2014 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 对 $y=x+\sin\frac{1}{x}$,

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$

得曲线 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$,应选(C).

(2)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$

且 $\varphi''(x)=f''(x)$,

当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$\varphi''(x)=f''(x)\geqslant 0$,曲线 $y=\varphi(x)$ 为凹函数,

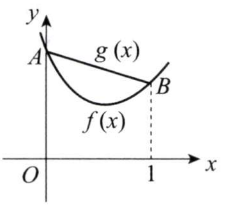
因为 $\varphi(0)=0,\varphi(1)=0$,所以当 $x\in[0,1]$ 时,$\varphi(x)\leqslant 0$,

即 $f(x)\leqslant g(x)$,应选(D).

方法二 如图所示,当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$y=f(x)$ 为凹函数,

因为 $y=g(x)$ 为连接 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线,

所以 $f(x)\leqslant g(x)$,应选(D).



一(2) 题图

方法点评:本题考查函数大小比较.

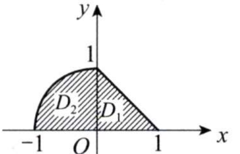
利用凹凸性证明不等式是不等式证明的重要方法,设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,若 $f(a)=f(b)=0$,则当 $x\in[a,b]$ 时,$f(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$.

(3)**【答案】** (D).

【解】 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$

则 $D_1=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right\}$,

$D_2=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 1\right\}$,



一(3) 题图

则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$,

应选(D).

(4)**【答案】** (A).

【解】 令 $F(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x-2ax\cos x-2bx\sin x+2ab\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\pi}(x^2+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x-2bx\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3+2a^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx+2b^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx-4b\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3+4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx+4b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx-4b\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b,$$

由$\begin{cases}F_a'=2\pi a=0,\\F_b'=2\pi b-4\pi=0\end{cases}$得 $a=0,b=2$,

$$A=F_{aa}''=2\pi,\quad B=F_{ab}''=0,\quad C=F_{bb}''=2\pi,$$

由 $AC-B^2=4\pi^2>0$ 且 $A>0$ 得 $a=0,b=2$ 时,$F(a,b)$ 取最小值,故 $a_1=0,b_1=2$,应选(A).

(5)**【答案】** (B).

【解】 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&0&b\\0&d&0\\c&0&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0&b\\0&c&0\\c&0&d\end{vmatrix}$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$
$$=-a^2d^2+2abcd-b^2c^2=-(ad-bc)^2,$$

应选(B).

(6)**【答案】** (A).

【解】 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

由$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$,

因为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩与矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$的秩相等,因为$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$两列不成比例,所以 $r\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=2$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之,若 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不一定线性无关,
如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,显然 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,
应选(A).

(7)**【答案】** (B).

【解】 由 $P(B)=0.5$ 得 $P(\overline{B})=0.5$,
由 A,B 相互独立及减法公式得 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.5P(A)=0.3$,
则 $P(A)=0.6$,从而 $P(\overline{A})=0.4$,
于是 $P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0.4\times0.5=0.2$,应选(B).

(8)**【答案】** (D).

【解】 $E(Y_1)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]$,

$E(Y_2)=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]$，显然 $E(Y_1)=E(Y_2)$.

$E(Y_1^2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y=\frac{1}{2}[E(X_1^2)+E(X_2^2)]$，

$$D(Y_1)=\frac{1}{2}[E(X_1^2)+E(X_2^2)]-\frac{1}{4}[E(X_1)]^2-\frac{1}{4}[E(X_2)]^2-\frac{1}{2}E(X_1)E(X_2)$$

$$=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{4}[E(X_1^2)+E(X_2^2)]-\frac{1}{2}E(X_1)E(X_2),$$

$$=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2,$$

$D(Y_2)=\frac{1}{4}[D(X_1)+D(X_2)]$，显然 $D(Y_1)>D(Y_2)$，应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** $2x-y-z-1=0$.

【解】 $F=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z$，

$$\boldsymbol{n}=(2x(1-\sin y)-y^2\cos x,2y(1-\sin x)-x^2\cos y,-1),$$

在点(1,0,1)处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-1)$，切平面为

$$\pi:2(x-1)-y-(z-1)=0，即\ 2x-y-z-1=0.$$

(10)**【答案】** 1.

【解】 由 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$ 得 $f(x)=(x-1)^2+C,x\in[0,2]$，

因为 $f(0)=0$，所以 $C=-1$，故 $f(x)=x^2-2x,x\in[0,2]$，

$$f(7)=f(-1)=-f(1)=1.$$

(11)**【答案】** $x\mathrm{e}^{2x+1}$.

