

1989 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1) 【答案】 -1.

【解】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -1.$

(2) 【答案】 $x - 1$.

【解】 令 $A = \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = x + 2A$, 对此等式两边从 0 到 1 积分得 $A = \frac{1}{2} + 2A$,

解得 $A = -\frac{1}{2}$, 故 $f(x) = x - 1$.

(3) 【答案】 π .

【解】 方法一 $\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_L ds = \pi.$

方法二 令 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} (\pi \leq t \leq 2\pi)$, 则

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \pi.$$

(4) 【答案】 2.

【解】 由 $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(ye^z)}{\partial y} + \frac{\partial[x \ln(1+z^2)]}{\partial z} = y^2 + e^z + \frac{2xz}{1+z^2}$,

得 $\operatorname{div} \mathbf{u} \Big|_{(1,1,0)} = 2.$

(5) 【答案】 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

【解】 方法一 $\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

方法二 $\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = (1)$,

由 $(\mathbf{B} : \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 得

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{故 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、选择题

(1) 【答案】 (A).

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$, 得 $y = 1$ 为水平渐近线;

由 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 得曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 无铅直渐近线, 应选(A).

(2) 【答案】 (C).

【解】 设点 P 的坐标为 $(x_0, y_0, 4 - x_0^2 - y_0^2)$, 该点法向量为 $\mathbf{n} = \{2x_0, 2y_0, 1\}$,

由 $\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{1}{1}$ 得 $x_0 = 1, y_0 = 1$, 故所求的点为 $(1, 1, 2)$, 应选(C).

(3) 【答案】 (D).

【解】 显然 $y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解,

故 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解为

$$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3 = C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3,$$

应选(D).

(4) 【答案】 (B).

【解】 对 $f(x)$ 进行奇延拓, 将 $f(x)$ 展成正弦级数, 则 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right)$, 因为 $x = \frac{1}{2}$ 为函数 $f(x)$ 的连续点, 所以 $S\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 故 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, 应选(B).

(5) 【答案】 (C).

【解】 方法一 因为 $|\mathbf{A}| = 0$, 所以 $r(\mathbf{A}) < 4$, 从而矩阵 \mathbf{A} 的列向量组线性相关, 即必有一列可由其余列线性表示, 应选(C).

方法二 取 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $|\mathbf{A}| = 0$,

矩阵 \mathbf{A} 任何一列元素都不全为零, 任何两列都不成比例, 第 4 列不是第 1, 2, 3 列的线性组合, 即排除 (A)(B)(D), 应选(C).

三、

(1) 【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2f' + g'_1 + yg'_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'' + xg''_{12} + g'_2 + xyg''_{22}$.

(2) 【解】 方法一 $P = xy^2, \quad Q = \varphi(x)y$,

因为曲线积分与路径无关, 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即 $\varphi'(x) = 2x$,

解得 $\varphi(x) = x^2 + C$, 由 $\varphi(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $\varphi(x) = x^2$;

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + \varphi(x)y dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + x^2 y dy = \int_0^1 0 dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

方法二 $P = xy^2, Q = \varphi(x)y,$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 得 $\varphi'(x) = 2x,$

解得 $\varphi(x) = x^2 + C$, 由 $\varphi(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $\varphi(x) = x^2;$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + \varphi(x)y dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + x^2 y dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(\frac{1}{2}x^2 y^2) = \frac{1}{2}x^2 y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

(3) 【解】 方法一

由 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 得 Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2},$

由对称性得 $\iiint_A x dv = 0,$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iiint_A (x+z) dv &= \iiint_A z dv = \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (1 - 2x^2 - 2y^2) dx dy = \iint_D \left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2 \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

方法二

由对称性得 $\iiint_A x dv = 0$, 即 $\iiint_A (x+z) dv = \iiint_A z dv,$

令 $\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \left(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1 \right)$, 则

$$\begin{aligned} \iiint_A z dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

四、【解】 $f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2},$

$f'(x)$ 的幂级数为 $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} (-1 < x < 1),$

再由 $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

注意到 $x = -1$ 时 $f(x)$ 有定义且级数 $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛,

故 $f(x)$ 关于 x 的幂级数为 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (-1 \leqslant x < 1).$

五、【解】 由 $\int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$ 得

$$f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt,$$

两边求导得 $f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt$, 或 $f'(x) + \int_0^x f(t)dt = \cos x$,

$f'(x) + \int_0^x f(t)dt = \cos x$ 两边再求导得

$$f''(x) + f(x) = -\sin x,$$

特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$,

$f''(x) + f(x) = 0$ 的通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;

令 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ 的特解为 $f_0(x) = x(a \cos x + b \sin x)$,

代入得 $a = \frac{1}{2}, b = 0$,

则原方程的通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x$,

再由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 得 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$, 故 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$.

