1992 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{x\sin(xy)-e^{x+y}}$.

【解】 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 两边对 x 求导得

$e^{x+y}\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)-\sin(xy)\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)=0$,解得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{x\sin(xy)-e^{x+y}}$.

(2)【答案】 $\left\{\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9}\right\}$.

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$,

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\dfrac{2}{9}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\dfrac{4}{9}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M=-\dfrac{4}{9}$,则 $\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M=\left\{\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9}\right\}$.

(3)【答案】 $\dfrac{\pi^2}{2}$.

【解】 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

(4)【答案】 $y=(x+C)\cos x$(C 为任意常数).

【解】 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为

$$y=\left(\int\cos x\cdot e^{\int\tan x\,dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int\tan x\,dx}=(x+C)\cos x\ (C\text{ 为任意常数}).$$

(5)【答案】 1.

【解】 **方法一** 因为 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行都成比例,所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$,

又因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

方法二

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\boldsymbol{\alpha\beta}^T,\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha})=1$,

再由 $a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$ 得 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,于是 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$,故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

二、选择题

(1)【答案】 (D).

【解】 由 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=2\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,

得$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不是 ∞,应选(D).

(2)【答案】 (C).

【解】 $\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)\right|=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2n}\sim\dfrac{\alpha^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\right|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 绝对收敛，应选(C).

(3)**【答案】** (B).

【解】 曲线的切线向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,-2t,3t^2\}$，

由 $\{1,-2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=0$ 得 $t_1=\frac{1}{3}$，$t_2=1$，故与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有 2 条，应选(B).

(4)**【答案】** (C).

【解】 $f(x)=\begin{cases}2x^3, & x<0,\\ 4x^3, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}6x^2. & x<0,\\ 12x^2, & x>0,\end{cases}$

显然 $f'(0)=f''(0)=0$，$f''(x)=\begin{cases}12x, & x<0,\\ 24x, & x\geqslant 0,\end{cases}$

$f'''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f''(x)}{x}=12$，$f'''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f''(x)}{x}=24$，

因为 $f'''_-(0)\neq f'''_+(0)$，所以 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=2$，应选(C).

(5)**【答案】** (A).

【解】 因为 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关，所以三元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中至少含 2 个解向量，即 $3-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，得 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，而选项(B)(C)(D) 中矩阵的秩都大于 1，所以均不对，只有选项(A) 正确.

三、

(1)**【解】** 由 $1-\sqrt{1-x^2}=-[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1]\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=1.$$

(2)**【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot e^x\sin y+2xf'_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\sin y\cdot(f''_{11}\cdot e^x\cos y+2yf''_{12})+f'_1\cdot e^x\cos y+2x(f''_{21}\cdot e^x\cos y+2yf''_{22})$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2y\cdot f''_{11}+2e^x(y\sin y+x\cos y)f''_{12}+f'_1\cdot e^x\cos y+4xyf''_{22}.$$

(3)**【解】** $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}(x-2)=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^0(1+x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

四、**【解】** 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$，特征根为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=1$，

$y''+2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$；

令 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的特解为 $y_0(x)=axe^{-3x}$，代入得 $a=-\frac{1}{4}$，

故 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解为

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{4}xe^{-3x}\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

五、**【解】** 补充 $\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$，取下侧，

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (x^3 + az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3 + az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= 3\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}v = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{6\pi}{5}a^5,$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x^3 + az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_1} ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{a}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{4}a^5,$$

故 $\iint_{\Sigma}(x^3 + az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{6\pi}{5}a^5 + \frac{\pi}{4}a^5 = \frac{29}{20}\pi a^5.$

六、【解】 不妨设 $0 < x_1 < x_2$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x_1) = f(x_1) - f(0) = f'(\xi_1)x_1，\text{其中 } 0 < \xi_1 < x_1,$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = f'(\xi_2)x_1，\text{其中 } x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2,$$

因为 $f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$ 单调递减，又因为 $\xi_1 < \xi_2$，所以 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$，

即 $f(x_1) > f(x_1 + x_2) - f(x_2)$，故 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

七、【解】 直线段 $OM: x = \xi t, y = \eta t, z = \zeta t$，$t$ 从 0 到 1，功 W 为

$$W = \int_{OM} yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = \int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t = \xi\eta\zeta.$$

下面求 $W = \xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1(\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0, \zeta \geqslant 0)$ 下的最大值.

令 $F(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = \xi\eta\zeta + \lambda\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right)$.

由 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \eta\zeta = \frac{2\lambda}{a^2}\xi, \\ \xi\zeta = \frac{2\lambda}{b^2}\eta, \\ \xi\eta = \frac{2\lambda}{c^2}\zeta, \\ 1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0. \end{cases}$

从而 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2}$，即得 $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{3}$. 于是得

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

由问题的实际意义知 $W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

八、【证明】 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，

若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,矛盾,所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

九、【解】 (1) 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

对此方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

得唯一解 $(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$,故有 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$,故 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\xi}_i$, $i=1,2,3$. 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3\\&=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

十、填空题

(1)**【答案】** $\dfrac{5}{12}$.

【解】 由 $ABC\subset AB$ 且 $P(AB)=0$ 得 $P(ABC)=0$,则

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)\\&=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

(2)**【答案】** $\dfrac{4}{3}$.

【解】 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $E(X+\mathrm{e}^{-2X})=\int_0^{+\infty}(x+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

$$=\Gamma(2)+\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}(3x)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

十一、【解】 随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty;$$

随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<y<\pi,\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为随机变量 X,Y 相互独立,所以 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty,-\pi<y<\pi,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\frac{z-y-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\xlongequal{\frac{z-y-\mu}{\sigma}=t}\frac{\sigma}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

故随机变量 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$