2023 春 • 微分几何课程笔记

整理者:Tsechi/Tseyu 授课者：WXF

2023 年 2 月 22 日

目录

1 课程简介和考核方式

这门课程的主要内容是曲线论和曲面论。是在 $\mathbb{R}^3$ 上研究曲面和曲线的课程。有两个基本定理。

2 Euclid 空间与刚体运动

2.1 运动

将 E 记为 $\mathbb{R}^3$ 空间, 设这个空间的距离定义 d。

对于 $x=(x_1,x_2,x_3)$，定义仿射变换 $\varphi_{A,B}$：

$$x \mapsto Ax+b$$

我们关心在使得距离不变的仿射变换。为了方便，把 x 看作 $(x,1)\in\mathbb{R}^4$. 这样更方便。

命题 2.1 上述仿射变换 φ 保持距离不变等价于 A 是正交矩阵。

证明 容易知道在保距离实际上是保内积。A 是正交矩阵显然等价于保内积。 □

定义 2.1 满足 A 是正交矩阵的变换 $\varphi_{A,B}$ 被称为欧氏空间中的**运动**。

如果 $|A|=1$，称 $\varphi_{A,B}$ 是固有运动。若 $|A|=-1$，则 $\varphi_{A,B}$ 是非固有运动。$A=I_n$ 和 $A=0$ 的专有名字不再赘述。

命题 2.2 E 中所有的运动构成一个群, 称为欧氏空间的运动群。

证明 显然。 □

命题 2.3 欧式空间中保内积的变换（不一定是线性的）一定是 $\mathbb{R}^3$ 的运动。

证明 只用证明保内积可以推出线性即可。

记该变换为 σ，则我们需要考虑 $\sigma(kx+ly)=k\sigma(x)+l\sigma(y)$。

证明一个式子等于 0 意味着内积为 0. 由于 σ 本身保内积，因此可以在恰当的时机去掉内积表达式中的 σ，从而得到 0 的结果。不再更多阐述其中的细节。 □

欧几里得几何是研究欧几里得空间在运动群下的不变的性质。

2.2 向量

在 $\{(P,Q)|P,Q\in E\}$ 中可定义等价关系：若存在平移 τ:$\tau(P)=P',\tau(Q)=Q'$，则称这两个对等价。

定义 2.2 (P,Q) 的等价类称为向量。即 $V=\overrightarrow{PQ}$.

运动 $\varphi_{A,B}$ 自然的诱导向量的线性变换:

$$\forall V, V\mapsto AV$$

运动保持欧氏距离和内积，从而我们能立马得到：$|V|$ 在运动下不变，(V,W) 在运动下也不变。

我们也有 Cauthy-Schwarz 不等式：

$$|V||W|\geq V\cdot W$$

若 $V\cdot W=0$, 自然称 V,W 正交。我们下面定义一些高中没学过的东西。

定义 2.3 (行列式) (U,V,W)

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

定义 2.4 (向量积)

$$V\times W=\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

有一些性质：

1. $V \times W = -W \times V$
2. $(V_1 + V_2) \times W = V_1 \times W + V_2 \times W$
3. $(\lambda V) \times W = \lambda(V \times W)$
4. $(V \times W) \cdot W = 0$
5. $(U, V, W) = 0$ 等价于向量线性相关。
6. 若 $(U, V, W) > 0$，称向量组为右手标架。反之为左手架构。
7. 向量积在运动下保持不变（×）。

关于第 7 点，我们做一些说明。

证明 $Av \times Aw$ 的模长方计算为：

$$|Av \times Aw|^2 = |Av|^2|Aw|^2 - (Av, Aw)^2 = |v|^2|w|^2 - (v, w)^2 = |v \times w|^2 = |A(v \times w)|^2$$

根据 A 的性质容易知道 $Aw \times Av$ 和 $A(v \times w)$ 都和 Aw，Av 垂直，因此两个向量是平行的。

然而 $(Aw, Av, A(w \times v))$ 的值是 $|A|(w, v, w \times v)$，$(Aw, Av, Aw \times Av)$ 的值大于 0. 两者之间的差异完全由 A 的正负性。因此结论应该为：

$$Av \times Aw = |A|A(v \times w)$$

向量积有一些几何含义，列如下：

1. $V \times W$ 与 W, V 都垂直。
2. $(V, W, V \times W) = (V \times W) \cdot (V \times W) > 0.$
3. $|V \times W|^2 = |V|^2|W|^2 - (V \cdot W)^2$

3 曲线族

3.1 参数曲线

定义 3.1 设 $I = (a, b)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，I 到 $\mathbb{R}^3$ 的 $C^k(k \geq 3)$ 映射 P：

