname{Img}\lambda = 0 + \operatorname{Img}\lambda\} \\ &= \{y \in N : y \in \operatorname{Img}\lambda\} = \operatorname{Img}\lambda,\end{aligned}$$

所以 $M \xrightarrow{\lambda} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{Img}\lambda$ 是正合的.

(5) $\pi(N) = \{y + \operatorname{Img}\lambda : y \in N\} = N/\operatorname{Img}\lambda$, 那么 π 是满射, 因而 $N \to N/\operatorname{Img}\lambda \to 0$ 是正合的. □

定义 λ 的**余核** (cokernel) 为

$$\operatorname{Cok}\lambda = N/\operatorname{Img}\lambda,$$

λ 的**余像** (coimage) 为

$$\operatorname{Coim}\lambda = M/\operatorname{Ker}\lambda.$$

命题 13.4 给定一 R 模同态 $\lambda : M \to N$, 那么下图为交换图表并且行和列皆是正合序列.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\lambda \arrow[r] & M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & N \arrow[r] & \operatorname{Cok}\lambda \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \operatorname{Coim}\lambda \arrow[r, "\bar{\lambda}"] \arrow[d] & \operatorname{Img}\lambda \arrow[r] \arrow[u] & 0 & \\
& & 0 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

注意, 上图揭示任一模同态的结构.

证明　我们已经知道顶行是正合序列. 投射

$$\pi : M \to \operatorname{Coim}\lambda : x \mapsto x + \operatorname{Ker}\lambda,$$

是满射, 因而

$$M \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coim}\lambda \to 0$$

是正合的. 令

$$i : \operatorname{Img}\lambda \to N : y \mapsto y$$

为包含映像, 即是单射, 所以

$$0 \to \operatorname{Img}\lambda \to N$$

是正合的. 现在要处理的只剩下第二行.

由给定的同态 λ 给出同态 $\lambda : M \to \operatorname{Img}\lambda$ (这里我们用符号表示). 由命题 7.9 存在同态

$$\bar{\lambda} : \operatorname{Coim}\lambda = M/\operatorname{Ker}\lambda \to \operatorname{Img}\lambda : x + \operatorname{Ker}\lambda \mapsto \lambda(x)$$

满足 $\lambda = \bar{\lambda} \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ \operatorname{Coim}\lambda \arrow[r, dashed, "\bar{\lambda}"] & \operatorname{Img}\lambda \end{tikzcd}$$

从

$$\bar{\lambda}(\operatorname{Coim}\lambda) = \{\bar{\lambda}(x + \operatorname{Ker}\lambda) | x \in M\} = \{\lambda(x) | x \in M\} = \operatorname{Img}\lambda$$

可知 $\bar{\lambda}$ 是满射. 现假定

$$\bar{\lambda}(x + \operatorname{Ker}\lambda) = \bar{\lambda}(x_1 + \operatorname{Ker}\lambda),$$

可知 $\lambda(x) = \lambda(x_1)$ 或 $\lambda(x) - \lambda(x_1) = 0$. 因为 λ 是同态, 得 $\lambda(x - x_1) = 0$, 即 $x - x_1 \in \operatorname{Ker}\lambda$, 因而对某些 $x_0 \in \operatorname{Ker}\lambda$ 可写成 $x - x_1 = x_0$. 现在计算

$$x + \operatorname{Ker}\lambda = x_1 + x_0 + \operatorname{Ker}\lambda = x_1 + \operatorname{Ker}\lambda,$$

那么 $\bar{\lambda}$ 是单射. 这样, 我们已经证明了 $\bar{\lambda}$ 为同构, 所以

$$0 \to \operatorname{Coim}\lambda \xrightarrow{\bar{\lambda}} \operatorname{Img}\lambda \to 0$$

是正合的. □

说明 13.5　为了方便, 我们总结一下有关交换环 R 上的全体模构成的类 $\mathfrak{Mod}_R$ 已经知道的一些内容.

(1) 称只有一个元素 0 的 R 模为零模 $\mathbf{0}$. 则对任意 R 模 M 存在唯一态射 $\mathbf{0}\to M$ 和存在唯一态射 $M\to\mathbf{0}$.

(2) 对任意 R 模 L,M 和 N, 集合 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 是 R 模. 利用 R 模同态的合成所定义的映射

$$\mathrm{Hom}_R(L,M)\times\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(L,N):(\phi,\psi)\mapsto\psi\circ\phi$$

是双线性的.

(3) 对任意两个 R 模 M,N 可以构造直积 $M\times N$ 和直和 $M\oplus N$.

[AB1] 任意 R 模同态皆有核和余核.

[AB2] 任意 R 模同态 $\lambda:M\to N$ 所定的典范同态 $\bar{\lambda}:\mathrm{Coim}\,\lambda\to\mathrm{Img}\,\lambda$ 是同构.

事实上, 这是说 $\mathfrak{Mod}_R$ 满足 Abel 范畴的公理, 请看下一章有关的重要内容.

命题 13.6 (2 方引理) 给定模同态的交换方形图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & \cdot \arrow[d, "\gamma"] \\ \cdot \arrow[r, "\delta"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

记

(1) $i(1)=(\mathrm{Img}\,\gamma\cap\mathrm{Img}\,\delta)/\,\mathrm{Img}\,\delta\beta$,

(2) $k(1)=\mathrm{Ker}(\delta\beta)/(\mathrm{Ker}\,\alpha+\mathrm{Ker}\,\beta)$.

若由模同态构成的下图为交换图表

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & \cdot \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \cdot \arrow[d, "\zeta"] \\ \cdot \arrow[r, "\delta"'] & \cdot \arrow[r, "\eta"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

那么 $i(1)=k(2)$.

证明 显然, 我们有

$$\mathrm{Img}\,\gamma\cap\mathrm{Img}\,\delta=\mathrm{Img}\,\gamma\cap\mathrm{Ker}\,\eta=\{\gamma x|\eta\gamma x=0\}=\gamma(\mathrm{Ker}\,\eta\gamma)$$

和

$$\mathrm{Img}\,\gamma\alpha=\gamma\,\mathrm{Img}\,\alpha=\gamma(\mathrm{Ker}\,\xi)=\gamma(\mathrm{Ker}\,\gamma+\mathrm{Ker}\,\xi),$$

但 $\operatorname{Ker}\eta\gamma$ 和 $\operatorname{Ker}\gamma+\operatorname{Ker}\xi$ 皆包含 $\operatorname{Ker}\gamma$. 利用同态 γ 得 $\operatorname{Ker}\eta\gamma/\operatorname{Ker}\gamma\cong\gamma(\operatorname{Ker}\eta\gamma)$, $(\operatorname{Ker}\xi+\operatorname{Ker}\gamma)/\operatorname{Ker}\gamma\cong\gamma(\operatorname{Ker}\xi+\operatorname{Ker}\gamma)$. 再应用同构定理得到

$$k(2)=\frac{\operatorname{Ker}\eta\gamma}{\operatorname{Ker}\xi+\operatorname{Ker}\gamma}\cong\frac{\gamma(\operatorname{Ker}\eta\gamma)}{\gamma(\operatorname{Ker}\xi+\operatorname{Ker}\gamma)}=\frac{\operatorname{Img}\gamma\cap\operatorname{Img}\delta}{\operatorname{Img}\gamma\alpha}=i(1). \qquad\square$$

命题 13.7 (蛇引理) 假定以下交换图表中的行都是正合的

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & O \\
O \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

那么如下序列也是正合的

$$\operatorname{Ker}\alpha\overset{i_*}{\to}\operatorname{Ker}\beta\overset{p_*}{\to}\operatorname{Ker}\gamma\overset{\triangle}{\to}\operatorname{Cok}\alpha\overset{i'_*}{\to}\operatorname{Cok}\beta\overset{p'_*}{\to}\operatorname{Cok}\gamma,$$

其中 i_* 是 i 限制到 $\operatorname{Ker}\alpha$, p_* 是 p 限制到 $\operatorname{Ker}\beta$, 且

$$\begin{gathered}
\triangle(c)=(i')^{-1}\beta p^{-1}c+\operatorname{Img}\alpha,\\
i'_*(a'+\operatorname{Img}\alpha)=i'(a')+\operatorname{Img}\beta,\\
p'_*(b'+\operatorname{Img}\beta)=p'b'+\operatorname{Img}\gamma.
\end{gathered}$$

此外, 如果 $\operatorname{Ker}i=0$, 则 $\operatorname{Ker}i_*=0$; 如果 $\operatorname{Cok}p=0$, 则 $\operatorname{Cok}p'_*=0$.

证明　在未开始证明之前, 我们留意 $\triangle$ 的定义中有两个逆映射: $(i')^{-1}$, p^{-1}. 这告诉我们需要证明 $\triangle$ 是明确定义的. 取 $c\in\operatorname{Ker}\gamma\subset C$. 因为 $B\to C\to 0$, 所以存在 $b\in B$ 使 $pb=c$. 有 $p'\beta b=\gamma pb=\gamma c-0$, 即 $\beta b\in\operatorname{Ker}p'=\operatorname{Img}i'$. 又因 $0\to A'\to B'$, 所以存在唯一的 $a'\in A'$ 使 $i'a'=\beta b$. 定义 $\triangle(c)$ 为 a' 在映射 $A'\to\operatorname{Cok}\alpha$ 的像. 现在如果另有 b_2 使 $pb_2=c$, 设 $a'_2=i'^{-1}\beta b_2$. 因为 $b-b_2\in\operatorname{Ker}p=\operatorname{Img}i$, 存在 $a_3\in A$ 使 $ia_3=b-b_2$, 于是 $i'\alpha a_3=\beta ia_3=\beta b-\beta b_2$, 这样 $\alpha a_3=i'^{-1}(\beta b-\beta b_2)=a'-a'_2$, 故知

$$a'+\operatorname{Img}\alpha=a'_2+\operatorname{Img}\alpha\in\operatorname{Cok}\alpha=A'/\operatorname{Img}\alpha.$$

我们将用所谓的“**追图法**” (diagram chasing) 来证明.

(1) 我们首先证明: 如果 $\operatorname{Ker}i'=0$, 则 $\operatorname{Ker}\alpha\to\operatorname{Ker}\beta\to\operatorname{Ker}\gamma$ 是正合序列. 容易证明 $\operatorname{Img}i_*\subseteq\operatorname{Ker}p_*$.

余下证明: $\operatorname{Ker}p_*\subseteq\operatorname{Img}i_*$. 取 $b\in\operatorname{Ker}p_*$, 则 $b\in\operatorname{Ker}p=\operatorname{Img}i\Rightarrow$ 存在 $a\in A$ 使得 $ia=b$. 那么 $i'\alpha a=\beta ia=\beta b=0$, 这是由于 $b\in\operatorname{Ker}\beta$, 因而从 $\operatorname{Ker}i'=0$ 得到 $\alpha a=0$. 因此 $b\in\operatorname{Img}i_*$.

(2) 现留给读者证明 $\operatorname{Img}p=C\Rightarrow\operatorname{Cok}\alpha\to\operatorname{Cok}\beta\to\operatorname{Cok}\gamma$ 是正合的.

(3) 为了证明 $\mathrm{Ker}\,\beta \overset{p_*}{\to} \mathrm{Ker}\,\gamma \overset{\triangle}{\to} \mathrm{Cok}\,\alpha$ 是正合的, 首先证明 $\mathrm{Img}\,p_* \subseteq Ker\triangle$, 即 $\triangle p_* = 0$. 取 $b \in \mathrm{Ker}\,\beta$, 即 $\beta b = 0$, 那么

$$\triangle p_* b = (i')^{-1}\beta b + \mathrm{Img}\,\alpha = 0 + \mathrm{Img}\,\alpha.$$

接着证明 $\mathrm{Ker}\,\triangle \subseteq \mathrm{Img}\,p_*$. 取 $c \in \mathrm{Ker}\,\triangle$. 那么存在 $b \in B$ 使得 $pb = c$ 和 $(i')^{-1}\beta b \in \mathrm{Img}\,\alpha$, 即我们有 $a \in A$ 使得 $\beta b = i'\alpha a = \beta i a$. 这意味着 $b - ia \in \mathrm{Ker}\,\beta$ 和 $p_*(b - ia) = c - pia = c$, 所以有 $c \in \mathrm{Img}\,p_*$.

(4) 接着证明 $\mathrm{Ker}\,\gamma \overset{\triangle}{\to} \mathrm{Cok}\,\alpha \overset{i'_*}{\to} \mathrm{Cok}\,\beta$ 是正合的.

先证明 $\mathrm{Img}\,\triangle \subseteq \mathrm{Ker}\,i'_*$. 取 $c \in \mathrm{Ker}\,\gamma$ 和 $b \in B$ 使得 $pb = c$, 那么 $i'_*\triangle(c) = i'((i')^{-1}\beta b) + \mathrm{Img}\,\beta = \mathrm{Img}\,\beta$, 因为 $\beta b \in \mathrm{Img}\,\beta$, 即 $i'_*\triangle = 0$.

接着, 证明 $\mathrm{Ker}\,i'_* \subseteq \mathrm{Img}\,\triangle$. 如果 $i'_*(a + \mathrm{Img}\,\alpha) = 0$, 那么 $i'(a) \in \mathrm{Img}\,\beta$. 这样我们得到元素 $b \in B$ 使得 $\beta b = i'a$, 从而得到 $\gamma pb = p'\beta b = p'i'a = 0$, 所以有 $pb \in \mathrm{Ker}\,\gamma$ 和 $\triangle(pb) = a + \mathrm{Img}\,\alpha \in \mathrm{Img}\,\triangle$. □

命题 13.8 (5 引理) 给定如下交换图表, 其中行和列皆为正合序列

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "k'"] & E'
\end{tikzcd}$$

那么

(1) α 是满射, β, δ 是单射 $\Rightarrow \gamma$ 是单射;

(2) β, δ 是满射, ε 是单射 $\Rightarrow \gamma$ 是满射.

证明 我们用 "追图法" 证明.

(1) 是指 $\mathrm{Ker}\,\gamma = 0$. (1) 的证明: 取 $c \in \mathrm{Ker}\,\gamma$. 我们先把 (1) 的假设写入下图, 它帮我们显示从 c 开始所有的元素到底是映射到哪里.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "II"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "III"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \\
0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & g(b) \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "II"] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "III"] & h(c) = 0 \arrow[d, "\delta"] \\
a' \arrow[r, "f'"] & \beta b \arrow[r, "g'"] & 0 \arrow[r, "h'"] & 0
\end{tikzcd}$$

现分四步证明 $\operatorname{Ker}\gamma = 0$.

1) 取 $c \in \operatorname{Ker}\gamma$, 即 $\gamma(c) = 0$, 因而有

$$\delta hc = h'\gamma c = 0,$$

这意味着 $hc = 0$, 因为 δ 是单射. 即 $c \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Img} g$ 导致存在 $b \in B$ 满足 $g(b) = c$.

2) 接着

$$g'\beta b = \gamma g b = \gamma c = 0,$$

从而得知 $\beta b \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Img} f'$, 即对某 $a' \in A'$ 有 $\beta b = f'a'$.

3) 从 α 是单射可得 $a \in A$, 其中 $\alpha(a) = a'$. 这样

$$\beta f(a) = f'\alpha(a) = f'a' = \beta b,$$

意味着 $f(a) - b \in \operatorname{Ker}\beta = 0$, 因而有 $f(a) = b$.

4) 现在我们知道

$$c = g(b) = (gf)(a) = 0,$$

这是因为可以从 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 的正合性得知 $gf = 0$.

(2) 为了证明 γ 为满射, 首先建立下图以便显示那些出现在证明中的元素的映像情况.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "I"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "II"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "III"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\
B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "k'"] \arrow[d] & E' \\
0 & & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & g(b) \arrow[d, "\gamma"] \\
b' \arrow[r, "g'"] & c' - \gamma c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r] & d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & kd = 0 \arrow[d, "\epsilon"] \\
c' \arrow[r] & h'(c') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

取 $c' \in C'$. 由于 $h'(c') \in D'$ 及 δ 是满射, 所以存在 $d \in D$ 使得 $\delta(d) = h'(c')$. 但

$$\varepsilon(k(d)) = k'\delta(d) = k'h'(c') = 0,$$

由正合性即得 $k'h' = 0$. 因为 ε 是单射, 立刻知道 $k(d) = 0$ 或 $d \in \operatorname{Ker} k = \operatorname{Img} h$, 因而存在 $c \in C$ 使得 $h(c) = d$. 同时,

$$h'\gamma c = \delta hc = \delta d = h'c',$$

可知 $c' - \gamma c \in \operatorname{Ker} h' = \operatorname{Img} g'$. 这样 $c' - \gamma c = b'$, 其中 $b' \in B'$. 利用 β 为满射映射可得 $b \in B$ 使得 $\beta(b) = b'$. 现在

$$\gamma g b = g'\beta b = g'b' = c' - \gamma c = b'.$$

若记 $c_0 = g(b) + c$, 那么 $\gamma(c_0) = c'$. 这正是我们所要的. □

13.2 投射模与内射模

设 R 为环, M, N 为 R 模. 以 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 记所有从 M 到 N 的 R 模同态所组成的 R 模. 本节研究 Hom_R 与正合序列的关系. 给定一 R 模同态 $\lambda : M \to N$, 定义如下两个映射

$$\lambda_* : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N) : f \mapsto \lambda f$$

和

$$\lambda^* : \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, M) : f \mapsto f\lambda.$$

容易验证 λ_* 和 λ^* 皆为 R 模同态.

定理 13.9 给定 R 模 P. 如果

$$0 \to M' \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\pi} M''$$

为 R 模正合序列. 则

$$O \to \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{\lambda_*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(P, M'')$$

为 R 模正合序列.

我们常记 $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ 为 $h^P(M)$. 这样, 用下一章范畴的语言, 这定理是说 h^P 是从 R 模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 到 R 模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 的左正合函子.

证明 (1) 我们证明 $\mathrm{Ker}\,\lambda_* = 0$.

取 $f \in \mathrm{Ker}\,\lambda_*$, 即 $\lambda f = \lambda_* f = 0$, 这意味着对所有 $x \in P$ 有 $\lambda f(x) = 0$. 所以由假设可知 $f(x) \in \mathrm{Ker}\,\lambda = 0$. 这样我们就证明了映射 $f : P \to M'$ 对所有 $x \in P$ 满足 $f(x) = 0$, 即 $f = 0$.

(2) 证明 $\mathrm{Img}\,\lambda_* \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi_*$.

取 $f \in \mathrm{Img}\,\lambda_*$, 即对某 $g \in \mathrm{Hom}(P, M')$, $f = \lambda_*(g) = \lambda g$. 由假设 $\pi\lambda = 0$, 所以

$$\pi_*(f) = \pi f = \pi\lambda g = 0 \cdot g = 0.$$

从而得到 $f \in Ker\pi_*$.

(3) 证明 $\mathrm{Ker}\,\pi_* \subseteq \mathrm{Img}\,\lambda_*$.

取 $g \in \mathrm{Ker}\,\pi_*$, 即 $\pi g = \pi_*(g) = 0$. 换句话说, 对所有 $x \in P$, 有 $\pi g(x) = 0$ 或 $g(x) \in \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Img}\,\lambda$. 这样我们能找到元 $y \in M'$ 满足 $\lambda(y) = g(x)$. 现断言这样的 y 是唯一的.

假设存在 $y_1 \in M'$ 使得 $\lambda(y_1) = g(x)$. 那么

$$\lambda(y_1 - y) = \lambda(y_1) - \lambda(y) = 0,$$

从而可知 $y_1 - y \in \operatorname{Ker} \lambda = 0$. 我们可知 $y_1 = y$.

这样, 已证明了对每一个 x 皆存在唯一的 y 使得 $\lambda(y) = g(x)$. 由此, 这就定义了映射

$$f : P \to M' : x \mapsto y.$$

容易验证 f 是一个模同态. 对任意 $x \in P$,

$$\lambda(f(x)) = \lambda(y) = g(x),$$

得

$$g = \lambda f = \lambda_* f \in \operatorname{Img} \lambda_*. \qquad \square$$

给定一 R 模的正合序列

$$M' \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\pi} M'' \to O.$$

如前定理可证明: 对任意 R 模 P

$$O \to \operatorname{Hom}(M'', P) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}(M, P) \xrightarrow{\lambda^*} \operatorname{Hom}(M', P)$$

是正合. 我们常记 $\operatorname{Hom}_R(M, P)$ 为 $h_P(M)$.

例 13.10 令 $\mathbb{Z}$ 为整数环, $\mathbb{Q}$ 为有理数域. 对 $m \in \mathbb{Z}$, 我们把理想 $m\mathbb{Z}$ 记作 (m). 则

(1) $O \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to O$ 是 $\mathbb{Z}$ 模的正合序列.

(2) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Q}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Q}/2) \to O$ 不是正合的.
(提示: $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Q}) = 0, \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Q}/(2)) \neq 0$)

(3) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to O$ 不是正合的.
(提示: $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0, \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$)

定义 13.11 给定一 R 模 M. R 模同态的正合序列

$$\to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

被称为 M 的一个**分解** (resolution). 有时我们把这正合序列简写为 $P_\bullet \to M \to 0$. 如果每个 P_n 是自由模的话, 那么我们称这序列为 M 的**自由分解** (free resolution).

命题 13.12 任何模皆有一个自由分解.

证明 在自由模的一节, 我们证明了: 任意 R 模是自由 R 模的像, 即给出 M, 我们可得到正合序列

$$0 \to S_0 \overset{i_0}{\to} F_0 \overset{\varepsilon_0}{\to} M \to 0,$$

其中 F_0 是自由模, $S_0 = \operatorname{Ker}\varepsilon_0$ 和 i_0 是包含映射. 我们对 F_1 在 S_0 上满射和 S_1 是这满射的核的事实重复这样的构造, 可得到:

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & S_1 \arrow[r, "i_1"] & F_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & S_0 \arrow[r] & O \\
O \arrow[r] & S_n \arrow[r, "i_n"] & F_n \arrow[r, "\varepsilon_{n-1}"] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & S_{n-1} \arrow[r] & O \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}$$

令 $d_n = i_{n-1}\varepsilon_n : F_n \to F_{n-1}$. 这样, 把上述的正合序列连接在一起得到

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[dr] & & F_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{n+1}"] & & F_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\varepsilon_n"] & & F_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_1"] & & F_0 \arrow[r, "\varepsilon_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & S_{n+1} \arrow[ur, "i_{n+1}"] \arrow[dr] & & S_n \arrow[ur, "i_n"] \arrow[dr] & & S_{n+1} \arrow[ur, "i_{n-1}"] \arrow[dr] & & & & S_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 i_{n-1} 是单射, 有 $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Ker}\varepsilon_n = S_n$ 以及由于 i_{n-1} 是单射和 ε 是满射, 可知 $\operatorname{Img} d_{n+1} = \operatorname{Img}\varepsilon_{n+1} = S_n$. 因此 $\operatorname{Img} d_{n+1} = \operatorname{Ker} d_n$, 即 $F_{n+1} \to F_n \to F_{n+1}$ 是正合的. 换句话说, 我们已经构造出一个 M 的自由分解 $F_0 \to M \to 0$. □

定义 13.13 设 $0 \to M_1 \overset{\lambda_1}{\to} M \overset{\pi_2}{\to} M_2 \to 0$ 为 R 模正合序列. 若存在同态 $M \overset{\lambda_2}{\leftarrow} M_2$ 使 $\pi_2\lambda_2 = 1_{M_2}$ 或存在同态 $M_1 \overset{\pi_1}{\leftarrow} M$ 使 $\pi_1\lambda_1 = 1_{M_1}$, 则我们说已给正合序列 $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ 是**分裂正合序列** (split exact sequence).

引理 13.14 R 模正合序列 $0 \to M_1 \overset{\lambda_1}{\to} M \overset{\pi_2}{\to} M_2 \to 0$ 分裂 $\Rightarrow M \cong M_1 \oplus M_2$.

证明 (1) 设有 $M \overset{\lambda_2}{\leftarrow} M_2$ 使 $\pi_2\lambda_2 = 1_{M_2}$, 即

$$0 \to M_1 \overset{\lambda_1}{\to} M \overset{\pi_2}{\to} M_2 \to 0.$$

则 $\pi_2\lambda_2 = 1_{M_2} \Rightarrow \pi_2(1_M - \lambda_2\pi_2) = 0$ (因为 $\pi_2 M = M_2$) $\Rightarrow$ 对 $x \in M$, $(1_M - \lambda_2\pi_2)(x) \in \operatorname{Ker}\pi_2 \Rightarrow$ 存在唯一的 $x_1 \in M_1$ 使 $\lambda_1(x_1) = (1_M - \lambda_2\pi_2)(x)$ (因为 λ_1 为单同态及 $\operatorname{Im}\lambda_1 = \operatorname{Ker}\pi_2$) $\Rightarrow$ 可以定义同态 $M \overset{\pi_1}{\to} M_1 : x \mapsto x_1$, 其中 x_1 满足条件 $\lambda_1(x_1) = (1_M - \lambda_2\pi_2)(x) \Rightarrow \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 1_M \Rightarrow$ 对 $x_1 \in M_1$, $\lambda_1(\pi_1\lambda_1(x_1)) = (1_M - \lambda_2\pi_2)\lambda_1(x_1) = \lambda_1(x_1)$ (因为 $\pi_2\lambda_1 = 0$) $\Rightarrow \pi_1\lambda_1 = 1_{M_1}$ (因为 λ_1 是单同态).

另一方面, 把 $1_M = \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2$ 乘上 $\lambda_2\pi_2$ 得 $\lambda_2\pi_2 = \lambda_1\pi_1\lambda_2\pi_2 + \lambda_2(\pi_2\lambda_2)\pi_2$. 利用 $\lambda_2\pi_2 = 1_{M_2}$ 便知 $\lambda_1(\pi_1\lambda_2)\pi_2 = 0$, 但 λ_1 是单同态, π_2 是满同态. 故得 $\pi_1\lambda_2 = 0$. 所以我们有以下的结果: 对 $1 \leqslant k,l \leqslant 2$, $\pi_k\lambda_l = \delta_{kl}$ 及 $\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 1_M$. 现设 $e_k = \lambda_k\pi_k, (k = 1, 2)$, 则显然

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0, \quad e_1 + e_2 = 1.$$

由模的双积性质知 $M \cong M_1 \oplus M_2$.

(2) 设有 $M_1 \overset{\pi_1}{\leftarrow} M$ 使 $\pi_1\lambda_1 = 1_{M_1}$, 则 $\pi_1\lambda_1 = 1_{M_1} \Rightarrow (1_{M_1} - \pi_1\lambda_1) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}\pi_2 = \operatorname{Im}_{\lambda_1} \subseteq \operatorname{Ker}(1_{M_1} - \pi_1\lambda_1) \Rightarrow$ 可以定义同态 $M_2 \overset{\lambda_2}{\to} M : \pi_2(x) \mapsto (1_{M_1} - \pi_1\lambda_1)(x)$, 其中 $x \in M$ (注意 M_2 的任一个元是可写成 $\pi_2(x), x \in M$), 显然我们立刻得到等式 $\lambda_2\pi_2 = 1_{M_1} - \pi_1\lambda_1$, 从此便如 (1) 一样易证 $M \cong M_1 \oplus M_2$. □

定义 13.15 称 R 模 P 为**投射模** (projective module), 若对任一同态 $P \overset{\beta}{\to} N$ 及任一满同态 $M \overset{\pi}{\to} N$ 必存在同态 $P \overset{\alpha}{\to} M$ 使 $\pi\alpha = \beta$. 此条件可由下图表示:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

称 R 模 Q **内射模** (injective module), 若对任一同态 $N \overset{\varphi}{\to} Q$ 及任一单同态 $N \overset{\lambda}{\to} M$ 必存在同态 $M \overset{\psi}{\to} Q$ 使 $\psi\lambda = \varphi$. 此条件可由下图表示:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

前面已说明用 R 模 M 所定义的函子 h^M 及 h_M 均为 R 模范畴的左正合函子. 显然投射模和内射模的定义是说: 若 M 是投射 R 模 (或内射 R 模), 则 h^M (或 h_M) 为正合函子.

定理 13.16 设 R 为环. 则以下的关于 R 模 P 的条件是互相等价的.

(1) P 为投射 R 模.

(2) 如果

$$0 \to M' \overset{\lambda}{\to} M \overset{\pi}{\to} M'' \to 0$$

为 R 模正合序列. 则

$$O \to \operatorname{Hom}_R(P, M') \overset{\lambda_*}{\to} \operatorname{Hom}_R(P, M) \overset{\pi_*}{\to} \operatorname{Hom}_R(P, M'') \to 0$$

为 R 模正合序列. (用范畴的语言: h^P 为范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 的正合函子.)

(3) 任一正合序列 $0 \to N \to M \to P \to 0$ 必分裂.

(4) P 为一自由模的直和因子.

证明 我们将证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

首先, (1) $\Rightarrow$ (2) : 按前面定理 13.9 余下要证明 $\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(P, M'')$ 是满射. 取 $\beta \in \mathrm{Hom}_R(P, M'')$. 按条件 (1) 知有 $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ 使 $\beta = \pi \circ \alpha = \pi_*(\alpha)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : 从满射 $M \to M''$ 得满射 $\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(P, M'')$, 即 P 是投射.

接下去证明 (1) $\Rightarrow$ (3), 考虑下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中横行为正合序列, 由条件 (1) 知存在 $P \xrightarrow{\eta} M$ 使 $\pi\eta = 1_P$, 即是条件 (3) 中的序列.

进一步我们证明 (3) $\Rightarrow$ (4): 因为任何模为自由模的像, 所以有自由模 F 和正合序列

$$0 \to K \to F \to P \to 0.$$

条件 (3) 说此序列分裂. 用引理 13.14 便得所求的条件 (4).

最后证明 (4) $\Rightarrow$ (1): 据条件 (4) 知存在自由模 F 及 F 的子模 P' 使 $F = P \oplus P'$. 设已给图表

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\beta"] & \\
M \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

把 β 扩张为 $\bar{\beta} : F \to N$ 如下: 定义 $\bar{\beta}|_P = \beta$ 及 $\bar{\beta}|_{P'} = 0$. 设自由模 F 是由子集 Ξ 生成. 对 $x \in \Xi$, 在逆像 $\pi^{-1}(\bar{\beta}(x))$ 中选定一元 $\bar{\alpha}(x) \in M$, 则集合映射 $\Xi \to M : x \mapsto \bar{\alpha}(x)$ 可扩展为模同态 $\bar{\alpha} : F \to M$, 使得图表

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "\bar{\alpha}"'] \arrow[d, "\bar{\beta}"] & \\
M \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

交换. 现设 $\alpha = \bar{\alpha}|_P$, 便得 $\pi\alpha = \beta$, 于是条件 (1) 得证. □

命题 13.17 (1) $\oplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ 是投射模 $\Leftrightarrow$ P_α 是投射模;

(2) $\oplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$ 是内射模 $\Leftrightarrow$ Q_α 是内射模.

证明 (i)($\Rightarrow$) 设已给

$$\begin{tikzcd} & & P_\alpha \arrow[dll, dashed, "?"'] \arrow[d, "\psi"] & \\ M \arrow[rr, "\pi"'] & & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

求 $\eta: P_\alpha \to M$ 使 $\pi\eta = \psi$. 由直和定义知有同态 $i_\alpha: P_\alpha \to \oplus P_\alpha$ 及同态 $p_\alpha: \oplus P_\alpha \to P_\alpha$ 使 $p_\alpha i_\alpha = 1_{P_\alpha}$.

考虑图表

$$\begin{tikzcd} & \oplus P_\alpha \arrow[ddl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "p_\alpha"] & \\ & P_\alpha \arrow[d, "\psi"] & \\ M \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由假设 $\oplus P_\alpha$ 是投射, 知存在 $\oplus P_\alpha \stackrel{\varphi}{\to} M$ 使 $\pi\varphi = \psi p_\alpha$, 故此 $\pi(\phi i_\alpha) = \psi p_\alpha i_\alpha = \psi$, 所以 $\eta = \phi i_\alpha$ 是所求的同态.

(i)($\Leftarrow$) 设已给 $\oplus P_\alpha \stackrel{\psi}{\to} N$ 及 $M \to N \to 0$. 由假设 P_α 为投射模, 知存在 $P_\alpha \stackrel{\varphi_\alpha}{\to} M$ 使 $\pi\varphi_\alpha = \psi i_\alpha$. 由直和定义知存在 $\oplus P_\alpha \stackrel{\varphi}{\to} M$ 使 $\varphi i_\alpha = \varphi_\alpha$, 故有 $\pi\varphi i_\alpha = \psi i_\alpha$. 记此同态为 h_α. 考虑态族 $\{h_\alpha : P_\alpha \to M\}$. 现有 $\psi \circ i_\alpha = h_\alpha = (\pi\varphi) \circ i_\alpha$. 由直和定义中的唯一性知 $\psi = \pi\varphi$. 这样便证明了 $\oplus P_\alpha$ 是投射模.

(ii) 与 (i) 是对偶, 证明从略. $\square$

现在我们来证明有理数域 $\mathbb{Q}$ 是内射 $\mathbb{Z}$ 模. 事实上我们将证明更多一点. 首先介绍如下命题.

命题 13.18 *R 模 Q 为内射模 $\Leftrightarrow$ 任意 R 的左理想 I 及任意同态 $I \to Q$ 存在同态 $\mu' : R \to Q$ 使得 $\mu'|_I = \mu$.*

证明 ($\Rightarrow$) 显然.

($\Leftarrow$) 设已给 R 模同态

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[dl, "?"'] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

可假设 N 为 M 的子模, 利用 Zorn 引理可得一最大子模 M', $N \subseteq M' \subseteq M$ 及 β 的扩张 $M' \stackrel{\alpha'}{\to} Q$ (即 $\alpha'|N = \beta$). 若可证明 $M' = M$, 则得证 Q 为内射模.

若 $M' \neq M$, 则 $\exists x \in M, x \notin M'$. 设 $I = \mathrm{Ann}(x + M')$ 为模 M/M' 的元素 $x + M'$ 的零化子. 显然 $I = \{s \in R | sx \in M'\}$.

考虑同态 $\mu: I \to Q: s \mapsto \alpha'(sx)$. 由假设知存在同态 $\mu': R \to Q$ 使得 $\mu'|_I = \mu$. 现我们断定同态 $\alpha'': Rx + M' \to Q: rx + y \mapsto \mu'(r) + \alpha'(y)$ 为 β 的扩张. 事实上只需证明以上公式确实定义一个映射, 即证明: 对 $s \in R, y \in M', sx + y = 0 \Rightarrow s \in I$ 及 $\mu'(s) = \mu(s) = \alpha'(sx) = \alpha(-y) \Rightarrow \mu'(s) + \alpha'(y) = 0$. 但这时便有 $M' \underset{\neq}{\subset} Rx + M' \xrightarrow{\alpha''} Q$ 及 $\alpha''|_N = \beta$, 这与 $M' \xrightarrow{\alpha'} Q$ 为 β 在 M 内的最大扩张矛盾. 故得证 $M' = M$. □

定义 13.19 设 M 为 R 模. 若对任意 $x \in M, 0 \neq r \in R$, 存在 $y \in M$ 使 $ry = x$, 则称 M 为**可除模** (divisible module).

命题 13.20 (1) 若 R 为整环及 M 为内射模, 则 M 为可除模;
(2) 若 R 为主理想环及 M 为可除模, 则 M 为内射模.

证明 (1) 设 $x \in M, 0 \neq r \in R$. 因为 R 是整环, 对 $a, b \in R$, $ar = br \Rightarrow a = b$. 故可得同态

$$\alpha: Rr \to M: ar \mapsto ax.$$

由假设 M 为内射模, 知存在同态 $\alpha': R \to M$ 使图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_r \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[dl, "\alpha'"'] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

交换. 设 $y = \alpha'(1)$. 则 $ry = r(\alpha'(1)) = \alpha(1_r) = x$. 这就证明了 M 是可除模.

(2) 设有同态 β 由 R 的左理想 I 到 M. 若 $I = 0$, 则 β 显然可扩张到零同态 $R \to M$. 若 $I \neq 0$, 则 $I = (r), 0 \neq r \in R$. 现设 $x = \beta(r)$, 取 $y \in M$ 使 $x = ry$. 则同态 $R \to M: a \mapsto ay$ 为 β 之扩张. 由命题 13.18 便知模 M 为内射模. □

推论 13.21 有理域 $\mathbb{Q}$ 为内射 $\mathbb{Z}$ 模.

