朝花夕拾

一些数学学习中的零碎 NOTE

EDITED BY
颜成子游/南郭子綦

LOGO NAME
Slogan Here

Contents

学习数学的时候，无论是逛贴吧，看论坛，还是水群，亦或是读一些有意思的小推送，以及看一些没有时间记录的 note 的时候，总能遇到一些非常值得记录的小知识。这些知识或是结论，或是定义和思想，或是目前前沿的进展。

本篇 pdf 的目的就是为了记录这些知识。每一条知识我们都会用时间标注。笔者一是为了记录自己的数学学习之路，二也是为了让自己零碎化的数学学习有更好的效果。

笔者目前从事微分几何方向的研究生学习

Chapter 1

几何

§1.1 微分流形

这里整理的是微分流形中老是记不住的东西。

Proposition 1.1.1: 流形的微分结构

一个流形上可能赋予不同的微分结构，并且这样的微分结构可能是不微分同胚的！比如，Milner 证明了 S^7 上存在着不微分同胚的微分结构。当然，也存在完全没有微分结构的流形。

§1.1.1 子流形

下面这个定理是司空见惯的。但是无奈我每次都记不住证明（缺乏一个好的感知）

Theorem 1.1.1: 正则子流形的标准形式

设 M^m 是 N^n 的正则子流形。这等价于说 M 是 N 的子拓扑空间，并且对于任意 $p \in M$，存在 p 在 N 中局部坐标邻域 U 和坐标函数 $\{x^1, \ldots, x^n\}$ 使得:

$$M \cap U = \{q \in U | x^i(q) = 0, m+1 \leq i \leq n\} \tag{1.1}$$

Proof. 我们需要用到浸入子流形的标准形式（证明用到逆映射定理）这里不再赘述。

假设 M 是 N 的正则子流形，则 $i : M \to N$ 是嵌入映射。任取 $p \in M$，在 M 上和 N 上分别有 U, ϕ 和 V, ψ 作为坐标邻域使得 $U \subset V$.

考虑映射 $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. 根据浸入的标准形式，有 $(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$。

因为 M 是 N 的子拓扑空间，所以可以取 N 中含 p 的开邻域 $U_1 \subset V$ 使得 $M \cap U_1 = U$.

我们把 V 上的坐标限制在 U_1 上，作为其坐标映射。当 $q \in M \cap U_1$ 时，$q \in U$. 所以 $x^i(q) = 0, m+1 \leq i \leq n$. 于是 $M \cap U_1 \subset \{x^i(q) = 0, m+1 \leq i \leq n\}$.

另一方面，设 $q \in U_1$ 且 $x^i(q) = 0, m+1 \leq i \leq n$.

记 $q' = \varphi^{-1}(x^1(q), \ldots, x^m(q))$, 则:

$$\begin{aligned}
\psi(q') &= \psi \circ \varphi^{-1}(x^1(q), \ldots, x^m(q)) && (1.2) \\
&= (x^1(q), \ldots, x^m(q), 0, \ldots, 0) && (1.3) \\
&= (x^1(q), \ldots, x^m(q), x^{m+1}(q), \ldots, x^n(q)) && (1.4) \\
&= \psi(q) && (1.5)
\end{aligned}$$

这说明 $q = q' \in U \subset M$.

如果 M 满足定理陈述，首先在 M 上取子拓扑。其次只需要把 M 的局部坐标定义为 $M \cap U$ 上的前 m 个分量即可。 ∎

Theorem 1.1.2: 常秩定理

设 $f: M \to N$ 为光滑映射。存在 $l > 0$ 使得 $\mathrm{rank}_p f = l, \forall p \in M$，则对于每个固定的 $q \in N$,q 在 f 的原像 $f^{-1}(q)$ 要么为空集，要么为 M 的正则子流形，其维数为 $m - l$。

Proof. 设 $S = f^{-1}(q)$。根据定理**??**，我们将证明存在 p 附近 M 上局部坐标 U, φ 和 q 附近 V, ψ 使得 $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$,$\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$，$f(U) \subset V$，且 f 的局部表示为 $\psi \circ f \circ \varphi$ 形如:

$$\psi \circ f \circ \varphi(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^l, g^{l+1}(x^1, \ldots, x^l), \ldots, g^n(x^1, \ldots, x^l)) \tag{1.6}$$

