1991 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{-\sin t}{2t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = -\frac{\dfrac{2t\cos t - 2\sin t}{4t^2}}{2t} = \frac{\sin t - t\cos t}{4t^3}.$$

(2)【答案】 $\mathrm{d}x - \sqrt{2}\,\mathrm{d}y$.

【解】 方法一

$xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 两边对 x 求偏导得

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x + z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0, \text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0,-1)} = 1;$$

$xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 两边对 y 求偏导得

$$xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y + z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0, \text{解得}\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0,-1)} = -\sqrt{2},$$

故 $\mathrm{d}z\,|_{(1,0,-1)} = \mathrm{d}x - \sqrt{2}\,\mathrm{d}y$.

方法二

$xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 两边求微分得

$$\mathrm{d}(xyz) + \mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = 0,$$

即

$$yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z + \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

将 $(x,y,z) = (1,0,-1)$ 代入得

$\mathrm{d}z\,|_{(1,0,-1)} = \mathrm{d}x - \sqrt{2}\,\mathrm{d}y$.

(3)【答案】 $x - 3y + z + 2 = 0$.

【答案】 显然 $M_0(1,2,3)$ 为所求平面上的点,

所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = \{1,0,-1\}\times\{2,1,1\} = \{1,-3,1\}$,

所求平面为 $\pi:(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$,即 $\pi: x-3y+z+2=0$.

(4)【答案】 $-\dfrac{3}{2}$.

【解】 由 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \dfrac{a}{3}x^2$, $\cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$,得 $\dfrac{a}{3} = -\dfrac{1}{2}$,故 $a = -\dfrac{3}{2}$.

(5)【答案】 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

【解】 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$,

由$\left(\begin{array}{cc:cc}5&2&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&-2\\2&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&-2\\0&1&-2&5\end{array}\right)$,得 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$;

由$\left(\begin{array}{cc:cc}1&-2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&-2&1&0\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$,得 $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

二、选择题

(1)【答案】 (D).

【解】 由$\lim\limits_{x\to\infty}y=1$,得 $y=1$ 为曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$ 的水平渐近线;

由$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$,得 $x=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$ 的铅直渐近线,应选(D).

(2)【答案】 (B).

【解】 $f(0)=\ln 2$,$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$ 两边对 x 求导得 $f'(x)=2f(x)$,

解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{-\int-2\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{2x}$.

由 $f(0)=\ln 2$ 得 $C=\ln 2$,故 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$,应选(B).

(3)【答案】 (C).

【解】 令 $S_n^{(1)}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$, $S_n^{(2)}=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$,

$S_{2n}^{(3)}=a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}=S_n^{(1)}-S_n^{(2)}$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

由题意得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}=5$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}^{(3)}=2$,

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(2)}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}-\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}^{(3)}=3$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}+\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(2)}=8$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于 8,应选(C).

(4)【答案】 (A).

【解】 令$D_2=\{(x,y)\mid-1\leqslant x\leqslant0,x\leqslant y\leqslant-x\}$,

$D_3=\{(x,y)\mid-y\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant1\}$,

由对称性得

$\iint\limits_{D_2}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

$\iint\limits_{D_3}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,应选(A).

(5)【答案】 (D).

【解】 由 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{A}^{-1}$,则 $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,应选(D).

三、

(1)【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right\}^{\frac{\pi}{x}\cdot(\cos\sqrt{x}-1)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\cdot(\cos\sqrt{x}-1)}=e^{\pi\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(2)【解】 法向量 $\boldsymbol{n}=\{4x,6y,2z\}_{(1,1,1)}=\{4,6,2\}$,

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\frac{6}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\frac{8}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14},$$

则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P=\dfrac{2}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{14}}+\dfrac{3}{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{8}{\sqrt{14}}-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\cdot\sqrt{14}=\dfrac{11}{7}.$

(3)【解】 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=2z$,

则 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 4\}$,其中 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2z\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v=\int_0^4\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r(r^2+z)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}(r^3+rz)\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^4 z^2\mathrm{d}z=4\pi\cdot\frac{64}{3}=\frac{256\pi}{3}.$$

四、【解】 **方法一**

$$I(a)=\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(1+a^3\sin^3x)\mathrm{d}x+(2x+a\sin x)\cdot a\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi+a^3\int_0^{\pi}\sin^3x\,\mathrm{d}x+2a\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}(\sin x)+a^2\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\pi+2a^3\cdot\frac{2}{3}+2a\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right)=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a,$$

令 $I'(a)=4a^2-4=0$ 得 $a=1$.