已知任何模必为自由模的像, 自由模为投射模, 所以对任一模 M 必存在投射模 P 及满同态 $P \to M \to 0$. 和这对偶的论断便是要求存在内射模 Q 及单同态 $0 \to M \to Q$ (我们亦说 M 嵌入 Q). 我们在这一段证明这定理.

引理 13.22 设 R 为环, D 为体, $R \xrightarrow{\alpha} D$ 为单同态. 则对任一 R 模 M 必存在可除 R 模 M' 及单同态 $M \to M'$.

证明 任何模必为自由模的像, 所以有自由 R 模 F 及 F 的子模 K 使 $M \cong F/K$. 若 F 的基为 $\{x_i\}$, 设 F' 为以 $\{x_i\}$ 作基的自由 D 模, 这时 F' 亦为 R 模. 显然 F 为 F' 的子模且 F' 为可除 R 模. 现设 $M' = F'/K$. 易证 M' 为可除 R 模及 $M = F/K \to M' = F'/K$ 为单同态. □

定义 13.23 设 R, S 为环, 交换群 N 同时为左 R 模及右 S 模. 若对 $r \in R, s \in S, x \in$

N, 成立以下条件

$$(rx)(s) = r(xs),$$

则称 N 为 $R-S$ **双模** (bi-module), 常记 N 为 ${}_RN_S$.

命题 13.24 设 M 为左 R 模, N 为 $R-S$ 双模.

(1) 设 $s \in S$ 及 $\eta : N \to M$ 为 R 模同态, 则映射

$$s\eta : N \to M : x \mapsto \eta(xs)$$

亦为 R 模同态.

(2) 若把 $s\eta$ 定义如 (1), 则由 R 模同态所组成的群 $\mathrm{Hom}_R(N, M)$ 对映射

$$S \times \mathrm{Hom}_R(N, M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M) : (s, \eta) \mapsto s\eta$$

为 S 模.

(3) 若 M' 为 M 的 R 子模, 则 S 模 $\mathrm{Hom}_R(N, M')$ 可看为 $\mathrm{Hom}_R(N, M)$ 的 S 子模.

(4) 利用环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, 可把 R 模 M 看为 $\mathbb{Z}$ 模, 并记之为 ${}_{\mathbb{Z}}M$; 可把 $R-S$ 模 N 看为 $\mathbb{Z}-S$ 模, 并记之为 ${}_{\mathbb{Z}}N_S$. 则 $\mathrm{Hom}_R(N, M)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}N_S, {}_{\mathbb{Z}}M)$ 的 S 子模.

证明从略.

引理 13.25 设 R 模 M 为 $\mathbb{Z}$ 模 Q 的 $\mathbb{Z}$ 子模, 则有 R 模单同态 $M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$.

证明　把 R 看为 $R-R$ 双模. 根据命题 13.24, 则 $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ 的 R 子模, 故只需找单同态 $M \xrightarrow{\eta} \mathrm{Hom}_R(R, M)$. 对 $x \in M, r, s \in R$ 定义 $\eta_x : r \mapsto rx$, 则显然 $\eta_x \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$. 由计算 $s\eta_x(r) = \eta_x(rs) = (rs)x = \eta_{sx}(r)$ 得 $s\eta_x = \eta_{sx}$, 故 $\eta : x \to \eta_x$ 为 R 模同态. 进一步, 若 $\eta_x = \eta_y$, 则 $x = \eta_x(1) = \eta_y(1) = y$, 故 η 为单射. □

引理 13.26 设 Q 为内射 $\mathbb{Z}$ 模. 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ 为内射 R 模.

证明　据命题 13.18 和引理 13.25, 我们只需证明: 对 R 的任一左理想 I, R 同态 $\mu : I \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ 必可扩张至 R 同态 $R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. 分三步证明.

(1) 显然映射 $\mu' : I \to Q : b \mapsto (\mu b)(1)$ 为 $\mathbb{Z}$ 模同态, 故可扩张至 $\mathbb{Z}$ 模同态 $\lambda' : R \to Q$, 即有交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\mu'"'] & R \arrow[dl, "\lambda'"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

(2) 对 $a \in R$, 定义映射 $\lambda_a : R \to Q : r \mapsto \lambda'(ra)$. 从此定义得映射 $\lambda : R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) : a \mapsto \lambda_a$. 我们断定 λ 为 R 同态: 对 $b \in R$,

$$(b\lambda_a)(r) = \lambda_a(rb) = \lambda'(rba) = \lambda_{ba}(r),$$

故 $b\lambda_a = \lambda_{ba}$.

(3) 现在证明图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & R \arrow[dl, "\lambda"'] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q) &
\end{tikzcd}$$

交换. 取 $b \in I$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_b(r) &= \lambda'(rb) = \mu'(rb) = (\mu(rb))(1) \\ &= (r\mu(b))(1) = (\mu b)(1_r) = (\mu b)(r),\end{aligned}$$

故得 $\lambda_b = \mu b$. □

定理 13.27 任一 R 模必可嵌入一内射 R 模.

证明 设 M 为 R 模. 则 M 可看为 $\mathbb{Z}$ 模. 设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域. 则 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. 由引理 13.22 知 M 可嵌入可除 $\mathbb{Z}$ 模 Q. 由命题 13.20 知 Q 为内射 $\mathbb{Z}$ 模. 用引理 13.25, 得 M 可嵌入 R 模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. 由引理 13.26 知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ 为内射 R 模. □

作为以上内射嵌入定理的应用, 我们证得和定理 13.16 对偶的以下定理.

定理 13.28 设 R 为环, Q 为 R 模. 则以下关于 Q 的条件是互相等价的.

(1) Q 为内射模.

(2) 如果

$$0 \to M' \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$$

为 R 模正合序列, 则

$$O \to \mathrm{Hom}_R(M'', Q) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(M, Q) \xrightarrow{\lambda_*} \mathrm{Hom}_R(M', Q) \to 0$$

为 R 模正合序列. (用范畴的语言: h_Q 为范畴 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 的正合反变函子.)

(3) 任一正合序列 $0 \to Q \to M \to N \to 0$ 必分裂.

证明 请读者证明 (1)⇔(2) (可与定理 13.16 中的 (1)⇔(2) 做比较).

(1)⇒(3): 由下图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1_Q"'] & M \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0 \\
& Q & & &
\end{tikzcd}$$

及 (1) 便知正合序列 $0 \to Q \to M \to N \to 0$ 必分裂.

(3)⇒(1): 按内射嵌入定理 13.27 存在内射模 M 及单射 $Q \to M$, 于是可做正合序列 $0 \to Q \to M \to M'' \to 0$. 条件 (3) 指出此正合序列必分裂, 于是有直和 $M \cong Q \oplus M''$. 按命题 13.17 从 M 是内射知其直和因子 Q 亦为内射模. 故 (1) 得证. □

定义 13.29　设 M 为 R 模. 称 R 模的正合序列

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

为 M 的**投射分解** (projective resolution), 若 P_k $(k \geqslant 0)$ 为投射模; 称 R 模的正合序列

$$0 \to M \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to P_{n-1} \to Q_n \to \cdots$$

为 M 的**内射分解** (injective resolution), 若 Q_k $(k \geqslant 0)$ 为内射模.

定理 13.30　任一 R 模必有投射分解及内射分解.

证明　因自由模为投射模, 故从命题 13.12 知任一 R 模有投射分解. 内射分解的证明如下. 首先由定理 13.27 知有正合序列

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon_0} Q_0 \xrightarrow{\mu_0} N_0 \to 0,$$

其中 Q_0 为内射模, $N_0 = \operatorname{Cok} \varepsilon_0$, μ_0 为投射. 同样, 也有正合序列

$$0 \to N_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} Q_1 \xrightarrow{\mu_1} N_1 \to 0,$$

$$\vdots$$

$$0 \to N_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon_n} Q_n \xrightarrow{\mu_n} N_n \to 0,$$

合起来便得

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Q_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_{n+1} \arrow[dr] & \\
& & & N_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & N_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & {} \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

我们把余下的证明留给读者. □

13.3　平坦模

本节进一步研究张量积的正合性质. 设 R 为交换环, 以 $\mathfrak{Mod}_R$ 记所有的右 R 模, 以 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 记所有的左 R 模. 所有的交换群组成 Ab.

容易证明以下命题.

命题 13.31 设 N 为左 R 模. 则 $-\otimes_R N : \mathfrak{Mod}_R \to Ab : M \mapsto M \otimes_R N$ 为函子. 设 M 为右 R 模. 则 $M \otimes_R - : {}_R\mathfrak{Mod} \to Ab : N \mapsto M \otimes_R N$ 为函子.

命题 13.32 设 M 为右 R 模. 则对任意交换群 G 及左 R 模 N 存在同构

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, G) \to \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)).$$

用范畴的语言, 这是说: 由右 R 模 M 所决定的张量函子 $M \otimes_R - : {}_R\mathfrak{Mod} \to Ab$ 是 M 所决定的交换群同态函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -) : Ab \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 的左伴随函子.

证明 由定义知对 $G \in Ab, N \in {}_R\mathfrak{Mod}$, 我们需要一自然同构

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, G) \to \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)).$$

设 $\varphi : M \otimes_R N \to G$ 为群同态, 我们用以下公式定义 $\eta(\varphi)$

$$(\eta(\varphi)(y))(x) = \eta(x \otimes y).$$

反过来, 若 $\psi : N \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)$ 为 R 模同态, 则定义 $\bar{\eta}(\psi) : M \otimes_R N \to G$ 如下:

$$\bar{\eta}(\psi)(x \otimes y) = (\psi(y))(x).$$

易证 η 及 $\bar{\eta} : \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, G)$ 均为自然变换而且互为逆元. □

命题 13.33 (1) 对模同态 $M \xrightarrow{\zeta} M'$, $N \xrightarrow{\theta} N'$ 存在唯一群态

$$\zeta \otimes \theta : M \otimes_R M' \to N \otimes_R N'$$

满足条件

$$\zeta \otimes \theta(x \otimes y) = \zeta(x) \otimes \theta(y), \quad x \in M, y \in M'.$$

(2) 设有模同态 $\zeta, \zeta_1, \zeta_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ 及 $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. 则

$$(\zeta_1 + \zeta_2) \otimes \theta = \zeta_1 \otimes \theta + \zeta_2 \otimes \theta,$$
$$\zeta \otimes (\theta_1 \otimes \theta_2) = \zeta \otimes \theta_1 + \zeta \otimes \theta_2.$$

(3) $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes_R N}$.

(4) 设有模同态 $M \xrightarrow{\zeta} M', M' \xrightarrow{\lambda} M'', N \xrightarrow{\theta} N', N' \xrightarrow{\mu} N''$. 则

$$(\lambda \otimes \mu)(\zeta \otimes \theta) = \lambda\zeta \otimes \mu\theta.$$

证明 对 $x \in M, y \in N$, 设 $x * y = \zeta(x) \otimes \theta(y) \in M' \otimes N'$. 易证 $(M' \otimes N', *)$ 为 M, N 的一个平衡积, 故存在唯一同态记为 $\zeta \otimes \theta$ 使 $\zeta \otimes \theta(x \otimes y) = x * y$. 从而 (1) 得证. (2) 与 (3) 是显然的. 现在证明 (4), 由于 $M \otimes_R N$ 由集合 $\{x \otimes y | x \in M, y \in N\}$ 所生成, 故只需证明

$$(\lambda \otimes \mu)(\zeta \otimes \theta)(x \otimes y) = \lambda \otimes \mu(\zeta x \otimes \theta y) = (\lambda\zeta)x \otimes (y\theta)y = (\lambda\zeta \otimes \mu\theta)(x \otimes y). \quad □$$

定理 13.34 设 $M' \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ 为右 R 模序列, $N' \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\rho} N'' \to 0$ 为左 R 模序列. 则

$$((\lambda\otimes 1)(M'\otimes N)+(1\otimes\mu)(M\otimes N')) \xrightarrow{\varepsilon} M\otimes N \xrightarrow{\pi\otimes\rho} M''\otimes N'' \to 0$$

为正合序列, 其中 ε 为包含同态.

证明 (1) π 及 ρ 为满同态 $\Rightarrow (\pi\otimes\rho)(M\otimes N) \supseteq \{x''\otimes y'' | x''\in M'', y\in N''\} = S \Rightarrow (\pi\otimes\rho)(M\otimes N) = M''\otimes N''$, 因为 $M''\otimes N''$ 是由集合 S 所生成.

(2) 现我们计算 $\mathrm{Ker}(\pi\otimes\rho)$. 由 $\pi\lambda = 0 \Rightarrow (\pi\otimes\rho)(\lambda\otimes 1) = 0\otimes\rho = 0$, 知 $(\lambda\otimes 1)(M'\otimes N) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi\otimes\rho)$. 同样可证 $(1\otimes\mu)(M\otimes N') \subseteq \mathrm{Ker}(\pi\otimes\rho)$, 所以 $P = (\lambda\otimes 1)(M'\otimes N)+(1\otimes\mu)(M\otimes N') \subseteq \mathrm{Ker}(\pi\otimes\rho)$.

(3) 由 (2) 得同态 $\theta: M\otimes N/P \to M''\otimes N'': x\otimes y + P \mapsto \pi(x)\otimes\rho(y)$. 若能证明 θ 为同构, 则得证 $P = \mathrm{Ker}(\pi\otimes\rho)$. 为此, 我们寻找 θ 的逆元. 对 $x''\in M'', y''\in N''$, 若有 $x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in N$ 使 $\pi x_1 = x'' = \pi x_2$ 及 $\rho y_1 = y = \rho y_2$, 则由正合假设可找 $x'\in M'$ 及 $y'\in N'$ 使 $\lambda x' = x_1 - x_2$ 及 $\mu y' = y_1 - y_2$. 此时,

$$\begin{aligned} x_1\otimes y_1 &= (x_2+\lambda x')\otimes(y_2+\mu y') \\ &= x_2\otimes y_2 + \lambda x'\otimes y_2 + x_2\otimes\mu y' + \lambda x'\otimes\mu y', \end{aligned}$$

故 $x_1\otimes y_1 + P = x_2\otimes y_2 + P$, 所以对 $x''\in M'', y''\in M''$, 取 $x_1\in M, y_1\in N$, 则可定义 $x'' * y'' = x_1\otimes y_1 + P$. 这样 $(M\otimes N/P, *)$ 便成为 M'' 及 N'' 的一个平衡积. 由定义知有同态 $\eta: M''\otimes N'' \to (M\otimes N)/P: x''\otimes y'' \mapsto x_1\otimes y_1 + P$. 易证 $\eta\theta = \theta\eta = 1$. □

推论 13.35 设 N 为左 R 模, M 为右 R 模. 则 $-\otimes_R N$ 及 $M\otimes_R -$ 均为右正合函子.

在上节我们问如果要求 h^M, h_M 为正合函子, 则模 M 有什么性质. 同样我们可以对函子 $-\otimes_R M$ 及函子 $M\otimes_R -$ 考虑同样的问题.

定义 13.36 称右 R 模 M 为**平坦模** (flat module), 若 $-\otimes_R M$ 为正合函子; 称左 R 模 M 为平坦模, 若 $M\otimes_R -$ 为正合函子.

例 13.37 若 A 为一非零扭交换群 (即 $\forall a\in A, \exists n\in\mathbb{Z}$ 使 $na = 0$), 则 A 不是平坦模.

只要看正合序列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$, 其中 $\mathbb{Z}$ 为整数, $\mathbb{Q}$ 为有理数. 这时 $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong A, A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$, 因为 $a\in A \Rightarrow \exists n\in\mathbb{Z}$ 使 $na = 0 \Rightarrow a\otimes q = a\otimes n(\frac{q}{n}) = na\otimes\frac{q}{n} = 0\otimes\frac{q}{n} = 0, q\in\mathbb{Q}$, 所以 $A\otimes\mathbb{Z}\to A\otimes\mathbb{Q}$ 不是单同态.

例 13.38 由 $R\otimes_R M\cong M$ 知若把环 R 看作 R 模, R 便是平坦模.

命题 13.39 已给一族右 R 模 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 则 $\oplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ 为平坦模 $\Leftrightarrow M_\alpha$ 为平坦模.

证明 设 $0 \to N' \overset{\varphi}{\to} N$ 为正合. 有交换图表

$$\begin{tikzcd}
(\oplus M_\alpha) \otimes N' \arrow[r, "1\otimes\varphi"] \arrow[d, "\cong"'] & (\oplus M_\alpha) \otimes N \arrow[d, "\cong"'] \\
\oplus(M_\alpha \otimes N') \arrow[r, "\oplus(1_\alpha\otimes\varphi)"'] & \oplus(M_\alpha \otimes N)
\end{tikzcd}$$

其中 $\oplus(1_\alpha \otimes \varphi)(\sum x_\alpha \otimes y_\alpha) = \sum x_\alpha \otimes \varphi(y_\alpha)$ $(x_\alpha \in M_\alpha, y_\alpha \in N', \sum x_\alpha \otimes y_\alpha \in \oplus(M_\alpha \otimes N'))$. 易证 $1 \otimes \varphi$ 为单映射 $\Leftrightarrow 1_\alpha \otimes \varphi, \alpha \in I$ 为单映射. □

命题 13.40 投射模为平坦模.

证明 R 为平坦模 $\Rightarrow$ 任一自由模 $F = \oplus_{x\in X} xR$ 为平坦模. 若 P 为投射模, 则由定理 13.16 知有自由模 F 使 $F = P \oplus K$. 因为 F 是平坦模, 故 P 亦为平坦模. □

定义 13.41 设 M 为右 R 模, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), r \in R$. 则对 $x \in M$, 设 $(rf)(x) = f(xr)$, 称左 R 模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为 M 的特征模, 并记之为 M^*.

引理 13.42 设 A' 为交换群 A 的子群. 若 $a \in A, a \notin A'$, 则存在同态 $\phi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 使 $\phi(A') = 0$ 及 $\phi(a) \neq 0$.

证明 设 $G = A/A'$. 取 $0 \neq x \in G$. 若 x 的阶为 ∞, 则取任一 $0 \neq y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 定义映射

$$h : \mathbb{Z}x \mapsto \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : nx \mapsto ny.$$

若 x 的阶为 k, 即 $kx = 0$, 则在以上映射 h 的定义中取 $y = \frac{1}{k} + \mathbb{Z}$, 便有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}x \arrow[r] \arrow[d, "h\neq 0"'] & G \arrow[dl, "\tilde{h}"'] \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 可除 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 内射 $\Rightarrow$ 存在 $\tilde{h}|_{\mathbb{Z}x} = h \neq 0$. 现取 $x = a + A' \in G$, 这时,

$$\phi : A \overset{\pi}{\to} A/A' \overset{\tilde{h}}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

为所需的 ϕ. □

引理 13.43 以 M^* 记 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. R 模序列

$$0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0$$

正合当且仅当

$$0 \to M''^* \overset{\beta^*}{\to} M^* \overset{\alpha^*}{\to} M'^* \to 0$$

正合.

证明 $(\Rightarrow)$ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 为内射.

$(\Leftarrow)$ $\operatorname{Ker}\alpha^* = \operatorname{Img}\beta^* \Rightarrow \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Img}\alpha$.

(1) $\operatorname{Img}\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\beta$: 取 $x \in M'$ 使 $\beta\alpha(x) \neq 0$, 则由引理 13.42 知有同态 $\varphi \in M^*$ 使 $\varphi\beta\alpha(x) \neq 0$. 但由假设, $\varphi\beta\alpha = \alpha^*\beta^*(g) = 0$.

(2) $\operatorname{Ker}\beta \subseteq \operatorname{Img}\alpha$: 否则, 存在 $x \in \operatorname{Ker}\beta, x \notin \operatorname{Img}\alpha$. 由引理 13.42 知有同态 $\phi \in M^*$ 使 $\phi(\operatorname{Img}\alpha)$ 及 $\phi(x) \neq 0$. 但 $\phi(\operatorname{Img}\alpha) = 0 \Rightarrow 0 = \phi\alpha = \alpha^*(\phi) \Rightarrow \phi \in \operatorname{Ker}\alpha^* \subseteq \operatorname{Img}\beta^*$, 所以 $\phi = \beta^*(\varphi) = \varphi\beta, \varphi \in (M'')^*$, 由此可得 $\phi(x) = \varphi\beta(x) = 0$. 这与 $\phi(\beta) \neq 0$ 矛盾. □

命题 13.44 *右 R 模 M 为平坦模 $\Leftrightarrow$ M^* 为内射模.*

证明 $(\Rightarrow)$ 设 M 为平坦模. 则 $0 \to N' \to N$ 正合 $\Rightarrow 0 \to M \otimes N' \to M \otimes N$ 正合 $\Rightarrow 0 \to (M \otimes N)^* \to (M \otimes N')^* \to 0$ 正合. 用命题 13.32 得交换图表:

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\operatorname{Hom}_R(N, M^*) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(N', M^*) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

故知 $\operatorname{Hom}_R(-, M^*)$ 为正合函子, 即 M^* 为内射模.

$(\Leftarrow)$ 设 M^* 为内射模, $0 \to N' \to N$ 为正合序列. 用交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Hom}_R(N, M^*) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(N', M^*) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

知 $(M \otimes N)^* \to (M \otimes N')^* \to 0$ 为正合. 由引理 13.43, 得 $0 \to M \otimes N' \to M \otimes N$ 为正合, 即 M 为平坦模. □

13.4 同调

在本节我们固定一个环 R, 所有的模都是 R 模.

13.4.1 复形

定义 13.45 **一个复形** (complex) A 是指一列模 $\{A_n\}$ 及满足以下条件的同态列 $\{A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}\}$: 对 $n \in \mathbb{Z}$, $d_n d_{n+1} = 0$.

设 A 及 A'. 若有一组同态 $f_n : A_n \to A'_n$ 使下图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & A'_n \arrow[r, "d'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

交换, 则我们说存在一个**链映射** (chain map) $f : A \to A'$.

设 $f, g : A \to A'$ 是两个链映射. 如果存在一序列的同态 $s = \{s_n : A_n \to A'_{n+1}\}$ 使得

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

我们就说 f 与 g 是**链同伦** (chain homotopic) 的, 并且说 s 是从 f 到 g 的一个链伦移, 记作 $s : f \simeq g$. 下图可以帮助理解上式:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "f_n - g_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & A'_n \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

我们说 $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ 为正合, 若对所有 n,$A'_n \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{g_n} A''_n$ 为正合.

对任意两个复形 A, A', 由所有从 A 到 A' 的链映像所组成的集合 $\mathrm{Hom}(A, A')$ 是一个交换群. 链同伦是 $\mathrm{Hom}(A, A')$ 上的一个等价关系.

设有一列模 $\{A^n\}$ 及一列同态 $\{A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1}\}$, 并有条件 $d^n d^{n-1} = 0$. 则我们称 $\{A^n, d^n\}$ 为一个**上复形** (或上链复形, cochain complex). 如果我们引进记号 $A_n = A^{-n}$ 及 $d_n = d^{-n}$, 则我们从上复形 $\{A^n, d^n\}$ 得到一个复形 $\{A_n, d_n\}$. 同样, 一个上链映射 $f : A \to A'$ 是指一列同态 $f^n : A^n \to A'^n$ 使 $f^{n+1}d^n = d'^n f^n$; 一个上链伦移 $s : f \simeq g$ 是指一列同态 $s^n : A^n \to A'^{n-1}$ 使 $f^n - g^n = d'^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n$.

用范畴的语言: R 模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 是 Abel 范畴. 上链复形和链映射组成复形范畴 $C(\mathfrak{Mod}_R)$.

定理 13.46 (比较定理) 设 A, A' 为 R 模.

(1) 设复形 $\cdots \to X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ 中每一 X_n $(n \geqslant 0)$ 为投射模, 且有正合序列 $\cdots \to X'_2 \xrightarrow{d'_2} X'_1 \xrightarrow{d'_1} X'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} A' \to 0$. 则对于任一同态 $A \xrightarrow{f} A'$ 存在一链映射 $\bar{f} : X \to X'$ 使得 $f\varepsilon = \varepsilon' \bar{f}_0$; 而且若 $\bar{g} : X \to X'$ 为另一链映射使 $g\varepsilon = \varepsilon' \bar{g}_0$, 则 $\bar{f}$ 与 $\bar{g}$ 是链同伦的.

(2) 设上复形 $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \to X^1 \to X^2 \to \cdots$ 中每一 X^n $(n \geqslant 0)$ 为内射模, 且 $0 \to A' \xrightarrow{\varepsilon} X'^0 \to X'^1 \to X'^2 \to \cdots$ 为一正合序列. 则对任一同态 $A' \xrightarrow{f} A$ 存在一链映射 $\bar{f} : X' \to X$ 使得 $\varepsilon f = \bar{f}^0 \varepsilon'$; 而且若 $\bar{g} : X' \to X$ 为另一链映射使 $\varepsilon g = \bar{g}^0 \varepsilon'$, 则 $\bar{f}$ 与 $\bar{g}$ 是链同伦的.

证明 (1) 和 (2) 是对偶的, 我们只考虑第一个情形. 首先考虑 $\bar{f}$ 的存在性. 我们用归纳法证明.

$n=0$:

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d, "f\varepsilon"] & \\ X_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

因为 X_0 是投射模, 故有 $\bar{f}_0 : X_0 \to X_0'$ 使 $\varepsilon' \bar{f}_0 = f\varepsilon$.

$(n+1)$: 设已知 $\bar{f}_k$ $(k \leqslant n)$ 存在. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\bar{f}_n"] & X_{n-1} \arrow[d, "\bar{f}_{n-1}"] \\ X_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & X_n' \arrow[r, "d_n'"] & X_{n-1}' \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} d_{n+1}' = \operatorname{Ker} d_n' \Rightarrow d_n' \bar{f}_n d_{n+1} = \bar{f}_{n-1} d_n d_{n+1} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \bar{f}_n d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n' = \operatorname{Im} d_{n+1}'$. 所以有图表

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[d, "\bar{f}_n d_{n+1}"] & \\ X_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & \operatorname{Im} d_{n+1}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

因为 X_{n+1} 是投射模, 故有 $\bar{f}_{n+1} : X_{n+1} \to X_{n+1}'$ 使 $d_{n+1}' \bar{f}_{n+1} = \bar{f}_n d_{n+1}$.

现假设另有 $\bar{g} : X \to X'$ 满足同样条件, 我们逐步把链伦移做出来. 设 $X_{-1} = 0$ 及 $s_{-1} : X_{-1} \to X_0'$ 为零映射. 现设已造出 s_k $(k \leqslant n)$, 先计算

$$\begin{aligned} d_{n+1}'(\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) &= d_{n+1}'(\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1}) - d_{n+1}' s_n d_{n+1} \\ &= d_{n+1}'(\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1}) - (\bar{g}_n - \bar{f}_n - s_{n-1} d_n) d_{n+1} \\ &= d_{n+1}'(\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1}) - (\bar{g}_n - \bar{f}_n) d_{n+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\operatorname{Im}(\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) \subset \operatorname{Ker} d_{n+1}' = \operatorname{Im} d_{n+2}'$, 故有图表

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}"] & \\ X_{n+2}' \arrow[r, "d_{n+2}'"] & \operatorname{Im} d_{n+2}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由于 X_{+1} 是投射模, 知有 $s_{n+1} : X_{n+1} \to X_{n+2}'$ 使上图交换, 即

$$\bar{g}_{n+1} - \bar{f}_{n+1} = d_{n+2}' s_{n+1} - s_n d_{n+1}. \qquad \square$$

13.4.2 同调模

定义 13.47 设 $\{A,d\}$ 为一复形. 以 $Z_n(A)$ 记 $\mathrm{Ker}\, d_n$, 并称模 $Z_n(A)$ 内的元素为 n 维**闭链** (cycle). 以 $B_n(A)$ 记 $\mathrm{Img}\, d_{n+1}$, 并称模 $B_n(A)$ 的元素为 n 维**边链** (boundary). 称商模 $Z_n(A)/B_n(A)$ 为 A 的 n 次**同调模** (homology module), 并记作 $H_n(A)$, 称 $H_n(A)$ 内的元素为**同调类** (homology class). 若对所有 n, $H_n(A)=0$, 则称 A 为零调.

对上复形我们也有相似的定义, 分别以 $Z^n(A)$, $B^n(A)$, $H^n(A)$ 记 $\mathrm{Ker}\, d^n$, $\mathrm{Im}\, d^{n-1}$ 及 $Z^n(A)/B^n(A)$, 分别称 $Z^n(A)$, $B^n(A)$, $H^n(A)$ 里的元素为 n **上闭链** (cocycle), n **上边链** (coboundary) 及 n **上同调类** (cohomology class), 称 $H^n(A)$ 为 A 的 n 次**上同调模** (cohomology module).

定理 13.48 (1) 设 $f: A \to A'$ 是一复形的链映射. 则

$$H_n(f): H_n(A) \to H_n(A'): z_n + B_n(A) \mapsto f_n(z_n) + B_n(A'), \quad z_n \in Z_n(A)$$

定义一个同态, 而且若 $f, g: A \to A'$ 为链同伦, 则 $H_n(f) = H_n(g)$. 我们常把 $H_n(f)$ 简写为 $(f_n)_*$ 或 f_*.

(2) 设 $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ 是一个复形的正合序列. 则对任一 n, 以下公式

$$z'' + B_n(A'') \mapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z'' + B_{n-1}(A')$$

定义一个同态 $\partial_n: H_n(A'') \to H_{n-1}(A')$. 见图表:

$$\begin{tikzcd}
 & A_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & A_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

而且

$$\cdots \to H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(A'') \to \cdots$$

是一个正合序列, 称为 $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ 的**同调正合序列** (homology exact sequence). 若以下交换图表中行为复形的正合序列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "q"] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则下图亦交换:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n(A'') \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\alpha''_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha'_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(C) \arrow[r, "q_*"] & H_n(C'') \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(C'') \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

我们称 ∂_n 为**连接同态** (connecting homomorphism).

证明　先证明 (1). $b \in B_n(A) \Rightarrow b = d_{n+1}(a), a \in A_{n+1} \Rightarrow f_n(b) = f_n d_{n+1}(a) = d'_{n+1} f_{n+1}(a) \Rightarrow f_n(b) \in B_n(A')$. 于是由 $z_n + B_n(A) = y_n + B_n(A)$ 得 $f_n(z_n) + B_n(A') = f_n(y_n) + B_n(A')$. 这就是说 $H(f)$ 的定义与 z_n 的选择无关. 设 $s : f \simeq g$ 为链同伦. 则对 $z \in Z_n(A)$ 有

$$f_n(z) - g_n(z) = d'_{n+1} s_n(z) + s_{n-1} d_n z = d'_{n+1} s_n(z),$$

所以 $f_* = g_*$.

关于连接同态的定义: 设 $z'' \in Z_n(A'')$. 因为 p_n 是满同态, 有 $a \in A_n$ 使

$$p_n a = z'',$$

计算 $p_{n-1} d_n a = d''_n p_n a = d''_n z'' = 0$, 所以 $d_n a \in \operatorname{Ker} p_{n-1} = \operatorname{Im} i_{n-1}$, 即有 $a' \in A'_{n-1}$ 使 $i_{n-1} a' = d_n a$. 因为 d_{n-1} 是单同态, 故 $a' = i'_{n-1} d_n a$. 现设有另一个 $a_2 \in A_n$ 使 $p_n a_2 = z''$. 设 $a'_2 = i_{n-1}^{-1} d_n a_2$. 因为 $a - a_2 \in \operatorname{Ker} p_n = \operatorname{Im} i_n$, 有 $\tilde{a} \in A_{n-1}$ 使 $i_n \tilde{a} = a - a_2 \Rightarrow i_{n-1} d'_n \tilde{a} = d_n a - d_n a_2 \Rightarrow a' - a'_2 = d'_n \tilde{a} \in B_{n-1}(A')$, 这就是说定理中的定义给出一个同态:

$$\begin{aligned} Z_n(A'') &\to A'_{n-1}/B_{n-1}(A') \\ z'' &\mapsto +B_{n-1}(A'). \end{aligned}$$

计算 $i_{n-2} d'_{n-1} a' = d_{n-1} i_{n-1} a' = d_{n-1} d_n a = 0$, 因为 i_{n-2} 是单同态, 故 $d'_{n-1} a' = 0$. 即 $a' \in Z_{n-1}(A')$. 最后设 $z'' \in B_n(A'') \subseteq Z_n(A'')$, 即有 $a'' \in A''_{n+1}$ 使 $d_{n+1} a'' = z''$. 取 $\underline{a}$ 使 $p_{n+1} \underline{a} = a'' \Rightarrow p_n d_{n+1} \underline{a} = z''$, 但这时 $a' = i_{n-1}^{-1} d_n d_{n+1} \underline{a} = 0$.

由定理中所给条件, 知有行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r] \arrow[d, "d'_n"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & A''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_{n-1} \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] & A''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由蛇引理得行正合交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & A'_n/B_n(A') \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}'_n"] & A_n/B_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}_n"] & A''_n/B_n(A'') \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(A') \arrow[r] & Z_{n-1}(A) \arrow[r] & Z''_{n-1}(A'') &
\end{tikzcd}$$

只要注意到 $\operatorname{Ker} \tilde{d}_n = H_n(A)$ 及 $\operatorname{Cok} \tilde{d}_n = H_{n-1}(A)$, 我们立刻便可以由 “蛇引理” 得到同调正合序列.

定理中的最后一部分 (即 ∂_n 的自然性) 我们留给读者用追图法证明. □

若我们把上一定理中的所有箭头方向倒过来的话, 就不难证得以下的定理.

定理 13.49 (1) 任一上复形链映射 $f : A \to A'$ 必诱导同态 $f_* : H^n(A) \to H^n(A')$, 而且若 f 及 g 为链同伦, 则 $f_* = g_*$.

(2) 任一上复形正合序列

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

定义连接同态

$$\delta^n : H^n(A'') \to H^{n+1}(A'),$$

使上同调序列

$$\cdots \to H^{n-1}(A'') \to H^n(A') \to H^n(A) \to H^n(A'') \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A') \to \cdots$$

正合. 而且 δ^n 有以下的 "自然性": 若有行为正合的复形交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(A'') \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & H^{n+1}(A') \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(C) \arrow[r] & H^n(C'') \arrow[r, "\delta^n"] & H^{n+1}(C') \arrow[r] & H^{n+1}(C) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

亦交换.

13.5 导出函子

13.5.1 右导出函子与 Ext

我们说两个 R 模 A, A' 内射等价, 若存在内射 R 模 P, Q 使 $P \oplus A \cong Q \oplus A'$. 易证此乃一个等价关系. 我们暂以 $[A]$ 记 A 的内射等价类. 取任一 R 模 A, 根据定理 13.27 知有正合序列 $0 \to A \to Q \to B \to 0$, 其中 Q 为内射模. 若 Q' 亦为内射模, 则 $0 \to A \oplus Q' \to Q \oplus Q' \to B \to 0$ 亦为正合序列, 这样我们可以说内射等价类 $[A]$ 决定内射等价类 $[B]$. 我们把 A 与 B 之关系记为 $\sigma([A]) = [B]$, 显然 σ 是一个从模的内射等价类到模的内射等价类的映射 (称 σ 为移位算子).

引理 13.50 (Schamuel 引理) 设 $0 \to A \to Q \to C \to 0$ 及 $0 \to A \to Q' \to B \to 0$ 为正合序序列, 而且 Q 及 Q' 均为内射模. 则有同构

$$Q \oplus B \approx Q' \oplus C.$$

证明 以 S 记 $A \to Q$ 及 $A \to Q'$ 的纤维和, 做以下的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] & 0 \\
 & B \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

并且 $B \approx B'$ 及 $C \approx C'$, 但 Q, P 为内射模, 故图中 $0 \to Q' \to S \to C' \to 0$ 和 $0 \to Q \to S \to B' \to 0$ 必分裂, 这样便得以下同构:

$$Q \oplus B \approx Q \oplus B' \approx S \approx Q' \oplus C' \approx Q' \oplus C. \qquad \square$$

定理 13.51 设 $\mathfrak{Mod}_R$ 为 R 模范畴, $F : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_R$ 为左正合函子. 则除自然同构外存在唯一的一组函子 $R^nF : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_R$, 其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 满足以下条件:

(1) $R^0F \cong F$;

(2) 若 Q 为内射模和 $n > 0$, 则 $R^nF(Q) = 0$;

(3) 设 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 为正合序列. 则对任一 $n \geqslant 0$ 存在同态 δ^n : $R^nF(A'') \to R^{n+1}F(A')$ 使

$$\begin{aligned}
&0 \to R^0F(A') \to R^0F(A) \to R^0F(A'') \to \cdots \\
&\qquad \to R^nF(A') \to R^nF(A) \to R^nF(A'') \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(A') \to R^{n+1}F(A) \to \cdots
\end{aligned}$$

为正合序列.