【解】 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}=0$，

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\ln u=0$，变量分离得 $\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

积分得 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$，即 $\ln u=Cx+1$，

原方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$，由 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 得 $C=2$，故 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

(12)**【答案】** π.

【解】 **方法一** 令 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=-\sin t,\end{cases}$（起点 $t=0$，终点 $t=2\pi$），则

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t+\sin t(-\cos t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t+\sin t(-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi$$

方法二 设截口面上侧为 Σ，则

$\boldsymbol{n}=(0,1,1),\cos\alpha=0,\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$，由斯托克斯公式得

$$\oint_L z\,dx + y\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma dS,$$

而 $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$,

所以$\oint_L z\,dx + y\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy = \pi.$

(13)**【答案】** $[-2,2]$.

【解】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = a^2 - 4$,

因为 A 的负惯性指数为 1,所以 $|A| \leqslant 0$.

由 $|A| < 0$ 得 $-2 < a < 2$.

若 $|A| = 0$ 得 $a = -2$ 或 $a = 2$,

当 $a = -2$ 时,由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$,负惯性指数为 1;

当 $a = 2$ 时,由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$,负惯性指数为 1,故 $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

(14)**【答案】** $\frac{2}{5n}$.

【解】 $E(X^2) = \frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta} x^3\,dx = \frac{5}{2}\theta^2$,

由 $E\left(c\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{5nc}{2}\theta^2 = \theta^2$,得 $c = \frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15)**【解】** **方法一**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t]dt}{x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t]dt}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t]dt}{x} = \lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right) \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}.$$

方法二

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t]\,dt}{x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t]\,dt}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

(16)【解】 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两边对 x 求导得

$$3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2+2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $y=-2x$ 或 $y=0$(不适合原方程,舍去),

将 $y=-2x$ 代入原方程得$\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

$3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2+2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 两边再对 x 求导整理得

$$(3y^2+2xy+x^2)y''+2(x+3y)y'^2+4(x+y)y'+2y=0,$$

将$\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$ 代入得$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{4}{9}>0$,故 $x=1$ 为函数 $y=f(x)$ 极小值点,极小值为 $y=-2$.

(17)【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y\cdot f'$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'+\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y\cdot f''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'+\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y\cdot f''$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}f''$,

令 $u=\mathrm{e}^x\cos y$,由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$ 得

$$f''(u)=4f(u)+u,\text{或 } f''(u)-4f(u)=u,$$

解得 $f(u)=C_1\mathrm{e}^{-2u}+C_2\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{4}u$,

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 得$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-2C_1+2C_2-\frac{1}{4}=0,\end{cases}$ 解得 $C_1=-\frac{1}{16},C_2=\frac{1}{16}$,

故 $f(u)=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^{-2u})-\frac{1}{4}u$.

方法点评:本题考查偏导数与二阶常系数非齐次线性微分方程.

偏导数与微分方程结合问题是一种综合和重要的题型,首先按题目要求计算出相应的偏导数,根据给定的等量关系式将偏导数代入等式中,整理得微分方程,再根据微分方程的类型对微分方程求解.

(18)【解】 **方法一** 令 $\Sigma_0:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$,取下侧,其中 Σ 与 Σ_0 围成的几何体为 Ω,由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}v$$

由三重积分的对称性与奇偶性性质得$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=0$, $\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=0$,

从而 $I=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x^2+y^2)-6x-6y+7]\mathrm{d}v=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x^2+y^2)+7]\mathrm{d}v$

$$=-\int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z} [3(x^2+y^2)+7]\mathrm{d}v=-\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}(3r^3+7r)\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{2}z\right)\mathrm{d}z=-2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=-4\pi,$$

由于$\iint\limits_{\Sigma_0}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

故 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi.$

方法二　由 $z=x^2+y^2$ 得$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=2y$,曲面的法向量为$\boldsymbol{n}=(-2x,-2y,1)$,

$\cos\alpha=-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\cos\beta=-\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$,

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\mathrm{d}S=-2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\mathrm{d}S=-2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

令 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[(x-1)^3(-2x)+(y-1)^3(-2y)+(z-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}[(x-1)^3(-2x)+(y-1)^3(-2y)+(x^2+y^2-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}(-2x^4-2y^4-5x^2-5y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2r^5\cos^4\theta+2r^5\sin^4\theta+5r^3+r)\mathrm{d}r$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^4\theta+\frac{1}{3}\sin^4\theta+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{8}{3}I_4-\frac{5\pi}{2}-\pi=-4\pi.$$