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

称为是 $\mathbb{R}^3$ 的一条参数曲线，t 称为 P 的参数。

考虑 $P(t)$ 的导数，若有：

$$P'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \neq 0, \forall t \in (a, b)$$

称 $P(t)$ 是正则参数曲线。*(regular parameter curve)*

同一条曲线的参数曲线可能既有正则的，也有不正则的。有的曲线本身比较糟糕，不存在正则的参数曲线。但有的曲线只是单纯的参数没有找好。

例 3.1 $P(t) = (t^2, t^3)$。则 $P'(t) = (2t, 3t^2)$。

切向量的定义不再赘述（md 被微分流形的切向量折磨的还不够吗）。那个切向量的定义才是纯纯的折磨。

至于向量场，微分流形里面的向量场把我卷上天又丢下来，让人欲罢不能，想必大家都不会再来看这种非常古典的定义了罢！

我们简单介绍一下比较狭义的微分同胚：

定义 3.2 $\varphi: I \to I'$ 被称为是微分同胚，如果 φ 存在逆函数且双双可微。

定义 3.3 设 $P: I \to \mathbb{R}^3, \tilde{P}: \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ 是两条参数曲线，若存在微分同胚 $\varphi: \tilde{I} \to I$ 使得 $\tilde{P}: P \circ \varphi$，则称 φ 是 P 到 $\tilde{P}$ 的参数变换。如果 $\varphi' > 0$，则称 φ 保定向。

定义 3.4 (正则曲线) $\mathbb{R}^3$ 的点集 C 称为正则曲线，若它至少有一个参数表示:

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad t \in [a, b]$$

满足：

1. $f, g, h \in C^k(a, b), k \geq 3$
2. $P: (a, b) \to C, t \mapsto (f(t), g(t), h(t))$ 是双方单值一一的。
3. $P'(t) \neq 0$。

正则曲线都必须要与 (a, b) 同胚，因而大多数我们熟知的曲线其实并不是正则曲线。这是令人不快的。因此下面的定义克服了这种困难：

定义 3.5 (正则曲线) $\mathbb{R}^3$ 中的点集 C 称为正则曲线，如果满足：

1. 存在 $\mathbb{R}^3$ 中一族正则参数曲线 $\{C_i\}$ 使得 $C = \bigcup C_i$
2. "相容性"：设 $\alpha_i(t_i)$ 和 $\alpha_j(t_j)$ 是 C_i 和 C_j 对应的正则参数曲线，$C_i \neq C_j \neq \emptyset$, 则 $\alpha_i(t_i)$ 和 $\alpha_j(t_j)$ 限制在 C_j 和 C_i 的交上相差一个正则参数变换。

其实这就是一维流形的定义。因此实际上我们研究的是 1 维流形。

3.2 弧长参数

现在考虑曲线 C 的正则参数表示：$P: I = (a, b) \to \mathbb{R}^3$。设 $P_0 = P(t_0), P_1 = P(t_1)$，$t_0 \leq t_1$。则:

$$l(P_0, P_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

弧长参数是另外一个重要的结果：

定义 3.6 设 s 是 C 的一个参数，若对于 $\forall P_0, P_1 \in C$，都有 $l(P_0, P_1) = |s_1 - s_0|$. 这里 $P_0 = P(s_0), P_1 = P(t_1)$，则称 s 是曲线 C 的一个弧长参数。

引理 3.1 s 是弧长参数当且仅当 s 是正则参数且其对应的切向量都是单位向量。

证明

$$f'(s)^2 + g'(s)^2 + h'(s)^2 = 1$$

则根据弧长公式立马可以得到。

若 s 是弧长参数，则直接求导就可。 □

引理 3.2 (存在性) C 是正则曲线，则弧长参数存在。

证明 显然。 □

引理 3.3 (唯一性) 弧长参数在相差正负号和平移的条件下唯一的。

证明 显然。 □

命题 3.1 弧长是正则曲线的不变量。即使相差一个微分同胚，弧长也不变。

证明 设 $\tilde{P} = P \circ \varphi . \varphi$ 是同胚。$t \in [a, b]$,$r \in [c, d]$。则:

$$l(\tilde{P}) = \int_c^d |\frac{d\tilde{P}}{dr}| dr = \int_c^d |\frac{dP}{dt}||\frac{dg}{dr}| dr = \int_c^d |\frac{dP}{dt}| \frac{dg}{dr} dr = l(P)$$

命题 3.2 曲线在运动下弧长参数不变。即若 s 是 P 的弧长参数，则 s 也是 $\tilde{P} = AP + B$ 的弧长参数。

证明 计算一下导数:

$$|\frac{d\tilde{P}}{ds}| = |\frac{d(AP(s))}{ds}| = |A\frac{dP(s)}{ds}| = |\frac{dP}{ds}|$$

3.3 曲线的局部方程

设 C 是一条正则曲线，P_0 是 C 上的点。s 是弧长参数且 $P(0) = P_0$。在 $s = 0$ 处，我们对 $P(s)$ 进行展开:

$$P(s) = P_0 + \frac{dP}{ds}(0)s + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{ds^2}(0)s^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3P}{ds^3}(0)s^3 + \epsilon(s) \cdot s^3$$

其中 $\lim_{s \to 0} \epsilon(s) = 0$.