此外, 若以下交换图表中行为正合序列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & R^nF(A) \arrow[r] \arrow[d] & R^nF(A'') \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & R^{n+1}F(A') \arrow[r] \arrow[d] & R^{n+1}F(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^nF(C) \arrow[r, "q_*"] & R^nF(C'') \arrow[r, "\delta^n"] & R^{n+1}F(C') \arrow[r] & R^{n+1}F(C) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

亦交换.

我们称定理中的 R^nF $(n \geqslant 0)$ 为 F 的**右导出函子** (right derived functor) 或右导函子.

我们分几步证明. 先证唯一性, 然后构造 R^nF, 最后证明所构造的 R^nF 有所要求的性质.

证明　现在我们可以证明 R^nF 的唯一性.

若有 R^nF 满足定理中的条件 (1) 至 (3), 则对任一正合序列

$$0 \to A \to Q \to C \to 0, \tag{$\star$}$$

其中 Q 为内射模, 必有正合序列

$$0 \to FA \to FQ \to FC \to R^1F(A) \to 0,$$

故 $R^1F(A) \cong \mathrm{Cok}(FQ \to FC)$, 即 $R^1F(A)$ 可由任何一个如 $(\star)$ 的正合序列 (其中 Q 为内射模) 所决定.

现设另一组函子 $\hat{R}^nF(A)$ 也满足定理中的条件 (1) 至 (3). 又假设有内射模 Q' 及正合序列 $0 \to A \to Q' \to B \to 0$ 并且 $\hat{R}^1F(A) \cong \mathrm{Cok}(FQ' \to FB)$, 我们把 $\{R^nF\}$ 及 $\{\hat{R}^nF\}$ 分别作用于 Schanuel 引理的证明中的交换图表, 便得到两个交换图表. 再利用 $R^0F = F \cong \hat{R}^0F$, 我们便可把这两个图合成以下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & FA \arrow[r] \arrow[d] & FQ \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & FC \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "1"] & R^1FA \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & FQ' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "4"] & FS \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "3"] & FC' \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & FB \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "5"] & FB' \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & \hat{R}^1FA \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

因为 Q 及 Q' 均为内射模, 故 $0 \to Q \to S \to B' \to 0$ 和 $0 \to Q' \to S \to C' \to 0$ 为分裂正合序列, 所以 $0 \to FQ \to FS \to FB' \to 0$ 和 $0 \to FQ' \to FS \to FC' \to 0$ 也

为分裂正合序列, 图中其余的行及列显然也是正合序列. 现在我们应用 2 方引理便得

$$R^1FA \cong k(1) \cong i(2) \cong k(3) \cong i(4) \cong k(5) \cong \hat{R}^1FA.$$

这就是 R^1FA, 除同构外, 由条件 (1) 至 (3) 所唯一决定.

现在我们对 n 用归纳法把 R^nF 的唯一性证完: 对正合序列 ($\star$) 用条件 (3) 得

$$\cdots \to R^{n-1}FQ \to R^{n-1}FC \to R^nFA \to R^nFQ \to \cdots.$$

若 $n \geqslant 1$, 则 $R^{n-1}FQ = R^nFQ = 0$, (条件 (2)) 所以

$$R^nFA \cong R^{n-1}FC.$$

若 Q 为内射模, 则由正合序列 $0 \to Q \to A \oplus Q \to A \to 0$ 及 (2) 和 (3) 得 $R^nF(A \oplus Q) \cong R^nF(A)$ $(n > 1)$, 所以若 A 与 A' 内射等价, 即有内射模 Q 与 Q' 使 $A \oplus Q = A' \oplus Q'$. 则 $R^nF(A) \cong R^nF(A \oplus Q) \cong R^nF(A' \oplus Q') \cong R^nF(A')$. 因此 R^nF 其实是在内射等价类上定义, 即有 $R^nF([A]) \cong R^nF(A)$, 这样利用移位算子便可把 $R^nFA \cong R^{n-1}FC$ 写为

$$R^nF(A) \cong R^{n-1}F(\sigma([A])).$$

利用已知 R^1F 的唯一性及以上公式便得 R^nF 是唯一的 (除同构外!).

我们来证明 R^nF 是存在的. 据定理 13.30, 任一模 A 有内射分解 $0 \to A \to Q^\bullet$. 从此分解可得复形

$$0 \to FQ^0 \to FQ^1 \to \cdots \to FQ^{n-1} \to FQ^n \to \cdots$$

(因为 F 是左正合, 所以我们只得到一个复形.). 现设 $R^nF(A) = H^n(FQ^\bullet)$, 并分别证明 $R^nF(A)$ 满足条件 (1) 至 (3).

(1) 利用 F 左正合性, 由 $0 \to A \to Q^0 \to Q^1$ 得正合序列

$$0 \to FA \to FQ^0 \to FQ^1,$$

所以 $FA \cong \operatorname{Ker}(FQ^0 \to FQ^1) = H^0(FQ^\bullet)$.

(2) 若 Q 为内射模, 则取内射分解为

$$0 \to Q \stackrel{\mathrm{Id}}{\to} Q \to 0.$$

对此用 F 则有 $0 \to FQ \to FQ \to 0$, 即若 $n > 0$, 则 $FQ^n = 0$. 故若 $n > 0$, 则有 $H^n(FQ^\bullet) = R^nF(Q) = 0$.

(3) 若 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 为正合序列, $0 \to A' \to Q'^\bullet$ 和 $0 \to A'' \to Q''^\bullet$ 为内射分解, 则不难用定理 13.30 证明, 若取 $Q^n = Q'^n \oplus Q''^n$, 则 $0 \to A \to Q^\bullet$ 为 A 的

内射分解, 且 $0 \to Q'^n \to Q^n \to Q''^n \to 0$ 为分裂正合序列. 用 F 便得到一个上复形正合序列

$$0 \to FQ'^{\bullet} \to FQ^{\bullet} \to FQ''^{\bullet} \to 0.$$

对此序列应用本节定理 13.49 便得条件 (3). □

假如 $F : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 是一个 R 模的左正合反变函子则我们可以模仿定理 13.51证明 F 亦有唯一的右导反变函子 R^nF. 这时 (i)$R^\circ F \cong F$, (ii) 对投射模 P 及 $n > 0$, $R^nF(P) = 0$, (iii) 若 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 为正合序列则存在同态 $\delta^n : R^nF(A') \to R^{n+1}F(A'')$ 并且 δ^n 满足一些如定理 13.51中适当条件. 事实上从模 A 的任一投射分解 $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ 可得复形 $0 \to FP_0 \to FP_1 \to FP_2 \to \cdots$ 则 $R^nF(A) = H^n(FP_\bullet)$.

定理 13.52 设有函子 $F : ({}_R\mathfrak{Mod})^\circ \times {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 满足以下条件:

(1) 对固定的模 A, $F(A,-) : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 是一个左正合共变函子, 而且对任一内射模 Q, $F(-,Q)$ 为正合函子, 以 $R^n_{II}F_A$ 记 $F(A,-)$ 的右导函子.

(2) 对固定的模 C, $F(-,C) : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 是一个左正合反变函子, 而且对任投射模 P, $F(P,-)$ 为正合函子, 以 $R^n_IF_C$ 记 $F(-,C)$ 的右导函子.

则

$$R^n_{II}F_A(C) \cong R^n_IF_C(A).$$

证明　从定理 13.51 知, 除同构外, $\{R^n_{II}F_A\}$ 由条件 (1) 至 (3) 所唯一决定, 故只需要证明 $\{R^n_IF_-(A)\}$ 亦满足条件 (1) 至 (3).

(1) 考虑函子 $C \to R^n_IF_C(A)$. 由 $R^n_IF_C$ 的定义知

$$R^n_IF_C(A) = F(A,c).$$

(2) 若 Q 为内射模, $n > 0$, 我们要求 $R^n_IF_Q(A) = 0$, 因为 $F(-,Q)$ 为反变函子. 我们要计算 $R^n_IF_Q(A)$ 就要取投射分解 $P_\bullet \to A \to 0$, 然后计算复形 $F(P_\bullet,Q)$ 的 n 维上同调模 $H^n(F(P_\bullet,Q))$. 但由假设 $F(-,Q)$ 为正合函子, 故复形 $F(P_\bullet,Q)$ 为正合序列. 所以当 $n > 0$ 时, $R^n_IF_Q(A) = H^n(F(P_\bullet,Q)) = 0$.

(3) 现设有正合序列 $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$.

先取 A 的投射分解 $P_\bullet \to A \to 0$. 由假设, 对 $n \geqslant 0$, $F(P_n,-)$ 为正合函子故可得以下的复形正合序列

$$0 \to F(P_\bullet,C') \to F(P_\bullet,C) \to F(P_\bullet,C'') \to 0.$$

对此应用定理 13.49 便可得定理 13.51 中的条件 (3). □

右导函子的一个最重要例子便是从 Hom_R 函子得出来的 Ext 函子. 固定 R 模 A, 设 $T = \mathrm{Hom}_R(A,-)) : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$. 记 $R^nT(C)$ 为 ${}_{II}\,\mathrm{Ext}^n_R(A,C)$.

固定 R 模 C, 引入函子 $S = \mathrm{Hom}_R(-, C) : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$. 记 $R^nS(C)$ 为 ${}_I\,\mathrm{Ext}^n_R(A, C)$.

由定理 13.52 知

$$ {}_I\,\mathrm{Ext}^n_R(A, C) \cong {}_{II}\,\mathrm{Ext}^n_R(A, C), $$

故可简记这些除同构外唯一决定的 R 模为 $\mathrm{Ext}^n_R(A, C)$.

符号 Ext 的来源是因为 $\mathrm{Ext}^1_R(A, C)$ 和**群扩张** (group extension) 有关, 参见黎景辉, 代数群引论 (第二篇第五章), 北京: 科学出版社, 2006.

注意当 $n > 0$, P 为投射模, Q 为内射模时, 对任何模 A, $\mathrm{Ext}^n_R(P, A) = 0 = \mathrm{Ext}^n_R(A, Q)$.

命题 13.53 (1) $\mathrm{Ext}^n_R(\oplus_k A_k, B) \cong \prod_k \mathrm{Ext}^n_R(A_k, B)$;
(2) $\mathrm{Ext}^n_R(A, \prod_k B_k) \cong \prod_k \mathrm{Ext}^n_R(A, B_k)$.

证明 (1) $n = 0$ 时, 这是 Hom 的性质, 在讨论直和与直积时已经说明.

$n = 1$ 时, 对每一个 k, 取正合序列

$$ 0 \to L_k \to P_k \to A_k \to 0, $$

其中 P_k 为投射模. 由此便得正合序列

$$ 0 \to \oplus L_k \to \oplus P_k \to \oplus A_k \to 0, $$

其中 $\oplus P_k$ 为投射模. 由右导函子性质便得以下交换图表

$$ \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\oplus P_k, B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\oplus L_k, B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_R(\oplus A_k, B) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathrm{Ext}^1_R(\oplus P_k, B) = 0 \\ \prod\limits_k \mathrm{Hom}(P_k, B) \arrow[r] & \prod\limits_k \mathrm{Hom}(L_k, B) \arrow[r] & \prod\limits_k \mathrm{Ext}^1_R(A_k, B) \arrow[r] & \prod\limits_k \mathrm{Ext}^1_R(P_k, B) = 0 \end{tikzcd} $$

其中行为正合. 利用这个图不难证明

$$ \mathrm{Ext}^1_R(\oplus A_k, B) \cong \prod_k \mathrm{Ext}^1_R(A_k, B). $$

下一步考虑 $n > 1$ 的情形. 用归纳法研究下图

$$ \begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^{n-1}_R(\oplus P_k, B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-1}_R(\oplus L_k, B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Ext}^n_R(\oplus A_k, B) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_R(\oplus P_k, B) \\ \prod\limits_k \mathrm{Ext}^{n-1}_R(P_k, B) \arrow[r] & \prod\limits_k \mathrm{Ext}^{n-1}_R(L_k, B) \arrow[r, "\delta'"] & \prod\limits_k \mathrm{Ext}^n_R(A_k, B) \arrow[r] & \prod\limits_k \mathrm{Ext}^n_R(P_k, B) \end{tikzcd} $$

因为 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(\oplus P_k, B)$, $\prod_k \mathrm{Ext}_R^{n-1}(P_k, B)$, $\mathrm{Ext}_R^n(\oplus P_k, B)$ 和 $\prod_k \mathrm{Ext}_R^n(P_k, B)$ 都是 0, 从行为正合知 δ 及 δ' 为同构, 再由归纳假设知

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(\oplus L_k, B) \xrightarrow{\alpha} \prod_k \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L_k, B)$$

亦为同构. 这样

$$\delta'\alpha\delta^{-1} : \mathrm{Ext}_R^n(\oplus A_k, B) \to \prod_k \mathrm{Ext}_R^n(A_k, B)$$

便是我们所需要的同构.

(2) 为 (1) 的对偶, 证法可相仿. □

13.5.2 左导出函子与 Tor

在上一段我们讨论了左正合函子的右导函子, 与此相对便是右正合函子的左导函子.

定理 13.54 设 $T : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 是一个 R 模范畴上的右正合函子. 则对 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 存在函子 $L_nT : {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 使

(1) $L_0F \cong T$;

(2) 若 $n > 0$, P 为投射模, $L_nT(P) = 0$;

(3) 对任一正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, $n \geqslant 0$ 存在同态 $\delta_n : L_nT(A'') \to L_{n-1}T(A')$ 使

$$\begin{aligned}\cdots \to L_nT(A') \to L_nT(A) \to L_nT(A'') \xrightarrow{\alpha_n} L_{n-1}T(A') \to L_{n-1}T(A)\\ \to L_{n-1}T(A'') \to L_0T(A') \to L_0T(A) \to L_0F(A'') \to 0\end{aligned}$$

为正合序列.

而且, 若以下交换图表中行为正合序列:

$$\begin{CD} 0 @>>> A' @>>> A @>>> A'' @>>> 0\\ @. @VVV @VVV @VVV @.\\ 0 @>>> C' @>>> C @>>> C'' @>>> 0 \end{CD}$$

则

$$\begin{CD} \cdots @>>> L_nT(A) @>>> L_nT(A'') @>{\delta_n}>> L_{n+1}T(A') @>>> \cdots\\ @. @VVV @VVV @VVV @.\\ \cdots @>>> L_nT(C) @>>> L_nF(C'') @>{\delta_n}>> L_{n-1}T(C') @>>> \cdots \end{CD}$$

亦是一个交换图表. 还可以证明, 除自然同构外, L_nT 唯一由条件 (1) 至 (3) 所决定.

我们称由定理 13.54 所决定的函子 L_nT 为 T 的左导出函子或**左导函子** (left derived functor). 事实上, 取模 A 的任一投射分解 $P_\bullet \to A \to 0$, 便可得复形

$$\cdots \to TP_2 \to TP_1 \to TP_0 \to 0.$$

$L_nT(A)$ 便是 $H_n(TP_\bullet)$. 又若给出模同态 $f: A \to A'$ 及投射分解 $P'_\bullet \to A' \to 0$, 用比较定理知有链映射 $\bar{f}: P_\bullet \to P'_\bullet$, 这样我们便可设 $L_nT(f)$ 为 $H_n(T\bar{f}): L_nT(A) \to L_nT(A')$. 读者应该模仿定理 13.51 对定理 13.54 给出详细证明.

又若 T 为右正合反变函子, 利用内射分解, 我们便可算出 T 的左导函子, 并证明与定理 13.54 相仿的性质, 我们不再做详细讨论. 显然以上关于导函子的讨论亦适用于任何从 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 到 Ab 的函子.

我们已知 $A \mapsto A \otimes_R B$ 及 $B \mapsto A \otimes_R B$ 均是 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 上的右正合函子. 设 $T = - \otimes_R B$, 记 $L_nT(A)$ 为 ${}_I\operatorname{Tor}_n^R(A, B)$; 又设 $S = A \otimes_R -$, 并记 $L_nS(B)$ 为 ${}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(A, B)$.

因为投射模为平坦模, 我们可以利用一个和定理 13.52 相仿的定理去证明

$${}_I\operatorname{Tor}_n^R(A, B) \cong {}_{II}\operatorname{Tor}_n^R(A, B).$$

有了这个同构我们更可以把这些交换群简记为 $\operatorname{Tor}_n^R(A, B)$.

13.5.3 泛 δ 函子

此段讲述导函子的泛性, 我们只讨论左正合函子的右导函子, 其他情形读者可类推. 在下面的定义我们用了 “交换范畴” 这个下一章的概念. 在这里读者可把交换范畴念作模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$.

定义 13.55 设 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 为交换范畴, 一个由 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 δ **函子** (δ functor) 是指一组函子 $T = (T^n)_{n \geqslant 0}$ 及对每一个正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 有一组态射 $\delta^n: T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$ 满足条件:

(1) $0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} \cdots \to T^n(A') \to T^n(A) \to T^n(A'') \xrightarrow{\delta^n} T^{n+1}(A') \cdots$ 是正合序列;

(2) 若

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

交换, 则

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(B'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(B') \end{array}$$

亦交换.

定义 13.56 设 $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是 δ 函子. 若对任一 δ 函子 $S:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 及任一自然变换 $f^0:T^0\to S^0$, 存在唯一的 $f^n:T^n\to S^n$ $(n\geqslant 1)$. 若对任一正合序列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$,

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A') \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^n_{A''}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{n+1}_{A'}} \\ S^n(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & S^{n+1}(A') \end{array}$$

为交换图表, 则称 T 为**泛 δ 函子** (universal δ functor).

定义 13.57 称加性函子 $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 为**可抹函子** (effaceable functor), 若对 $A\in\operatorname{Obj}\mathfrak{A}$ 存在单同态 $0\to A\xrightarrow{u}M$ 使 $F(u)=0$.

命题 13.58 设 $T=(T^n)_{n\geqslant 0}:\mathfrak{Mod}_R\to\mathfrak{Mod}_R$ 为 R 模范畴的 δ 函子. 若对 $n>0$, T^n 为可抹的, 则 T 为泛 δ 函子.

证明 设 A 为 R 模, 由假设知有正合序列 $0\to A\xrightarrow{i}M\xrightarrow{p}A'\to 0$ 使 $T^1(A)\to T^1(M)$ 为 0.

现设 $S=(S^n)_{n\geqslant 0}:\mathfrak{Mod}_R\to\mathfrak{Mod}_R$ 亦为 δ 函子, 并有 $f^0:T^0\to S^0$. 我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccccc} T^0(M) & \xrightarrow{T^0(p)} & T^0(A') & \xrightarrow{\delta^0} & T^1(A) & \xrightarrow{0} & T^1(M) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^0_M} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^0_{A'}} & & \vdots & & \\ S^0(M) & \xrightarrow{S^0(p)} & S^0(A') & \xrightarrow{\delta^0} & S^1(A) & & \end{array}$$

显然只有一个 $f^1_A:T^1(A)\to S^1(A)$ 使上图交换. 事实上, 因为两行均为正合, 对 $a\in T^1(A)$, $f^1_A(a)=\delta^0 f^0_{A'}((\delta^0)^{-1}(a))$.

现另取一正合序列 $0\to B\to Q\to B'\to 0$ 及同态 $A\xrightarrow{f}B$. 若 Q 为内射模, 则有同态 $M\xrightarrow{g}Q$ 及 $A'\xrightarrow{h}B'$ 使图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换. 用上面的方法我们可以构造同态 $f_B^1 : T^1(B) \to S^1(B')$, 我们需要证明下图

$$\begin{tikzcd}
T^1(A) \arrow[r, "T^1(f)"] \arrow[d, "f_A^1"] & T^1(B) \arrow[d, "f_B^1"] \\
S^1(A) \arrow[r, "S^1(f)"] & S^1(B)
\end{tikzcd}$$

是交换图表. 为此, 考虑下图, 其中除以上图外其余四方形都交换:

$$\begin{tikzcd}
T^0(A') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_{A'}^0"] & & T^1(A) \arrow[dr, "T^1(f)"] \arrow[dd, "f_A^1"] & \\
& T^0(B') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd, "f_{B'}^0"] & & T^1(B) \arrow[dd, "f_B^1"] \\
S^0(A') \arrow[rr, "\delta_1"] \arrow[dr, "S^0(h)"'] & & S^1(A) \arrow[dr, "S^1(f)"] & \\
& S^0(B') \arrow[rr, "\delta_1"] & & S^1(B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f_B^1 T^1(f)\delta &= f_B^1 \delta T^0(h) = \delta_1 f_{B'}^1 T^0(h) = \delta_1 S^0(h) f_{A'}^0 \\
&= S^1(f)\delta_1 f_{A'}^0 = S^1(f) f_A^1 \delta.
\end{aligned}$$

但因为 δ 是满同态即有右逆元, 所以 $f_B^1 T^1(f) = S^1(f) f_A^1$.

对任意模 A 必有内射模 Q 及正合序列 $0 \to A \to Q \to A'' \to 0$. 在以上公式中取 $f = 1_A$, 我们便可得到 f_A^1 的定义与正合序列 $0 \to A \to M \to A' \to 0$ 无关. 又从 f^1 的定义, 知 f^1 为 f^0 所唯一决定.

利用归纳法, 我们便可证明 f_A^n $(n > 1)$ 的存在性. □

命题 13.59 *左正合函子 $F : \mathfrak{Mod}_R \to \mathfrak{Mod}_R$ 的右导函子 $(R^n F)_{n \geqslant 0}$ 是泛 δ 函子.*

证明 从定理 13.51 知 $(R^n F)_{n \geqslant 0}$ 是 δ 函子. 对任一 R 模 A 有单同态 $A \xrightarrow{u}$, 其中 Q 为内射模 (定理 13.27). 对 $n > 0$, $R^n F(Q) = 0$, 故 $R^n F(u) = 0$, 即 $R^n F$ 是可抹的. 由命题 13.58 , 知 $R^n F$ 是泛 δ 函子. □

13.5.4 K 群

固定域 F 及有限维 F 代数 A. 以 $M \in \mathfrak{mod}_A$ 为有限维 A 模, M 的 A 模同构类记为 $cl(M)$. 设 $S = \{cl(M) : M \in \mathfrak{mod}_A\}$. 以 $\langle S \rangle$ 记由 S 所生成的自由 $\mathbb{Z}$ 模, 即交换自由群. 考虑 $\langle S \rangle$ 内这样的集合 R, 每有 A 模正合序列

$$0 \to N \to M \to Q \to 0$$

便在 R 内放以下一元素

$$cl(N) - cl(M) + cl(Q).$$

以 I 记 R 所生成的 $\langle S\rangle$ 的子群. 现在定义 **Grothendieck 群**为

$$K_0(A) := \langle S\rangle / I.$$

A 模 M 所决定 $K_0(A)$ 的元素记为 $[M]$, 零模 $\mathbf{0}$ 所决定的元素则简记为 0.

按定义若有 A 模正合序列

$$0 \to N \to M \to Q \to 0,$$

则在 $K_0(A)$ 有

$$[M] = [N] + [Q].$$

从 A 模直和得正合序列

$$0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0,$$

所以

$$[N \oplus M] = [N] + [M].$$

引理 13.60 设有 A 模正合序列

$$0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{k-1}} M_k \xrightarrow{\phi_k} 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim_F M_i = 0$$

和

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i [M_i] = 0.$$

证明 从正合序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi_i \to M_i \to \operatorname{Img}\phi_i = \operatorname{Ker}\phi_{i+1} \to 0$$

得

$$\dim_F \operatorname{Ker}\phi_i - \dim_F M_i + \dim_F \operatorname{Ker}\phi_{i+1} = 0,$$
$$[\operatorname{Ker}\phi_i] - [M_i] + [\operatorname{Ker}\phi_{i+1}] = 0.$$

取和. □

命题 13.61 设 F 代数 A 满足条件: 存在正整数 i_A 使得对任意 A 模 M, N, 若 $i > i_A$, 则 $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$. 于是可以设

$$\langle M, N\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_A(M, N).$$

(1) 若 $[M] = [M']$ 和 $[N] = [N']$, 则 $\langle M, N\rangle = \langle M', N'\rangle$. 于是可设

$$\langle [M], [N]\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_A(M, N).$$

(2) 由上式所定义的函数

$$\langle \bullet, \bullet\rangle : K_0(A) \times K_0(A) \to \mathbb{Z}$$

为双线性函数.

证明 若 $[M] = [M']$ 和 $[N] = [N']$, 则 $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_A(M, N)$.

按导函子性质: 由 A 模 L 和正合序列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

得正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(L, M') \to \mathrm{Ext}^i(L, M) \to \mathrm{Ext}^i(L, M'') \to \mathrm{Ext}^{i+1}(L, M') \to \cdots.$$

按前面引理 $\sum_j (-1)^j \dim_F * = 0$, 即

$$\sum_i (-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_A(L, M') - \sum_i (-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_A(L, M) + \sum_i (-1)^i \dim_F \mathrm{Ext}^i_A(L, M'') = 0,$$

亦即

$$\langle L, M'\rangle - \langle L, M\rangle + \langle L, M''\rangle = 0,$$

于是函数 $L \mapsto \langle L, \bullet\rangle$ 在 R 上等于 0. 所以可以扩张这个函数为 $K_0(A)$ 的 $\mathbb{Z}$ 线性函数.

同理可证 $N \mapsto \langle \bullet, N\rangle$ 有同样性质. □

这样从一个代数 A 出发得到双线性型 $\langle \bullet, \bullet\rangle$, 从这个双线性型得到二次型 q, 以 $\mathscr{G}_A$ 记这个 q 的图, 于是可以问 A 与 $\mathscr{G}_A$ 有什么关系呢? 可以参考

[1] P. Gabriel, A. V. Roiter, *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Springer.

这里介绍的 K_0 群只是 K 理论的起点. 首先要分开所谓拓扑 K 理论如

[1] M. Atiyah, *K Theory*, Benjamin, 1967.

解析 K 理论如

[1] N. Higson, J. Roe, *Analytic K Homology*, Oxford, 2000.

代数 K 理论如

[1] V. Srinivas, *Algebraic K Theory*, Birkhauser, 1995.

历史上很早就定义了 K_0, K_1, K_2, 比如见 H. Bass 的 762 页的书 *Algebraic K Theory*, Benjamin, 1968. 但是研究没有进展直至 D. Quillen 引入代数拓扑学中的同伦方法才构造出所有的 K_n, 因此在 1978 年 Quillen 获得菲尔兹奖, 还有 Voevoski 解决了 Milnor 关于 K 群的猜想并因此获得 2002 年菲尔兹奖. 代数 K 理论还有很多有待解决的很难的问题埋藏在 Grothdendieck 的 motive 理论里, 要找到答案可能需要新的方法, 比如 Jacob Lurie 的同伦代数几何学. 谁会成为未来的风云人物呢?

A. Grothendieck 是 20 世纪伟大的代数几何学家. 他在 1966 年获得菲尔兹奖, 他是 L. Schwartz (1950 年菲尔兹奖得主) 的学生. Grothendieck 的学生 Berthelot, Deligne, Demazure, Gabriel, Giraud, Illusie, Raynaud, Verdier 之中只有 Deligne 获得 1978 年菲尔兹奖. 2002 年获得菲尔兹奖的 Laurent Lafforgue 及 2010 年获得菲尔兹奖的 Ngô Bảo Châu (越南数学家) 是 Laumon 的学生, 而 Laumon 师从 Grothendieck 的学生 Illusie. 这也许算是巴黎一族吧!

关于 Grothendieck 的故事可以看

[1] 欧阳毅译 (http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/gro.pdf).

[2] Illusie 的回忆文章
(http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/reminiscences1.pdf).

[3] Frans Oort 的回忆文章
(http://www.staff.science.uu.nl/~oort0109/AG-roots9.pdf).

[4] Deligne 的一篇介绍 Grothendieck 的数学思想的文章
(http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/deligne.pdf).

13.6 群同调

从群 G 构造出群环 $\mathbb{Z}G$, $\mathbb{Z}G$-模范畴上的右导函子 $R\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}$ 便是 $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}G}$, 这就是 G 的上同调群.

13.6.1 同调群

从任一个群 G 可以构造一个环 $\mathbb{Z}G$, 此环的加群就是以 G 为基的自由交换群, 而它的乘法则由 G 决定. $\mathbb{Z}G$ 的任一个元可以写成 $\sum_{g\in G} m_g g$, 其中 $m_g \in \mathbb{Z}$ 而且除有限

个 m_g 外其余都是 0. 这样 $\mathbb{Z}G$ 的两个元的乘法便可写成

$$\left(\sum_{g\in G} m_g g\right)\left(\sum_{h\in G} n_h h\right) = \sum_{g,h\in G} m_g n_h gh,$$

我们称 $\mathbb{Z}G$ 为 G 的整群环, 并简称 $\mathbb{Z}G$ 模为 G 模. 对 $g \in G, n \in \mathbb{Z}$, 设 $g \cdot n = n$. 则 $\mathbb{Z}$ 便是一个 G 模, 这时我们亦称 $\mathbb{Z}$ 是一个平凡 G 模.

设 A, B 为 G 模, 以 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 记由所有从 A 到 B 的群同态所组成的交换群. 对 $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, 以 $g\varphi$ 记映射 $a \mapsto g\varphi(g^{-1}a)$, $a \in A$. 显然 $g\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, 这样 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 便是一个 G 模.

定义 13.62 设有群 G 及 G 模 A, 把 $\mathbb{Z}$ 看作平凡 G 模, 对 $n \geqslant 0$ 定义

$$H^n(G, A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A),$$
$$H_n(G, A) := \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(\mathbb{Z}, A).$$

我们称 $H^n(G, A)$ 为以 A 为系数的 G 的 n 维上同调群或简称为 G 对 A 的 n 上同调群, 称 $H_n(G, A)$ 为 G 对 A 的 n 同调群.

13.6.2 上同调群的计算

我们计算几个上同调群, 根据 Ext 的定义, 我们知道计算 $H^n(G, A)$ 就是计算 $\mathrm{Hom}_G(-, A)$ 的导函子. 为此先找一个 $\mathbb{Z}$ 的投射 G 模分解.

以 G^n 记 n 个 G 的直积, 以 P_n 记由 G^{n+1} 所生成的自由交换群. 利用以下公式, P_n 可看作一个 G 模:

$$s \in G, \quad (g_0, \cdots, g_n) \in G^{n+1}, \quad s \cdot (g_0, \cdots, g_n) = (sg_0, \cdots, sg_n),$$

以 $(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_n)$ 表示 G^n 里的元 $(g_0, \cdots, g_{i-1}, g_{i+1}, \cdots, g_n)$, 以下公式

$$(g_0, \cdots, g_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_n)$$

定义一个 G 模同态 $d_n : P_n \to P_{n-1}$. 显然 $P_0 = \mathbb{Z}G$. 设 $\varepsilon : P_0 \to \mathbb{Z} : \sum m_g g \mapsto \sum m_g$. 称 ε 为增广映射.

引理 13.63 $\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 G 模分解.

证明 (1) P_n 显然是以 $(1, g_1, \cdots, g_n)$ 为基的自由 G 模;

(2) 以 d_0 记 ε, 则 $d_{n-1}d_n=0$. 显然 $d_0d_1=0$. 余下对 $n\geqslant 2$ 计算

$$\begin{aligned}
d_{n-1}d_n(g_0,\cdots,g_n) &= d_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,g_n)\\
&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\cdots,\hat{g}_j,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,g_n)\\
&\quad+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,\hat{g}_j,\cdots,g_n)\\
&=\sum_{j<i}(-1)^{i+j}(g_0,\cdots,\hat{g}_j,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,g_n)\\
&\quad+\sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}(g_0,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,\hat{g}_j,\cdots,g_n)\\
&=0.
\end{aligned}$$

(3) 以 P_{-1} 记 $\mathbb{Z}$, 则从 (2) 知 $P=\{P_n,d_n\}_{n\geqslant -1}$ 为复形. 要证明正合性, 我们只要证明 P 作为 $\mathbb{Z}$ 模的复形是正合的, 故现在只需要证明这复形是零调的.

假如我们能够证明复形 P 的恒等映射 1 与它的零映射 0 链同伦, 则应用定理 13.48 便得

$$H_n(P)=1_*(H_n(P))=0_*(H_n(P))=0.$$

由链同伦的定义, 我们只需要找到 $\mathbb{Z}$ 模映像

$$\cdots\leftarrow P_2\overset{s_2}{\leftarrow}P_1\overset{s_1}{\leftarrow}P_0\overset{s_{-1}}{\leftarrow}P_{-1}=\mathbb{Z},$$

使

$$d_{n+1}s_n+d_{n-1}d_n=1_{P_n}$$

及

$$d_{-1}s_{-1}=1_{P_{-1}}.$$

定义 $S_{-1}:P_{-1}\to P_0:n\mapsto n(1)$ (其中 1 为 G 的单位元). 若 $n\geqslant 0$, 取 s_n 为映射

$$(g_0,\cdots,g_n)\mapsto(1,g_0,\cdots,g_n),$$

直接计算有

$$d_{-1}s_{-1}(1)=s_{-1}(1)=1$$

及

$$\begin{aligned}(d_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n)(g_0,\cdots,g_n) &= d_{n+1}(1,g_0,\cdots,g_n)\\ &\quad+s_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,g_n)\\ &=(g_0,\cdots,g_n)+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}(1,g_0,\cdots,\hat{g}_j,\cdots,g_n)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1,g_0,\cdots,\hat{g}_i,\cdots,g_n)\\ &=(g_0,\cdots,g_n).\end{aligned}$$ □

我们常称引理 13.63 中的分解为齐性**标准分解** (standard resolution). 回头去算 $H^n(G,A)$, 此群里的元素既然是 G 模的同态当然可看作满足以下条件的函数 $f:G^{n+1}\to A$,

$$f(sg_0,\cdots,sg_n)=sf(g_0,\cdots,g_n),$$

但是

$$(g_0,\cdots,g_n)=g_0(1,h_1,h_1h_2,\cdots,h_1h_2\cdots h_n),$$

其中 $h_1=g_0^{-1}g_1,h_2=g_1^{-1}g_2,\cdots,h_n=g_{n-1}^{-1}g_n$, 所以 f 事实上是由 G^{n+1} 内的元素 $(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1g_2\cdots g_n)$ 上的值所决定. 换句话说, 我们有一个双射

$$\theta:\mathrm{Hom}_G(P,A)\to\mathrm{Map}(G^n,A):f\mapsto\varphi,$$

其中 $\varphi(g_1,\cdots,g_n)=f(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1g_2\cdots g_n)$, 而 $\mathrm{Map}(G^n,A)$ 是指所有由集 $G\times\cdots\times G$ (n 次) 到集 A 的映射. 当 $n=0$ 时, 我们指定 G^0 为只有一个元 [] 的集合. 现在我们说存在一个映射 $d^n:\mathrm{Map}(G^{n-1},A)\to\mathrm{Map}(G^n,A)$ 使图表

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_G(P_{n-1},A) \arrow[r, "d_n^*"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathrm{Hom}_G(P_n,A) \arrow[d, "\theta"] \\ \mathrm{Map}(G^{n-1},A) \arrow[r, "d^n"'] & \mathrm{Map}(G^n,A)\end{tikzcd}$$

交换. 我们所需要的 d^n 是由以下公式定义:

$$\begin{aligned}d^n\varphi(g_1,\cdots,g_n)&=g_1\varphi(g_2,\cdots,g_n)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n)+(-1)^n\varphi(g_1,\cdots,g_{n-1}).\end{aligned}$$

当 $n=1,2,3$ 时, 以上公式便是:

$$d^1\varphi(g)=g\varphi([])-\varphi([]),$$
$$d^2\varphi(g_1,g_2)=g_1\varphi(g_2)-\varphi(g_1g_2)+\varphi(g_1),$$
$$d^3\varphi(g_1,g_2,g_3,)=g_1\varphi(g_2,g_3)-\varphi(g_1g_2,g_3)+\varphi(g_1,g_2g_3)-\varphi(g_1,g_2).$$

定义 13.64 G 为群, A 为 G 群.