由于是完全局部的问题，所以设 M 为 $\mathbb{R}^m$，N 是 $\mathbb{R}^n$。f 可表示为:

$$f(x^1, \ldots, x^m) = (f^1, \ldots, f^n) \tag{1.7}$$

矩阵:

$$(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}) \tag{1.8}$$

秩为 l。不妨设前 l 行,l 列非退化。定义 $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 为:

$$g(x^1, \ldots, x^m) = (f_1, \ldots, f_l, x^{l+1}, \ldots, x^m) \tag{1.9}$$

从而 g 的 Jacobi 矩阵非退化。根据逆映射定理，存在 0 处的开邻域 U 和 V 使得 $g|_U: U \to V$ 是微分同胚。于是 $\varphi := g|_U$ 是 0 处的坐标映射。f 在该坐标的表示为 $f \circ \varphi^{-1}$:

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^l, g^{l+1}, \ldots, g^n) \tag{1.10}$$

$\mathrm{rank} J(f \circ \varphi^{-1})|_V = l$。所以 g^i 对 x^j 的偏导为 0,$l+1 \le i \le n, l+1 \le j \le m$。

所以 $g^i = g^i(x^1, \ldots, x^l)$ 证毕。

于是

$$S \cap U = \{s \in U | f(s) = 0\} = \{s \in U | x^1(s) = \cdots = x^l(s) = 0, g^j(x^i(s)) = 0\} = \{s \in U | x^1(s) = \cdots = x^l(s) = 0\} \tag{1.11}$$

■

这里注意的是，如果 $f^{-1}(q)$ 的某个开邻域内 $\mathrm{rank} f$ 是常数，则可以说明 $f^{-1}(q)$ 是正则子流形。但是矩阵微扰的情况下不会变小。因此只要 $\mathrm{rank} f$ 在 $f^{-1}(q)$ 上恒为 n(最大可能的秩) 即可找到这个开邻域，从而 $f^{-1}(q)$ 是 $m - n$ 维的正则子流形。此时也称 q 是 f 的正则值。

§1.1.2 横截相交

横截相交这里，是老是记不住：1. 稳定性 2. 正则子流形的生成。

Definition 1.1.1: 横截相交

设 $f: M \to N$ 是光滑的。若 S 是 N 的**正则子流形**, 且对于任意满足 $f(p) = q \in S$ 的 $p \in M$，都有：

$$f_*(p)(T_p M) + T_q(S) = T_q(N) \tag{1.12}$$

则称 f 和 S 横截相交，记作 $f \pitchfork S$。若 $f(M) \cap S = \emptyset$ 也称横截相交。

显然正则值 q 处 M 与 N 横截相交。

Lemma 1.1.1

设 0 是 $g: N \to \mathbb{R}^k$ 的正则值，且 $S = g^{-1}(0)$. 则 $f: M \to N$ 和 S 横截相交当且仅当 0 是 $g \circ f$ 的正则值。

Proof. 若 0 是正则值，则对于任何 $p \in f^{-1}(S)$ 有 $(g \circ f)_{*p}(T_pM) = g_{*f(p)}f_{*p}(T_pM) = T_0\mathbb{R}^k$。

注意到 $T_{f(p)}S = \ker g_{*f(p)}$，$g_{*f(p)}T_{f(p)}N = T_0\mathbb{R}^k$。则上面的式子与:

$$T_{f(p)}S + f_{*p}(T_pM) = T_{f(p)}N \tag{1.13}$$

等价。 ■

Theorem 1.1.3

设 $f: M \to N$ 光滑且 S 是 N 的正则子流形。如果 $f \pitchfork S$，则 $f^{-1}(S)$ 是 M 的正则子流形且:

$$\mathrm{dim}M - \mathrm{dim}f^{-1}(S) = \mathrm{dim}N - \mathrm{dim}D \tag{1.14}$$

Proof. 设 $p \in f^{-1}(S)$。记 $q = f(p)$。因为 S 是正则子流形，根据 S 的结构定理，存在 q 在 N 中的局部坐标邻域 U_q 以及淹没 $g: U_q \in \mathbb{R}^k (k = \mathrm{dim}N - \mathrm{dim}S)$。使得:

$$S \cap U_q = g^{-1}(0) \tag{1.15}$$

注意到 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是 $g \circ f$ 的正则值，则存在 p 的开邻域 $f^{-1}(U_q)$ 中的 $f^{-1}(S)$ 为正则子流形，维数为 $\mathrm{dim}M - k = \mathrm{dim}M - \mathrm{dim}N + \mathrm{dim}S$。 ■