(19)**【证明】**（Ⅰ）由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 得 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$,

因为 $a_n>0$,所以 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0$,故 $0<a_n<b_n$,

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（Ⅱ）**方法一**　由 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$ 得

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=-\frac{2\sin\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\sin\left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)}{b_n}\sim\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n},$$

因为 $0\leqslant\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}\leqslant\frac{b_n}{2}$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$ 收敛,

由正项级数比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

方法二 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{b_n}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\dfrac{a_n}{1-\cos b_n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\cos b_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1-\cos a_n}=\frac{1}{2},$$

且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,根据正项级数比较审敛法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

方法点评:本题考查正项级数的比较审敛法.

在判断正项级数收敛时,若存在另一个正项级数且知其敛散性,一般使用比较审敛法.

(20)**【解】** (Ⅰ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

则方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ)**方法一**

由$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&0&5&4&12&-3\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right),$$

得$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$($k_1,k_2,k_3$为任意常数).

方法二 令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$, $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,

则$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$等价于$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{e}_3$,

方程组$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{e}_1$的通解为

$$\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+2\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix}(k_1\text{为任意常数}),$$

方程组 $\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{e}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+6\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix}(k_2\text{ 为任意常数}),$$

方程组 $\boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{e}_3$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3-1\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix}(k_3\text{ 为任意常数}),$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$

方法三

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\x_4 & x_5 & x_6\\x_7 & x_8 & x_9\\x_{10} & x_{11} & x_{12}\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 得 $\begin{cases}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1,\\x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0,\\x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0,\\x_4-x_7+x_{10}=0,\\x_5-x_8+x_{11}=1,\\x_6-x_9+x_{12}=0,\\x_1+2x_4-3x_{10}=0,\\x_2+2x_5-3x_{11}=0,\\x_3+2x_6-3x_{12}=1,\end{cases}$

解得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_7\\x_{10}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+2\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_5\\x_8\\x_{11}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2+6\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_6\\x_9\\x_{12}\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_3-1\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix},$$

故 $B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）.

方法点评：求未知矩阵一般有如下三种情形：

(1) 矩阵方程经过化简得 $AX=B$ 或 $XA=B$，其中 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$ 或 $X=BA^{-1}$；

(2) 矩阵方程经过化简得 $AX=B$，其中 A 不可逆或 A 不是方阵，则一般将 $AX=B$ 拆成几个方程组，求每个方程组的通解，将通解合成矩阵 X；

(3) 矩阵对角化法

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$P$ 可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$，

于是 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$.

(21)【**证明**】

令 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$，

由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$，

由 $|\lambda E-B|=0$ 得 B 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

因为 $A^T=A$，所以 A 可对角化；

因为 $r(0E-B)=r(B)=1$，所以 B 可对角化，

因为 A,B 特征值相同且都可对角化，所以 $A\sim B$.

方法点评：本题考查矩阵相似.

设 A,B 为两个 n 阶矩阵，若 $A\sim B$，则 A,B 的特征值相同；反之，若 A,B 的特征值相同，两矩阵不一定相似，即特征值相同是两个矩阵相似的必要而非充分条件.

注意如下结论：

(1) 若 A,B 特征值相同，且 A,B 都可相似对角化，则 $A\sim B$；

(2) 若 A,B 特征值相同，但 A,B 中一个可相似对角化，另一个不可相似对角化，则两矩阵一定不相似.

(22)【**解**】(Ⅰ) $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$

$$=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\},$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{3y}{4}$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{y}{4}+\frac{1}{2}$；

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$，

故 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

（Ⅱ）$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$E(Y)=\int_0^1\frac{3x}{4}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}.$$

(23)**【解】** （Ⅰ）总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x^2}{\theta}=t}2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\theta}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{\theta}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{\theta}\right)=\theta\Gamma(2)=\theta.$$

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值，似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\begin{cases}\frac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^n\ln x_i-n\ln\theta-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta},$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{\theta^2}=0$ 得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

（Ⅲ）因为$\{X_n^2\}$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_n^2)=E(X^2)=\theta$，

所以根据辛钦大数定律，$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$E(X^2)=\theta$，

故存在$a=\theta$，使得对任意的$\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon\}=0$.