考虑 $\langle \frac{dP}{ds}, \frac{dP}{ds} \rangle = 1$ 恒成立，对此求导得:

$$\langle \frac{dP}{ds}, \frac{d^2P}{ds^2} \rangle = 0$$

因此二阶导得到的向量与切向量垂直（若其不为 0）。

于是做定义:

定义 3.7 设 $T(0) = \frac{dP}{ds}$，$N(0) = \frac{d^2P}{ds^2}$. 再定义 $B(0) = T(0) \times N(0)$。对这三个向量单位化后仍用原记号表示。称 $T(0)$ 是切向量，$N(0)$ 是主法向量，$B(0)$ 是次法向量。

根据计算，得到 $(T(0), N(0), B(0)) = 1$，因而三个互相垂直的向量构成了一组右手系坐标基。

定义 3.8 (三类特殊平面) *1. 法平面: 与 $T(0)$ 垂直的平面，即 $N(0), B(0)$ 张成的平面。*

2. 次切平面: 与 $N(0)$ 垂直的平面。即 $T(0), B(0)$ 张成的平面。

3. 密切平面: 与 $B(0)$ 垂直的平面。即 $T(0), N(0)$ 张成的平面。

如果曲线是平面的，那么不难想象 $N(0)$ 也在该平面上，因而密切平面就是该曲线存在的平面。

注意到 $N(0)$ 的大小反映了切向量变化的速率，因而其反映了曲线的弯曲程度:

定义 3.9 *$\kappa = |\frac{d^2P}{ds^2}|$ 称为曲线 C 在 P_0 处的曲率。$\tau = \frac{1}{\kappa}\langle \frac{d^3P}{ds^3}(0), B(0)\rangle$ 称为曲线 C 在 P_0 的挠率。*

若 κ 等于 0，则主法向量无法确定，因而难以定义。

例 3.2 *$P(t) = (t, e^{-1/t^2})$。我们需要验证 $\kappa(0) = 0$.*

回顾之前的 Taylor 展开，我们大可以把这些微分换成我们已然定义的概念：

$$P(s) = P_0 + (s + o(s^2))T_0 + (\frac{1}{2}\kappa s^2 + o(s^2))N_0 + \frac{1}{6}(\kappa\tau s^3 + o(s^3))B_0$$

这样的替换表明了曲线可以由自身的一些参数所表现，而不用依靠外来的参数。这是令人舒适的。要是不能，那么我们该如何想象生活在二维曲线上的一维人呢？

上式称为曲线在 P_0 处的标准型。

定理 3.4 (标准型的唯一性) *假设有 $\overline{T_0}$,$\overline{N_0}$,$\overline{B_0}$ 以及 κ',τ' 也满足:*

$$P(s) = P_0 + (s + o(s^2))\overline{T_0} + (\frac{1}{2}\kappa' s^2 + o(s^2))\overline{N_0} + \frac{1}{6}(\kappa'\tau' s^3 + o(s^3))\overline{B_0}$$

则对应的量都是相同的。

证明 直接比较系数即可知道 $T_0 = \overline{T_0}$ 和 $\kappa N_0 = \kappa'\overline{N_0}$。则 $\kappa = \kappa'$ 以及 $N_0 = \overline{N_0}$。于是 $\overline{B_0} = B_0$. 进而比较 B_0 系数知 $\tau = \tau'$ □

当我们把 s 换为 $s' = -s$。此时 T_0 会反向，N_0 不变，从而 B_0 反向。κ 不变，而 τ 则因为 B_0 和 $\frac{d^3P}{ds'^3}$ 均变号而不变。

现在我们思考的问题是，τ 到底是个什么东西？为此，我们写出标准型:

$$P(s) = P_0 + (s + o(s^2))T_0 + (\frac{1}{2}\kappa s^2 + o(s^2))N_0 + \frac{1}{6}(\kappa\tau s^3 + o(s^3))B_0$$

在表达式中 τ 只关系到了 B_0 方向的曲线值。由于这里的曲率 κ 总是大于 0 的 (不考虑等于 0), 则 B_0 方向的曲线方向只与 τ 和 s 有关。如果 $\tau > 0$，则曲线从密切平面的下方穿至上方。若 $\tau < 0$，则相反。