显然，用 $\mathrm{codim}f^{-1}(S) = \mathrm{codim}S$ 来表述上面的定理更方便。

Theorem 1.1.4: 横截相交的稳定性

设 M, P, S, N 是微分流形。其中 M 紧致，S 是 N 的闭正则子流形。设 f 是 $M \times P \to N$ 的光滑映射，取 $p \in P$，定义 $f_p: M \to N$，$f_p(x) = f(x,p)$，则集合:

$$\Omega = \{p \in P | f_p \text{ is transversal to } S\} \tag{1.16}$$

是开集。

Proof. 设 $p_0 \in \Omega$. 我们需要说明对于 p_0 附近的点 p,f_p 与 S 也横截相交。若不然，存在 $p_i \in P$ 使得 $p_i \to p_0$ 且 f_{p_i} 与 S 不横截相交。因此存在 $x_i \in M$ 使得 $f(x_i, p_i) = y_i \in S$ 且:

$$f_{*(x_i,p_i)}(T_{x_i}M) + T_{y_i}S \neq T_{y_i}N \tag{1.17}$$

M 紧致，所以 x_i 收敛于 x_0。从而 $(x_i, p_i) \to (x_0, p_0)$。$S$ 是闭集，则 $f(x_0, p_0) \in S$。S 是正则子流形，于是存在 y_0 的局部坐标邻域 V 和光滑淹没 $\psi: V \to \mathbb{R}^k$。因为 f_{p_0} 与 S 横截相交，则 0 是 $\psi \circ f(\cdot, p_0)$ 的正则值。

从而 i 足够大的时候，可以得到 $\psi \circ f(\cdot, p_i)$ 也拥有 0 为正则值, 且 $y_i \in V$。这矛盾于 $p_i \notin \Omega$。

■

§1.1.3 Sard 定理

Lemma 1.1.2: Zero-measure

$\mathbb{R}^n$ 上的 Lipschitz 映射把零测集映射为零测集。C^1 也是。

Definition 1.1.2

对于 $f: M \to N$，如果 $p \in M$ 处 f_{*p} 不是满射，则称 p 是 f 的临界点. 临界点的像称为临界值。

Theorem 1.1.5: Sard 定理

设 $f: M \to N$ 是微分流形之间的光滑映射。则 f 的临界值是 N 的零测集。

Proof. 证明的思路是用 k 阶偏导数全为 0 的集合来逐步逼近 C(C 是临界值集合)。每次都只会增加一个零测的集合，而导数阶数足够大的时候，本来只有零测集合。从而得到证明。 ■

我们用 Sard 讨论一些应用。

Lemma 1.1.3

$f: M \times P \to \mathbb{R}^k$ 是光滑的.0 是 f 正则值，则集合:

$$\{p \in P | 0 \text{ is a singular image of } f_p\} \tag{1.18}$$

是 P 的零测集。

Proof. 定义 $\pi: M \times P \to P$。设 $S = f^{-1}(0)$。把 π 限制在 S 上。

则 0 是 f_p 的正则值当且仅当 p 是 $\pi|_S$ 的正则值。 ■

Theorem 1.1.6: 横截性定理

$f: M \times P \to N$ 是光滑的.Z 是 f 正则子流形，则集合:

$$\{p \in P | f_p \text{ is not transversal to } Z\} \tag{1.19}$$

是 P 的零测集。

Proof. 用引理。Z 可以被 N 至多可数个坐标邻域覆盖。又因为可数个零测集的并还是零测集，所以我们不妨考虑 $Z = g^{-1}(0)$,$g: N \to \mathbb{R}^k$ 是光滑淹没。

因此 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是 $g \circ f$ 的正则值。而 f_p 与 Z 横截相交等价于 $0 \in \mathbb{R}^k$ 是 $g \circ f_p$ 的正则值。因此转化为上一个引理。 ■

Example 1.1.0: 映射的微扰

设 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是光滑的，Z 是 R 的正则子流形。令 $F: M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,$f(p,a) = f(p) + a$。

F 是淹没！所以与 Z 横截相交。则对于几乎所有的 $a \in \mathbb{R}^n$,$f(p) + a: M \to \mathbb{R}^n$ 都与 Z 横截相交。即对 f 做微小扰动可得横截相交。

§1.1.4 Frobenius 定理

这个知识点出现在这里的原因是笔者对于这个知识点的熟练度很低。经常出现知道但是忘了的情况。另外，也顺便学一下该定理的外微分形式。

一般描述

Frobenius 定理的动机是比较干净的。其中一个是向量场的奇点问题。奇点问题本身和流形的拓扑性质密切相关：在偶数维球面上不存在无奇点的光滑切向量场, 而环面却存在。

