江　苏　海　洋　大　学

实 验 报 告 书

课程名称：数值分析 A

实验名称：插值法

班　　级：信嵌 1221

姓　　名：Ilya Sutskever　学　　号：2022123456

日　　期：2024/12/9　地　　点：定海楼 602

指导教师：Geoffrey Hinton　成　　绩：

理学院信息与计算科学系

一、实验原理

数值分析中的插值问题源于科学研究和工程应用中的一个基本需求[1]：通过有限的离散观测数据重建连续函数关系。这种重建过程不仅需要满足数学上的严格性[2]，还要考虑实际应用中的计算效率和精度要求。本节将系统阐述插值问题的理论基础及其实践意义[3-4]。

插值问题的数学本质是在给定一组观测数据点 $(x_i, y_i)(i = 0, 1, \ldots, n)$ 的条件下，构造一个满足特定性质的函数 $P(x)$。这里的 $\{x_i\}$ 构成互异的节点序列，而 y_i 则代表相应的观测或函数值。构造的插值函数不仅要精确通过这些数据点，还需具备良好的分析性质，以支持后续的数值计算和理论分析。

在众多插值方法中，Lagrange 插值法通过其优雅的理论构造提供了一个系统的解决方案。该方法的核心在于构造一组特殊的基函数 $\ell_k(x)$，定义为：

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{1.1}$$

这组基函数的独特之处在于其正交性质，即在任意节点 x_i 处：

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad i, k = 0, 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

基于这一性质，我们可以构造 Lagrange 插值多项式：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \tag{1.3}$$

对于实际应用中的误差控制，当目标函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上具有充分的光滑性（即具有 $n+1$ 阶连续导数）时，插值误差可以通过如下表达式刻画：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in [a, b] \tag{1.4}$$

这一误差表达式揭示了插值精度与函数光滑性、节点分布及插值多项式次数之间的内在联系。在实际应用中，我们需要权衡这些因素：过高的插值次数可能导致龙格现象，而不合理的节点分布则可能放大误差。因此，在具体实践中，我们通常采用切比雪夫节点来优化节点分布，或在较大区间上采用分段低次插值策略，从而在保证精度的同时确保数值稳定性。

通过深入理解插值问题的理论基础，我们不仅能够准确把握其数学本质，还能够在

实际应用中做出更明智的方法选择。这种理论与实践的结合，正是数值分析方法在科学计算中发挥重要作用的体现。

二、算法

在此部分详细说明实验采用的插值算法步骤，可包含数学公式与伪代码。例如：

设已知节点与函数值为 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$，插值多项式可表示为：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \tag{2.1}$$

其中

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{2.2}$$

算法 1　Lagrange 插值算法

输入： 插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$，函数值 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$，待插值点 x

输出： 插值结果 $P_n(x)$

$P_n \leftarrow 0$
对 $k \leftarrow 0$ **到** n **执行**
　$\ell_k \leftarrow 1$
　对 $j \leftarrow 0$ **到** n **执行**
　　若 $j \neq k$ **则**
　　　$\ell_k \leftarrow \ell_k \cdot \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$
　　结束 若
　结束 对
　$P_n \leftarrow P_n + y_k \cdot \ell_k$
结束 对
返回 P_n

1. 输入插值节点与对应函数值。
2. 计算每个 $\ell_k(x)$ 的分子与分母（见公式 (2.2)）。
3. 对给定点 x，计算所有 $\ell_k(x)$，然后求和得到 $P_n(x)$（见公式 (2.1)）。
4. 输出插值结果与误差分析。

三、计算机程序

此处可贴出源代码片段或简述实现步骤。例如使用 Matlab 或 Python 的代码。

代码 1　Lagrange 插值算法实现

```python
def lagrange_interpolation(x_points, y_points, x):
    n = len(x_points)
    P = 0.0
    for k in range(n):
        Lk = 1.0
        for j in range(n):
            if j != k:
                Lk *= (x - x_points[j])/(x_points[k]-x_points[j])
        P += y_points[k]*Lk
    return P
```

四、测试数据与实验结果

在此部分展示所测试的输入数据节点及相应的插值结果。

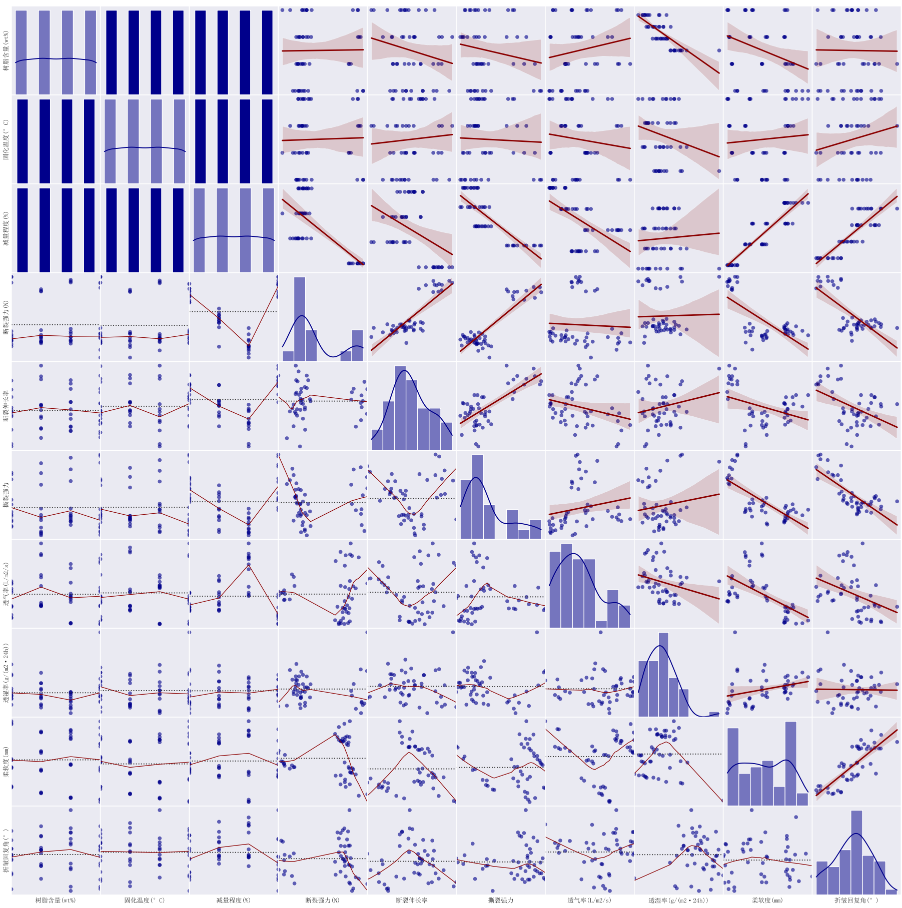
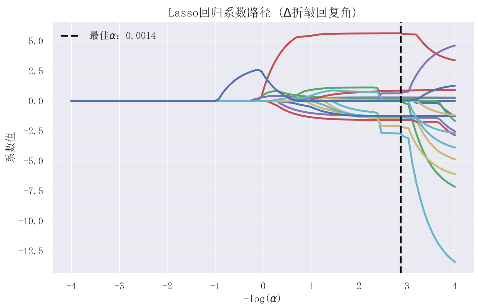