因为 $I''(1)=8>0$,所以 $a=1$ 时 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 最小,故所求曲线为 $y=\sin x$.

方法二

$$I=\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\left(\oint_{L+\overline{AO}}+\int_{\overline{OA}}\right)(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y,$$

而 $\oint_{L+\overline{AO}}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(2-3y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D(3y^2-2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{a\sin x}(3y^2-2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(a^3\sin^3x-2a\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}a^3-4a,$$

$$\int_{\overline{OA}}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=\pi,$$

则 $I=\dfrac{4}{3}a^3-4a+\pi$.

令 $I'(a)=4a^2-4=0$，得 $a=1$，

因为 $I''(1)=8>0$，所以 $a=1$ 时 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 最小，故所求曲线为 $y=\sin x$.

五、【解】 显然 $f(x)$ 满足狄利克雷充分条件，

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=2\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=5,$$

$$\begin{aligned}a_n&=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\left(2\int_0^1\cos n\pi x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\right)\\&=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,\mathrm{d}(\sin n\pi x)\\&=\frac{2}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\cdots,\\0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}\end{aligned}$$

$b_n=0$，

故 $2+|x|=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{1^2}\cos\pi x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\cdots\right)\quad(-\infty<x<+\infty)$，

取 $x=0$，得 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

令 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，则

$$S=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S,$$

解得 $S=\dfrac{\pi^2}{6}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

六、【证明】 由积分中值定理可知，存在 $x_0\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$，使得

$$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=3\cdot f(x_0)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=f(x_0),$$

从而有 $f(0)=f(x_0)$.

由罗尔定理可知，存在 $c\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得 $f'(c)=0$.

七、【解】 令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right),$$

(1) 当 $a=-1,b\neq 0$ 时，

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$ 无解，

即 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

(2) 当 $a\neq-1$ 时，

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，所以方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解，

且 $x_1=-\dfrac{2b}{a+1},\quad x_2=\dfrac{a+b+1}{a+1},\quad x_3=\dfrac{b}{a+1},\quad x_4=0$，

故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一线性表示，

且 $\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$.

八、**【证明】** **方法一** 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,

从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$,

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$.

方法二 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,所以其特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,

存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$,或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,

于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2+1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n+1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,

$$\text{故 } |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{Q}|\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2+1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n+1\end{vmatrix}\cdot|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

九、**【解】** 设曲线为 $y=y(x)$,

曲线在点 $P(x,y)$ 处的曲率为 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$;

曲线在点 $P(x,y)$ 的法线为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$,

令 $Y=0$ 得 $X=x+yy'$,即 $Q(x+yy',0)$,

$$|PQ|=\sqrt{y^2y'^2+y^2}=y\sqrt{1+y'^2},$$

由题意得 $\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}$,整理得 $yy''=1+y'^2$.

令 $y'=p$,则 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$,变量分离得 $\frac{2p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{2\mathrm{d}y}{y}$,

积分得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C_1$,即 $1+p^2=C_1y^2$,

由 $y(1)=1,y'(1)=0$ 得 $C_1=1$,

解得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$,变量分离得 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$,

积分得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C_2$,

由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\mp 1$,即 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$,

由 $\begin{cases}y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{\pm(x-1)},\\ y-\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{\mp(x-1)}\end{cases}$ 得 $y=\frac{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}{2}$,

故所求的曲线为 $y=\frac{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}{2}$.

十、填空题

(1)【答案】 0.2.

【解】 显然 $X \sim N(2,\sigma^2)$,标准化得$\dfrac{X-2}{\sigma} \sim N(0,1)$.

由 $P\{2<X<4\}=P\left\{0<\dfrac{X-2}{\sigma}<\dfrac{2}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.3$ 得

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5=0.3,\text{即 }\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8.$$

故 $P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}=P\left\{\dfrac{X-2}{\sigma}\leqslant -\dfrac{2}{\sigma}\right\}=\Phi\left(-\dfrac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.2.$

(2)【答案】 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$.

【解】 所求概率 $p=\dfrac{\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\dfrac{\pi a^2}{2}}=\dfrac{2}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\,\mathrm{d}r$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

十一、【解】 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

当 $z\leqslant 0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $z>0$ 时,$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z},$$

故随机变量 Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$