(1) 若对任一 $g\in G, ga=a\in A$, 则说 a 是 G 的作用下不变. 记 ${}^GA=\{a\in A|ga=a\}$;

(2) 若映射 $\varphi: G\to A$ 满足以下条件

$$\varphi(gg')=\varphi(g)+g\varphi(g')\quad(g,g'\in G),$$

则称 φ 为一个**交叉同态** (crossed homomorphism). 称 $\varphi: G\to A: g\mapsto ga-a$ (其中 $a\in A$) 为主交叉同态. 两个交叉同态 φ,ψ 为等价, 若 $\varphi-\psi$ 为一个主交叉同态, 即存在 $a\in A$ 使

$$\psi(g)=-a+\varphi(g)+ga.$$

(3) 若映射 $\varphi: G\times G\to A$ 满足以下条件

$$g_1\varphi(g_2,g_3)-\varphi(g_1g_2,g_3)+\varphi(g_1,g_2g_3)-\varphi(g_1,g_2)=0,$$

则称 φ 为一个**因子组** (factor system). 设 $\psi: G\to A$ 是交叉同态, 则称

$$\varphi: G\times G\to A:(g_1,g_2)\mapsto g_1\psi(g_2)-\psi(g_1g_2)+\psi(g_1)$$

为一个**分裂因子组** (split factor system).

我们分别以 $Z^1(G,A),B^1(G,A),Z^2(G,A),B^2(G,A)$ 记以交叉同态、主交叉同态、因子组、分裂因子组所生成的交换群.

命题 13.65 (1) $H^0(G,A)\cong^G A$.

(2) $H^1(G,A)\cong Z^1(G,A)/B^1(G,A)$.

(3) $H^2(G,A)\cong Z^2(G,A)/B^2(G,A)$.

证明 (1) 取投射分解 $\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$, 则 $0\to\mathrm{Hom}_G(P_0,A)\xrightarrow{d_1^*}\mathrm{Hom}_G(P_1,A)\to\cdots$, 但 $\varphi\in\mathrm{Ker}\,d_1^*\Leftrightarrow d_1P_1\subset\mathrm{Ker}\,\varphi\Leftrightarrow\varphi\in\mathrm{Hom}_G(P_0/d_1P_1,A)$. 另一方面, $d_1P_1=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$. 故 $P_0/d_1P_1\cong\mathbb{Z}$. 所以 $H^0(G,A)\cong 1^*\cong\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)=^G(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A))\cong^G A$. 从以上关于 θ 及 d_n 的讨论不难证明 (2) 和 (3). □

由于以上命题的缘故, 我们常分别称 $Z^1(G,A),B^1(G,A),Z^2(G,A),B^2(G,A)$ 中的元素为 1 上闭链、1 上边链、2 上闭链、2 上边链.

设 $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{p}C\to 0$ 是一个正合序列. 若 $c\in^G C$, 则 $b\in B$ 使 $pb=c$, 这样对 $s\in G$,

$$p(-b+^s b)=1,$$

即有 $a_s \in A$ 使 $a_s = -b + {}^s b$. 显然 $s \mapsto a_s$ 为 $Z^1(G, A)$ 内的元素. 不难证明

$$\delta : H^0(G, C) \to H^1(G, A) : c \mapsto [(a_c)]$$

就是连接同态.

设 X 为任意交换群, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, X)$ 为所有由 $\mathbb{Z}G$ 到 X 的交换群同态. 对 $g \in G, \phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, X)$, 定义 $g\varphi$ 为映射 $a \mapsto \varphi(g^{-1}a)$. 显然 $g\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, X)$, 这样 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, X)$ 成为 G 模. 我们称这样的 G 模为**上诱模** (co-induced module).

命题 13.66 如果 A 为上诱模, 则当 $n \geqslant 1$ 时 $H^n(G, A) = 0$.

证明 由假设知有交换群 X 使 $A = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, X)$. 对任一 G 模 B, 有同构

$$\Phi : \mathrm{Hom}_G(B, A) \cong \mathrm{Hom}(B, X),$$

其中 $\Phi(\varphi)(b) = \varphi(b)(1)$. 这样若 $P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ 为 $\mathbb{Z}$ 的 G 模投射分解, 则 $H^n(G, A)$ 为复形

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(P_1, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(P_0, A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| & & \Big\| & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P_1, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P_0, X) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

的 n 维上同调群. 这就是说

$$H^n(G, A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X),$$

但 $\mathbb{Z}$ 显然是一个投射 $\mathbb{Z}$ 模, 所以 $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X) = 0$. □

从以上命题和上同调长正合序列立刻推出以下命题.

命题 13.67 (维数移位) 设 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 为 G 模正合序列, A 为上诱 G 模. 则对 $n \geqslant 1$

$$H^n(G, A'') = H^{n+1}(G, A').$$

在以上的计算中, 已经出现了 $\mathbb{Z}$ 的一个非齐性分解, 让我们仔细看看这个分解. 对 $n > 0$, 定义 N_n 为以集 $\{[g_1, \cdots, g_n] | g_1, \cdots, g_n \in G\}$ 为基的自由 G 模, 即 N_n 里任一元素可写成有限项和 $\sum s[g_1, \cdots, g_n]$ $(s \in \mathbb{Z}G)$. 另一方面取 N_0 为只有一个生成元 $[\,]$ 的自由 G 模.

引理 13.68 (1) 定义映射 $\tau : P_n \to N_n$ 为

$$\tau(g_0, \cdots, g_n) = g_0[g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2, \cdots, g_{n-1}^{-1}g_n]$$

及映射 $\pi : N_n \to P_n$ 为

$$\pi[g_1, \cdots, g_n] = (1, g_1, g_1g_2, g_1g_2g_3, \cdots, g_1g_2\cdots g_n),$$

则 $\tau\pi = 1_{N_n}$ 及 $\pi\tau = 1_{P_n}$.

(2) 定义映射 $\partial_n : N_n \to N_{n-1}$ 为

$$\begin{aligned}&\partial_n[g_1.\cdots,g_n]\\&=g_1[g_2,g_3,\cdots,g_n]+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n]+(-1)^n[g_1,\cdots,g_{n-1}],\end{aligned}$$

则下图交换

$$\begin{tikzcd}P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\tau"] & P_{n-1} \arrow[d, "\tau"] \\ N_n \arrow[r, "\partial_n"] & N_{n-1}\end{tikzcd}$$

(3) $\cdots \to N_1 \to N_0 \xrightarrow{\varepsilon} 0$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 G 模分解.

证明 (1) 显然.

(2) 其实 $\partial_n = \tau d_n \pi$.

(3) 首先 $\partial_{n-1}\partial_n = \tau d_{n-1} d_n \pi$ 及 $\varepsilon d_1 = 0 \Rightarrow$ 是一个复形; 其次, $\tau : P_\bullet \to N_\bullet$ 是一个复形同构 $\Rightarrow H_n(P) \xrightarrow{\tau_*} H_n(N)$ 是同构 $\Rightarrow H_n(N) = 0$ (因为 $H_n(P) = 0$). 所以 $N_\bullet$ 是正合. □

13.6.3 同调群的计算

在这一段我们讨论 $H_n(G, A)$ 的一些初等性质, 这些性质和上一段中所介绍关于 $H^n(G, A)$ 的结果相似. 设 $P_\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ 为上一段中的齐性标准分解, 则由定义知

$$H_n(G, A) = H_n(P_\bullet \otimes_G A).$$

群 $P_n \otimes_G A$ 中的任一元素 x 可看为一个映射 $x : G^n \to A$, 这个映射只在有限个 $(g_1, \cdots, g_n)$ 上不等于零. 这样, 映射 $d_n : P_n \otimes_G A \to P_{n-1} \otimes_G A$ 便由以下公式给出:

$$\begin{aligned}d_n x(g_1,\cdots,g_{n-1}) &= \sum_{g\in G} g^{-1}x(g,g_1,\cdots,g_{n-1})\\&\quad+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\sum_{g\in G}x(g_1,\cdots,g_jg,g^{-1},g_{j+1},\cdots,g_{n-1})\\&\quad+(-1)^n\sum_{g\in G}x(g_1,g_2,\cdots,g_{n-1},g).\end{aligned}$$

另一方面, 设 $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} : \sum n_s s \mapsto \sum n_s$ 为**增广同态** (augmentation homomorphism), I_G 是由 $s-1$ ($s \in G$) 所生成的 $\mathbb{Z}G$ 的理想, 则显然

$$0 \to I_G \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

再利用 $\otimes$ 的右正合性, 便得

$$\mathbb{Z}\otimes_G A\cong A/I_GA.$$

若注意到 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}G)=H_n(G,\mathbb{Z}G)=0\ (n>0)$ 及 $H_0(G,I_G)\xrightarrow{i_*}H_0(G,\mathbb{Z}G)$ 为零同态, 从导函子的正合序列可以看到连接同态

$$\delta: H_1(G,\mathbb{Z})\to H_0(G,I_G)$$

为同构.

我们还要提醒一下读者: 若 A,B 为 G 模, 则利用公式 $s(a\otimes b)=(sa)\otimes(sb)$ $(s\in G,a\in A,b\in B)$, 可证 $A\otimes_{\mathbb{Z}}B$ 亦为 G 模, 易证 $A\otimes_G B=(A\otimes_{\mathbb{Z}}B)_G$. 若把交换群 X 看为平凡 G 模, 则我们称 $\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}}X$ 为**诱模** (induced module).

命题 13.69 (1) 若 A 为诱 G 模, $n>0$, 则 $H_n(G,A)=0$.

(2) $H_0(G,A)=A_G$.

(3) 每一个 1 维同调类可以由一个满足以下条件的映射 $\varphi: G\to A$ 表示: 除了有限个 s 外, $\varphi(s)=0$ 及 $d\varphi=\sum_{s\in G}(s^{-1}-1)\varphi(s)=0$.

(4) 若 $0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{p}C\to 0$ 为正合序列, 则连接同态为

$$\delta: H_1(G,C)\to H_0(G,A):[\varphi]\mapsto[a],$$

其中对 $s\in G$, 若 $\varphi(s)=0$ 取 $b_s=0$, 否则任取一 $b_s\in B$ 使 $pb_s=\varphi(s)$, 接着取 $a\in A$ 使 $ia=\sum_{s\in G}(s^{-1}-1)b_s$.

(5) $H_1(G,\mathbb{Z})=G/[G,G]$, 其中 $[G,G]$ 为 G 的换位子子群.

利用前面的讨论不难证得命题 13.69. 证明从略.

关于 (5) 我们给出一个提示.

命题 13.70 (1) 设 $\theta: G\to I_G/I_G^2: s\mapsto(s-1)+I_G^2$. 则 $\mathrm{Ker}\,\theta\supset[G,G]$, 故得同态 $\bar\theta: G/[G,G]\to I_G/I_G^2: s[G,G]\mapsto\theta(s)$.

(2) 设 $\phi: I_G\to G/[G,G]: x-1\mapsto s[G,G]$. 则 $\mathrm{Ker}\,\phi\supset I_G^2$, 故得同态 $\bar\phi: I_G/I_G^2\to G/[G,G]:(x-1)+I_G^2\mapsto\phi(x)$.

(3) $\bar\theta\bar\phi=\bar\phi\bar\theta=1$, 即 $G/[G,G]\cong I_G/I_G^2$.

证明 只证 (2): $u\in I_G^2\Rightarrow u=(\sum m_i(x_i-1))(\sum n_i(y_i-1))=\sum m_in_j[(x_iy_j-1)-(x_i-1)-(y_j-1)]\Rightarrow\phi(u)=\prod(x_iy_jx_i^{-1}y_j^{-1})^{m_in_j}[G,G]$. □

13.6.4 换基

直到目前我们都是固定一个环 R, 然后考虑范畴 ${}_R\mathfrak{Mod}$. 现在我们问当改变环 R 时, 同调群将会如何变化? 在群的同调论中, 我们用的环是 $\mathbb{Z}G$, 当把群 G 改为 G', 环 $\mathbb{Z}G$ 为 $\mathbb{Z}G'$, 同调群 $H(G,A)$ 也做相应的改变. 换环是一个重要的工具.

设 $\gamma: R \to R'$ 为环同态, M' 为 R' 模, $f: M' \to N$ 为 R' 模同态. 则透过 γ, M' 可看作一个 R 模: 对 $r \in R$, $x \in M'$ 定义 $r \cdot m = \gamma(r)m$, 以 UM' 记此 R 模. 显然有

$$f(r \cdot m) = f(\gamma(r)m) = \gamma(r)f(m) = r \cdot f(m),$$

即 f 可看作 R 模同态 $UM' \to UN'$. 记这个同态为 Uf. 不难证明 $U: {}_{R'}\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$ 为正合函子. 我们称 U 为由 γ 所决定的**换环函子** (change of ring functor).

我们又可以把环 R' 看作右 R 模: 对 $r \in R$, $r' \in R'$, 设 $r' \cdot r = r'\gamma(r)$. 这样 R' 便是一个 $R - R'$ 双模. 若 M 为左 R 模, 我们以 TM 记 R' 模 $R' \otimes_R M$. 若 $f: M \to N$ 为 R 模同态, 则记 $1 \otimes f$ 为 Tf. 不难知有同构

$$\mathrm{Hom}_{R'}(TM, M') \cong \mathrm{Hom}_R(M, UM').$$

用范畴的语言, 以上同构是说 T 为 U 的左伴随函子.

另一方面, 我们可以把 R' 看作左 R 模: $r \cdot r' = \gamma(r)r'$. 于是 R' 便是一个 $R - R'$ 双模. 设 M 为左 R 模, $\varphi: R' \to M$ 为 R 模同态. 则对 $x \in R'$, 定义 $r'\varphi(x) = \varphi(xr')$. 于是 $\mathrm{Hom}_R(R', M)$ 便成一个 R' 模, 记此 R' 模为 SM, 则亦不难证有同构

$$\mathrm{Hom}_R(UM', M) \cong \mathrm{Hom}_{R'}(M', SM).$$

用范畴的语言, 以上同构是说 S 为 U 的右伴随函子.

命题 13.71 设 $\gamma: R \to R'$ 为环同态, $U: {}_{R'}\mathfrak{Mod} \to {}_R\mathfrak{Mod}$, $S, T: {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_{R'}\mathfrak{Mod}$ 的定义如上.

(1) M 为投射 R 模 $\Rightarrow TM$ 为投射 R' 模.

(2) M 为内射 R 模 $\Rightarrow SM$ 为内射 R' 模.

(3) R' 是投射 R 模, M' 为投射 R' 模 $\Rightarrow UM'$ 为投射 R 模.

(4) R' 是平 R 模, M' 为内射 R' 模 $\Rightarrow UM'$ 为内射 R 模.

现在考虑群同调. 设 $f: G \to G'$ 为群同态, f 诱导环同态 $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G'$. 用这个同态便得换环函子 $U: {}_{\mathbb{Z}G'}\mathfrak{Mod} \to {}_{\mathbb{Z}G}\mathfrak{Mod}$, 显然 $\{? \mapsto H^n(G, U?)\}$ 是 G' 模的 δ 函子. 若 A 为 G' 模, 则 $H^0(G', A) = {}^{G'}A \xrightarrow{i} {}^{G}UA = H^0(G, UA)$ (i 为包含映射). 利用导函子的泛性 (命题 13.53), 知有同态

$$f^{*n}: H^n(G', A) \to H^n(G, A)$$

使 $f^{*0} = i$ (这里我们把 $H^n(G, UA)$ 简记为 $H^n(G, A)$), 简记 f^{*n} 为 f^*. 事实上我们若用齐性标准分解去算同调群, 则 f 诱导出标准分解的复形同态

$$f^*: P_\bullet \to P'_\bullet,$$

于是, 便可立刻得到一组上同调群同态 f^{*n}. 若我们留意到

$$f^*: \mathrm{Hom}_{G'}(P'_0, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_0, A)$$

把元 $\varphi: g' \mapsto g'\varphi(1)$ $(g' \in G')$ 映到 $f^*\varphi: g \mapsto f(g)\varphi(1)$, 则易知 $f^{*0} = i$.

设 A 为 G 模, H 为 G 的子群, 利用群同态把子集关系 $H \subset G$ 表达为包含同态 $f: H \to G$, 对 $x \in H$, 有 $f(x) = x$. 则称 f^* 为**限制同态** (restriction homomorphism), 并记之为

$$\mathrm{Res}: H^n(G, A) \to H^n(H, A).$$

若 H 为 G 的正规子群, $f: G \to G/H$ 为投射同态, A 为 G 模, 则 ${}^HA$ 为 G/H 模, 而 $f^*: H^n(G/H, {}^HA) \to H^n(G, {}^HA)$. 另一方面, $i: {}^HA \subset A$ 诱导出同态 $i_*: H^n(G, {}^HA) \to H^n(G, A)$. 称 i_*f^* 为**膨胀同态** (inflation homomorphism), 并记之为

$$\mathrm{Inf}: H^n(G/H, {}^HA) \to H^n(G, A).$$

设 H 为 G 的子群, H 在 G 中的指数 m 为有限, 这时可构造一个与 Res 相反方向的同态

$$\mathrm{Cor}: H^n(H, A) \to H^n(G, A),$$

其中 A 为 G 模, 故亦为 H 模. 称 Cor 为**上限制同态** (corestriction homomorphism). 为此首先考虑 $n = 0$ 时 Cor 的定义: 设 $G/H = \{s_1H, \cdots, s_mH\}$; 对 $a \in {}^HA$, 设

$$N_{G/H}(a) = \sum_{i=1}^{m} s_i a.$$

若 $h \in H$, 则 $ha = a$, 故 $N_{G/H}(a)$ 的定义与 $\{s_i\}$ 的选择无关, 称 $N_{G/H}(a)$ 为 a 的范数 (norm). 若 $g \in G$, 则 $\{gs_1H, \cdots, gs_mH\} = G/H$, 故 $gN_{G/H}(a) = N_{G/H}(a)$, 故得同态

$$N_{G/H}: H^0(H, A) \to H^0(G, A),$$

这就是 Cor 在 $n = 0$ 时的定义.

由包含同态 $f: H \to G$ 得环同态 $\mathbb{Z}H \to \mathbb{Z}G$, 于是得换环函子 $U: {}_{\mathbb{Z}G}\mathfrak{Mod} \to {}_{\mathbb{Z}H}\mathfrak{Mod}$. 对 $\mathbb{Z}G$ 模 M 设 $F^n(M) = H^n(H, UM)$. 则 $\{F^n\}$ 显然是 G 模范畴上的 δ 函子. 取任一 G 模 A, 必有单同态 $0 \to A \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, A) = C$. 因为 $\mathbb{Z}G$ 是有限生成自由 $\mathbb{Z}H$ 模, 对任一 H 模 B, 有同构 $\mathbb{Z}G \otimes_H B \cong \oplus_{i=1}^m B_i$, $B_i = B$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, 故此

$$\mathrm{Hom}_H(B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G \otimes_H B, A) \cong \oplus_{i=1}^m \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_i, A),$$

于是便和命题 13.66 (关于上诱模) 的证明一样, 可得: 对 $n \geqslant 1$, $H^n(H, C) = 0$, 所以 $F^n(u) = 0$, 这就是说, 当 $n \geqslant 1$ 时, F^n 是可抹的. 所以 $\{F^n\}$ 为泛 δ 函子, 于是便存在自然变换

$$f^n: H^n(H, U-) \to H^n(G, -)$$

使 $f^0 = N_{G/H}$. 这个 f^n 就是我们所要求的 Cor.

我们亦可以直接定义上限制同态 Cor. 为此, 设 A, B 为左 G 模. 当然 A, B 自然是 H 模. 定义一个同态

$$t : \mathrm{Hom}_H(B, A) \to \mathrm{Hom}_G(B, A)$$

如下: 对 $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(B, A)$, $b \in B$ 设

$$t\varphi(b) = \sum_{i=1}^{m} s_i \varphi(s_i^{-1} b),$$

其中 $\{s_1 H, \cdots, s_m H\} = G/H$, 若 $h \in H$, 则

$$\begin{aligned} s_i h \varphi((s_i h)^{-1} b) &= s_i h \varphi(h^{-1} s_i^{-1} b) \\ &= s_i \varphi(h h^{-1} s_i^{-1} b) \quad (\text{因为 } \varphi \in \mathrm{Hom}_H(B, A)) \\ &= s_i \varphi(s_i^{-1} b), \end{aligned}$$

所以 $t\varphi$ 的定义与 s_i 的选择无关. 若 $g \in G$, 则

$$t\varphi(gb) = \sum g(g^{-1} s_i) \varphi((g^{-1} s_i)^{-1} b) = g(t\varphi(b)).$$

因为 $\{g^{-1} s_1 H, \cdots, g^{-1} s_m H\} = G/H$, 所以 $t\varphi \in \mathrm{Hom}_G(B, A)$. 我们称 t 为**转移同态** (transfer map).

因为 $\mathbb{Z}G$ 是个有限生成自由 $\mathbb{Z}H$ 模, 若 $P_\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ 是一个有限生成自由 G 模分解, $P_\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ 亦是一个自由 H 模分解, 转移同态 t 定义一个复形同态

$$t : \mathrm{Hom}_H(P_\bullet, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_\bullet, A).$$

由此同态我们立刻得到一组上同调群同态 $t^n : H^n(H, A) \to H^n(G, A)$. 显然这就是我们所要的 Cor. 事实上, 取 $\cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} 0$ 为标准分解, 当 $n = 0$ 时

$$\begin{tikzcd} a \in {}^H A \arrow[d, "t^0"] & \overset{\eta}{\cong} \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, A) \overset{\varepsilon^*}{\cong} & \mathrm{Hom}_H(P_0/d_1 P_1, A) \arrow[d, "t"] \\ {}^G A & \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \cong & \mathrm{Hom}_G(P_0/d_1 P_1, A) \end{tikzcd}$$

$\eta a : k \mapsto ka$, $\varepsilon^* \eta a : \sum k_g g \mapsto \sum k_g a$ $(k_g \in \mathbb{Z})$, 即对 $g \in G$, $\varepsilon^* \eta a(g) = a$, $t\varepsilon^* \eta a(1) = \sum s_i (\varepsilon^* \eta a)(s_i^{-1} 1) = \sum s_i a$. 所以要使上图表交换需要取 $t^0(a) = N_{G/H}(a)$.

后记 在 20 世纪 40 到 60 年代, 本节的同调群方法在代数数论很活跃, 当时在普林斯顿念博士的王湘浩 (1915 — 1993) 曾参与这个工作, 他的结果就是教科书里的 Grunwald-Wang 正合序列. 他于 1949 年回国, 任职北京大学, 1952 年调任东北人民大学 (今吉林大学) 后研究计算机科学.

代数数论同调群方法由王湘浩的同班同学 J. Tate 完成. Tate 于 2010 年获得 Abel 奖 (相当于数学的诺贝尔奖). Langlands 把 Tate 的结果推广在代数环面上证明了 Langlands 对应的第一个例子 (参见: 黎景辉, 代数群引论, 北京: 科学出版社, 2006.).

在 20 世纪 60 年代末, Grothendieck 在代数数论引入代数几何方法, 把同调群换为艾达尔 (etale) 上同调群. 用这个工具 Deligne 解决了 Weil 猜想, 并因此获得 1978 年菲尔兹奖.

两部关于代数数论同调群方法的好书是:

[1] E. Weiss, *Cohomology of Groups*, Elsevier, 1969.

[2] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer, 2000.

关于艾达尔上同调可看:

[1] A. Grothendieck, *Theorie des topos et cohomologie etale des schemas*, Springer, Lecture Notes in Mathematics, 269, 270, 305, 1972.

[2] J. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[3] R. Kiehl, E. Freitag, *Etale Cohomology and the Weil Conjecture*, Springer, 1988.

[4] R. Kiehl, R. Weissauer, *Weil Conjectures, Perverse Sheaves and l-adic Fourier Transformation*, Springer, 2001.

[5] Lei Fu (扶磊), *Etale Cohomology Theory*, World Scientific Press, 2011.

13.7 非交换上同调群

13.7.1

在上一段讨论群 G 和系数在 G 模 A 的上同调群 $H^n(G,A)$, 这里的 A 看作是一个交换群. 现在我们假设 A 不一定是交换群, 假设群 G 作用在集 A 上, 即有映射

$$G \times A \to A : (s,a) \mapsto s(a)$$

满足条件:

(1) 若 $r,s \in G, a \in A$, 则 $(rs)(a) = r(s(a))$;

(2) $1a = a$ (1 为 G 的单位),

我们称 A 为一个 G 集. 假若进一步, A 是一个群并且

(3) 若 $r \in G,\ a,b \in A$, 则 $r(ab) = (r(a))(r(b))$,

这时我们说 A 是一个 G 群. 我们常把 $s(a)$ 写成 ${}^s a$.

定义 13.72 若 A 是 G 群, 则我们定义

$$H^0(G, A) = {}^G A = \{a \in A : {}^s a = a, \forall s \in G\}.$$

定义 13.73 设 A 是 G 群, 我们称映射

$$G \to A : s \mapsto a_s$$

为一个 G 在 A 的 **1 上闭链** (1-cocycle), 若这映射满足条件:

$$a_{st} = a_s {}^s a_t.$$

以 $Z^1(G, A)$ 记所有 G 在 A 的 1 上闭链.

我们说两个 1 上闭链 (a_s), (b_s) 为等价, 若存在 $c \in A$ 使有关系式

$$b_s = c^{-1} a_s {}^s c, \quad \forall s \in G.$$

对应于这等价关系的 1 上闭链的等价类称为 G 在 A 的 **1 上同调类** (1-cohomology class). 以 $H^1(G, A)$ 记所有的这些 1 上同调类.

定义 13.74 设 A 是一个交换 G 群, 我们称映射

$$G \times G \to A : (s, t) \mapsto a_{s,t}$$

为一个 G 在 A 的 **2 上闭链** (2-cocyle), 若这映射满足条件:

$${}^r a_{s,t} a_{rs,t}^{-1} a_{r,st} a_{r,s}^{-1} = 1, \quad \forall r, s, t \in G.$$

我们说两个 2 上闭链 $(a_{s,t})$, $(b_{s,t})$ 为等价, 若存在一个 1 上闭链 (c_s) 使

$$a_{s,t} = b_{s,t} {}^s c_t c_{st}^{-1} c_s, \quad \forall s, t \in G.$$

称 2 上闭链等价类为 **2 上同调类** (2-cohomology class). 以 $H^2(G, A)$ 记所有的 2 上同调类, 对应于乘法

$$(a_{s,t})(b_{s,t}) = (a_{s,t} b_{s,t}),$$

$H^2(G, A)$ 是一个交换群, 单位就是由 $(s, t) \mapsto 1 \in A$ 所决定的上同调类.

我们这里所定义的 $H^2(G, A)$ 实际上就是上一节所定义的 $H^2(G, A)$, 不过这里用乘法而已. 当 A 是一个交换 G 群时, 这里的 $H^1(G, A)$ 就是上一节的 $H^1(G, A)$.

若有域 K 为域 F 的伽罗瓦扩张, G 为这个扩张 K/F 的伽罗瓦群, 则我们常称 $H^n(G, A)$ 为**伽罗瓦上同调群** (Galois cohomology). (若 G 为非交换群时, 我们就假设 $n \leqslant 1$.) 伽罗瓦上同调群是数论和代数群论中的有用工具, 在下一章我们将举一些例子.

计算一个例子. 设域 K 为域 F 的一个伽罗瓦扩张, G 为 K/F 的伽罗瓦群. 若把 $GL(n, K)$ 中的元看成 K^n 上的自同构, 则 $GL(n, K)$ 显然是一个 G 群.

命题 13.75

$$H^1(G, GL(n,K)) = \{1\}.$$

证明 只需证明 $Z^1(G, GL(n,K))$ 中任一元素均为上闭链. 设 $(a_s) \in Z^1(G, GL(n,K))$, 把 $\beta \in K^n$ 看成列向量. 设

$$f(\beta) = \sum_{s \in G} a_s{}^s\beta,$$

取一个 K 线性形 $\lambda : K^n \to K$ 使 $f(K^n) \subset \operatorname{Ker}\lambda$. 则对任意 $t \in K$, $\beta \in K^n$ 得 $\lambda(f(t\beta)) = 0$, 即

$$\sum_{s \in G} \lambda(a_s{}^s\beta)^s t = 0, \quad t \in K, \beta \in K^n.$$

对此利用域自同构线性无关 (Dedekind 定理) 我们便知: 对所有 $\beta \in K^n$, $s \in G$ 有 $\lambda(a_s{}^s\beta) = 0$. 现取 $s = 1$ 便得 $\lambda = 0$. 所以我们证得: 若 $f(K^n) \subset \operatorname{Ker}\lambda$, 则 $\lambda = 0$, 因此 $f(K^n)$ 一定包含一个 K^n 的基. 也就是说存在 $\beta_1, \cdots, \beta_n \in K^n$ 使 $\det(f(\beta_1), \cdots, f(\beta_n)) \neq 0$. 设 $\alpha = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 及 $c = \sum_{s \in G} a_s{}^s\alpha$. 则 $c \in GL(n,K)$.

现在计算

$$\begin{aligned} c^{-1} a_s{}^s c &= c^{-1} a_s{}^s \left(\sum_{t \in G} a_t{}^T \alpha \right) = c^{-1} \left(\sum a_s{}^s a_t{}^{st} \alpha \right) \\ &= c^{-1} \sum_{st \in G} a_{st}{}^{st} \alpha = c^{-1} c = 1. \end{aligned}$$

□

13.7.2

设 $f : A \to B$ 是一个 G 群的同态, 即对 $s \in G, a \in A$, 有 $f({}^s a) = {}^s f(a)$. 定义 f_0 为 $f|_{{}^G A}$. 若 $(a_s) \in Z^1(G, A)$, 则 $s \mapsto f(a_s) \in Z^1(G, B)$. 这样便得映射 $f_1 : H^1(G, A) \to H^1(G, B)$.

当 A 不是一个交换群时 $H^1(G, A)$ 并不一定是个群, 但 $H^1(G, A)$ 中有一个特殊的元素, 就是单位上同调类 [1], 其中 1 是指 $s \mapsto 1 \in A$ 这个 1 上闭链. 这时我们便可以定义 f_1 的核为

$$\operatorname{Ker} f_1 = \{[a] \in H^1(G, A) : f_1([a]) = [1]\}.$$

设有 G 群正合序列

$$1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1,$$

其中 i, p 为 G 群同态. 可假设 A 为 B 的正规子群, C 为 B/A. 若 $c \in {}^G C$, 则存在 $b \in B$ 使 $pb = c$. 这样对 $s \in G$ 有

$$p(b^{-1} \cdot {}^s b) = (pb)^{-1} \cdot {}^s(pb) = 1,$$

即有 $a_s \in A$ 使 $a_s = b^{-1} \cdot {}^s b$. 显然

$$a_{st} = b^{-1} \cdot {}^{st} b = b^{-1s} b^s (b^{-1\ T} b) = a_s {}^s a_t,$$

即 $s \mapsto a_s \in Z^1(G, A)$. 再者, 若有 $b' \in B$ 使 $pb' = c$, 则存在 $a \in A$ 使 $b' = ba$. 若设 $a'_s = b'^{-1s} b'$ 则

$$a'_s = a^{-1} b^{-1s} b^s a = a^{-1} a_s {}^s a,$$

即 (a_s), (a'_s) 属于同一上同调类, 所以我们可以定义一个映射

$$\delta_0 : H^0(G, C) \to H^1(G, A) : c \mapsto [(a_s)],$$

其中我们只需要取任一 $b \in B$ 使 $pb = c$, 并设 $a_s = b^{-1s} b$.

设有 G 群正合序列

$$1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1,$$

其中 i 为包含同态, A 为 B 的正规子群, 并要求 A 包含在 B 的中心内, 这时若有 $(c_s) \in Z^1(G, C)$, 取 $b_s \in B$ 使 $pb_s = c_s$. 即如上面知有 $a_{s,t} \in A$ 使

$$a_{s,t} = b_{st} {}^s b_t^{-1} b_s^{-1}.$$

计算

$$\begin{aligned} {}^r a_{s,t} a_{rs,t}^{-1} a_{r,st} a_{r,s}^{-1} &= {}^r a_{s,t} b_{rs} {}^{rs} b_t \overbrace{b_{rst}^{-1} b_{rst}} {}^r b_{st}^{-1} \overbrace{b_r^{-1} b_r} {}^r b_s b_{rs}^{-1} \\ &= {}^r a_{s,t} b_{rs} {}^{rs} b_t {}^r b_{st}^{-1 r} b_s b_{rs}^{-1}, \end{aligned}$$

但 ${}^r a_{s,t} = {}^r b_{st} {}^{rs} b_t^{-1 r} b_s^{-1}$ 是在 B 的中心内, 故上一式便变为

$$(b_{rs} {}^{rs} b_t {}^r b_{st}^{-1})({}^r b_{st} {}^{rs} b_t^{-1 r} b_s^{-1}) {}^r b_s b_{rs}^{-1} = 1,$$

所以 $(s,t) \mapsto a_{s,t}$ 是一个 2 上闭链. 另一方面, 若我们在 (c_s) 的上同调类中取另外一个上闭链 (c'_s), 即有 $c \in C$ 使 $c'_s = c^{-1} c_s {}^s c$. 我们取 $b \in B$ 使 $pb = c$, 并设 $b'_s = b^{-1} b_s {}^s b$. 这时

$$\begin{aligned} a'_{s,t} &= (b')_{st} {}^s (b')_t^{-1} (b')_s^{-1} \\ &= b^{-1} b_{st} {}^{st} b^s ({}^T b^{-1} b_t^{-1} b)^s b^{-1} b_s^{-1} b \\ &= b^{-1} a_{s,t} b, \end{aligned}$$

但 A 是在 B 的中心内, 故得 $a'_{s,t} = a_{s,t}$. 最后另外一组 b''_s 使 $pb''_s = c_s$, 则有 $a_s \in A$ 使 $b''_s = a_s b_s$. 这样, 相对 2 上闭链则是

$$\begin{aligned} a''_{s,t} &= b''_{st} {}^s b''^{-1}_t b''^{-1}_s \\ &= a_{s,t} b_{st} {}^s b_t^{-1} a_t^{-1} b_s^{-1} a_s^{-1} \\ &= a_{s,t} (a_{s,t} {}^s a_t^{-1} a_s^{-1}), \end{aligned}$$

最后一步我们用了 A 在 B 的中心里这一事实, 所以 $a''_{s,t}$, $a_{s,t}$ 属于同一个上同调类.

现在我们便可以定义一个映射

$$\delta_1 : H^1(G,C) \to H^2(G,A) : [(c_s)] \mapsto [(a_{s,t})],$$

其中我们取任一组 $b_s \in B$ 使 $pb_s = c_s$, 并设 $a_{s,t} = b_{st}{}^s b_t^{-1} b_s^{-1}$.

命题 13.76 设有 G 群正合序列

$$1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 1.$$

(1)

$$\begin{aligned} 1 \to H^0(G,A) &\xrightarrow{i_0} H^0(G,B) \xrightarrow{p_0} H^0(G,C) \\ &\xrightarrow{\delta_0} H^1(G,A) \xrightarrow{i_1} H^1(G,B) \xrightarrow{p_1} H^1(G,C) \end{aligned}$$

是正合序列.

(2) 若 A 在 B 的中心内, 则

$$\begin{aligned} 1 \to H^0(G,A) &\xrightarrow{i_0} H^0(G,B) \xrightarrow{p_0} H^0(G,C) \\ &\xrightarrow{\delta_0} H^1(G,A) \xrightarrow{i_1} H^1(G,B) \xrightarrow{p_1} H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G,A) \end{aligned}$$

是正合序列.

(注意: 虽然 $H^1(G,A)$ 不一定是群, 但 Ker 是有定义的.)

证明　(1) 在 $H^0(G,A)$ 的正合性是显然的.

(2) 在 $H^0(G,B)$ 的正合性.

从 $pi = 1$ (这里 1 是指映射 $s \mapsto 1$) 得 $\mathrm{Img}\, i_0 \subset \mathrm{Ker}\, p_0$. 从 $b \in {}^G B$ 及 $p_0 b = 1$ 得 $b \in \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Img}\, i$. 由 $b \in {}^G B$ 知 $b \in iA \cap {}^G B$, 即 $b \in i_0({}^G A)$, 所以 $\mathrm{Ker}\, p_0 \subset \mathrm{Img}\, i_0$.

(3) 在 $H^0(G,C)$ 的正合性.

$c \in \mathrm{Img}\, p_0 \Leftrightarrow$ 存在 $b \in {}^G B$ 使 $pb = c \Leftrightarrow$ 对 $s \in G$ 有 $a_s = b^{-1s}b = 1$ 及 $pb = c \Leftrightarrow c \in \mathrm{Ker}\, \delta_0$.