六、【证明】 $\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \sin x dx = 2\sqrt{2}$,

原方程即为 $\ln x = \frac{x}{e} - 2\sqrt{2}$.

令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 2\sqrt{2}$, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = 0$, 得 $x = e$,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, 由 $f''(e) = -\frac{1}{e^2} < 0$ 得 $x = e$ 为 $f(x)$ 的最大值点,

最大值 $M = f(e) = 2\sqrt{2} > 0$,

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个零点,

从而方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个根.

七、【解】 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & | & \lambda + 2 \\ 6 & 1 & 4 & | & 2\lambda + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 - 3\lambda \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 - 4\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 - 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 - \lambda \end{pmatrix}$,

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有解,

再由 $\lambda = 1$ 时 $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得方程组的通解为

$$\mathbf{X} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

八、【证明】 (1) 因为 A 可逆, 所以 $\lambda \neq 0$, 设 A 的属于特征值 λ 的特征向量为 α , 即 $A\alpha = \lambda\alpha$,

将 $A\alpha = \lambda\alpha$ 两边左乘 A^{-1} , 得 $A^{-1}A\alpha = \lambda A^{-1}\alpha$,

于是 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$, 即 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.

(2) 因为 $A^* = |A|A^{-1}$, 所以 $A^*\alpha = |A|A^{-1}\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$,

即 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

九、【解】 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2 \quad (0 < R < 2a)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2 \end{cases} \text{ 得 } x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2},$$

位于定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内的曲面为

$$\Sigma: z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$\text{其中, } (x, y) \in D_{xy} \left(x^2 + y^2 \leq R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \right),$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = R \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ &= 2\pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{4a^2}}} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -2\pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{4a^2}}} \frac{d(R^2 - r^2)}{2 \sqrt{R^2 - r^2}} \\ &= 2\pi \left(R^2 - \frac{R^3}{2a} \right), \end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{dS}{dR} = 2\pi \left(2R - \frac{3R^2}{2a} \right) = 0, \text{ 得 } R = \frac{4}{3}a,$$

当 $0 < R < \frac{4}{3}a$ 时, $\frac{dS}{dR} > 0$; 当 $R > \frac{4}{3}a$ 时, $\frac{dS}{dR} < 0$, 故当 $R = \frac{4}{3}a$ 时, Σ 位于定球面内的面积最大.

十、填空题

(1) 【答案】 0.7.

【解】 由 $P(B | A) = 0.8$, 即 $\frac{P(AB)}{P(A)} = 0.8$ 得 $P(AB) = 0.4$,

$$\text{于是 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7.$$

(2) 【答案】 0.75.

【解】 设 $A = \{\text{甲命中目标}\}$, $B = \{\text{乙命中目标}\}$, $C = \{\text{目标被命中}\}$,

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, \text{ 且 } C = A + B, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} P(A | C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(A+B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{0.6}{0.6 + 0.5 - 0.3} = 0.75. \end{aligned}$$

(3) 【答案】 0.8.

【解】 随机变量 ξ 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 1 < x < 6, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

当 $\Delta = \xi^2 - 4 \geq 0$, 即 $\xi \leq -2$ 或 $\xi \geq 2$ 时, 方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根,

$$\text{则方程 } x^2 + \xi x + 1 = 0 \text{ 有实根的概率为 } P\{\xi \geq 2\} = \int_2^6 \frac{1}{5} dx = 0.8.$$

十一、【解】 因为相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布,

所以随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 服从正态分布,

$$\text{又因为 } E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 5, \quad D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 9,$$

$$\text{所以 } Z \sim N(5, 9).$$

$$\text{故随机变量 } Z \text{ 的概率密度为 } f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, -\infty < z < \infty.$$