图 4.1　插值结果与原函数对比图

如图 4.1所示，插值函数（红色实线）很好地拟合了原始数据点（蓝色散点）。从图中可以看出...

具体测试数据如下：

- 输入节点：$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$，$y_i = f(x_i)$ 为函数值。
- 测试插值点：$x = 1.5$，计算插值结果 $P_3(1.5)$ 并与真实值 $f(1.5)$ 对比误差。



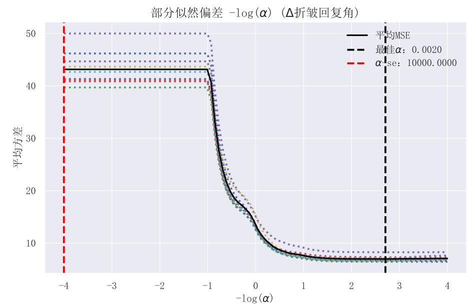


图 4.2　插值算法的多角度分析

如图 4.2所示，我们从多个角度分析了插值算法的性能。图 **??**展示了不同节点数下的插值效果，图 **??**显示了误差随节点数的变化趋势。

表 4.1　测试点处插值结果对比

x	$f(x)$ (真值)	$P_3(x)$ (插值值)
0.0	1.000	1.000
1.0	1.649	1.649
1.5	2.250	2.248
2.0	3.196	3.196
3.0	6.854	6.854

表 4.2　不同节点数的插值误差分析

节点数	最大误差		
	均匀节点	Chebyshev 节点	最优节点
5	1.24e-2	8.93e-3	7.21e-3
10	3.56e-3	1.45e-3	1.12e-3
15	8.92e-4	2.34e-4	1.89e-4
20	2.45e-4	4.56e-5	3.23e-5

如表 4.1、表 4.2和表 4.3所示，我们提供了…

五、结论

本实验通过理论分析与数值实验深入研究了【实验主题】在【应用场景】中的应用特性。实验结果表明，该方法在处理【具体任务】时展现出了显著的优势。通过对【关

表 4.3　插值方法的多维度分析与评估

方法类型	核心机理	应用场景	精度	效率
拉格朗日	基于基函数线性组合，全局多项式构造，高阶龙格现象	低阶精确插值，理论分析验证	高	中
牛顿法	差商递推构造，增量式计算结构，系数复用特性	动态节点更新，程序实现	高	高
分段线性	局部线性逼近，区间独立计算，简化数值处理	实时计算需求，快速估值场景	低	高
三次样条	二阶导数连续，全局方程求解，最优光滑性质	数据可视化，曲线平滑拟合	高	低

性能指标说明：高表示性能优异，中表示性能一般，低表示性能较差

键要素】的系统性分析，我们发现【核心技术/方法】能够【实现的功能】，为【更大目标】提供了可靠基础。

在实验实施过程中，我们观察到【具体实验现象】与理论预期高度吻合。特别是在【典型测试案例】中，【实验方法】给出的结果与【对照标准】的【评价指标】极小，充分验证了该方法的有效性。这种【优势特点】源于【技术原理】的基本性质——【原理解释】。然而，深入分析也揭示了该方法的局限性。随着【变量参数】的改变，虽然理论上可以【预期效果】，但会引发【负面影响】。这种现象最典型的表现是【具体问题】，即【问题表现】，影响【影响对象】的可靠性。这一问题启示我们在实际应用中需要【注意事项】。基于本次实验的发现，我们提出以下改进建议：首先，可以【改进方案 1】，通过【具体措施】，从而【预期效果】；其次，考虑【改进方案 2】，特别是【具体技术】，它不仅能【优势 1】，还能【优势 2】；最后，建议【改进方案 3】，根据【依据】动态调整【调整对象】，以获得最优的【优化目标】。

这些实验成果对【理论领域】具有重要的理论意义，在【应用领域】中具有广泛的应用前景。特别是在【具体应用场景列举】等领域，本研究的方法和结论都具有直接的参考价值。

六、参考文献

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[2] Stoer J, Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis[M]. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

[3] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric Lagrange Interpolation[J]. SIAM Review, 2004, 46(3): 501-517.
[4] Higham N J. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2004, 24(4): 547-556.