命题 3.3 *密切平面是所有切平面中与曲线最”贴近“的切平面。*

证明 任何切平面都可以用 T_0 以及 $N_1 = \cos\theta N_0 + \sin\theta B_0$ 张成。为了计算曲线在 N_1 上的投影，我们计算:

$$B_1 = T_0 \times N_1 = \cos\theta B_0 - \sin\theta N_0$$

定义函数 $f(s, \theta)$:

$$f(s, \theta) = \langle P(s) - P_0, B_1\rangle = \langle P(s) - P_0, \cos\theta B_0 - \sin\theta N_0\rangle$$

定义 3.10 曲线:

$$P^*(s) = P_0 + sT_0 + \frac{1}{2}\kappa s^2 N_0 + \frac{1}{6}\kappa\tau s^3 B_0$$

称为 $P(s)$ 的密切曲线。

对上述曲线求导，我们可以得到：

$$\frac{dP^*}{ds} = T_0 + \kappa s N_0 + \frac{1}{2}\kappa\tau s^2 B_0 \quad \frac{d^2P^*}{ds^2} = \kappa N_0 + \kappa\tau s B_0 \quad \frac{d^3P^*}{ds^3} = \kappa\tau B_0$$

若 $s=0$，则上述三个各阶导数与 P 是类似的。但是 $s \neq 0$ 则没有这样的性质。

3.4 曲线的曲率与挠率

这一节我们讨论曲率和挠率的几何含义。首先考虑曲率:

令 $T(s) = \dfrac{dP(s)}{ds}$

$$|T(s+\Delta s) - T(s)|/\Delta s = |2\sin\frac{1}{2}\Delta\theta|/\Delta s = \lim|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}|$$

则曲率反映了曲线的方向向量转动的快慢，也就是曲线弯曲的程度。

接下来是挠率。

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\langle\frac{d^3P}{ds^3}, B\rangle$$

我们考虑恒等式:

$$\langle\frac{d^2P(s)}{ds^2}, B(s)\rangle \equiv 0$$

对等式求导：

$$\kappa(s)\tau(s) + \langle\kappa(s)N, B'(s)\rangle = 0$$

因此 $\tau(s)$ 有表示:

$$\tau(s) = -\langle N, B'(s)\rangle$$

我们研究一下 $B'(s)$。其分解为:

$$\langle B'(s), T(s)\rangle = \frac{d}{ds}\langle T, B\rangle - \langle T'(s), B(s)\rangle = 0 \quad \langle B, B'(s)\rangle = 0(\langle B, B\rangle = 1)$$

从而 $B'(s)$ 实际上只有 N 分量。因此：

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

例 3.3 设 C 是弧长参数 s 的平面曲线，且假定 $\kappa(s) \neq 0$。则存在 $n \in \mathbb{R}^3$ 使得:

$$|n| = 1 \quad \langle P(s) - P(s_0), n\rangle = 0$$

对第二个式子求导:

$$\langle T(s), n\rangle = 0$$

再求导:

$$\langle\kappa(s)N(s), n\rangle = 0$$

考虑到 $B(s)=T(s)\times N(s)$，则上述两个内积为 0 意味着 $B(s)=n$ 或者 $-n$。

不管如何，此时我们有：

$$\frac{dB(s)}{ds}=0 \quad \tau(s)=-\langle N,\frac{dB}{ds}\rangle$$

因而平面曲线的挠率总是为 0。

设曲线的挠率总是 0，即 $\tau(s)\equiv 0$。此时 $\dfrac{dB}{ds}=-\tau(s)N=0$。因此 $B(s)$ 是一个常向量。记为 n。

现在考虑 $P(s)$ 与 $B(s)$ 的内积：

$$\langle P(s),B(s)\rangle\equiv C$$

这是显然的。因为求导直接解决问题。从而挠率恒为 0 的曲线是平面曲线。

例 3.4 (圆柱螺线)

$$P(s)=(r\cos\omega s, r\sin\omega s, h\omega s)$$

其中 $\omega=(r^2+h^2)^{-1/2}$。

求导得：

$$\frac{dP(s)}{ds}=(-r\omega\sin\omega s, r\omega\cos\omega s, h\omega)$$

可得其长度为 1。因此 s 是弧长参数。

于是 $T(s)=\dfrac{dP(s)}{ds}$，$N(s)=(-\cos\omega s,-\sin\omega s,0)$。

$$B(s)=T(s)\times N(s)=(\omega h\sin\omega s,-\omega h\cos\omega s, r\omega)$$

对 $B(s)$ 求导即可得到 $\tau(s)$ 的值。其为 $\omega^2 h$.

如果 $\tau(s)$ 是常数，曲线一定是圆柱螺旋线吗？

密切圆的概念比较显然，这里就不赘述了。