(4) 在 $H^1(G,A)$ 的正合性.

$[(a_s)] \in \mathrm{Ker}\, i_1 \Leftrightarrow [(ia_s)] = [1] \Leftrightarrow$ 存在 $b \in B$ 使 $a_s = b^{-1s}b \Leftrightarrow \delta c = [(a_s)]$, 其中 $pb = c$ 及 $a_s = b^{-1s}b \Leftrightarrow [(a_s)] \in \mathrm{Img}\, \delta_0$.

(5) 在 $H^1(G,B)$ 的正合性.

从 $p_1 i_1 = 1$ 得 $\mathrm{Img}\, i_1 \subset \mathrm{Ker}\, p_1$. 由 $[(b_s)] \in H^1(G,B)$ 及 $p_1[(b_s)] = 1$ 知有 $c \in C$ 使 $p_1 b_s = c^{-1s}c$. 于是有 $b \in B$ 使 $pb = c$ 及 $(pb)(p_1 b_s) = {}^s(pb)$, 即 $p(bb_s) = p({}^s b)$. 所以存在 $a_s \in A$ 使 $bb_s = (ia)^s b$, 由此 $[(b_s)] = [(ia_s)] = i_1[(a_s)]$.

(6) 在 $H^1(G,C)$ 的正合性.

现假设 A 在 B 的中心内. 显然 $\delta_1 p_1 = 1$ 故 $\operatorname{Img} p_1 \subset \operatorname{Ker} \delta_1$. 反过来, 从 $[(c_s)] \in \operatorname{Ker} \delta_1$ 得 $b_s \in B$ 使 $pb_s = c_s$ 及

$$(s,t) \mapsto a_{s,t} = b_{st}{}^s b_t^{-1} b_s^{-1} \in [1],$$

于是有 $a_s \in A$ 使 $a_{s,t} = {}^s a_t a_{st}^{-1} a_s$. 但由 δ_1 的定义, 我们可以另取 $b'_s = a_s b_s$ 及 $a'_{s,t} = (b')_{st}{}^s(b')_t^{-1}(b')_s^{-1}$, 则 $\delta[(c_s)] = [(a'_{s,t})]$ 及 $a'_{s,t} = 1$. 即 $(b'_s) \in Z^1(G,B)$ 而且 $p_1[(b'_s)] = [(c_s)]$. □

13.7.3

设 X 为一个集, 以 $\operatorname{Aut} X$ 记从 X 到 X 的双射. 若 X, Y 均为 G 集, $f : X \to Y$ 是一个集的映射, $s \in G$, $x \in X$, 设

$${}^s f(x) = s f(s^{-1} x).$$

则 ${}^s f \in \operatorname{Aut} X$. 若 ${}^s f = f$, $\forall s \in G$, 则称 f 为 G 映射. 这样, G 便作用在 $\operatorname{Aut} X$ 上:

$$G \times \operatorname{Aut} X \to \operatorname{Aut} X : (s,f) \mapsto {}^s f.$$

设

$$\operatorname{Aut}_G X = \{f \in \operatorname{Aut} X : {}^s f = f, \ \forall s \in G\}.$$

于是对于 $f \in \operatorname{Aut}_G X$ 有

$$f(sx) = {}^s f(sx) = s(f(x)).$$

取 G 集 X. 设

$$\mathscr{S}(G,X) := \{Y : Y \text{ 为 } G \text{ 集, 并有集合双射 } X \to Y\}.$$

称 $X', X'' \in \mathscr{S}(G,X)$ 为 G 等价, 若有 G 双射 $X'' \to X'$. 以 $[X']$ 记 X' 的 G 等价类. 设

$$\mathscr{E}(G,X) := \{[X'] : X' \in \mathscr{S}(G,X)\}.$$

取 $[X'] \in \mathscr{E}(G,X)$, 由定义知有集的双射 $f : X \to X'$. 对 $s \in G$, 设

$$a_s = f^{-1} \circ {}^s f \in \operatorname{Aut} X.$$

则

$$a_{st} = f^{-1} \circ {}^{st} f = f^{-1} \circ {}^s f \circ {}^s(f^{-1} \circ {}^T f) = a_s {}^s a_t,$$

即 $(s \mapsto a_s) \in Z^1(G, \operatorname{Aut} X)$. 若 $[X'] = [X'']$, 则有双射 $h : X'' \to X'$ 及集的双射 $f_2 : X \to X''$. 设 $b_s = f_2^{-1} \circ {}^s f_2$ 及 $c = f^{-1} h f_2$. 则 $c^{-1} a_s {}^s c = b_s$.

这样我们便可定义一个映射

$$\theta : \mathscr{E}(G, X) \to H^1(G, \operatorname{Aut} X) : [X'] \mapsto [(a_s)].$$

命题 13.77 θ 为单映射.

证明 取 $[X'], [X''] \in \mathscr{E}(G, X)$, 则有单映射 $f_1 : X \to X'$, $f_2 : X \to X''$. 若 $\theta([X']) = \theta([X''])$, 则有 $c \in \operatorname{Aut} X$ 使

$$c^{-1} \circ f_1^{-1} \circ {}^s f_1 \circ {}^s c = f_2^{-1} \circ {}^s f_2,$$

故

$$f_1 c f_2^{-1} = {}^s(f_1 c f_2^{-1}),$$

即

$$f_1 c f_2^{-1} : X'' \to X'$$

是一个 G 映射, 即 $[X'] = [X'']$. □

命题 13.78 设 $\operatorname{Aut} X$ 的子集 A 为 G 群. 则

$$H^1(G, A) \subset \operatorname{Img} \theta.$$

证明 取 $(a_s) \in Z^1(G, A)$.

作为一个集, 取 X' 等于 X. 设 $f : X \to X'$ 为恒等映射. 在 X' 上我们定义一个新的 G 集结构如下: $s \in G$, $f(x) \in X'$, 设 ${}^s(f(x)) = f(a_s {}^s x)$ (这里 ${}^s x$ 是指原来的作用 $G \times X \to X$). 取 $x \in X$, 现在计算

$$(f^{-1} \circ {}^s f)(x) = f^{-1 s}(f(s^{-1}x) = f^{-1} f(a_s s(s^{-1}x)) = a_s x,$$

即 $f^{-1 s} f = a_s$. □

若 $\theta([X']) = [(a_s)]$, 我们说用 1 上闭链 (a_s) **扭转** (twist) X 而得 X'.

后记 关于本节的理论可以看

[1] J-P. Serre, *Galois Cohomology*, Springer, 1997.

[2] J. Giraud, *Cohomologie non Abelienne*, Springer, 1971.

习 题

1. (a) 设 $\varphi: 0 \to M: 0 \mapsto 0$ 为包含映射. 证明: 序列 $0 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\lambda} N$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是单同态.

(b) 设 $\theta: N \to 0$ 为零映射, 即 $\theta(N) = 0$. 证明: 序列 $M \xrightarrow{\lambda} N \xrightarrow{\theta} 0$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是满同态.

(c) 证明: 序列 $0 \to M \xrightarrow{\lambda} N \to 0$ 是正合的 $\Leftrightarrow$ λ 是同构.

2. 假设以下由 R 模同态构成的图表是交换的, 并且其列皆为正合的:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D'
\end{array}$$

若 α 为满射和 δ 为单射, 那么证明:

(a) $\operatorname{Img}\beta = (g')^{-1}(\operatorname{Img}\gamma)$;

(b) $\operatorname{Ker}\gamma = g(\operatorname{Ker}\beta)$.

3. 证明: 自由模必是投射模.

4. 设 P 是有限生成投射模. 证明: $\operatorname{Hom}_R(P, R)$ 是有限生成投射模.

5. 给出 R 模 A, 证明: 存在 R 模正合序列 $0 \to M \to P \to A \to 0$, 其中 P 为投射模.

6. 给出模正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, $0 \to M' \to P' \to A' \to 0$ 和 $0 \to M'' \to P'' \to A'' \to 0$, 其中 P', P'' 为投射模. 证明: 存在投射模 P 及以下 9 交换图表, 其中行和列都是正合序列:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P' & \to & P & \to & P'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

7. 设有 R 模正合序列

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

$$0 \to A' \to Q' \to N' \to 0,$$

$$0 \to A'' \to Q'' \to N'' \to 0.$$

若 Q' 及 Q'' 为内射模, 证明: 有内射模 Q 及 9 交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & Q'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

其中每行、每列均正合.

8. 直和 $\oplus_\alpha P_\alpha$ 是投射模当且仅当所有 P_α 是投射模.

9. 直积 $\prod_\alpha N_\alpha$ 是内射模当且仅当所有 N_α 是内射模.

10. 设内射模 Q 为 A 的子模. 证明: A 与直和 $Q \oplus R$ 同构.

11. 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 为 R 模正合序列. 证明: 存在正合序列

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N) \to \\
\to \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M', N) \to \mathrm{Ext}^2_R(M'', N) \to \cdots .
\end{aligned}
$$

12. 设 M 为 R 模. 定义 M 的投射维数为 M 的最短投射分解的长度. 证明:

(a) M 的投射维数 $= 0$ 当且仅当 M 是自由模;

(b) 所有 R 模 M 的投射维数 $\leqslant n$ 当且仅当对所有 R 模 M, N 必有 $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0$.

13. 证明关于环 R 的以下条件等价:

(a) 投射 R 模的子模必为投射 R 模;

(b) 任一 R 模 M 必有投射分解 $0 \to P_2 \to P_1 \to M \to 0$;

(c) 对任意 R 模 M, N 必有 $\mathrm{Ext}^2_R(M, N) = 0$.

当以上条件成立时称 R 为**遗传环** (hereditary ring).

14. 设 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 为变元 x_j 的多项式环. 证明: $R[x_1, \cdots, x_n]$ 为平坦 R 模.

15. 设 $R = \mathbb{C}[t]$ 为多项式环. 证明: (a) $R[x]/(x-t)$, (b) $R[x]/(x^2-t)$, (c) $R[x]/(xt-1)$ 为平坦 R 模. 证明: $R[x]/xR[x]$ 不是平坦 $R[x]$ 模.

16. 设 $A = \mathbb{R}[x, y]$, $B = \mathbb{R}[x, y, z]/(zx - y)$. 证明: B 不是平坦 A 模.

17. 证明: $\mathbb{Q}[x]$ 不是平坦 $\mathbb{Q}[x^2, x^3]$ 模.

18. 证明: $\mathrm{Tor}^R_n(M, N) = \mathrm{Tor}^R_n(N, M)$.

19. 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 为模正合序列. 证明: 存在正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n^R(M', N) \to \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \to \mathrm{Tor}_n^R(M'', N) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M, N) \to \cdots$$
$$\to \mathrm{Tor}_1^R(M'', N) \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0.$$

20. 若 M 为平坦 R 模, 证明: 对任意 R 模 N 和正整数 n 必有 $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = 0$.

21. 设 A, B 为交换环, B 为平坦 A 模. 设 M, N 为 A 模. 证明:

(a) $B \otimes_A \mathrm{Tor}_n^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$;

(b) 若 A 是 Noether 环, M 是有限生成 A 模, 则

$$B \otimes_A \mathrm{Ext}_A^n(M, N) \cong \mathrm{Ext}_B^n(B \otimes_A M, B \otimes_A N).$$

22. 证明: $\mathrm{Tor}_n^R(M, \varinjlim_\lambda N_\lambda) \cong \varinjlim_\lambda \mathrm{Tor}_n^R(M, N_\lambda)$.

23. 设 I 为交换环 R 的理想, 并且 M 为 R 模. 证明: $I \otimes_R M \to M$ 为单射当且仅当 $\mathrm{Tor}_1^R(A/I, M) - 0$.

第十四章　范畴

初学线性代数时只是研究一个向量空间、一个矩阵. 如果我们要同时研究所有的向量空间和所有的线性映射, 就要研究向量空间的范畴了. 一个范畴就像一个大数据 (big data)——它把所有类似的东西放在一起来研究.

本章前两节将介绍范畴、函子、自然变换的概念和一些基本性质, 接着讲范畴的等价、可表函子和伴随函子, 这几节有些证明. 在极限这一节我们看到怎样在一般的范畴里体现模的各种构造. 关于模最神奇的运算是张量积, 有张量积的范畴叫作淡中 (Tannaka) 范畴, 这超出本章的范围了. 余下的内容还介绍了纤维范畴导出范畴与剖分范畴.

本章的很多概念已出现在前一章讲同调的时候, 所以在读本章时应该与前一章经常做比较, 这样就不会觉得本章内容太陌生了.

范畴、函子、自然变换这些概念最早是由 Eilenberg 和 Mac Lane 在代数拓扑学的研究中引进的 (Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Annals of Mathematics* 46 (1945), 480 – 509).

这短短的一章并不详尽但希望能引起读者的兴趣去多了解一些范畴学. 如果学点法语便可以看原著

[1] Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologique, *Tohoku Math. J.* 9 (1957), 119 – 221.

以及 Grothendieck 学生们的博士论文

[1] Gabriel, Des categories abeliennes, *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), 323 – 448.

[2] Verdier, Des categories derivees des categories abeliennes, *Asterisque* 239 (1996).

[3] Deligne, Cohomologie a supports propres, Expose XVII, *SGA 4*, Springer LNM 304 (1973), 252 – 480.

[4] Deligne, Categories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift* (Volume 2), Birkhauser (1990), 111 – 196.

[5] Beilinson, Berstein, Deligne, Faisceaux pervers, *Asterisque* 100 (1982).

[6] Gabriel, Zisman, *Calculus of Fraction and Homotopy Theory*, Springer, 1967.

[7] Hakim, *Topos Annellés et Schémas Relatifs*, Springer, 1972. (一本小书)

这都比看一些二手材料更好.

14.1 函子

14.1.1 范畴的概念

我们首先谈谈范畴理论中的一些基本概念和记号. 在范畴论会出现非常大的集合, 因而可能会引起逻辑的矛盾. 一个方法是引入**类** (class) 与**集合** (set). 类的元素可以是集合, 集合不是类, 详情可见 Bourbaki, *Set Theory* 或讨论 von Neumann-Bernays-Gödel 集合论的教材 (如 E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman and Hall, 1997).

一个**范畴** $\mathfrak{C}$ 包括以下结构:

(1) 给定一个类 $|\mathfrak{C}|$, 我们称 $|\mathfrak{C}|$ 里的元素为范畴 $\mathfrak{C}$ 的**对象** (object), 记 $|\mathfrak{C}|$ 为 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$.

(2) 对应 $|\mathfrak{C}|$ 内任一对元素 (A,B) 给定一个集合 $[A,B]_{\mathfrak{C}}$, 我们称这个集合里的元素为范畴 $\mathfrak{C}$ 内由 A 到 B 的**态射** (morphism), 并记这个集合为 $[A,B]$ 或 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 或 $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 或 $\mathscr{C}(A,B)$. 我们引入类

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) = \bigcup_{A,B\in|\mathfrak{C}|} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B).$$

(3) 对应 $|\mathfrak{C}|$ 内任意三个 (A,B,C) 元素给定一个映射

$$[B,C]_{\mathfrak{C}} \times [A,B]_{\mathfrak{C}} \to [A,C]_{\mathfrak{C}},$$

并用下面符号来记这个映射的计算

$$(g,f) \mapsto g\circ f = gf,$$

称 $g\circ f$ 为态射 g,f 的**合成** (composition).

我们要求以上的结构满足以下的条件:

(1) 如果 $(A,B)\neq(C,D)$, 则 $[A,B]_{\mathfrak{C}}\cap[C,D]_{\mathfrak{C}}$ 为空集.

(2) 若 f,g,h 为范畴 $\mathfrak{C}$ 的态射并且 $(hg)f$ 是有定义的, 则 $(hg)f=h(gf)$.

(3) 对任一对象 $B\in|\mathfrak{C}|$, 存在态射 $1_B\in[B,B]_{\mathscr{C}}$, 使得对任意 $f\in[A,B]_{\mathscr{C}}$ 及 $g\in[B,C]_{\mathscr{C}}$, 必有 $1_Bf=f$ 和 $g1_B=g$.

设有范畴 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$. 若 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{B}\subset\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 对任意 $A,B\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{B}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(A,B)\subset\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ 及 $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ 有相同的合成映射, 则称 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴** (subcategory). 再者, 如果对任意 $A,B\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{B}$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$, 则称 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**全子范畴** (full subcategory).

例 (1) 集合范畴 Sets 的对象就是集合. 对任意两个集合 A, B, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(A, B)$ 由所有从 A 到 B 的集合映射所组成. 而 $g \circ f$ 是平常集合映射的合成.

(2) 把所有的群放在一起得到 $|\mathfrak{Gp}|$. 对任意两个群 A, B, 所有从 A 到 B 的群同态组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gp}}(A, B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们便得到群范畴 $\mathfrak{Gp}$.

(3) 把所有的拓扑空间放在一起得到 $|\mathfrak{T}op|$. 对任意两个拓扑空间 A, B, 所有从 A 到 B 的连续映射组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{T}op}(A, B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们便得到拓扑空间范畴 $\mathfrak{T}op$.

(4) 把所有的拓扑群放在一起得到 $|\mathfrak{TGp}|$. 对任意两个拓扑群 A, B, 所有从 A 到 B 的连续群同态组成 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{TGp}}(A, B)$. $g \circ f$ 是映射的合成. 这样我们便得到拓扑群范畴 $\mathfrak{TGp}$.

设 m 为范畴 $\mathfrak{C}$ 的态射. 若对任意 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$, 从 $mf = mg$ 得知 $f = g$, 则称 m 为**单态射** (monomorphism). 另一方面如果对任意 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$, 从 $fm = gm$ 得知 $f = g$, 则称 m 为**满态射** (epimorphism). 我们称 $f \in [A, B]_{\mathfrak{C}}$ 为**同构** (isomorphism), 如果存在 $g \in [B, A]_{\mathfrak{C}}$ 使得 $gf = 1_A$ 和 $fg = 1_B$.

14.1.2 函子

设 $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ 是两个范畴, 由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个 (**共变** (covariant)) **函子** (functor) F 是指:

(1) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, F 规定了 $\mathfrak{D}$ 中的相应的对象 $F(X)$;

(2) 设 X, Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象. 对于任一 $f \in [X, Y]_{\mathfrak{C}}$, F 规定了 $[F(X), F(Y)]_{\mathfrak{D}}$ 中的一个元素 (态射)$F(f)$, 满足:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad \forall f \in [X, Y]_{\mathfrak{C}}, g \in [Y, Z]_{\mathfrak{C}}$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

如果将上述的条件 (2) 改为

(2′) 对于任一 $f \in [X, Y]_{\mathfrak{C}}$, F 规定了 $[F(Y), F(X)]_{\mathfrak{D}}$ 中的一个元素 (态射) $F(f)$, 满足:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad \forall f \in [X, Y], g \in [Y, Z]$$

以及

$$F(1_X) = 1_{F(X)},$$

则称 F 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**反变函子** (contravariant functor).

设 $\mathfrak{C}^0$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**反范畴** (opposite category), 即规定 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^0}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$, 并且 $\mathfrak{C}^0$ 内的态射合成 fg 规定为 $\mathfrak{C}$ 内的态射合成 gf. 则由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的反变函子可以视为由 $\mathfrak{C}^0$ 到 $\mathfrak{D}$ 的共变函子.

设 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 是一个函子. 如果存在函子

$$G:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C},$$

满足: 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, $\mathfrak{D}$ 的任一对象 Y, 以及所有的 $f\in[X,X']$, $g\in[Y,Y']$ (X' 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象, Y' 为 $\mathfrak{D}$ 的任一对象), 都有

$$G(F(X))=X,\quad F(G(Y))=Y,\quad G(F(f))=f,\quad F(G(g))=g,$$

则称 F 是由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个同构, 同时也称 $\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{D}$ 同构或等价.

联系两个函子的概念是 "**函子态射**" (或 "**自然变换**"). 设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 为两个范畴, F 和 G 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的两个函子. 由 F 到 G 的一个函子态射 Φ 是指: 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 给定一个态射 $\Phi_X:F(X)\to G(X)$, 使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

其中 X,Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象, f 为 X 到 Y 的任一态射. 我们记函子态射 Φ 为 $\Phi:F\to G$, 又把 $\Phi_X:F(X)\to G(X)$ 写作 $\Phi X:FX\to GX$. 当所有 Φ_X 是同构时我们说函子态射 Φ 是**函子同构**或**自然同构**.

由 F 到 G 的函子态射的全体记为 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}(F,G)$ 或 $[F,G]$.

称函子 $T:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 为一个范畴**同构** (isomorphism), 若存在函子 $S:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$ 使得

$$1_{\mathfrak{D}}=TS\quad 及\quad ST=1_{\mathfrak{C}}.$$

称函子 $T:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 为一个范畴**等价** (equivalence), 若存在函子 $S:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$ 及函子同构

$$\Phi:1_{\mathfrak{D}}\approx TS\quad 及\quad \Psi:ST\approx 1_{\mathfrak{C}}.$$

一个函子 $T:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 的**像** (image) 是指 $\mathfrak{D}$ 的全子范畴 $\mathfrak{C}'$ 使得 $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}')=\{T(X):X\in\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})\}$. 函子 T 的**要像** (essential image) 是指 $\mathfrak{D}$ 的全子范畴 $\mathfrak{C}''$ 使得若 $Y\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{D}$, $X\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 且 Y 与 $T(X)$ 同构, 则 $Y\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}''$. 如果 T 的要像等于 $\mathfrak{D}$, 则称函子 T 为**要满函子** (essentially surjective functor), 即如果对任意 $Y\in\mathfrak{D}$, 存在 $X\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 使 TX 与 Y 同构.

称函子 T 是**忠实的** (faithful), 如果从任意对象 $A,B\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 所定的映射

$$T:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(T(A),T(B))$$
$$(A\xrightarrow{f}B)\mapsto(T(A)\xrightarrow{T(f)}T(B))$$

是单射. 如果此映射是满射, 则说函子 T 是**全忠实函子** (fully faithful).

命题 14.1　函子 F 是等价当且仅当 F 是全忠实要满函子.

证明　($\Rightarrow$) 先构造 $F(A,B)$ 的逆映射. 考虑以下两映射之合成 Φ

$$\mathrm{Hom}(FA,FB)\stackrel{G(F(A),F(B))}{\to}\mathrm{Hom}(GFA,GFB)\stackrel{\phi_*}{\to}\mathrm{Hom}(A,B),$$

其中对 $w:GF(A)\to GF(B)$ 取

$$\phi_*(w)=\phi_B^{-1}w\phi_A.$$

现取 $u:A\to B$, 求证 $\Phi(Fu)=u$. 由所设 $\Phi(Fu)=\phi_B^{-1}GFu\phi_A$, 从函子态射得交换图表:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi_A"'] & B \arrow[d, "\phi_B"] \\ C \arrow[r, "GFu"'] & D \end{tikzcd}$$

即有 $u=\phi_B^{-1}GFu\phi_A$. 得证.

取 $v:FA\to FB$, 求 w 使 $Fw=v$. 取 $w=\phi_*Gv$, 则

$$Fw=F(\phi_B^{-1}Gv\phi_A)=F(\phi_B^{-1})F(Gv)\psi_{FA})$$

用交换图表:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi_{FA}"'] & FB \arrow[d, "\psi_{FB}"] \\ (FG)(FA) \arrow[r, "FGv"'] & (FG)(FB) \end{tikzcd}$$

得

$$\begin{aligned}F(w)&=F(\phi_B^{-1})\psi_{FB}v=F(\phi_B^{-1})(F\phi)(B)v\\&=F(\phi_B^{-1})F(\phi_B)v=F(\phi_B^{-1}\phi_B)v\\&=F(1_B)v=1_{FB}v=v.\end{aligned}$$

余下要满部分可从同构 $\psi_M:M\to FGM$ 得到.

($\Leftarrow$) 首先对 $\mathfrak{C}_2$ 每一对象 M 选取 $\mathfrak{C}_1$ 内对象 A_M 及同构 $v_M:M\to F(A_M)$.

定义函子 $G:\mathfrak{C}_2\to\mathfrak{C}_1$ 如下: 若 $M\in\mathfrak{C}_2$, 设 $G(M)=A_M$. 若 $w:M\to N$, 利用 v_M 是同构得 $w':FA\to FB$ 使有交换图表:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "v_M"] \arrow[d, "w"'] & FA_M \arrow[d, "w'"] \\ N \arrow[r, "v_N"'] & FA_N \end{tikzcd}$$

F 是全忠实函子, 故有 $w_1 : A \to B$ 使 $F(w_1) = w'$. 设 $G(w) = w_1$.

取 $A \in \mathfrak{C}_1$, 设 $B = GFA$. 于是有同构 $v_{FA} : FA \to FB$. 因为 F 是全忠实函子, 有唯一 $\phi_A : A \to B = GFA$ 使 $F\phi = v_{FA}$. 同构 $\phi_A : A \to GFA$ 决定函子同构 $\phi : 1 \to GF$.

取 $M \in \mathfrak{C}_2$, 设 $A = GM$. 则同构 $v_M : M \to FA = FGM$ 决定函子同构 $\psi : 1 \to FG$, 即有 $\psi_M = v_M$, 于是 $\psi_{FA} = v_{FA}$. 已知 $F\phi = v_{FA}$, 所以 $\psi F = F\phi$. □

推荐三本范畴学的老教科书

[1] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1971 (Second edition 1998).

[2] H. Schubert, *Categories*, Springer, 1972.

[3] M. Popescu, *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules* (London Mathematical Society Monographs), Academic Press, 1973.

比较新的书有

[1] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006.

有比较多参考资料的是

[1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

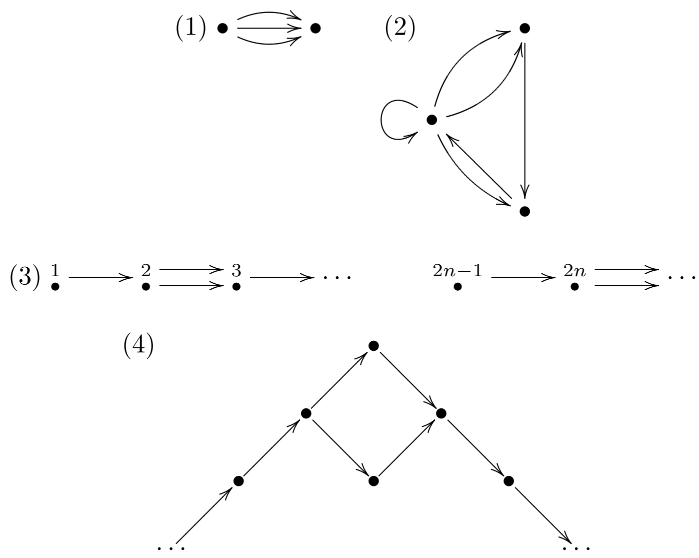
14.2 例子: 箭图表示

代数拓扑学、代数几何学、代数数论和计算机程序设计为范畴学提供最丰富的例子, 不过对本书的读者来说这些都是下一步才学的, 为此我们在这里提供一个线性代数的例子: 箭图表示. 还有一个著名的例子见: 黎景辉, 赵春来, 模曲线导引, 北京: 北京大学出版社, 2 版, 2014 年, 第二章. 这部书还有许多代数几何学中的范畴学的例子, 谨向读者推荐.

14.2.1 箭图

一个**箭图** (quiver) 是指一个四元组 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, 其中 Q_0, Q_1 为集合, $s, t : Q_1 \to Q_0$ 为映射. 称 Q_0 的元素为**顶点** (vertex), Q_1 的元素为**箭** (arrow). 对 $\alpha \in Q_1$ 称 $s(\alpha)$ 为 α 的**起点** (starting vertex), 称 $t(\alpha)$ 为 α 的**终点** (terminating vertex). 常写 α 为 $\alpha : s(\alpha) \to t(\alpha)$. 亦称箭图为**有向图** (directed graph) 或**定向图** (oriented graph).

例



固定域 F. 箭图 Q 的 F 表示 $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (V_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$, 其中 V_i 是有限维 F 向量空间, $V_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ 是 F 线性映射. 这个表示的维数是向量 $(\dim V_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$. (注意: 这里表示的意思和群表示不同.)

设 V, W 为箭图 Q 的 F 表示. 箭图表示态射 $f : V \to W$ 是指 F 线性映射 $(f_i : V_i \to W_i)_{i \in Q_0}$ 使得对所在 $\alpha : i \to j$ 下图交换

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "V_\alpha"'] & W_i \arrow[d, "W_\alpha"] \\
V_j \arrow[r, "f_j"'] & W_j
\end{tikzcd}$$

若所有 f_i 为同构, 则称 f 为同构.

箭图 Q 的 F 表示范畴 $\mathfrak{R}ep(Q)$ 的对象定义为 Q 的 F 表示. 设 V, W 为箭图 Q 的 F 表示, 定义态射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}ep(Q)}(V, W)$ 的元素为箭图表示态射 $f : V \to W$. 态射 $(f_i) \circ (g_i)$ 的合成为 F 线性映射的合成 $(f_i \circ g_i)$.

如果 Q_0, Q_1 均为有限集, 则称箭图 Q 为有限箭图.

固定域 F. 由系数在 F 的 $m \times n$ 矩阵所组成的空间记为 $M(m \times n, F)$. 设 Q 为有限箭图. 对 $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ 设

$$\mathcal{M}_{Q,d} = \{M = (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} : M_\alpha \in M(d_{t(\alpha)} \times d_{s(\alpha)}, F)\}.$$

称 $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ 为 M 的维数.

范畴 $\mathcal{M}_Q$ 的对象定义为以下集合的元素

$$\bigcup_{d\in\mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{M}_{Q,d}.$$

取范畴 $\mathcal{M}_Q$ 的两个对象 M,N, 定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_Q}(M,N)=\{(U_i)_{i\in Q_0}:\forall\alpha\in Q_1, N_\alpha U_{s(\alpha)}=U_{t(\alpha)}M_\alpha\}.$$

范畴 $\mathcal{M}_Q$ 的合成用矩阵乘法定义.

定理 14.2 设 Q 为有限箭图. 则范畴 $\mathcal{M}_Q$ 与 $\mathfrak{Rep}(Q)$ 等价.

证明 定义函子 $T:\mathcal{M}_Q\to\mathfrak{Rep}(Q)$ 如下. 对 $M\in\mathcal{M}_Q$, 取 $(TM)_i=F^{d_i}$, $d:Q_0\to\mathbb{N}$ 是 M 的维数. 取 $(TM)_\alpha=M_\alpha$, 于是得表示 $((TM_i),(TM_\alpha))$. 设 $U\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_Q}(M,N)$. 则取 TU 为由矩阵 U 所决定的线性映射.

箭图 Q 的表示 $V=((V_i)_{i\in Q_0},(V_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ 的基底是指 $B^V=(B_i^V)_{i\in Q_0}$, 其中 B_i^V 是 V_i 的基底. 选定每一表示 V 的基底 B^V. 设 $\alpha:i\to j\in Q_1$. 记 $n_i(V)=\dim V_i$. 对应基底 B_i^V, B_j^V 线性映射 V_α 的矩阵记为

$$V_\alpha^B\in M(n_j(V)\times n_i(V),F),$$

这样从 Q 的表示 V 得出 $\mathcal{M}_Q$ 的对象

$$S(V)=(V_\alpha^B)_{\alpha\in Q_1}.$$

再者从箭图表示态射 $f:V\to W$ 得 $S(f)=(U_i^f)_{i\in Q_0}$, 其中线性映射 f_i 对应基底 B_i^V, B_i^W 的矩阵为 U_i^f. 不难验证如此得出函子 $S:\mathfrak{Rep}(Q)\to\mathcal{M}_Q$.

余下证明函子 T,S 决定范畴等价.

按定义 $K^{n_i(V)}=TS(V)$.

对应于标准基底和 B_i^V 恒等映射记为 $\psi_{V,i}:K^{n_i(V)}\to V$, 则对 $\alpha:i\to j\in Q_1$ 下图交换

$$\begin{tikzcd}
TS(V)_i \arrow[r, "\psi_{V,i}"] \arrow[d, "TS(V)_\alpha"'] & V_i \arrow[d, "V_\alpha"] \\
TS(V)_j \arrow[r, "\psi_{V,j}"] & V_j
\end{tikzcd}$$

事实上只要在 V_i,V_j 内分别取基底 B_i^V, B_j^V, 在 $TS(V)_i,TS(V)_j$ 取标准基底. 映射 $\psi_{V,i},\psi_{V,j}$ 的矩阵是单位矩阵, 映射 V_α 的矩阵是 $S(V)_\alpha=V_\alpha^B$, 映射 $TS(V)_\alpha$ 的矩阵是 $S(V)_\alpha$. 从这个交换图表得出的结论是: $\psi_V=(\psi_{V,i})_{i\in Q_0}$ 是箭图表示态射. 由于每一 $\psi_{V,i}$ 是双射, 所以 $\psi_V:TS(V)\to V$ 是同构.

下一步证明: 可以用 (ψ_V) 定义从 $\mathfrak{Rep}(Q)$ 到 $\mathfrak{Rep}(Q)$ 的函子的自然变换 $\psi : TS \to 1_{\mathfrak{Rep}(Q)}$. 这就要证明从任一箭图表示态射 $f : V \to W$ 得出以下的图表交换:

$$\begin{tikzcd} TS(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "TS(f)"'] & V \arrow[d, "f"] \\ TS(W) \arrow[r, "\psi_W"'] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TS(V_i) \arrow[r, "\psi_{V,i}"] \arrow[d, "TS(f)"'] & V_i \arrow[d, "f_i"] \\ TS(W)_i \arrow[r, "\psi_{W,i}"'] & W_i \end{tikzcd}$$

只要在 V_i, V_j 内分别取基底 B_i^V, B_j^V, 在 $TS(V)_i, TS(V)_j$ 取标准基底, f_i 和 $TS(f)_i$ 的矩阵是 $S(f)_i$, 便知以上右图交换.

接着证明: ψ 是同构. 为此构造 ψ^{-1}: 对表示 V 只需取 $\psi_V^{-1} = ((\psi_{V,i})^{-1})_{i \in Q_0}$.

剩下的便是构造函子同构 $ST \to 1_{\mathcal{M}_Q}$. 先决定在形如 F^r 的向量空间取标准基底, 则对 $M \in \mathcal{M}_Q$ 有 $ST(M) = M$, 于是 $ST = 1_{\mathcal{M}_Q}$. □

14.2.2 路

箭图 Q 中长为 l 的**路** (path) 是指

$$w = (j|\alpha_l, \alpha_{l-1}, \cdots, \alpha_1|i),$$

其中 $i, j \in Q_0$, $\alpha_l, \cdots, \alpha_1 \in Q_1$, 使得 $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, $t(\alpha_l) = j$. 设定: $l = 0$ 时要求 $i = j$, 并称它为**平凡路** (trivial path), 记为 $e_i = (i||i)$.

定义 $s(w) := i$, $t(w) = j$. 若 $s(w) = t(w)$, 则称 w 为**闭路** (cycle). 称长为 1 的闭路为**圈** (loop).

两路 $w = (j|\alpha_l, \cdots, \alpha_1|i)$, $v = (k|\beta_l, \cdots, \beta_m|h)$ 的合成或乘积是指

$$wv = \delta_{ik}(j|\alpha_l, \cdots, \alpha_1, \beta_l, \cdots, \beta_m|h).$$

固定域 F. 箭图 Q 的 F **路范畴** (path category) FQ 的对象定义为 Q 的顶点. 对 $i, j \in Q_0$, 定义态射集合 $\mathrm{Hom}_{FQ}(i, j)$ 为以集合

$$\{w \text{ 是 } Q \text{ 的路} : s(w) = i, t(w) = j\}$$

为基底所生成的 F 向量空间. 把路合成线性扩张来定义态射的合成:

$$\mathrm{Hom}_{FQ}(i, j) \times \mathrm{Hom}_{FQ}(h, i) \to \mathrm{Hom}_{FQ}(h, j).$$

显然, 若 $w \in \mathrm{Hom}_{FQ}(i, j)$, 则 $we_i = w = e_j w$.

固定域 F. 对有限箭图 Q, 设

$$A_Q = \bigoplus_{i,j \in Q_0} \mathrm{Hom}_{FQ}(i, j).$$

利用路合成, 则 A_Q 为 F 代数,

$$1_{A_Q} := \sum_{i \in Q_0} e_i$$

为代数的单位元. 称 A_Q 为箭图 Q 的**路代数** (path algebra), 以 $\mathfrak{mod}_{A_Q}$ 记有限维左 A_Q 模范畴. 一个基本的问题是: 在关于 Q 的什么条件下可以把不可分 A_Q 模分类. 如 Gabriel 定理所说: 只有有限个不可分 A_Q 模同构类的充要条件是 Q 的每一个连通分支除箭头后是个 Dynkin 图. 我们不在此证明这个定理.