先考虑非奇点处的性状。

Theorem 1.1.8

设 X 是 M 上光滑的切向量场。若 $p \in M$ 且 $X_p \neq 0$，则存在 p 的一个局部坐标邻域 $(W; w^i)$ 使得:

$$X|_W = \frac{\partial}{\partial w^1} \tag{1.20}$$

Proof. 先取出 p 的一个局部坐标 $(U; u^i)$ 使得 $u^i(p) = 0$。X 限制在 U 可以写为:

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{1.21}$$

不妨设 $\xi^1(p) \neq 0$ 且 ξ^1 在 U 上处处不为 0。考虑常微分方程:

$$\frac{du^\alpha}{du^1} = \frac{\xi^\alpha(u^1, \dots, u^m)}{\xi^1(u^1, \dots, u^m)}, \alpha = 2, \dots, m \tag{1.22}$$

这里 $u^2, \dots, u^m$ 是欲求的 $m-1$ 个关于 u^1 的函数。根据光滑性，存在正数 δ 使得 $\{(u^1, \dots, u^m) || u^i| < \delta||\} \subset U$ 使得任意给定初值 $(v^2, \dots, v^m), |v^\alpha| < \delta$，方程就有唯一的解:

$$u^\alpha = u^\alpha(u^1; v^2, \dots, v^m), -\delta < u^1 < \delta \tag{1.23}$$

并且满足条件:

$$u^\alpha(0; v^2, \dots, v^m) = v^\alpha \tag{1.24}$$

于是我们等于是解出了一个变量替换:

$$u^1 = v^1; u^\alpha = u^\alpha(v^1, v^2, \dots, v^m) \tag{1.25}$$

且 Jacobi 行列式为 1。(只要 $v^1 = 0$)。

所以存在 p 的一个邻域 $W \subset U$ 使得以 v^i 为局部坐标系。在这个坐标系下，我们可以计算:

$$\begin{aligned} X|_W &= \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \sum_{i=2}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \xi^1 \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial}{\partial u^1} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial v^1} \end{aligned} \tag{1.26}$$

接下来只需要对 $\dfrac{dv^1}{\xi^1}$ 积分即可标准的化出 X 的形式。 ■

这个问题很容易被推广到多个向量场的情况。这里我们给出一个条件:

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0 \tag{1.27}$$

上述条件是比较强的。通常考虑的是下面的类似问题。

Definition 1.1.3: Distribution

设对于每一个 $p \in M$ 我们都制定了一个切空间 T_p 的 h 维子空间 $L^h(p)$。若对于每个点 $p \in M$，在 p 的一个邻域 U 上存在 h 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_1, \ldots, X_h$, 使得 $X_i(p)$ 张成了 $L^h(p)$，则称 L^h 是 M 上光滑的 h 维分布，记为:

$$L^h|_U = \{X_1, \ldots, X_h\} \tag{1.28}$$

问题是，何时能给出一个分布 L^h，使得存在局部坐标系 (W, w^i) 且:

$$L^h|_U = \langle \frac{\partial}{\partial w^i} \rangle, i = 1, \ldots, h \tag{1.29}$$

我们稍微分析一下这个条件。比如此时，有:

$$X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial w^\beta} \tag{1.30}$$

所以

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{h} C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, C_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\delta,\eta=1}^{h} (a_\alpha^\delta \frac{\partial a_\beta^\eta}{\partial w^\delta} - a_\beta^\delta \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial w^\delta}) b_\eta^\gamma \tag{1.31}$$

其中 $b = (b_\beta^\alpha)$ 表示 a 的逆矩阵。

Definition 1.1.4: Frobenius 条件

如果 $\{X_1, \ldots, X_h\}$ 张成 L^h(任意邻域 U 上)，且对于李括号而言是封闭的，则称该分布满足 Frobenius 条件。

Theorem 1.1.9: Frobenius 定理

若有一个定义在 U 上的分布 L^h，且对于任何 $p \in U$, 总是存在局部坐标系 (W, w^i) 使得:

$$L^h|_W = \langle \frac{\partial}{\partial w^i} \rangle, i = 1, \ldots, h \tag{1.32}$$

则等价于该分布满足 Frobenius 条件。

Proof. 考虑数学归纳法。根据之前的叙述，$h = 1$ 的时候定理??给出了证明。

假设 $h - 1$ 的时候定理得证。设 L^h 由 U 上处处线性无关的切向量场 $X_1, \ldots, X_h$ 生成，并且:

$$[X_\alpha, X_\beta] \cong 0 (\mathrm{mod} X_\gamma) \quad 1 \le \alpha, \beta \le h \tag{1.33}$$

从而存在 p 处的邻域 $(y^1, \ldots, y^m)$ 使得 $\dfrac{\partial}{\partial y^h} = X_h$.