以 $\mathfrak{Rep}(Q)$ 记箭图 Q 的 F 表示范畴.

定理 14.3 设 Q 为有限箭图. 范畴 $\mathfrak{mod}_{A_Q}$ 与范畴 $\mathfrak{Rep}(Q)$ 同构.

证明 从箭图 Q 的 F 表示是 $V = ((V_i)_{i\in Q_0}, (V_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ 得有限维 F 向量空间

$$V^\dagger = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i.$$

取路 $c = (j|\alpha_l, \cdots, \alpha_1|i)$ 和 $v = (v_i)_{i\in Q_0} \in V^\dagger$, 定义 cv 为 (w_i), 其中 $w_j = V_{\alpha_l} \circ \cdots \circ V_{\alpha_1}(v_i)$, $w_i = 0$, 若 $i \neq j$. 于是从 Q 的表示 V 得有限维左 A_Q 模 $V^\dagger$.

设有箭图表示态射

$$f : V \to W = (f_i : V_i \to W_i)_{i \in Q_0},$$

则 $f^\dagger = \oplus_i f_i$ 为 A_Q 模同态.

反过来的方向: 设 M 为有限维左 A_Q 模, $M_i = e_i M$. 则 $M = \oplus_i M_i$. 对 $\alpha : i \to j \in Q_1$, 定义线性映射

$$M_\alpha : M_i \to M_j : e_i x \mapsto (j|\alpha|i)x,$$

于是从 A_Q 模 M 得表示 $((M_i), (M_\alpha))$.

设 $\phi : M \to N$ 为 A_Q 模同态,

$$\phi_i : M_i \to N_i : e_i x \mapsto e_i \phi(x).$$

则

$$(\phi_i) : ((M_i), (M_\alpha)) \to ((N_i), (N_\alpha))$$

为箭图表示态射.

余下留给读者证明以上两组构造给出所需的范畴同构. □

14.3 可表函子

14.3.1 Yoneda 引理

以下讨论 "Yoneda 引理", 它在可表函子的研究中有基本的重要性.

如通常一样, 以 Sets 记集合组成的范畴. 设 $\mathfrak{C}$ 为一个范畴. 则对于任一 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 有 (共变) 函子

$$\begin{aligned} h_X : \mathfrak{C}^0 &\to \mathrm{Sets} \\ Y &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X). \end{aligned}$$

对于 $\mathfrak{C}^0$ 中任意两个对象 Y, Z 之间的态射 $:Z \to Y (\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^0}(Y, Z))$, h_X 在其上的作用是自然的:

$$\begin{aligned} h_X() : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, X) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

当然, h_X 也是由 $\mathfrak{C}$ 到 Sets 的一个反变函子.

设 $F : \mathfrak{C} \to \mathrm{Sets}$ 为任一反变函子, $\Phi \in [h_X, F]$ 为任一函子态射, 即对于 C 的任一对象 Y, 有范畴 Sets 中的态射

$$\Phi_Y : h_X(Y) \to F(Y),$$

使得对于任一态射 $Y' \to Y$, 下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) = [Y, X] \arrow[r, "\Phi_Y"] \arrow[d, "h_X(f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ h_X(Y') = [Y', X] \arrow[r, "\Phi_{Y'}"] & F(Y') \end{tikzcd}$$

若取 $Y = X$, 则 $h_X(X) = [X, X]$ 中的恒同映射 1_X 在态射 Φ_X 下有像 $\Phi_X(1_X) \in F(X)$.

引理 14.4 (Yoneda) 在上述记号下, 有一一对应:

$$\begin{aligned} [h_X, F] &\to F(X) \\ \Phi &\mapsto \Phi_X(1_X). \end{aligned}$$

即由 h_X 到 F 的函子态射完全被 X 上的恒同映射在该函子态射下的像所决定.

证明 将引理中的映射记为 $\alpha : [h_X, F] \to F(X)$, 我们只需给出 α 的逆映射.

为了定义逆映射 $\beta : F(X) \to [h_X, F]$, 需要规定集合 $F(X)$ 中的任一元素 a 在 β 下的像 $\beta(a) \in [h_X, F]$, 即对于任一 $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 要规定 $\beta(a)_Y \in [h_X(Y), F(Y)]$. 设

$$f : Y \to X \, (\in h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)),$$

定义

$$\beta(a)_Y(f) = F(f)(a).$$

我们首先说明 $\beta(a)$ 是函子态射, 即验证下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y) = [Y, X] \arrow[r, "\beta(a)_Y"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
h_X(Y') = [Y', X] \arrow[r, "\beta(a)_{Y'}"] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

其中 Y, Y' 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象, $g : Y' \to Y$ 为任一态射. 事实上, 对于任一 $k : Y \to X (\in h_X(Y))$, 有

$$F(g)(\beta(a)_Y(k)) = F(g)(F(k)(a)) = F(k \circ g)(a),$$

$$\beta(a)_{Y'}(h_X(g)(k)) = \beta(a)_{Y'}(k \circ g) = F(k \circ g)(a).$$

这就证明了图表的交换性.

下面证明 β 是 α 的逆.

一方面, 容易看出 $\alpha \circ \beta = 1_{F(X)}$. 事实上, 对于任一 $a \in F(X)$, 由 α, β 的定义以及函子的定义性质 (将恒同态射映为恒同态射), 有

$$\alpha(\beta(a)) = \beta(a)_X(1_X) = F(1_X)(a) = 1_{F(X)}(a) = a.$$

另一方面, 我们要证明 $\beta \circ \alpha = 1_{[h_X, F]}$, 即对于任一 $\Phi \in [h_X, F]$, 有 $\beta(\alpha(\Phi)) = \Phi$; 亦即对于任一 $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 有 $\beta(\alpha(\Phi))_Y = \Phi_Y$. 设 $f : Y \to X (\in h_X(Y))$. 则

$$\beta(\alpha(\Phi))_Y(f) = F(f)(\alpha(\Phi)) = F(f)(\Phi_X(1_X)).$$

由于 $\Phi \in [h_X, F]$, 所以有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
h_X(X) = [X, X] \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "h_X()"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
h_X(Y) = [Y, X] \arrow[r, "\Phi_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

故

$$F(f)(\Phi_X(1_X)) = \Phi_Y(h_X(f)(1_X)) = \Phi_Y(f),$$

于是

$$\beta(\alpha(\Phi))_Y(f) = \Phi_Y(f), \quad \forall f \in h_X(Y).$$

这就完成了引理的证明. $\square$

14.3.2 定义

定义 14.5 设 F 是由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 Sets 的一个反变函子. 如果存在 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 使得 F 与 h_X 同构, 则称 F 为**可表函子** (representable functor). F 的一个**表示** (representation) 是指一个函子同构 $\rho : h_X \to F$, 此时我们也称 F 由 X 代表

说明 14.6 如果 F 是一个可表函子, 根据 Yoneda 引理可知: F 的任一表示 $\rho : h_X \to F$ 完全由 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 以及 $\rho_X(1_X)$ 所决定. 此时我们称 $\rho_X(1_X)$ 为 F 一个**泛元** (universal element), 记为 u_F.

下面的定理说明了泛元的泛性质.

定理 14.7 设 $\rho : h_X \to F$ 为反变函子 $F : \mathfrak{C} \to \text{Sets}$ 的一个表示, $u_F = \rho_X(1_X)$ 为泛元. 则对于任一 $c \in F(Y)$ (其中 Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象), 存在唯一的态射 $f \in [Y, X]$, 使得

$$c = F(f)(u_F).$$

证明 由定义, $h_X(Y) = [Y, X]$. 另一方面, 由于 $\rho : h_X \to F$ 为函子同构, 故有交换图表

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(X) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "\rho_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

其中 $g : Y \to X \in [Y, X]$ 为任一态射. 由于 ρ_Y 为同构, 故对于 $c \in F(Y)$, 存在 $f \in h_X(Y)$, 满足 $\rho_Y(f) = c$. 显然 $f = h_X(f)(1_X)$, 于是

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)).$$

在上面的交换图表中取 $g = f$, 则有

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)) = F(f)(\rho_X(1_X)) = F(f)(u_F).$$

下面证明 f 的唯一性. 设 $g : Y \to X$ 满足 $c = F(g)(u_F)$, 则 $c = F(g)(\rho_X(1_X)) = \rho_Y(h_X(g)(1_X))$. 又有

$$c = \rho_Y(h_X(f)(1_X)),$$

故

$$\rho_Y(h_X(g)(1_X)) = \rho_Y(h_X(f)(1_X)).$$

而 ρ_Y 是同构, 所以

$$h_X(g)(1_X) = h_X(f)(1_X),$$

即 $g = f$. $\square$

我们回顾范畴论中的一个简单事实, 即所有的范畴都可以视为**函子范畴** (functor category). 准确地说, 有下面的定理.

定理 14.8 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, 以 $\mathrm{Funct}(\mathfrak{C}^0, \mathrm{Sets})$ 记由 $\mathfrak{C}^0$ 到 Sets 的函子的全体. 定义态射

$$h : \mathfrak{C} \to \mathrm{Funct}(\mathfrak{C}^0, \mathrm{Sets})$$

$$X \mapsto h(X) = h_X,$$

$$(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto h(f) : \begin{cases} h_X \to h_Y, \\ (Z \xrightarrow{g} X) \mapsto (Z \xrightarrow{fg} Y). \end{cases}$$

则映射

$$\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Obj}\,\mathrm{Funct}$$

$$X \mapsto h_X$$

是单射, 并且 h 是**全忠实的** (fully faithful), 即对于任意的 $X, Y \in \mathrm{Obj}\mathfrak{C}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(h_X, h_Y)$$

$$f \mapsto h(f)$$

都是双射. 所以若有 $g : h_X \to h_Y$, 则存在唯一的 $f : X \to Y$ 使 $g = h(f)$, 即对 Z 有 $g_Z : h_X(Z) \to h_Y(Z)$, 对 $z \in h_X(Z)$ 有 $g_Z(z) = fz$.

读者可自行证明此定理.

这个定理告诉我们: 函子的概念更具有基本的重要性和普适性, 许多论述都可以用函子的语言来表达. 下面我们给出可表函子的一个例子.

设有范畴 $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C}$ 和函子 $F : \mathfrak{I} \to \mathfrak{C}$. 对于 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 定义**常值函子** (constant functor) $c_X : \mathfrak{I} \to \mathfrak{C}$ 如下: 对于 $I \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{I}$, 令 $c_X(I) = X$; 对于 $\alpha \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{I}$, 令 $c_X(\alpha) = \mathrm{Id}_X$. 这样就得到一个共变函子:

$$\mathfrak{C} \to \mathrm{Sets}$$

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I},\mathfrak{C})}(F, c_X),$$

以 $\varinjlim F$ 记此函子. 如果此函子可表, 则存在 $L \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 以及 $\phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I},\mathfrak{C})}(F, c_L)$, 使得对于任一函子态射 $\chi : F \to c_X$, 存在唯一的态射 $\psi : L \to X$ 满足 $\chi = c_\psi \circ \phi$. 此时有双射

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{I},\mathfrak{C})}(F, c_L) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(L, X).$$

我们亦以 $\varinjlim F$ 记 L (于是上面的函子态射即是 ψ). 以 Ab 记交换群范畴.

命题 14.9 对于任一函子 $F : \mathfrak{I} \to Ab$, $\varinjlim F$ 可表.

证明 若 $\mathfrak{I}$ 内有态射 $\alpha : i \to j$, 且有 $x \in F(i)$, $y \in F(j)$ 满足 $F(\alpha)x = y$, 则将 $x - y \in F(i) \oplus F(j)$ 作为集合 E 中的元素. 以 R 记 E 在群 $\bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} F(i)$ 中生成的子群. 取 $L = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} F(i)/R$ 即可. □

说明 14.10 可表函子的一个重要例子是 Grothdendieck 的定理: 概形范畴上的可表函子是层. 详见: 黎景辉, 赵春来, 模曲线导引, 北京: 北京大学出版社, 2 版, 2014 年, 3.4 节, 86 页, 定理 3.7.

14.4 伴随函子

与可表函子相关的一个重要结构是伴随函子, 常常我们知道一个函子有某种性质正是利用它是伴随函子.

我们说两个函子 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 有**伴随关系** (adjunction), 如果存在自然同构

$$\rho = \rho_{BA} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, A) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, RA).$$

此同构分别对 A 和 B 都是函子态射, 比如说如果固定 A, 则有 $\mathfrak{B} \to \mathrm{Sets}$ 的函子 $\bullet \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\bullet, RA)$ 及函子 $\bullet \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L\bullet, A)$, 而 $\rho_{\bullet A}$ 是这两个函子之间的自然同构. 我们以 $\rho : L \dashv R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 记此伴随关系; 此时我们说 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 是 $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 的**左伴随函子** (left adjoint functor), $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 的**右伴随函子** (right adjoint functor).

为了说清这一点, 我们以 $\mathfrak{B}^0$ 记 $\mathfrak{B}$ 的反范畴. 引入两个双变元的函子 $\mathfrak{B}^0 \times \mathfrak{A} \to \mathrm{Sets}$

$$\mathrm{Hom}(L)(B, A) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, A), \quad \mathrm{Hom}(R)(B, A) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, RA).$$

说 L 是 R 的伴随函子是指存在函子同构

$$\rho : \mathrm{Hom}(L) \to \mathrm{Hom}(R).$$

命题 14.11 设 R 是 L 的右伴随函子, R_1 是 L_1 的右伴随函子. 若有函子态射 $f : L \to L_1$, 则存在唯一函子态射 $g : R \to R_1$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L_1B, A) \arrow[r, "\rho_1(B,A)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(L)(f_B \times 1_A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, R_1A) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(R)(1_B \times g_A)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, A) \arrow[r, "\rho(B,A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, RA)
\end{tikzcd}$$

证明 取 $A \in \mathfrak{A}$. 得两个函子 h_{RA}, $h_{R_1A} : \mathfrak{B} \to \mathrm{Sets}$. 由假设可用

$$\rho(B, A)\, \mathrm{Hom}(L)(f_B \times 1_A)\rho_1(B, A)^{-1} : h_{R_1A}(B) \to h_{RA}(B)$$

得函子态射 $h_{R_1A} \to h_{RA}$. 按定理 14.8 知有唯一态射 $g_A : R_1A \to RA$ 使命题中的图表交换, 需证明如此给出函子态射 $g : R_1 \to R$, 为此取 $\mathfrak{A}$ 内 $u : A \to A_1$, 欲证

$$\begin{tikzcd}
R(A_1) & R(A) \arrow[l, "R(u)"'] \\
R_1(A_1) \arrow[u, "g_{A_!}"] & R_1(A) \arrow[l, "R_1(u)"] \arrow[u, "g_A"']
\end{tikzcd}$$

为交换图表. 也就是说要证明两个从 $\mathrm{Hom}(R_1)(B, A)$ 到 $\mathrm{Hom}(R)(B, A_1)$ 的态射

$$\mathrm{Hom}(R)(1_B \times R(u))\,\mathrm{Hom}(R)(1_B \times g_A)$$

和

$$\mathrm{Hom}(R)(1_B \times g_{A_1})\,\mathrm{Hom}(R)(1_B \times R_1(u))$$

相等. 由于在命题的交换图表中 ρ, ρ_1 是同构, 故此只需下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L_1B, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(1_{L_1(B)} \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(L)(f_B \times 1_A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(L_1B, A_1) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(R)(f_B \times 1_{A_1})"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(1_{L(B)} \times u)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(LB, A_1)
\end{tikzcd}$$

而此图表交换是因为态射结合律. □

推论 14.12 (1) 按以上命题, 设从 $L \dashv R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $L_1 \dashv R_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{B}_1$ 和 $f : L \to L_1$, 得 $g : R_1 \to R$. 再设有 $L_2 \dashv R_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{B}_2$ 及 $f_1 : L_1 \to L_2$, 于是得 $g_1 : R_2 \to R_1$. 则从 $f_1 f : L \to L_2$ 得 gg_1.

(2) 如果有 $L \dashv R$ 和 $L \dashv R_1$, 则有函子同构 $R \to R_1$.

命题 14.13 已给函子 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 和函子态射 $\psi : \mathrm{Hom}(L) \to \mathrm{Hom}(R)$. 设

$$\eta_B^\psi = \psi_{B,LB}(1_{LB}) : 1_{\mathfrak{B}} \to (RL)B.$$

则 $\eta^\psi : 1_{\mathfrak{B}} \to (RL)$ 为函子态射, 并有双射

$$\{\mathrm{Hom}(L) \to \mathrm{Hom}(R)\} \to \{1_{\mathfrak{B}} \to (RL)\}$$
$$\psi \mapsto \eta^\psi.$$

证明 (1) 取 $\mu : B \to B_1$. 由于 ψ 是双变元函子态射, 以下两图表交换

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(LB, LB) \arrow[r, "\psi_{B,LB}"] \arrow[d, "L\mu"'] & \mathrm{Hom}(B, RL(B)) \arrow[d, "RL(\mu)"] \\
\mathrm{Hom}(LB, LB_1) \arrow[r, "\psi_{B,LB_1}"'] & \mathrm{Hom}(B, RL(B_1))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(LB_1, LB_1) & \xrightarrow{\psi_{B_1,LB_1}} & \mathrm{Hom}(B_1, RL(B_1)) \\ {\scriptstyle L\mu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathrm{Hom}(LB, LB_1) & \xrightarrow[\psi_{B,LB_1}]{} & \mathrm{Hom}(B, RL(B_1)) \end{array}$$

用 η_B^ψ 的定义得证下图交换

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B^\psi} & RL(B) \\ {\scriptstyle \mu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle RL(\mu)} \\ B_1 & \xrightarrow[\eta_{B_1}^\psi]{} & RL(B_1) \end{array}$$

于是知有函子态射 $\eta^\psi : 1_{\mathfrak{B}} \to (RL)$.

(2) 构造 $\psi \mapsto \eta^\psi$ 之逆映射.

取 $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $u : LB \to A$ 和函子态射 $\phi : 1_{\mathfrak{B}} \to (RL)$. 设 $[\delta^\phi(B, A)](u) = R(u)\phi_B$. 可证有态射 $\delta^\phi : \mathrm{Hom}(L) \to \mathrm{Hom}(R)$ 使得

$$\eta^{\delta^\phi} = \phi, \quad \delta^{\eta^\psi} = \psi.$$

下一步证明: δ^ϕ 为函子态射. 取范畴 $\mathfrak{B}^0 \times \mathfrak{A}$ 的态射 $(\mu, \nu) : (B, A) \to (B_1, A_1)$. 则

$$[\delta^\phi(B_1, A_1)][\nu u L(\mu)] = R(\nu u L(\mu))\phi(B_1) = R(\nu)R(u)(RL)(\mu)\phi(B_1),$$
$$R(\nu)[\delta^\phi(B, A)(u)]\mu = R(\nu)R(u)\phi(B)\mu = [R(\nu)R(u)]\phi(B)\mu,$$

又从 $\phi : 1_{\mathfrak{b}} \to RL$ 为函子态射得 $\phi_B\mu = RL(\mu)\phi_{A_1}$, 于是有所需的交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(LB, A) & \xrightarrow{\delta_{B,A}^\phi} & \mathrm{Hom}(B, R(A)) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Hom}(LB_1, A_1) & \xrightarrow[\delta_{B_1,LA_1}^\phi]{} & \mathrm{Hom}(B_1, R(A_1)) \end{array}$$ □

同样可以证明以下命题

命题 14.14 已给函子 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 和函子态射 $\Phi : LR \to 1_{\mathfrak{A}}$. 对 $\mathfrak{B}^0 \times fA$ 之对象 (B, A), $v : B \to RA$, 设

$$\phi_{BA}(v) = \Phi_A L(v).$$

则

$$\phi_{BA} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, RA) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, A)$$

为函子态射, 并有双射

$$\begin{aligned}\{LR \to 1_{\mathfrak{A}}\} &\to \{\mathrm{Hom}(R) \to \mathrm{Hom}(L)\}\\ \Phi &\mapsto \phi.\end{aligned}$$

命题 14.15 函子 $L:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, $R:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 互为伴随函子的充分必要条件是存在函子态射 $\eta: 1_{\mathfrak{B}}\to RL$, $\epsilon: LR\to 1_{\mathfrak{A}}$ 满足以下条件:

(1) 对任意 $B\in\mathfrak{B}$ 有

$$\epsilon_{LB}L(\eta_B) = 1_{LB};$$

(2) 对任意 $A\in\mathfrak{A}$ 有

$$R(\epsilon_A)\eta_{RA} = 1_{RA}.$$

证明 按前面命题当有 η, ϵ.

反过来, 设 η 对应于 $\psi:\mathrm{Hom}(L)\to\mathrm{Hom}(R)$, ϵ 对应于 $\phi:\mathrm{Hom}(R)\to\mathrm{Hom}(L)$. 将证 $\phi\psi=1$, $\psi\phi=1$.

取 $u: LB\to A$, 则 $\psi_{BA}(u)=R(u)\eta_B$. 取 $v: B\to RA$, 则 $\phi_{BA}(v)=\epsilon_A L(v)$. 故

$$\begin{aligned}\phi_{BA}(\psi_{BA}(u)) = \phi_{BA}(r(u)\eta_B) &= \epsilon_A(R(u)\eta_B)\\ &= \epsilon_A(LR(u))L(\eta_B).\end{aligned}$$

因为 ϵ 是函子态射, 故下图交换

$$\begin{tikzcd} LR(LB) \arrow[r, "\epsilon_{LB}"] \arrow[d, "LRu"'] & LB \arrow[d, "u"] \\ LR(A) \arrow[r, "\epsilon_A"'] & A \end{tikzcd}$$

用命题中的条件 (1) 便得

$$\phi_{BA}(\psi_{BA}(u)) = u\epsilon_{LB}L(\eta_B) = u1_{LB} = u.$$

同样方法可证 $\psi\phi=1$. □

命题 14.16 给出函子 $R:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$. 设

(1) 有映射 $B\mapsto LB$ 从 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{B}$ 到 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$,

(2) 对 $\mathfrak{B}$ 任一对象 B 都给出 $\mathfrak{B}$ 的态射 $\eta_B: B\to RLB$,

(3) 对 $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$ 以下定义的 ρ_{BA} 是双射

$$\rho_{BA}:\mathrm{Hom}(LB,A)\to\mathrm{Hom}(B,RA): v\mapsto R(v)\eta_B.$$

则函子 $R:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 有左伴随函子 $L:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$.

证明 取 $\mathfrak{B}$ 内 $u : B \to C$, 则有 $\eta_C u : B \to RLC$. 由假设 (3) 得唯一 $Lu : LB \to LC$, 使得

$$\rho_{B,LC}(Lu) = \eta_C u.$$

显然 $L(1_B) = 1_{LB}$. 余下只要证明 $L(v)L(u) = L(vu)$, 便得 L 为函子. 设 v 为 $v : C \to D$. 只需证明

$$\rho_{B,LD}(L(v)L(u)) = \rho_{B,LD}(L(vu).$$

由定义

$$\begin{aligned}\rho_{B,LD}L(vu) &= \eta_D(vu),\\ R(Lv)\eta_C &= \rho_{C,LD}Lv = \eta_D v,\\ R(Lu)\eta_B &= \rho_{B,LC}Lu = \eta_C u,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\rho_{B,LD}(L(vu)) &= (\eta_D v)u = R(Lv)\eta_C u\\ &= R(Lv)R(Lu)\eta_B = R(LvLu)\eta_B\\ &= \rho_{B,LD}(L(v)L(u)).\end{aligned}$$

□

命题 14.17 (1) 函子 $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 有左伴随函子的充分必要条件是每个 $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{B})$ 所决定的函子 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, R-) : \mathfrak{A} \to \mathrm{Sets}$ 为可表函子. 选定这个函子的代表, 记它为 LB 及表示

$$\rho_B : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(LB, -) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, R-),$$

则 $B \to LB$ 为函子及 ρ 为所求的伴随关系. 如果从别的选择而得到

$$\rho'_B : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L'B, -) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, R-),$$

则存在唯一同构 $\kappa : L \cong L'$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\kappa_B, -) = {\rho_B}^{-1}\rho'_B$; 特别是若 R 有左伴随函子, 则除同构外 R 的左伴随函子是唯一决定的. 函子 $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 有左伴随函子, 则有函子态射

$$\eta : 1 \to RL,$$

称 η 为伴随关系 $\rho : L \dashv R$ 的**单位** (unit). η 由 Yoneda 双射所决定

$$\eta_B = \rho_{B,LB}(1_{LB}).$$

(2) 同样的, L 有右伴随函子的充分必要条件是 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L-, A) : \mathfrak{B}^{opp} \to \mathrm{Sets}$ 均为可表函子. 于是有映射 $\epsilon_A : LRA \to A$ 满足以下泛性: 对每一 $\mathfrak{A}$ 内态射 $f : LB \to A$ 存在唯一的 $\mathfrak{B}$ 态射 $g : B \to RA$ 使得

$$\begin{tikzcd} LB \arrow[rr, "Lg"] \arrow[dr, "g"'] & & LRA \arrow[dl, "\eta_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

称函子态射 $\epsilon : LR \to 1$ 为此伴随关系的**余单位** (counit), 并且

$$\epsilon_A = \rho_{RA,A}^{-1}(1_{RA}).$$

我们称单位和余单位为**伴随映射** (adjunction map). 可以证明: 如果 $L \dashv R$, 则

(1) L 是全忠实函子当且仅当 $1 \cong RL$.

(2) R 是全忠实函子当且仅当 $LR \cong 1$.

14.5　极限

14.5.1　图表

给出箭图 $\Sigma = (V_\Sigma, A_\Sigma, s, t)$, 其中 V_Σ 为顶点集合, A_Σ 为箭集合, 两个映射 s, $t : A_\Sigma \to V_\Sigma$ 分别取箭的起点和终点.

一个范畴 $\mathfrak{C}$ 中的Σ **型图表** (diagram of type Σ) D 包含下述两个资料: (1) 如果 $i \in V_\Sigma$ (顶点), 则有 $D(i) \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$; (2) 如果 $a \in A_\Sigma$ (箭), 则有 $D(a) : D(s(a)) \to D(t(a)) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}$.

14.5.2　极限

设 Σ 是一个箭图, T 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个 Σ 型图表. 范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 L 是 T 的一个**极限** (limit), 如果:

(1) 对每一顶点 $i \in V_\Sigma$, 存在一态射 $\lambda_i : L \to T(i)$, 使得对于任一 $a \in A_\Sigma$, 下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
 & T(s(a)) \arrow[d, "T(a)"] \\
L \arrow[ur, "\lambda_{s(a)}"] \arrow[r, "\lambda_{t(a)}"'] & T(t(a))
\end{tikzcd}$$

(2) 若有 $\mathfrak{C}$ 内的一组态射有态射 $\xi_i : Y \to T(i)$ $(\forall i \in V_\Sigma)$, 使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
 & T(s(a)) \arrow[d, "T(a)"] \\
Y \arrow[ur, "\xi_{s(a)}"] \arrow[r, "\xi_{t(a)}"'] & T(t(a))
\end{tikzcd}$$

则在 $\mathfrak{C}$ 中存在唯一的态射 $f: Y \to L$ 使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\xi_{s(a)}"] \arrow[dddr, bend left, "\xi_{t(a)}"'] & \\
& T(s(a)) \arrow[dd, "T(a)"] \\
L \arrow[ur, "\lambda_{s(a)}"] \arrow[dr, "\lambda_{t(a)}"'] & \\
& T(t(a))
\end{tikzcd}$$

有时我们把 Σ 型图表 T 的极限 L 记为 $\lim_\Sigma T$. 如果 Σ 是有限集, 则称 $\lim_\Sigma$ 为**有限极限** (finite limit). 如果范畴 $\mathfrak{C}$ 内所有图表的极限均存在, 我们便称 $\mathfrak{C}$ 为**完备范畴** (complete category).

极限的一个重要性质是它与右伴随函子可交换, 即如果有伴随关系: $L \dashv R$, 并且极限 $\lim_\Sigma T$ 存在, 则

$$R\left(\lim_{\Sigma} T\right) = \lim_{\Sigma} RT.$$

若有函子 R 使得上式对所有极限 $\lim_\Sigma$ 均成立, 我们便说函子 R **保存极限** (preserve limits).

集合 I 上一个偏序 $\leqslant$ 是具有自反性、反对称性和传递性的二元关系. 我们可以按以下办法把一个偏序集 I 看成一个箭图 Σ: 先把 I 看作顶点集合 V_Σ, 然后每当 $i \leqslant j$ 时便认为有箭 $j \to i$. 这样范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个 Σ 型图表 M 由以下资料组成: 对于每个 $i \in I$ 有 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 M_i, 对于 I 中的每一对 $i \leqslant j$ 有 $\mathfrak{C}$ 中的一个态射 $\mu_{ji}: M_j \to M_i$. 如果进一步下面的两个条件成立, 我们就称这样的图表为 $\mathfrak{C}$ 中的一个**反向系统** (inverse system):

(1) $\mu_{ji} \circ \mu_{kj} = \mu_{ki}, \forall i \leqslant j \leqslant k$;

(2) $\mu_{ii} = 1$ (恒同映射), $\forall i \in I$.

如果极限 $\lim_\Sigma M$ 存在, 我们就称之为反向系统 $\{M_i, \mu_{ji}\}$ 的**反极限** (inverse limit) (或**投射极限** (projective limit)), 通常记为 $\varprojlim_i M_i$.

14.5.3 均衡子

考虑箭图 Σ: $\circ \rightrightarrows \circ$, 这时 $\mathfrak{C}$ 中的 Σ 图表 T 就仅是 $\mathfrak{C}$ 的一对态射 $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$, 这个图表的极限称为 f 和 g 的**均衡子** (equaliser). 确切地说, $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ 的一个均衡子即是一个偶对 (K, k), 其中 K 是 $\mathfrak{C}$ 的一个对象, $k: K \to A$ 是一个态射, 满足: (1) $fk = gk$; 以及 (2) 对于所有的态射 $v: Y \to A$, 如果 $fv = gv$, 则存在唯一的态射

$w : Y \to K$ 使得 $v = kw$. 如下面的交换图表所示:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\ Y \arrow[u, dotted, "w"] \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

特别地, $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & B \end{tikzcd}$ 的均衡子称作 f 的**核** (kernel) (如果 $\mathfrak{C}$ 有零对象).

14.5.4 纤维积

考虑箭图 Σ:

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[d] \\ \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

这时 $\mathfrak{C}$ 中的 Σ 图表 T 就仅是 $\mathfrak{C}$ 的一对态射 $f : A \to C$ 和 $g : B \to C$, 这个图表的极限称为 f 和 g 的**纤维积** (fibre product) 或**拉回** (pullback). 明确地, f 和 g 的纤维积是指满足极限定义的交换方形:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

14.5.5 积

一个**积** (product) (也称作**直积** (direct product)) 是由没有箭的箭图所定义的图表的极限. 确切地说, 如果 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一组对象, 则这组对象的积是 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 X 连带着一组态射 $\mathrm{pr}_i : X \to A_i$, 使得对于任意一组态射 $\{f_i : Y \to A_i\}$, 存在唯一的态射 $f : Y \to X$ 满足 $\mathrm{pr}_i f = f_i$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ X \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

$\{A_i\}_{i\in I}$ 的积记为 $\prod_i A_i$.

例如, 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, $S \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$. 我们可以构造一个新的范畴 $\mathfrak{C}_S$, 其对象是

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{C}} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, S),$$

态射是交换图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

则 $\mathfrak{C}_S$ 中的 "积" 对应着 "S 上的纤维积".

14.5.6　余极限

余极限是通过把极限定义中的箭方向反转而得到的. 这是说, 设 Σ 是一个箭图, T 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个 Σ 型图表, 为了给出 $T:\Sigma\to\mathfrak{C}$ 的**余极限** (colimit), 我们需要 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 C 以及对于 Σ 的每一个顶点 i 给定一个态射 $\lambda_i: C\leftarrow T(i)$, 使得对于 Σ 内任意的箭 $a\in A_\Sigma$ 下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} & T(s(a)) \arrow[dl, "\lambda_{s(a)}"'] \arrow[dd, "T(a)"] \\ C & \\ & T(t(a)) \arrow[ul, "\lambda_{t(a)}"] \end{tikzcd}$$

我们还要求: 若有任意一组态射 $\xi_i: A\leftarrow T(i)$ 满足 $\xi_{s(a)}=\xi_{t(a)}\circ T(a)$, $\forall a\in A_\Sigma$, 则存在唯一的态射 $f: A\leftarrow C$ 使得所有的图表交换. 我们把其中的细节留给读者去补充. 有时我们把余极限 C 记为 $\mathrm{colim}_\Sigma T$.

余极限的一个重要性质是它与左伴随函子可交换, 即如果有伴随 $L\dashv R$, 并且余极限 $\mathrm{colim}_\Sigma T$ 存在, 则

$$L(\mathrm{colim}_\Sigma T)=\mathrm{colim}_\Sigma LT.$$

从箭图 Σ:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \\ \circ & \end{tikzcd}$$

得出的 Σ 图表 T 就是一对态射 $f: A\to B$ 和 $g: A\to C$. 这个图表的极限称为 f 和 g 的**余纤维积** (fibre coproduct) 或**推出** (pushout).

对于任一给定的偏序集 $(I,\leqslant)$, 我们可以构作一个箭图 Σ, 即把 I 作为顶点集合, 并且当 $i\leqslant j$ 时认为有箭头 $i\to j$. 所谓 $\mathfrak{C}$ 中的以 I 为指标集的**正向系统** (direct system) $\{M_i,\rho_{ij}\}$ 是指 $\mathfrak{C}$ 中的一组对象 $\{M_i: i\in I\}$ 连同 $\mathfrak{C}$ 中的一组态射 $\rho_{ij}: M_i\to M_j$ $(\forall i\leqslant j)$, 满足:

(1) $\rho_{jk}\circ\rho_{ij}=\rho_{ik}$, $\forall i\leqslant j\leqslant k$;

(2) $\rho_{ii}=1$ (恒同映射), $\forall i\in I$.

余极限 $\operatorname{colim}_\Sigma T$ 称作正向系统 $\{M_i, \rho_{ij}\}$ 的**正极限** (direct limit) (或**归纳极限** (inductive limit)), 记为 $\varinjlim_i M_i$.

余极限的一个例子是 $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ 的**余均衡子** (co-equaliser), 它是具有以下两条性质的态射 $c: B \to C$: (1) $cf = cg$; (2) 对于任一满足 $vf = vg$ 的态射 $v: B \to Y$, 存在唯一的态射 $w: C \to Y$ 使得 $v = wc$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "v"'] & C \arrow[d, dotted, "w"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

$A \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$ 的余均衡子称为 f 的**余核** (cokernel).

如果我们在积的定义中把箭头都反转过来, 就得到余积. 详言之, 设 $\{A_j\}_{j\in I}$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一组对象, 则这组对象的**余积** (coproduct) (或**直和** (direct sum)) 是 $\mathfrak{C}$ 中的一个对象连带着一组态射 $\iota_j : X \leftarrow A_j$, 使得对于任意一组态射 $\{f_j : Y \leftarrow A_j\}$, 存在唯一的态射 $f : Y \leftarrow X$ 满足 $f\iota_j = f_j$:

$$\begin{tikzcd} Y & \\ X \arrow[u, "f"] & A_j \arrow[l, "\iota_j"] \arrow[ul, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

如果范畴 $\mathfrak{C}$ 内所有图表的余极限均存在, 我们便称 $\mathfrak{C}$ 为**余完备范畴** (cocomplete category).

14.6 纤维范畴

14.6.1 纤维范畴

在 Grothendieck 的理论中常常见到这样的构造: 固定一个范畴 $\mathfrak{E}$. 若有函子

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{p} \mathfrak{E},$$

则称 $\mathfrak{F}$ 为 $\mathfrak{E}$ 上的范畴.

设有 $\mathfrak{E}$ 上的范畴 $\mathfrak{G} \xrightarrow{q} \mathfrak{E}$ 以及函子 $\mathfrak{F} \xrightarrow{f} \mathfrak{G}$. 如果 f 满足条件 $qf = p$, 则称 f 为 $\mathfrak{E}$ 函子. 由 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的 $\mathfrak{E}$ 函子的全体记为 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

设 $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ 同上, $f, g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ 为两个 $\mathfrak{E}$ 函子. 如果函子态射 $u : f \to g$ 满足条件: 对于任意的 $\xi \in \operatorname{Obj}(\mathfrak{F})$ 有

$$q(u(\xi)) = \operatorname{Id}_{p(\xi)},$$

则称 u 为 $\mathfrak{E}$ 同态.

$\mathfrak{E}$ 上的两个范畴 $\mathfrak{F} \to \mathfrak{E}$ 和 $\mathfrak{G} \to \mathfrak{E}$ 的**纤维积** (fibre product) 是指一个范畴 (记为 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \mathfrak{G}$) 以及两个函子

$$\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \mathfrak{G} \xrightarrow{pr_1} \mathfrak{F}\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \mathfrak{G} \xrightarrow{pr_2} \mathfrak{G},$$

使得对于 $\mathfrak{E}$ 上任一范畴 $\mathfrak{H} \to \mathfrak{E}$ 都有双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \mathfrak{G}) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$$
$$h \mapsto (pr_1 \circ h, pr_2 \circ h).$$

若有函子 $\mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}$, 则称 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}' \to \mathfrak{E}'$ 是从 $\mathfrak{F} \to \mathfrak{E}$ 通过**基变换** (base change) 得到的.

设 $\mathfrak{F} \xrightarrow{p} \mathfrak{E}$ 同上, $S \in \mathrm{Obj}\, \mathfrak{E}$. 则得到只含有一个对象的范畴 $\{S\}$ 以及包含函子 $\{S\} \to \mathfrak{E}$. 以 $\mathfrak{F}_S$ 记纤维积 $\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{E}} \{S\}$, 称之为 $\mathfrak{F}$ 在 S 上的纤维. 具体地说, $\mathrm{Obj}(\mathfrak{F}_S) = \{X \in \mathrm{Obj}\, \mathfrak{F} \mid p(X) = S\}$, $\mathfrak{F}_S$ 的态射是使得 $p(u) = \mathrm{Id}_S$ 的 $\mathfrak{F}$ 的态射 u.

设有函子 $\mathfrak{S} \xrightarrow{p} \mathfrak{C}$ 及 $\mathfrak{S}$ 内的态射 $\phi : y \to x$. 记

$$U = p(x), \quad V = p(y), \quad f = p(\phi).$$

如果对于任一 $y' \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S}_V)$ 以及任一 f 态射 $u : y' \to x$ (即 $p(u) = f$), 存在唯一的 $\mathfrak{S}_V$ 内的态射 $\bar{u} : y' \to y$ 使得

$$u = \phi \circ \bar{u},$$

则称 ϕ 是**卡氏态射** (cartesian morphism).

定义 14.18 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, 且 $p : \mathfrak{S} \to \mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的范畴. 一个**强卡氏态射** (strongly cartesian morphism) 是指 $\mathfrak{S}$ 的态射 $\phi : y \to x$, 使得对于任一 $z \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S})$, 由 $\chi \mapsto (\phi \circ \chi, p(\chi))$ 给出的映射

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{S}}(z, y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{S}}(z, x) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(p(z), p(x))} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(p(z), p(y))$$

都是双射.

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, dashed, "\chi"'] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[dd] & & \\
& y \arrow[r, bend right, "\phi"] \arrow[dd] & x \arrow[dd] \\
p(z) \arrow[dr, "\chi"'] \arrow[drr, bend left] & & \\
& p(y) \arrow[r, bend right, "p(\phi)"'] & p(x)
\end{tikzcd}$$

注意, 根据 Yoneda 引理, 对于给定的位于 $U \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ 之上的 $x \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S})$ $(p(x) = U)$ 和 $\mathfrak{C}$ 的态射 $f : V \to U$, 如果存在强卡氏态射 $\phi : y \to x$ 满足 $p(\phi) = f$, 则 (y, ϕ) 在除唯一同构外是唯一的. 这可以从上面的定义清楚地看出, 因为函子

$$z \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathfrak{S}}(z, x) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(p(z),U)} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(p(z), V)$$

仅依赖于 $(x, U, f : V \to U)$. 因此当有映至 x 的强卡氏态射是 $f : V \to U$ 的提升时, 我们用 $V \times_U x \to x$ 或 $f^*x \to x$ 记此强卡氏提升, 意思是 $f^*x \to x$ 是强卡氏态射并且 $p(f^*x \to x) = f$.

定义 14.19 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, 且 $p : \mathfrak{S} \to \mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的范畴. 我们称 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的**纤维范畴** (fibre category), 如果对于任一给定的位于 $U \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ 之上的 $x \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S})$ 和 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : V \to U$, 存在位于 f 之上的强卡氏态射 $f^*x \to x$.

设 $p : \mathfrak{S} \to \mathfrak{C}$ 是一个纤维范畴. 对于任一 $f : V \to U$ 和 $x \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S}_U)$, 按定义, 我们可以选择位于 f 之上的强卡氏态射 $f^*x \to x$. 根据选择公理, 我们可以对于所有的 $f : V \to U = p(x)$ 同时选择 $f^*x \to x$.

定义 14.20 设 $p : \mathfrak{S} \to \mathfrak{C}$ 是一个纤维范畴.

(1) 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : V \to U$ 和任一 $x \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S})$ 使 $p(x) = U$, 我们选择一个位于 f 之上的强卡氏态射 $f^*x \to x$, 则我们称这样的选择为纤维范畴 $p : \mathfrak{S} \to \mathfrak{C}$ 的一个**拉回的选择** (choice of pullbacks).

(2) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : V \to U$, 一个拉回的选择决定**拉回函子** (pullback functor) $f^* : \mathfrak{S}_U \to \mathfrak{S}_V$.

"拉回的选择" 不是一个标准术语, 在有些书中称之为 "**劈裂**" (cleavage or cleaving).

以上就是 Grothendieck 将拓扑学中的基本概念 "**纤维丛**" (fibre bundle) (参见 Steenrod [Ste51]) 推广到代数几何中来的方法 (参见 Grothendieck 等 [SGA1, VI, §6]).

14.7 Abel 范畴

本节简要介绍 Abel 范畴.

Abel (阿贝尔, 1802—1829) 是挪威数学家. 为了纪念阿贝尔, 挪威政府宣布从 2003 年开始每年颁发一次阿贝尔奖. 设立阿贝尔奖的主要目的是扩大数学的影响, 吸引年轻人从事数学研究. 奖金的数额大致同诺贝尔奖相近, 设立此奖的一个原因也是因为诺贝尔奖没有数学奖项. 阿贝尔奖被视为数学界最高荣誉之一.

设 R 为有 1 的交换环. 若 M, N 为 R 模, 所有从 M 到 N 的 R 线性映射组成加法群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. 由此所有 R 模构成一个范畴, 记为 $\mathfrak{Mod}_R$, 称为 R 模范畴, 这个范

畴很重要. 我们已在上一章看见在这个范畴内可以做同调代数. R 模范畴有什么特性, 怎样刻画它呢?

14.7.1 加性范畴

称 $P \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 为**终对象** (terminal object), 若对任意 $A \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 存在唯一态射 $A \to P$. 称 $Q \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 为**始对象** (initial object), 若对任意 $A \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 存在唯一态射 $Q \to A$. 如果 $Z \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 同时为始对象和终对象, 则称 Z 为**零对象** (zero object).

若范畴 $\mathfrak{C}$ 有零对象, 则任何两个零对象之间存在唯一同构, 因此我们可以选定一个零对象, 并记之为 $0_{\mathfrak{C}}$ 或 0.

设范畴 $\mathfrak{C}$ 有零对象. 取 $A, B \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 则存在唯一态射 0_{AB} 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "0_{AB}"] \arrow[dr] & & B \\ & 0_{\mathscr{C}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

称 0_{AB} 为 A, B 之间的**零态射** (zero morphism).

给定两个单态射 $u : U \to A$ 和 $v : V \to A$, 我们称 $u \geqslant v$, 如果存在态射 $v_1 : V \to U$ 使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, dotted, "v_1"'] \arrow[dr, "v"] & \\ U \arrow[r, "u"'] & A \end{tikzcd}$$

如果这样的 v_1 存在, 则可以证明它是唯一的并且是一个单态射. 如果进一步假设存在 $v \geqslant u$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] & A \\ U \arrow[u, dotted, "u_1"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

则 u_1 和 v_1 都是同构, 这是因为 $v \cdot 1_V = v = uv_1 = vu_1v_1$, 由 v_1 是单态射即知 $1_V = v_1u_1$. 类似地有 $1_U = u_1v_1$.

如果 $u : U \to A$ 和 $v : V \to A$ 满足 $u \geqslant v$ 并且 $v \geqslant u$, 我们就称 u 和 v 是**等价的** (equivalent).

对于单态射的任一等价类取定一个代表, 譬如说 $u : U \to A$, 我们称 (U, u) 为 A 的一个**子对象** (subobject). 把上面的箭头都反转过来, 我们就定义了**商对象** (quotient) 的概念.

设有范畴 $\mathfrak{C}$ 中的任意两个对象 L 和 M. 它们的**积**是指范畴 $\mathfrak{C}$ 中的一个对象 X 连带着态射 $\mathrm{pr}_L : X \to L$, $\mathrm{pr}_M : X \to M$ 使得对于任意一组态射 $f_L : Y \to L$, $f_M : Y \to M$, 存在唯一的态射 $f : Y \to X$ 满足 $\mathrm{pr}_L f = f_L$, $\mathrm{pr}_M f = f_M$. 常记积 X 为 $L \prod M$.

L 和 M 的**余积**是 $\mathfrak{C}$ 中的一个对象 X 连带着一组态射 $\iota_L : X \leftarrow L$, $\iota_M : X \leftarrow M$, 使得对于任意一组态射 $f_L : Y \leftarrow L$, $f_M : Y \leftarrow M$, 存在唯一的态射 $f : Y \leftarrow X$ 满足 $f\iota_L = f_L$, $f\iota_M = f_M$. 常记余积 X 为 $L \coprod M$.

一个**加性范畴**是具有下述性质的范畴 $\mathfrak{A}$:

(1) $\mathfrak{A}$ 有零对象 $0_{\mathfrak{A}}$;

(2) 对于 $\mathfrak{A}$ 中的所有对象 L, M 和 N, 集合 $\mathrm{Hom}(L, M)$ 都是 Abel 群, 并且合成映射

$$\mathrm{Hom}(L, M) \times \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(L, N)$$

都是 $\mathbb{Z}$ 双线性的;

(3) 对于 $\mathfrak{A}$ 中的任意两个对象 L 和 M, 积 $L \prod M$ 和余积 $L \coprod M$ 都存在.

加性范畴 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的一个函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 被称作**加性函子** (additive functor), 如果映射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(L, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(F(L), F(M))$$

是 $\mathbb{Z}$ 线性的.

一个态射 $u : L \to M$ 的**核** $\mathrm{Ker}\, u \to L$ 与**余核** $M \to \mathrm{Cok}\, u$ 是用下面的图表所定义的:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(u) \arrow[r, "k"] & L \arrow[r, "u"] \arrow[r, bend right, "0"'] & M \\
 & X \arrow[u, "v"] \arrow[ul, dotted, "\exists ! w"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "u"] \arrow[r, bend right, "0"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cok}(u) \arrow[dl, dotted, "\exists !"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

它的意思是: (1) $uk = 0$, (2) 对于所有的态射 $v : X \to L$, 如果 $uv = 0$, 则存在唯一的态射 $w : X \to \mathrm{Ker}(u)$ 使得 $v = kw$.

例 14.21 设 R 为交换环, 取 R 模同态 $u : L \to M$.

设 $\mathrm{Ker}(u) := \{x \in L : u(x) = 0\}$. 则子模包含同态 $k : \mathrm{Ker}(u) \to L$ 为在 R 模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 内同态 u 的核.

取 $\mathrm{Cok}(u) := M/\{u(x) : x \in L\}$. 则商模投射同态 $p : M \to \mathrm{Cok}(u)$ 为在 R 模范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 内同态 u 的余核.

不难看出

引理 14.22 *核是单态射, 余核是满态射.*

证明 设 $k : K \to A$ 是态射 $f : A \to B$ 的核, 这特别意味着 $fk = 0$. 假设有 $w_1, w_2 : Y \to K$ 使得 $kw_1 = kw_2$. 我们只需证明 $w_1 = w_2$. 观察图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "w_1"] \arrow[r, shift right, "w_2"'] & K \arrow[r, "k"] & A \end{tikzcd}$$

令 $v = kw_1$. 则 $fv = fkw_1 = 0w_1 = 0$. 由核的定义知存在唯一的态射 $w : Y \to K$ 使得 $v = kw$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & Y \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dotted, "w"] & \end{tikzcd}$$

但这意味着 $w_1 = w = w_2$. 这就证明了本引理的第一个论断. 第二个论断的证明类似 (只需要把各处的箭头反转即可). □

如果 $k : K \to A$ 是 $f : A \to B$ 的一个核, 我们将常常把 K 记成 $\mathrm{Ker}(f)$ (作为 A 的子对象), 并且用图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

表示核. 对于余核 $(\mathrm{Cok}(f))$、像和余像也都做同样的处置.

引理 14.23 假设加性范畴中的一个态射 $u : L \to M$ 有核 $k : K \to L$ 和余核 $c : M \to C$. 如果 $\mathrm{Cok}(k)$ 和 $\mathrm{Ker}(c)$ 都存在, 则存在唯一的态射 $\mathrm{Cok}(k) \to \mathrm{Ker}(c)$.

证明 存在性. 考虑

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r, "c"] & C \\ & \mathrm{Cok}(k) \arrow[ur, dotted, "u'"] \arrow[r, dotted, "??"'] & \mathrm{Ker}(c) \arrow[u, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

首先, 由于 $k : K \to L$ 是核, 我们有 $uk = 0$. 于是根据 $\mathrm{Cok}(k)$ 的定义, 存在态射 $u' : \mathrm{Cok}(k) \to M$ 使得 $u = u'\lambda$. 现在用 c 作用于此式的两端, 并且注意到 c 是 u 的余核, 我们得到 $cu'\lambda = cu = 0 = 0\lambda$. 于是 $cu' = 0$, 这是因为 λ 是满态射. 最后, 由 $\mu : \mathrm{Ker}(c) \to M$ 的定义知存在态射 $\mathrm{Cok}(k) \to \mathrm{Ker}(c)$.

唯一性. 假设 $\mu\bar{u}\lambda = u = \mu u'\lambda$. 由于 λ 是满态射, 我们有 $\mu\bar{u} = \mu u'$. 又由于 μ 是单态射, 所以 $\bar{u} = u'$. □

如果范畴 $\mathfrak{A}$ 中的每一个态射都有核和余核, 我们就可以定义态射 $u : L \to M$ 的**像** (image) 为

$$\mathrm{Img}(u) = \mathrm{Ker}(M \to \mathrm{Cok}(u)),$$

余像 (coimage) 为

$$\mathrm{Coim}(u) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(u) \to L).$$

这样, 从态射 $u: L \to M$ 出发就得到下面的图表:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(u) \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d] & M \arrow[r] & \mathrm{Cok}(u) \\
& \mathrm{Coim}(u) \arrow[r] & \mathrm{Img}(u) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

它定义了关于 u 的典范态射 $\mathrm{Coim}(u) \to \mathrm{Img}(u)$.

定义 14.24 一个加性范畴 $\mathfrak{A}$ 称作 **Abel 范畴** (abelian category), 如果它满足以下两个条件:

(1) AB1: $\mathfrak{A}$ 中的每一个态射都有核和余核;

(2) AB2: 对于 $\mathfrak{A}$ 中的任一个态射 $u: L \to M \in \mathfrak{A}$, 典范态射 $\mathrm{Coim}(u) \to \mathrm{Img}(u)$ 都是同构.

设 R 为交换环. 定义范畴 $\mathfrak{Mod}_R$ 如下: 取 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{Mod}_R$ 为所有的 R 模, 若 A, B 为 R 模, 取 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Mod}_R}(A, B)$ 为所有从 A 到 B 的 R 线性映射, 即设 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Mod}_R}(A, B)$ 为 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$. 容易验证 $\mathfrak{Mod}_R$ 是 Abel 范畴, 这是 Abel 范畴的典型例子.

称一个范畴为 "小范畴", 如果它的对象和态射的全体实际上都是**集合** (set) 而不是**类** (class).

定理 14.25 (Mitchell 嵌入定理) 任何一个小 Abel 范畴都可以在一个保持核与余核的函子下 (作为子范畴) 全嵌入到一个环上的模的小范畴.

见 B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, 1965. 到此可见 Abel 范畴差不多就是 R 模范畴.

设有环 R (不一定是交换的环), 以 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 记左 R 模范畴. 以下定理刻画模范畴.

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 称 $\mathfrak{A}$ 的对象 P 为范畴 $\mathfrak{A}$ 的**生成元** (generator), 如果函子 $\mathfrak{A} \to \mathrm{Sets}: M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, M)$ 是忠实函子. 称 P 是**投射** (projective) 生成元, 如果 $\mathfrak{A} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{Mod}: ? \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, ?)$ 是正合函子. 称 P 是**紧** (compact) 生成元, 如果函子 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, ?)$ 与余极限交换.

定理 14.26 (Gabriel) 设有环 R 及 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$. 则 $\mathfrak{A}$ 等价于 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 的充要条件是 $\mathfrak{A}$ 是余完备范畴及 $\mathfrak{A}$ 有紧投射生成元 P, 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, P) = R$.

推论 14.27 (Morita) 设有两个环 R 和 S. 则以下为等价条件:

(1) 存在范畴等价 $F: {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_S\mathfrak{Mod}$;

(2) 存在 $R-S$ 模 X 使 $? \otimes_R X: {}_R\mathfrak{Mod} \to {}_S\mathfrak{Mod}$ 为等价函子;

(3) 存在有限生成投射 S 模 P 使 P 为 ${}_S\mathfrak{Mod}$ 的生成元, 并且 R 同构于 $\mathrm{Hom}_S(P, P)$.

参见 P. Freyd, *Abelian Categories*, Harper, 1966.

Abel 范畴很多很好的性质, 例如:

(1) Abel 范畴是有限完备和余完备的, 所以有直和与有限积、有纤维积与余纤维积.
(2) 在 Abel 范畴内, 单射是它的余核的核, 满射是它的核的余核.
(3) 设 $f: A \to B$ 是 Abel 范畴内态射. 则 f 是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow$ 若有 $g: C \to A$ 满足 $fg = 0$, 则 $g = 0$.
(4) 用在 Abel 范畴内一个态射方形

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd} \qquad \star$$

造两个态射:

$$A \overset{\binom{f}{-g}}{\to} B \oplus C \overset{(h,k)}{\to} D$$

则

1) $(h,k)\binom{f}{-g} = 0 \Leftrightarrow \star$ 为交换方形,
2) $\binom{f}{-g} = \operatorname{Ker}(h,k) \Leftrightarrow \star$ 为纤维积,
3) $(h,k) = \operatorname{Cok}\binom{f}{-g} \Leftrightarrow \star$ 为余纤维积.

(4) 在 Abel 范畴内拉回反射单射和保存满射, 即在纤维积

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "m"] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

若 m 为单射, 则 g 为单射. 若 f 为满射, 则 e 为满射.

命题 14.28 在 Abel 范畴内任一态射 $f: A \to B$ 必可分解 $f = me$, 其中 m 为单射, e 为满射.

证明 取 f 的核 $k: K \to A$, 于是 $fk = 0$. 设 $e: A \to I$ 为态射 k 的余核. 则 e 为满射. 由余核 e 的定义及 $fk = 0$ 知有 $m: I \to B$ 及交换图表

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[dl, dashed, "m"'] \\ & B & \end{tikzcd}$$

即 $f = me$. 余下证明: m 是单射. 为此将证明: 如有 $g: G \to I$ 使得 $mg = 0$, 则 $g = 0$.

现设 $c = \operatorname{Cok}(g)$, 即 $cg = 0$. 由 $mg = 0$ 得 r 使 $m = rc$. 利用 e, c 为满射得 ce 为

满射. 在 Abel 范畴内满射为余核, 即有 h 使 $h = \mathrm{Cok}(ce)$, 于是 $ceh = 0$.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, dashed, "l"'] \arrow[d, "h"] & G \arrow[d, "g"] \\
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[d, dashed, "c"'] \\
& B & \bullet \arrow[l, dashed, "r"'] \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

这样 $fh = meh = rceh = 0$. 用 k 为 f 的核的定义得态射 l, 使 $h = kl$. 从 e 为态射 k 的余核得 $ek = 0$, 所以 $eh = ekl = 0$, 但 h 为 ce 的余核

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, two heads, "ce"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[dl, dashed, "s"'] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

所以有 s 使 $s(ce) = e$. 因为 e 是满射得 $sc = 1$, 这告诉我们 c 是单射. 已知 $cg = 0$, 所以 $g = 0$. □

我们说函子 $F : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ **反射同构** (reflect isomorphism), 如果 $u : A \to B$ 为 $\mathfrak{C}_1$ 态射及 Fu 为 $\mathfrak{C}_2$ 内的同构, 则 u 为 $\mathfrak{C}_1$ 内的同构. 此时又称 F 为**保守函子** (conservative functor).

命题 14.29 设 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴, 函子 $L : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ 有右伴随函子 $R : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. 假设

(1) R 是保守函子,

(2) 由单位 $1 \to RL$ 给出的态射 $N \to RLN$ 是同构,

(3) 由余单位 $LR \to 1$ 给出的态射 $LRM \to M$ 是满映射,

则 R 与 L 为互逆之等价.

证明　只需证明对 $M \in fA$ 映射 $LRM \to M$ 为单射. 以 K 为此映射的核, 因为右伴随函子是左正合, 所以

$$R(K) \simeq \mathrm{Ker}[R(LRM) \to R(M)],$$

用余单位 $LR \to 1$ 得

$$RM \to R(LRM) \to RM.$$

一方面以上映射合成为 1, 另一方面由假设 (2) 有同构 $\bullet \to RL(\bullet)$, 所以 $R(L(R(M)))$ $\to R(M)$ 是同构, 于是 $R(K) = 0$, 由 R 是保守函子得 $K = 0$. □

14.7.2 正合序列

Abel 范畴有什么好处呢? 在 Abel 范畴内可以做同调代数. 第一个这样想的人是 A. Grothendieck, Sur quelques points d'algebre homologique, *Tohoku Math. J.* 9 (1957) 119–221. 以下几段为大家说说上同调的定义, 下一章会有详细的计算.

引理 14.30 设

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$$

是 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 中态射的序列. 如果 $vu = 0$, 则存在一个典范的态射 $\mathrm{Img}(u) \to \mathrm{Ker}(v)$.

证明 由 $\mathrm{Cok}(u)$ 的定义和 $vu = 0$, 我们有映射 $\mathrm{Cok}(u) \to N$:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \mathrm{Cok}(u) \arrow[dl, dotted] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

根据 $\mathrm{Img}(u)$ 的定义, 它就是 $\mathrm{Ker}(M \to \mathrm{Cok}(u))$, 即有

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Img}(u) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[r, bend right, "0"'] & \mathrm{Cok}(u)
\end{tikzcd}$$

态射 $u : L \to M$ 总可以通过 $\mathrm{Img}(u) \to M$ 分解. 把以上这些放在一起, 我们有

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Img}(u) \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
L \arrow[ur] \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \mathrm{Cok}(u) \arrow[dl, dotted] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

这就是说态射 $\mathrm{Img}(u) \to M \xrightarrow{v} N$ 是零. 于是, $\mathrm{Ker}(v)$ 的定义性质就给出了我们所要求的态射 $\mathrm{Img}(u) \to \mathrm{Ker}(v)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(v) \arrow[r] & M \arrow[r, "v"] \arrow[r, bend right, "0"'] & N . \\
& \mathrm{Img}(u) \arrow[u] \arrow[ul, dotted, "\exists!"] &
\end{tikzcd}$$

□

定义 14.31 在 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 中的序列

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$$

称为**正合序列** (exact sequence), 如果 $vu = 0$ 并且典范态射 $\mathrm{Img}\, u \to \mathrm{Ker}\, v$ 是同构 (此时我们说 $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Img}(u)$——作为 M 的子对象).

一个**短正合序列** (short exact sequence) 是指一个序列

$$0 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0,$$

其中 $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ 是正合的, u 是单态射以及 v 是满态射.

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 均为 Abel 范畴. 我们说函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是**左正合函子** (left exact functor), 如果 F 把任意的正合序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 映为正合序列 $0 \to FA \to FB \to FC$. 同样, 我们说 F 是**右正合函子** (right exact functor), 如果 F 把上面的正合序列映为正合序列 $FA \to FB \to FC \to 0$. 我们说 F 是**正合函子** (exact functor), 如果 F 同时是左、右正合函子. 我们指出: Abel 范畴必为加性范畴; 正合函子必为加性函子.

14.8 三角形

在加性范畴对态射加上核和像的一些条件我们得到 "Abel 范畴". 有另外的一种办法从加性范畴构造出 "剖分范畴" 使其有 "同调" 的结构.

14.8.1 平移函子

称加性范畴 $\mathfrak{C}$ 的加性自同构 $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 为**平移函子** (translation functor). 以 $X[n]$ 记 $T^n(X)$, $f[n]$ 记 $T^n(f)$. 我们称形如以下的 $\mathfrak{C}$ 内的态射序列:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

为 $\mathfrak{C}$ 的一个**三角形** (triangle), 而两个三角形之间的态射是指交换图表

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

14.8.2 剖分范畴

剖分范畴 (triangulated category) 是指一个具有以下性质 **TR1**$-$**TR4** 的三元组 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$, 其中 $\mathfrak{C}$ 是加性范畴, $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 是平移函子, Δ 是 $\mathfrak{C}$ 内的一组三角形 (称为**特异三角形** (distinguished triangle)).

TR1 a) $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \to 0 \to X[1]$ 是特异三角形 ($\forall X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$).

b) 如果 $X \to Y \to Z \to X[1]$ 与 $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ 同构, 且 $X \to Y \to Z \to X[1]$ 是特异三角形, 则 $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ 也是特异三角形.

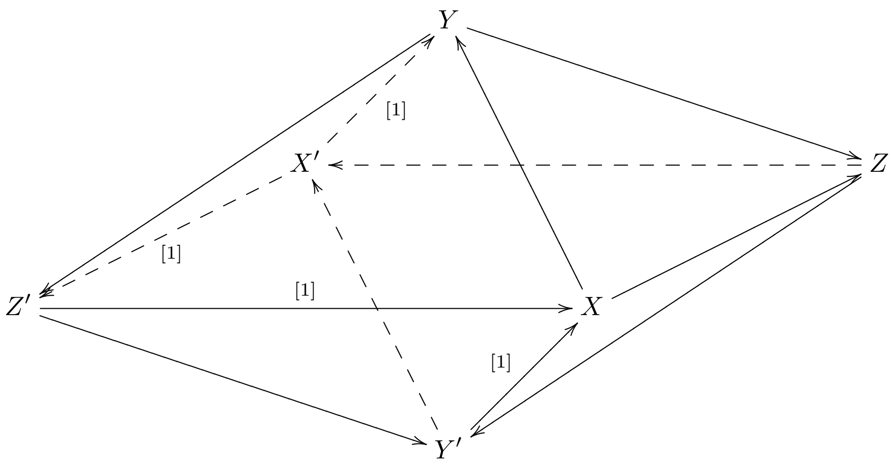
c) $\mathfrak{C}$ 内的任一态射 $X \xrightarrow{u} Y$ 均可扩充为特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to X[1]$.

TR2 三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 为特异三角形当且仅当 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 为特异三角形.

TR3 若有特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to X[1]$ 和 $X' \xrightarrow{u'} Y' \to Z' \to X'[1]$, 又有态射 $X \xrightarrow{f} X'$, $Y \xrightarrow{g} Y'$ 满足 $u'f = gu$, 则存在 (不一定唯一的) 态射 $Z \xrightarrow{h} Z'$, 使得下图为三角形态射:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

为叙述 TR4, 考虑下图:



图中 $X' \xrightarrow{[1]} Z'$ 是指 $X' \to Z'[1]$.

称这样的图为**八面体图** (octahedron diagram), 如果以下的条件成立:

(1) 上盖中

$$X \to Y \to Z' \xrightarrow{[1]} \quad 和 \quad Y \to Z \to X' \xrightarrow{[1]}$$

是特异三角形, 其余两个三角形是交换图表, 即

$$X \to Y \to Z = X \to Z \quad 和 \quad X' \to Y \to Z' = X' \to Z'.$$

(2) 下底中

$$X \to Z \to Y' \xrightarrow{[1]} \quad 和 \quad Z' \to Y' \to X' \xrightarrow{[1]}$$

是特异三角形, 其余两个三角形是交换图表.

(3) 要求

$$Y \to Z \to Y' \quad 等于 \quad Y \to Z' \to Y'$$

及

$$Y' \to X[1] \to Y[1] \quad \text{等于} \quad Y' \to X' \to Y[1]$$

(即两对侧棱相等).

剖分范畴的最后一个条件是:

TR4 任意一个上盖可以扩张为一个八面体图.

设 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$ 和 $(\mathfrak{C}', T', \Delta')$ 均为剖分范畴. 我们称函子 $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 为剖分范畴函子, 如果以下成立:

(1) F 是加性函子;

(2) $T'F = FT$;

(3) 如果 $X \to Y \to Z \to TX$ 属于 Δ, 则 $FX \to FY \to FZ \to FTX$ 属于 Δ'.

关于剖分范畴可参考: A. Neeman, *Triangulated Categories* (Annals of Mathematics Studies), Princeton University Press, 2001.

14.8.3 t 范畴

设 $\mathfrak{C}$ 为剖分范畴. $\mathfrak{C}$ 的 t 结构是指满足以下条件的一对全真子范畴 $\{\mathfrak{C}^{\leqslant 0}, \mathfrak{C}^{\geqslant 0}\}$ (记 $\mathfrak{C}^{\leqslant 0}[-n]$ 为 $\mathfrak{C}^{\leqslant n}$, $\mathfrak{C}^{\geqslant 0}[-n]$ 为 $\mathfrak{C}^{\geqslant n}$):

(1) $\mathfrak{C}^{\leqslant 0} \subset \mathfrak{C}^{\leqslant 1}$, $\mathfrak{C}^{\geqslant 0} \subset \mathfrak{C}^{\geqslant 1}$;

(2) 若 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}^{\leqslant 0}$, $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}^{\geqslant 1}$, 则 $\mathrm{Hom}(X, Y) = \{0\}$;

(3) 若 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 则存在特异三角形 $A \to X \to B \to A[1]$, 其中 $A \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}^{\leqslant 0}$, $B \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}^{\geqslant 1}$.

此时我们亦称 $\mathfrak{C}$ 为 t **范畴** (t-category).

引理 14.32 嵌入函子 $\mathfrak{C}^{\leqslant n} \to \mathfrak{C}$ 有右伴随函子 $\tau_{\leqslant n} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\leqslant n}$, 同时嵌入函子 $\mathfrak{C}^{\geqslant n} \to \mathfrak{C}$ 有左伴随函子 $\tau_{\geqslant n} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\geqslant n}$.

称 $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$ 为**截断函子** (truncation functor).

证明 设有 $\mathfrak{C}$ 内的态射 $X \xrightarrow{f} Y$. 按剖分范畴的定义性质 (1) c), 取 X 的特异三角形 $A \to X \to B \to A[1]$, 取 Y 的特异三角形 $A' \to Y \to B' \to A'[1]$. 则有正合序列

$$\mathrm{Hom}(A, B'[-1]) \to \mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(A, Y) \to \mathrm{Hom}(A, B').$$

由 t 范畴的定义性质 (2) 知此序列左右两端的群均为零, 于是 $A \to X \xrightarrow{f} Y$ 决定唯一

的态射 $A \to A'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] & X[1] \\
A' \arrow[r] & Y \arrow[r] & B' \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

定义 $\tau_{\leqslant 0}X = A$, $\tau_{\geqslant 1}X = B$, $\tau_{\leqslant 0}(f)$ 为以上被唯一决定的态射 $A \to A'$. 由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\leqslant 0}}(A, \tau_{\leqslant 0}Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, Y),$$

故 $\tau_{\leqslant 0}$ 为 $\mathfrak{C}^{\leqslant 0} \to \mathfrak{C}$ 的右伴随函子. 其余证明类似. □

14.8.4 上同调函子

设 $\mathfrak{C}$ 为剖分范畴, $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 称加性函子 $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ 为**上同调函子** (cohomology functor), 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任一特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$,

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

为 $\mathfrak{A}$ 内的正合序列.

定理 14.33 设 $\mathfrak{C}$ 为 t 范畴. 则

(1) $\mathfrak{C}^{\geqslant 0} \cap \mathfrak{C}^{\leqslant 0}$ 为 Abel 范畴;

(2) $\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\geqslant 0} \cap \mathfrak{C}^{\leqslant 0}$ 为上同调函子.

注 我们以 $H^0(X)$ 记 $\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}(X)$, 以 $H^n(X)$ 记 $H^0(X[n])$. 以上定理说明 t 结构是同调代数的先有结构, 即是说: 只要构造好 t 范畴便可以开始研究同调代数了.

14.9 复形

上节讲到有了 t 范畴就可以开始讨论同调代数了, 但是怎样从一个范畴去找一个 t 结构呢? 上同调的第一个例子是拓扑空间的上同调群. 固定交换群 A, 取拓扑空间 X, 则 "上同调群" $H^n(X, A)$ 是从一个复形 $C^\bullet(X, A)$ 计算出来的. 拓扑空间范畴 $\mathfrak{Top}$ 的对象是拓扑空间, 态射是拓扑空间之间的连续映射.

所以要决定 H^n 便先要从范畴 $\mathfrak{A}$ 构造复形. 用复形得出来的复形范畴 $C(\mathfrak{A})$ 有很多三角形——复形态射的柱锥三角形. 但我们的目的是计算 "同调", 而同调是 "看不见" 同伦的 ——从两个同伦的复形算出来的同调群是等同的, 所以我们需要从复形范畴 "消掉" 同伦得出同伦范畴 $K(\mathfrak{A})$. 这个同伦范畴就是最好的剖分范畴的例子了. 不过本节说明: 要得到 "同调函子" 我们还需要 t 结构, 为此我们得从同伦范畴 $K(\mathfrak{A})$ "化出" 导出范畴 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 这还不足够. 正如范畴的内容是态射, "**范畴的范畴**" (category of categories) 的内容是函子, 所以有必要问: 从函子 $F:\mathfrak{A} to \mathfrak{B}$ 怎样导出函子 $\mathfrak{D}\mathfrak{A} to \mathfrak{D}\mathfrak{B}$. 这就是本节的内容.

在环论里有两个基本的构造方法:

(1) 从交换环 R 的理想 I 可构造**商环** (quotient ring) R/I;

(2) 用交换环 R 的乘性子集可构造**分式环** (ring of fractions) $R[S]^{-1}$.

我们先在范畴里介绍类似的方法——商范畴和分式范畴.

14.9.1 商范畴

一个 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的全子范畴 $\mathfrak{S}$ 被称作**厚子范畴** (thick subcategory) 或 **Serre 子范畴** (Serre subcategory), 如果对于 $\mathfrak{A}$ 中的任一短正合序列

$$0 \to L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0,$$

M 是 $\mathfrak{S}$ 的对象当且仅当 L, N 都是 $\mathfrak{S}$ 的对象.

我们按以下方式引入一个范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$, 它被称为 $\mathfrak{A}$ 关于 $\mathfrak{S}$ 的**商范畴** (quotient category).

$\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ 的对象与 $\mathfrak{A}$ 的对象完全相同.