我们用 λ, μ, ν 表示取值在 $1, \ldots, h-1$ 的量。设:

$$X'_\lambda = X_\lambda - (X_\lambda y^h) X_h \tag{1.34}$$

于是 $X'_\lambda(y^h)=0$,$X_hy^h=1$。因此 $L^h=\{X'_1,X'_2,\dots,X'_{h-1},X_h\}$ 也张成 L^h 且仍然满足 Froenius 条件。故可设:

$$[X'_\lambda,X'_\mu]\equiv a_{\lambda\mu}X_h[\mathrm{mod}X'_\nu] \tag{1.35}$$

我们想要得知 $a_{\lambda\mu}$ 的取值。故两边同时作用 y^h:

$$0=a_{\lambda\mu} \tag{1.36}$$

因此存在一个 $h-1$ 维的分布:$L'^{h-1}=\{X'_1,\dots,X'_{h-1}\}$。且满足 Frobenius 条件。根据归纳假定，存在 p 的局部坐标 $(z^1,\dots,z^m)$ 使得:

$$L'^{h-1}=\{\frac{\partial}{\partial z^1},\dots,\frac{\partial}{\partial z^{h-1}}\} \tag{1.37}$$

代入 L_h，则:

$$[\frac{\partial}{\partial z^\lambda},X_h]\equiv b_\lambda X_h(\mathrm{mod}\frac{\partial}{\partial z^\mu}) \tag{1.38}$$

同样给两边作用 y^h，则 $b_\lambda=0$。所以:

$$[\frac{\partial}{\partial z^\lambda},X_h]=\sum_{\mu=1}^{h-1}C^\mu_\lambda\frac{\partial}{\partial z^\mu} \tag{1.39}$$

然而我们本可以写出 $X_h=\sum_{i=1}^m\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}$，带入李括号：

$$\sum_{i=1}^m\frac{\partial\xi^i}{\partial z^\lambda}\frac{\partial}{\partial z^i}=\sum_{\mu=1}^{h-1}C^\mu_\lambda\frac{\partial}{\partial z^\mu} \tag{1.40}$$

所以 ξ^i 对于 $i\geq h$ 的时候满足对 z^λ 的导数为 0。由于 λ 取值是 $1,\dots,h-1$，这说明 ξ^i 在 $i\geq h$ 的时候只是 $z^h,\dots,z^m$ 的函数。

把 X_h 中前 $h-1$ 个指标的切向量去除掉，则仍然可以给出 L_h。记 X'_h。因为 $X'_h(z^\lambda)=0$，于是依据定理**??**，我们实际可以找到 $(z^h,\dots,z^m)\mapsto(w^h,\dots,w^m)$ 的变换使得 $X'_h=\frac{\partial}{\partial w^h}$。

上述变换不涉及之前的 $h-1$ 个指标，所以我们实际已经给出了 h 时候 Frobenius 定理的证明。 ■

Pfaff 方程组

顺便记一下外微分的记法。(记为对偶的形式)

首先介绍 Pfaff 方程组。设 L^h 是分布，则可以定义:

$$(L^h(p))^\perp=\{\omega\in(T_pM)^*|\omega(X_i(p))=0,\forall i\} \tag{1.41}$$

另外，我们还可以给出 $m-h$ 个处处线性无关的光滑向量场，使得 $\{X_1,\dots,X_m\}$ 在该邻域处是处处线性无关的。设 $\{\omega_1,\dots,\omega_h,\omega_{h+1},\dots,\omega_m\}$ 是对偶的微分形式，（因为这些向量场处处不为 0，所以存在）。