设 $M, N \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$, M' (相应地, N') 是 M (相应地, N) 的子对象. 典范映射

$$i^M_{M'}: M' \to M, \quad p^N_{N/N'}: N \to N/N'$$

定义了一个线性映射

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(i^M_{M'}, p^N_{N/N'}): \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(M,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(M', N/N').$$

当 M', N' 取遍 M 和 N 的所有子对象时 (使得 M/M' 和 N' 都是 $\mathfrak{S}$ 的对象), 全部的 Abel 群 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(M', N/N')$ 定义了一个正向系统. 我们现在定义

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M,N) := \varinjlim_{M',N'} \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(M', N/N').$$

(对于 $M \in \mathfrak{A}$, 如果 $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ 同构 $M' \to M$ 组成的范畴始对象 $I \to M$, 则

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M,N) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(I,N).)$$

下面要做的就是定义合成律:

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M,N) \times \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(N,P) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M,P).$$

任取 $\bar{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M,N)$ 以及 $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(N,P)$. 设 $\bar{f}$ 是 $f: M' \to N/N'$ 的像, 其中的 M', N' 满足 $M/M', N' \in \operatorname{Obj}\mathfrak{S}$; 又设 $\bar{g}$ 是 $g: N'' \to P/P'$ 的像, 其中的 N'', P'

满足 $N/N'', P' \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{S}$. 令

$$M'' = f^{-1}((N''+N')/N'), \quad P'' = P' + g(N'' \cap N').$$

则 $M/M'', P'' \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{S}$. 设

$$f' : M'' \to (N''+N')/N', \quad g' : N''/N'' \cap N' \to P/P''$$

分别是由 f, g 所诱导的. 我们还有典范态射

$$c : N'' + N'/N' \to N''/N'' \cap N'.$$

令 $h = g'cf'$. 则 h 在 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M, P)$ 中的像 $\bar{h}$ 仅依赖于 $\bar{f}, \bar{g}$. 我们把合成 $\bar{g} \circ \bar{f}$ 定义为 $\bar{h}$.

可以验证 $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ 是 Abel 范畴, 并且可以验证函子 $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ (它把 $M \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ 映到 M, 把态射 $f : M \to N$ 映到它在 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(M, N)$ 中的像) 是加性的并且是正合的. 进一步, 如果 $\mathfrak{D}$ 是 Abel 范畴, $G : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ 是一个正合函子使得 $G(M)$ 是零对象 ($\forall M \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{S}$), 则存在唯一的函子 $H : \mathfrak{A}/\mathfrak{S} \to \mathfrak{D}$ 使得 $G = H \circ T$.

14.9.2 分式范畴

设 $S \subset \mathrm{Mor}\mathfrak{C}$ 为范畴 $\mathfrak{C}$ 内的一组态射. 目的是构造一个范畴 $\mathfrak{C}[S]^{-1}$ 以及 (关于 S 的局部化) 函子 $Q : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[S]^{-1}$, 使得

(1) 对所有的 $s \in S$, $Q(s)$ 均为同构;

(2) 若有函子 $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 使得所有的 $F(s)$ $(s \in S)$ 均为同构, 则有唯一的函子 $G : C[S]^{-1} \to \mathfrak{D}$ 使得 $F = G \circ Q$.

我们说 $\mathfrak{C}[S]^{-1}$ 是 $\mathfrak{C}$ 关于 S 的局部化而得的分式范畴, Q 是局部化函子. 我们像构造分式环时一样引进乘性系.

定义 14.34 *设 $\mathfrak{C}$ 为范畴, $S \subset \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$. 若 S 满足以下条件, 则称 S 为 $\mathfrak{C}$ 的一个***乘性系** (multiplicative system) *或***局部化系** (localizing system).

(1) $\mathrm{Id}_X \in S$ $(\forall X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C})$. *若* $s, t \in S$ *且* $s \circ t \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$, *则* $s \circ t \in S$.

(2) *设* $f, g : X \to Y$ *为* $\mathfrak{C}$ *内的态射. 则存在* $s \in S$ *使得* $sf = sg$ *当且仅当存在* $t \in S$ *使得* $ft = gt$.

(3) $\mathfrak{C}$ *内的态射图*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(其中 $s \in S$) 必可扩张为内态射交换图表

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "T"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 $t \in S$. 同样, $\mathfrak{C}$ 内的态射图

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X & Y \arrow[l, "g"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

(其中 $u \in S$) 必可扩张为内态射交换图表

$$\begin{tikzcd} W & Z \arrow[l] \\ X \arrow[u, "v"] & Y \arrow[l, "g"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

其中 $v \in S$.

现在假定 S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系, 固定 $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$. 以 (s, f) 记以下的态射图:

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

其中 $s \in S$, $f \in \operatorname{Mor}\mathfrak{C}$. 我们引入 “$\sim$” 关系如下: $(s, f) \sim (t, g)$ 当且仅当存在 (r, h) 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} & X''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X' \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "f", near end] & & X'' \arrow[d, "g"] \arrow[dll, "t"', near end] \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

可证明 $\sim$ 是等价关系. 我们以 $\langle s, f\rangle$ 或 $\langle X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y\rangle$ 记 (s, f) 的等价类. 设有态射

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

其中 $s, t \in S$. 按 S 的性质 (2), 有交换图表

$$\begin{tikzcd} X' & X'' \arrow[l, "t'"'] \\ Y \arrow[u, "f"] & Y' \arrow[l, "t"] \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

即有

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

于是有

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "st'"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

我们定义等价类的合成为

$$\langle t, g\rangle \circ \langle s, f\rangle = \langle st', gf'\rangle.$$

可以证明此定义与等价类的代表选取无关.

命题 14.35 设 S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系. 则可取范畴 $\mathfrak{C}[S]^{-1}$ 的对象为 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}[S]^{-1} = \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$; 对于 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}[S]^{-1}$, 取 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[S]^{-1}}(X, Y)$ 为所有等价类 $\langle X \overset{s}{\leftarrow} X' \overset{f}{\to} Y\rangle$ 组成的类; $\mathfrak{C}[S]^{-1}$ 中态射的合成如上定义. 局部化函子 $Q : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[S]^{-1}$ 在态射上的作用为

$$Q(X \overset{f}{\to} Y) = \langle X \overset{\mathrm{Id}}{\leftarrow} X \overset{f}{\to} Y\rangle.$$

设 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$ 是剖分范畴, S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系. 如果 S 满足以下两个条件, 则说 S 与剖分**相容** (compatible).

(1) $s \in S$ 当且仅当 $T(s) \in S$.

(2) 若 $X \overset{u}{\to} Y \to Z \to X[1]$ 和 $X' \overset{u'}{\to} Y' \to Z' \to X'[1]$ 为 Δ 内的两个元素 (特异三角形), 如果有 S 的元素 (态射) $X \overset{f}{\to} X'$ 和 $Y \overset{g}{\to} Y'$ 满足 $u'f = gu$, 则在 S 内存在 $Z \overset{h}{\to} Z'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

这时, 对于 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}[S^{-1}] = \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, $T(X)$ 已有定义. 对于 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ 的元素 $\langle X \overset{s}{\leftarrow} X' \overset{f}{\rightarrow} Y\rangle$ 可以定义 $T(\langle X \overset{s}{\leftarrow} X' \overset{f}{\rightarrow} Y\rangle) = \langle T(X) \overset{T(s)}{\longleftarrow} T(X') \overset{T(f)}{\rightarrow} T(Y)\rangle$. 于是可以定义 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内的三角形. $Q : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[S^{-1}]$ 为局部化函子, 以 $Q\Delta$ 记 Δ 在 Q 下的像, 我们定义 Δ_S 为 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内与 $Q\Delta$ 的任一元素同构的三角形所组成的类.

作为例子我们考虑 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 的剖分范畴的性质 (1) c). 设 $\langle X \overset{s}{\leftarrow} X' \overset{f}{\rightarrow} Y\rangle$ 为 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内的态射. 根据剖分范畴的性质, 可以 f 把扩张为 $\mathfrak{C}$ 内的三角形

$$X' \overset{f}{\rightarrow} Y \overset{v}{\rightarrow} Z \overset{w}{\rightarrow} X'[1].$$

在 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内三角形态射

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X[1] \arrow[d, "s[1]"'] \\
X \arrow[r, "\langle s,f\rangle"] & Y' \arrow[r, "Q(v)"] & Z' \arrow[r, "Q(w)"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

为同构 (因为 s 在 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 中可逆), 所以

$$X \overset{\langle s,f\rangle}{\rightarrow} Y' \overset{Q(v)}{\rightarrow} Z' \overset{Q(w)}{\rightarrow} X'[1]$$

为的 Δ_S 元素. 这就是说 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 的任一态射可以扩张为 Δ_S 的元素.

命题 14.36 设剖分范畴 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$ 内有与剖分相容的乘性系 S. 则 $(\mathfrak{C}[S^{-1}], T, \Delta_S)$ 为剖分范畴.

14.9.3 复形范畴

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. $\mathfrak{A}$ 的一个上链复形是指 $\mathfrak{A}$ 的一组对象 $X^\bullet = (X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 并且配备有态射 $d_X^n : X^n \to X^{n+1}$ 使得 $d_X^{n+1} d_X^n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$.

一个**复形态射** (complex morphism) $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是 $\mathfrak{A}$ 内的一组态射 $f^n : X^n \to Y^n$, 满足条件 $f^{n+1} d_X^n = d_X^n f^n$.

我们称 n 为 X^n 或 d^n 的**次数** (degree).

我们定义复形范畴 $C(\mathfrak{A})$ 的对象为 $\mathfrak{A}$ 的复形, $C(\mathfrak{A})$ 的态射为 $\mathfrak{A}$ 的复形态射.

我们说复形 $X^\bullet$ 有**下界** (bounded below), 如果存在负整数 n_0 使得 $X^n = 0$ $(\forall\, n \leqslant n_0)$. 以有下界的复形为对象的 $C(\mathfrak{A})$ 的全子范畴记为 $C^+(\mathfrak{A})$, 同样可以定义有上界的复形. 如果一个复形既有上界又有下界我们便称它为有界的, 以有上界的复形为对象的全子范畴记为 $C^-(\mathfrak{A})$, 以有界复形为对象的全子范畴记为 $C^b(\mathfrak{A})$.

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, $C(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的复形范畴, $X^\bullet \in \operatorname{Obj}(C(\mathfrak{A}))$. 定义 $X^\bullet$ 的 n 次上同调为

$$H^n(X^\bullet) = \operatorname{Cok}(\operatorname{Img}(d_X^{n-1} \to \operatorname{Ker}(d_X^n))).$$

易证 n 次**上同调函子** (cohomology functor)

$$H^n : C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$$

为加性函子.

由于在 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ “蛇引理” 成立, 我们在复形范畴 $C(\mathfrak{A})$ 内可证明以下结果. 任一复形短正合序列

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

决定自然连接同态

$$\delta^n : H^n(A'') \to H^{n+1}(A'),$$

使获得上同调兴正合序列

$$\cdots \to H^{n-1}(A'') \to H^n(A') \to H^n(A) \to H^n(A'') \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A') \to \cdots.$$

到此, 若取 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 为环 R 的 R 模范畴, 所得到的复形 A 的上同调群 $H^n(A)$ 与上一章所得的是一样的. 在上一章从这里就直接用内射分解去算导出函子了, 但是在这一节的下一步我们将深入研究复形范畴.

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, $C(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的复形范畴. 定义**平移函子** (translation functor) $T : C(\mathfrak{A}) \to C(\mathfrak{A})$ 如下: 设 $X^\bullet = (X^i, D^i_X)$ 为复形, 令 $(TX)^i = X^{i+1}$, $d^i_{TX} = -d^i_X$. 设有态射 $f = (f^i) : X^\bullet \to Y^\bullet$, 令 $(Tf)^i = f^{i+1}$. 像前面一样, 令 $X[n]^i = X^{n+i}$, $d_{X[n]} = (-1)^n d_X$.

显然 $H^n(X^\bullet) = H^0(X^\bullet[n])$.

复形范畴的一个很好的结构是: 从任一态射可得一个态射的三角形 —— 柱锥三角形.

(1) 设 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 为复形态射. f 的一个**锥** (cone) 是指如下定义的复形 $C(f)$:

$$C(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i,$$
$$d^i_{C(f)}(x^{i+1}, y^i) := (-d_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + d_Y y^i).$$

(2) 复形态射 f 的**柱** (cylinder) 是指如下定义的复形 $\mathrm{Cyl}(f)$:

$$\mathrm{Cyl}(f)^i := X^i \oplus X[1]^i \oplus Y^i,$$
$$d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(x^i, x^{i+1}, y^i) := (d_X x^i - x^{i+1}, -d_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + d_Y y^i).$$

引理 14.37 设 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 为复形态射. 则有 $C(\mathfrak{A})$ 内的行正合交换图表

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^* \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"'] & C(f) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "="'] & X[1]^\bullet \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"'] & C(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet & & &
\end{tikzcd}
$$

并且 $\beta\alpha = \mathrm{Id}_{Y^\bullet}$, $\alpha\beta \sim \mathrm{Id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$.

我们称以上引理所给出以下的态射序列

$$X^\bullet \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} X[1]^\bullet$$

为复形态射 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 的柱锥三角形.

14.9.4 同伦范畴

设有 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的复形 $X^\bullet$, $Y^\bullet$ 以及 $\mathfrak{A}$ 的一组态射 $k = (k^n)$, 其中 $k^n : X^n \to Y^{n-1}$. 定义 $h^n \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(X^n, Y^n)$ 为

$$h^n = k^{n+1}d_X^n + d_Y^{n-1}k^n : X^n \to Y^n.$$

则

$$(h^n) = h = kd + dk : X^\bullet \to Y^\bullet$$

为复形态射. 我们称这样得到的 h 同伦于零, 记为 $h \sim 0$.

我们称 $f, g \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$ 为同伦的, 如果 $f - g \sim 0$.

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 对于 $f: X^\bullet \to Y^\bullet \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$, 以 $[f]$ 记 f 的同伦类 (即 $[f] = \{g \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A}) | g \sim f\}$). 我们定义**同伦范畴** (homotopy category) $K(\mathfrak{A})$ 如下: $\mathrm{Obj}\, K(\mathfrak{A}) = \mathrm{Obj}\, C(\mathfrak{A})$; 对于 $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathrm{Obj}\, C(\mathfrak{A})$, 定义

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathfrak{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \{[f] | f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathfrak{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)\},$$

亦可把 $K(\mathfrak{A})$ 看作 $C(\mathfrak{A})$ 的商范畴.

从 $C^+(\mathfrak{A})$, $C^-(\mathfrak{A})$, $C^b(\mathfrak{A})$ 出发可以同样定义 $K^+(\mathfrak{A})$, $K^-(\mathfrak{A})$, $K^b(\mathfrak{A})$.

从 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 得出的 $K(\mathfrak{A})$ 不一定是 Abel 范畴! 那么这个范畴有什么结构呢?

回到上节所定义的上同调函子 $H^n : C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$. 不难证明: 如果 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的复形态射 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 同伦于零, 则 $H^n(f)$ 为零态射. 这样如果 $f, g \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$ 是同伦的, 则 $H^n(f) = H^n(g)$. 因此可以定义 $H^n([f])$ 为 $H^n(f)$.

我们称复形态射 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 为**拟同构** (quasi-isomorphism), 如果对于所有的 n, $H^n(f)$ 是同构. 我们又说复形态射同伦类 $[f]$ 是拟同构, 如果对于所有的 n, $H^n([f])$ 是同构. $K(\mathfrak{A})$ 中全体拟同构所组成的类常记作 Qis.

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 如同在 $C(\mathfrak{A})$ 中一样, 我们定义 $K(\mathfrak{A})$ 上的平移函子 $T: K(\mathfrak{A}) \to K(\mathfrak{A})$.

我们说 $K(\mathfrak{A})$ 中的一个三角形是特异的, 如果它同构于某个态射 $[f]: X^\bullet \to Y^\bullet$ 的柱锥三角形. 这样得到的特异三角形所组成的类记为 Δ.

定理 14.38 设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 则

(1) $(K(\mathfrak{A}), T, \Delta)$ (如上) 为剖分范畴;
(2) Qis 为 $K(\mathfrak{A})$ 的乘性系, 并且与剖分相容.

以上对于 $K^+(\mathfrak{A})$, $K^-(\mathfrak{A})$ 和 $K^b(\mathfrak{A})$ 同样成立.

14.9.5 导出范畴

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, $K(\mathfrak{A})$ 内的拟同构类 Qis 为乘性系. 我们可以对 $K(\mathfrak{A})$ 做关于 Qis 的局部化, 得出分式范畴 $K(\mathfrak{A})[\mathrm{Qis}]^{-1}$, 记此分式范畴为 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 由构造过程得函子 $Q: C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 可以证明:

(1) 如果 $f \in \operatorname{Mor} C(\mathfrak{A})$ 为拟同构, 则 $Q(f)$ 为同构;
(2) 若有函子 $F: C(A) \to \mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D}$ 为某范畴) 满足: F 将拟同构映为同构, 则存在唯一的函子 $G: \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ 使得 $F = G \circ Q$.

同样由 $K^*(\mathfrak{A})$ 可以得出 $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$, 其中 $*$ 分别为 $+, -, b$. 称 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 和 $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的**导出范畴** (derived category).

在 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 内所有满足条件 $H^i(X^\bullet) = 0$ $(\forall i < n)$ 的复形 $X^\bullet$ 组成的 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的全子范畴, 记为 $\mathfrak{D}^{\geqslant n}(\mathfrak{A})$. 若把条件改为 $H^i(X^\bullet) = 0$ $(\forall i > n)$, 则所得到的全子范畴记为 $\mathfrak{D}^{\leqslant n}(\mathfrak{A})$.

定理 14.39 设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 则

(1) $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 是剖分范畴.
(2) $\{\mathfrak{D}^{\leqslant 0}(\mathfrak{A}), \mathfrak{D}^{\geqslant 0}(\mathfrak{A})\}$ 决定 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的 t 结构.
(3) 函子

$$\mathfrak{A} \to C(\mathfrak{A})$$
$$X \mapsto \cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots \quad (X \text{在 } 0 \text{ 次位置})$$

(此函子在 $\operatorname{Mor}(\mathfrak{A})$ 上的作用是自然定义的) 与 $Q: C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的合成

$$\mathfrak{A} \to C(\mathfrak{A}) \xrightarrow{Q} \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$$

给出同构 $\mathfrak{A} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{D}^{\leqslant 0}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{D}^{\geqslant 0}(\mathfrak{A})$.

按照此定理, 若 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, 我们就可以定义上同调 $H^i(X)$ 为 $\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}(X[i])$!

注 设有 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$. 对于 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$, 根据经验, 我们常常用 X 的分解 (例如内射分解) 来了解 X 的性质. 按照这个观点我们就 X 把看作它的所有分解, 这些分解是复形. 这时关于 X 的代数运算 (如 $\otimes$, Hom) 便要理解为相应的复形. 由复形我们得出 (上) 同调 (群). 如果两个复形的同调是同构的, 我们应当把这两个复形视为同构的. 这就使得我们模仿分式环的构作对复形态射拟同构类做局部化而得出导出范畴. 到了这一步, 除非有需要具体计算同调, 我们的核心对象应当是导出范畴内的复形, 这样同调代数应该生活在导出范畴之内. 同调代数的一个重要发现是: 两个绝不相同的 Abel 范畴的导出范畴却可能是等价的剖分范畴!

14.9.6 导出函子

Abel 范畴的加性左正合函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 可扩展为剖分范畴函子 $KF : K(\mathfrak{A}) \to K(\mathfrak{B})$. 如果 F 是正合函子, 则 F 把拟同构映为拟同构. 于是通过局部化就得到从 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 到 $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ 的函子. 但如果 F 不是正合函子, 则 F 不一定把拟同构映为拟同构. 这时我们找个从 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 到 $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ 的函子来逼近 KF, 这就是以下的导出函子.

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴, $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 为加性左正合函子. F 的**右导函子** (right derived functor) 是指满足以下泛性质的 (RF, ε_F), 其中函子 $RF : \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 与平移函子交换 $(RF \circ T = T \circ RF\ )$, $\varepsilon_F : Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \to RF \circ Q_{\mathfrak{A}}$ 为函子态射:

$$
\begin{tikzcd}
 & K^+(\mathfrak{B}) \arrow[dr, "Q_{\mathfrak{B}}"] \arrow[dd, Rightarrow, "\varepsilon_F"] & \\
K^+(\mathfrak{A}) \arrow[ur, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathfrak{A}}"'] & & \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B}) \\
 & \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \arrow[ur, "RF"'] &
\end{tikzcd}
$$

我们所要求的泛性质是: 对于任一与平移函子交换的函子 $G : \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 和任一函子态射 $\varepsilon : Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \to G \circ Q_{\mathfrak{A}}$, 存在唯一的函子态射 $\eta : RF \to G$ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \arrow[r, "\varepsilon_F"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & RF \circ Q_{\mathfrak{A}} \arrow[d, "\eta \circ Q_{\mathfrak{A}}"] \\
 & G \circ Q_{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}
$$

以上的泛性质可以叙述如下: 如果 $G:\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})\to\mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$, 则 ε_F 决定双射

$$\mathrm{Hom}(RF,G)\to\mathrm{Hom}(Q_{\mathfrak{B}}\circ K^+(F),G\circ Q_{\mathfrak{A}}).$$

同样, 加性右正合函子 F 的**左导函子** (left derived functor) 是函子 $LF:\mathfrak{D}^-(\mathfrak{A})\to\mathfrak{D}^-(\mathfrak{B})$ 及函子态射 $\varepsilon_F: LF\circ Q_{\mathfrak{A}}\to Q_{\mathfrak{B}}\circ K^-(F)$ 使得下面的映射为双射:

$$\mathrm{Hom}(G,LF)\to\mathrm{Hom}(G\circ Q_{\mathfrak{A}},Q_{\mathfrak{B}}\circ K^-(F)).$$

我们称 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的对象 I 为**内射对象** (injective object), 如果以下条件成立: 对于 $\mathfrak{A}$ 内的任一单态射 $0\to A\xrightarrow{f}B$ 及任一态射 $\alpha:A\to I$, 存在态射 $\beta:B\to I$ 使得 $\alpha=\beta\circ f$.

我们说 $\mathfrak{A}$ 有**足够内射对象** (enough injectives), 如果对于任一 $A\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$, 存在内射对象 I 及单态射 $0\to A\to I$.

设 $X\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$. X 的一个**内射分解** (injective resolution) 是指一个复形 $I^\bullet\in C(\mathfrak{A})$ 满足条件: 若 $i<0$, 则 $I^i=0$; 所有的 I^i 均为内射对象以及有态射 $X\to I^0$ 使得下面的序列正合:

$$0\to X\to I^0\xrightarrow{d_I^0}I^1\xrightarrow{d_I^1}I^2\xrightarrow{d_I^2}\cdots.$$

若 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象, 则 $\mathfrak{A}$ 的任一对象都有内射分解.

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴, $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 为加性左正合函子. 设 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象. 考虑以下函子:

$D(\mathfrak{A})\to K(\mathfrak{A}): X^\cdot\mapsto I(X^\cdot)$ (内射分解),

$F:K(\mathfrak{A})\to K(\mathfrak{B})$,

$K(\mathfrak{B})\to D(\mathfrak{B})$.

把以上三个函子合成为 $RF:D(\mathfrak{A})\to D(\mathfrak{B})$. 可证明这个 RF 就是 F 的右导函子 (参见 R. Hartshorne, *Residues and Duality* (Lecture Notes in Math. 20), Springer, 1966).

第一部系统讨论导范畴和导函子的著作是 1996 年 Verdier (Grothendieck 的学生) 发表的博士论文 J-L. Verdier, Des categories derivees des categories abeliennes, *Asterisque* **239** (1996).

后记 读者, 如果你真的把全书看到这里, 我们谢谢你! 本书所讲的只是线性代数的基本技术, 是每个理工科本科生毕业之前应学好的谋生工具, 但这只是代数的一小部分! 看看耶鲁大学两位已仙游的老师为博士生合格考试所写的教科书 (N. Jacobson, *Basic Algebra*; S. Lang, *Algebra*), 就知道除了线性代数外还有群论、环论、域论和交换代数.

基本的交换代数是学习代数几何和代数数论必需的预备知识. 最著名的交换代数教科书是 N. Bourbaki, *Algèbre Commutative* (英文翻译版是不完整的); 比较新的有 O. Gabber, L. Ramero, *Almost Ring Theory*.

关于环论和代数的教科书就多了. T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*; N. Jacobson, *Structure of Rings*; I. Reiner, *Maximal Orders*; R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*; 李会师, F. van Oystaeyen, *Zariskian Filtrations*; M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*; C. Faith, *Rings, Modules and Categories*; I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* 和一本很特别、很成功的大学讲义 K. I. Beidar, *Rings with Generalized Identities.* 如果要学习更深的专题, 比如 Jordan 代数: N. Jacobson, *Structure and Representation of Jordan Algebras.* 李代数: N. Jacobson, *Lie Algebras*; N. Jacobson, *Exceptional Lie Algebras*; N. Bourbaki, *Groupes et Algèbre de Lie*; J. E. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O.* 要学 Kac-Moody 代数、Virasoro 代数、Vertex 代数可以从以下文集开始找材料: P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro Algebras.*

关于有限群理论有 I. M. Isaacs, *Finite Group Theory*; R. Wilson, *The Finite Simple Groups*; I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*; W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*; B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups.*

关于量子群有 G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*; 邓邦明, 杜杰, 王建磐, B. Parshall, *Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups*; A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations.*

以上只是一小部分而已, 还有很多同类型的书, 不过说到这里总要提醒读者书是看不完的. 当一个专题有一本甚至多本教科书出现时, 便是说这是个成熟的方向, 不再容易在此地创新了. 所以你应该先问问为什么你要学某一种数学? 你有明确的数学问题要解决吗? 你有一个数学的研究方向和方案吗? 你需要某种工具吗? 时间非常有限, 我们是不可能全学的.

最后祝大家进步!

习 题

1. 取域 F. 设 $|\,\mathrm{Vec}_F\,|$ 的元素为域 F 上的有限维向量空间, 设 V, W 为域 F 上的有限维向量空间. $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Vec}_F}(V, W)$ 的元素为任意的从 V 到 W 的 F 线性变换. 证明: Vec_F 是范畴.

2. 取交换环 R. 设 $|_R\mathfrak{Mod}|$ 的元素为左 R 模, 设 M, N 为左 R 模. $\mathrm{Mor}_{_R\mathfrak{Mod}}(M, N)$ 的元素为任意的从 M 到 N 的 R 模变换. 证明: $_R\mathfrak{Mod}$ 是范畴.

3. 证明:

(a) R 模范畴 $_R\mathfrak{Mod}$ 是 Abel 范畴;

(b) R 模上链复形和链映射组成一个范畴 $C(_R\mathfrak{Mod})$;

(c) n 次上同调 $H^n : C(_R\mathfrak{Mod}) \to {_R\mathfrak{Mod}}$ 是加性函子.

4. 取范畴 $\mathfrak{C}$. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 规定 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}(X) = X$. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : X \to Y$, 规定

$\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}(f) = f$. 证明: $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 为函子. 称 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ 为范畴 $\mathfrak{C}$ 的**恒等函子** (identity functor).

5. 取范畴 $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, 固定范畴 $\mathfrak{D}$ 的任一对象 C. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 规定 $K(X) = C$. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : X \to Y$, 规定 $K(f) = 1_C$. 证明: $K : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 为函子. 称 K 为**常值函子** (constant functor).

6. 取左 R 模 M. 让我们忘记 M 的 R 模结构, 只把 M 看成一个集合, 以 $s(M)$ 记这个集合. 我们可以把任一 R 模变换 $f : M \to N$ 看作集合映射 $s(M) \to s(N)$, 以 $s(f)$ 记这个映射. 证明: $s : {}_R\mathfrak{Mod} \to \mathrm{Sets}$ 是从左 R 模范畴 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 至集合范畴 Sets 的函子. 我们称这一种利用忘掉一些结构而得出来的函子为**忘函子** (forgetful functor). 比如我们忘掉了 "连续性" 便得出从拓扑群范畴 $\mathfrak{TGp}$ 至群范畴 $\mathfrak{Gp}$ 的忘函子.

7. 设有环 R. 证明: 可以把 R 看作只有一个对象 $*$ 的范畴, 这个范畴的态射 $\mathrm{Hom}(*, *) := R$. 另设有加性范畴 $\mathfrak{C}$. 证明: 给出一个函子 $F : R \to \mathfrak{C}$ 等同给出一个 $\mathfrak{C}$ 的对象 $A = F(*)$ 及一个环同态 $R \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$.

8. 在范畴 $\mathfrak{C}$ 固定一对象 A. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 规定 $h^A(X) = [A, X]_{\mathfrak{C}}$. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : X \to Y$, 规定

$$h^A(f) : [A, X]_{\mathfrak{C}} \to [A, Y]_{\mathfrak{C}} : u \mapsto f \circ u.$$

证明: $h^A : \mathfrak{C} \to \mathrm{Sets}$ 为函子.

9. (a) 在范畴 $\mathfrak{C}$ 固定一对象 A. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 规定 $h_A(X) = [X, A]_{\mathfrak{C}}$. 对 $\mathfrak{C}$ 的任一态射 $f : X \to Y$, 规定

$$h_A(f) : [Y, A]_{\mathfrak{C}} \to [X, A]_{\mathfrak{C}} : u \mapsto u \circ f.$$

证明: $h_A : \mathfrak{C} \to \mathrm{Sets}$ 为反变函子.

(b) 把域 F 看作 F 上的一维向量空间, 即 $F \in |\,\mathrm{Vec}_F\,|$. 这样如上定义 h_F. 设 V 为域 F 上的有限维向量空间, 则 $h_F(V)$ 为 V 的对偶空间 $\mathrm{Hom}_F(V, F) = V^*$. 若 $f : V \to W$ 为 F 线性变换, 则 $h_F(f) : W^* \to V^*$ 为从 f 所得的转置映射. 证明: $h_F : \mathrm{Vec}_F \to \mathrm{Vec}_F$ 为反变函子; $h_F \circ h_F : \mathrm{Vec}_F \to \mathrm{Vec}_F$ 为共变函子.

(c) 设 V 为域 F 上的有限维向量空间, 取 $v \in V$. 定义

$$v^{**} : V^* \to F : \phi \mapsto \phi(v)$$

及

$$\Phi_V : \mathrm{Id}(V) = V \to (V^*)^* = h_F \circ h_F(V) : v \mapsto v^{**}.$$

证明: $\Phi : \mathrm{Id} \to h_F \circ h_F$ 是自然同构.

(d) 对 $V \in |\,\mathrm{Vec}_F\,|$ 设 $D(V) = V^*$, 对 Vec_F 的态射 $f : V \to W$ 设 $D(f)$ 为 $h_F(f) : W^* \to V^*$ 但看作反范畴 $(\mathrm{Vec}_F)^O$ 的态射, 即 $D(f) \in \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Vec}_F)^O}(D(V), D(W))$. 证明: $D : \mathrm{Vec}_F \to (\mathrm{Vec}_F)^O$ 为共变函子, 并证明: D 为函子等价.

10. 考虑集合范畴 Sets. 固定集合 B, 定义函子 $F, G : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Sets}$ 如下: 对集合 A, 设

$$F(A) = A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

对集合 C, 设 $G(C)$ 为所有从集 B 到集 C 的映射所组成的集合, 即 $G(C) = [B, C]$. 证明: F 是 G 的左伴随函子.

11. 固定一 F 向量空间 A. 对任一 F 向量空间 X, 规定 $h^A(X) = \mathrm{Hom}_F(A, X)$. 对任一 F 线性映射 $f : X \to Y$, 规定

$$h^A(f) : [A, X]_{\mathfrak{C}} \to [A, Y]_{\mathfrak{C}} : u \mapsto f \circ u.$$

证明: $h^A : \mathrm{Vec}_F \to \mathrm{Vec}_F$ 为左正合函子.

12. 固定一 F 向量空间 W. 对任一 F 向量空间 X, 规定 $t_W(X) = W \otimes_F X$. 对任一 F 线性映射 $f : X \to Y$, 规定 $t_W(f) = \mathrm{Id}_W \otimes f$. 证明: $t_W : \mathrm{Vec}_F \to \mathrm{Vec}_F$ 为右正合函子.

13. 设 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴. 证明: 函子 $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 为左正合函子当且仅当 T 与有限极限交换.

14. 设 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴. 设函子 $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 把零对象映为零对象. 证明: T 为忠实函子.

15. 定义范畴 $(\mathrm{Vec}_F)^{\mathbb{Z}}$ 的对象为 (V_n), 其中 $n \in \mathbb{Z}$ 及 V_n 为域 F 上的向量空间; 此范畴的态射为 (f_n), 其中 $f_n : V_n \to W_n$ 为 F 线性映射. 若 $V = (V_n)$, 则定义平移函子 $TV := (TV_n)$, 其中取 $TV_n := V_{n-1}$. 若有范畴 $(\mathrm{Vec}_F)^{\mathbb{Z}}$ 的态射 u, v, w, 则规定 (u, v, w) 为特异三角形 (即 $\in \Delta$), 如果对所有 n,

$$U_n \overset{u_n}{\to} V_n \overset{v_n}{\to} W_n \overset{w_n}{\to} U_{n-1} \overset{u_{n-1}}{\to} V_{n-1}$$

是正合序列. 证明: $((\mathrm{Vec}_F)^{\mathbb{Z}}, T, \Delta)$ 是剖分范畴.

16. 设 ${}_R\mathfrak{Mod}$ 为交换环 R 的左 R 模范畴. 证明: ${}_R\mathfrak{Mod}$ 为 Abel 范畴. 从复形范畴用同伦求商所得的范畴记为 $K({}_R\mathfrak{Mod})$ (参见 §14.9.5). 证明: $K({}_R\mathfrak{Mod})$ 是剖分范畴.

17. 设 $f : A \to B$ 是交换拓扑群范畴内的态射. 以 $f(A)$ 记子群 $\{f(a) : a \in A\}$, 以 $\overline{f(A)}$ 记 $f(A)$ 在 B 内的拓扑闭包. 证明: f 在交换拓扑群范畴内的像 $(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Cok}\, f)$ 是包含映射 $i : \overline{f(A)} \to B$.

18. 证明: 由交换群所组成的范畴 $\mathfrak{Ab}$ 是 Abel 范畴.

19. 群范畴 $\mathfrak{Gp}$ 不是 Abel 范畴.

(a) 证明: $\mathfrak{Gp}$ 不是加性范畴. 三个元素的对称群记为 S_3. 如果 $\mathfrak{Gp}$ 是加性范畴, 则 $E = \mathrm{Hom}(S_3, S_3)$ 是环. 证明: E 没有零除子. E 是没有零除子的有限环, 所以 E 是域. E 有 10 个元素, 但是不存在有 10 个元素的有限域.

(b) 证明: 在群范畴 $\mathfrak{Gp}$ 内 $\phi = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Cok}\,\phi$ 并不对所有单态射均成立.

20. R 是交换环. 证明: 过滤 R 模范畴 $\mathrm{Fil}\,\mathfrak{Mod}_R$ 是加性范畴但不是 Abel 范畴. (提示: 在这个范畴内, 像与余像不一定同构. 设 V, W 是一维 F 向量空间. V 的过滤结构是: $V_i = 0$ 对 $i \leqslant 0$, $V_i = F$ 对 $i > 0$; W 的过滤结构是: $W_i = 0$ 对 $i < 0$, $W_i = F$ 对 $i \geqslant 0$. $\phi : V \to W$ 是过滤向量空间同构. 证明: $(\mathrm{Cok}\,\mathrm{Ker}\,\phi)_0 = 0$, $(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Cok}\,\phi) = F$.)

21. 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的无穷维拓扑向量空间所组成的范畴不是 Abel 范畴.

22. 证明: 单位区间上的向量丛所组成的范畴不是 Abel 范畴. (提示: 一般丛映射的核不一定是向量丛, 原因是纤维的维数不一定是局部常值.)

23. 证明: 概形 X 上的 $\mathscr{O}_X$ 模所组成的范畴是 Abel 范畴.

24. **Abel 范畴蛇引理**　在 Abel 范畴内设有行正合的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

以 $k_i : K_i \to A_i$ 记 $\mathrm{Ker}(f_i)$, $c_i : B_i \to C_i$ 记 $\mathrm{Cok}(f_i)$. 证明: 上图可以扩充为以下交换图表

$$\begin{tikzcd}
& K_1 \arrow[r] \arrow[d, "k_1"'] & K_2 \arrow[r] \arrow[d, "k_2"'] & K_3 \arrow[d, "k_3"'] & \\
& A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "c_1"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "c_2"'] & B_3 \arrow[d, "c_3"'] & \\
& C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3 &
\end{tikzcd}$$

且存在自然态射 $\Delta : K_3 \to C_1$ 使

$$K_1 \to K_2 \to K_3 \xrightarrow{\Delta} C_1 \to C_2 \to C_3$$

为正合序列. 进一步证明: 若 $A_1 \to A_2$ 为单射, 则 $K_1 \to K_2$ 为单射; 若 $B_2 \to B_3$ 为满射, 则 $C_2 \to C_3$ 为满射.

索　引

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

S

T

Y

Z