因此 $(L^h(p))^\perp$ 可以由 $\{\omega_{h+1}(p),\dots,\omega^m(p)\}$ 生成。从而局部上我们可以把分布 L^h 视作给定 $m-r$ 个处处线性无关的 1 形式后，方程组:

$$\omega_s=0,r+1\leq s\leq m \tag{1.42}$$

的解。该方程组称为 Pfaff 方程组。

Definition 1.1.5: completelt-integ

若存在局部的坐标系 u^i 使得子流形:

$$u^i=\mathrm{const},r+1\leq s\leq m \tag{1.43}$$

适合上述方程组，则称 Pfaff 方程组是完全可积的。这样，如果完全可积，则存在局部坐标系 u^i 使得

方程组等价于:

$$du^s = 0, r+1 \leq s \leq m \tag{1.44}$$

此时分布正好由 $\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u^r}$ 张成，所以是我们所最喜欢的那类分布。反过来，如果 Frobenius 条件满足，那么 Pfaff 方程组也是完全可积的。

然而 Pfaff 方程组完全可积意味着下面的定理：

Theorem 1.1.10: Frobenius 定理

Pfaff 方程组

$$\omega_\alpha = 0, 1 \leq \alpha \leq r \tag{1.45}$$

完全可积的充分必要条件是 $d\omega \equiv 0 \pmod{(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$.

Proof. 对 ω_s 求外微分:

$$d\omega_s(X_\alpha, X_\beta) = -\langle [X_\alpha, X_\beta], \omega_s \rangle \tag{1.46}$$

从而完全可积可以推出 Frobenius 条件，于是 $d\omega_s(X_\alpha, X_\beta) = 0$。

由于局部上 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ 生成余切空间，所以可以把 $d\omega_s$ 写为:

$$d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{st} \wedge \omega_t + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} a^s_{\alpha\beta} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta \tag{1.47}$$

带入上述就有 $a^s_{\alpha\beta} = 0$。因此 $d\omega = 0$。反过来也成立。 ■

Chapter 2

代数

1

Chapter 3

分析

1

Chapter 4

拓扑

§4.1 Borsuk-Ulam 定理

Theorem 4.1.1: Borsuk-Ulam 定理

设 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数。则一定存在点 $p \in S^n$ 使得 $f(p) = f(-p)$。

这个定理常常用来说明某些东西的不存在。只要我们构造出一个函数使得其不能找到取值相同的对径点即可。

利用奇函数，我们可以说明两个等价形式。

Theorem 4.1.2

设 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续的奇函数，则一定存在 $f(p) = 0$。

如果满足该形式，则对于任何函数 $f(x) = [f(x) + f(-x)]/2 + [f(x) - f(-x)]/2$。存在 $f(p) - f(-p) = 0$。

Theorem 4.1.3

设 $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ 是 S^{n-1} 上的奇连续函数。则存在 $p \in B^n$ 使得 $f(p) = 0$。

Proof. 假设我们知道定理??，则可以构造 $f' : S^{n-1} \to R^{n-1}$。于是存在 $p' \in S^{n-1}$ 使得 $f(p') = (0, \ldots, 0, q)$。同时 $f(-p) = (0, \ldots, 0, -q)$。不管 q 是否为 0，定理实属显然。

假设我们知道该定理。给定 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ 是奇函数，则可以定义 $f'(x) = (\frac{1}{2}[(1 + |x|)f(x/|x|) + (1 - |x|)/2f(-x/|x|)], 1 - |x|)$。0 处则单独定义为 $(0, 1)$。

于是 f' 连续且从 B^{n+1} 到 $\mathbb{R}^n$。于是存在 p 使得 $f'(p) = 0$。显然 p 必须在 S^n 上，且满足 $f(p) = 0$. ■

下面我们证明定理??。

Proof of Theorem ??. 给定一个奇函数 $h : S^n \to \mathbb{R}^n$。设不存在 $f(p) = 0$, 则容易得到 $h' : S^n \to S^{n-1}$ 是连续奇函数。

因此诱导了 $\hat{h} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$。$\hat{h}$ 诱导两个基本群的同构，从而 Hurewicz 定理说这诱导了两个空间上上同调环 (Z_2 系数) 的环同态:

$$\mathbb{Z}_2[b]/b^n \to \mathbb{Z}_2[a]/a^{n+1}$$

且将 b 送到 a。但是 $b^n = 0$ 到 $a^n \neq 0$，矛盾！ ■

§4.2 代数拓扑题库

Theorem 4.2.1: $SO(n)$ 的连通性

群 $SO(n)$ 是连通的李群。

Proof. 我们有几个证明办法。

办法 1: 考虑下面李群的结论:

Proposition 4.2.1

若李群 $H < G$ 是闭子群，且 G/H 和 H 都是连通的李群，则 G 是连通的。

使用这个结论，并且结合 $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ 即可得到结果。(如果 $n=1$，则 $SO(2)$ 本身就是 S^1。)

办法 2: ∎