# 1993 年数学(一)真题解析

## 一、填空题

(1)【答案】 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

【解】 由 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ 得 $x=\frac{1}{4}$,当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时 $F'(x)<0$,

故 $F(x)$ 的单调减区间为$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

(2)【答案】 $\left\{0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right\}$.

【解】 旋转曲面方程为 $\Sigma:3x^2+2y^2+3z^2=12$,

法向量为 $\boldsymbol{n}=\{6x,4y,6z\}_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$,

所求的单位法向量为 $\boldsymbol{n}^0=\left\{0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right\}$.

(3)【答案】 $\frac{2\pi}{3}$.

【解】 $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}(\cos 3x)=-\frac{2}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.$$

(4)【答案】 $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

【解】 $\mathbf{grad}\,u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right\}$,

则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

$$=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

(5)【答案】 $\boldsymbol{X}=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

【解】 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量,

又因为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

## 二、选择题

(1)【答案】 (B).

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin(\sin^2 x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$ 得 $f(x)\sim\frac{1}{3}x^3$,

又 $g(x)\sim x^3$,故 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价的无穷小,应选(B).

(2)【答案】 (A).

【解】 双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$的极坐标方程为$r^2=\cos 2\theta$，

由对称性得双纽线所围成的面积为

$$A=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta,$$

应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解】 直线$L_1$的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,1\}$，

直线$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{s}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$，

设两直线的夹角为$\theta$，由$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$得$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，应选(C).

(4)【答案】 (B).

【解】 令$P(x,y)=[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y$，$Q(x,y)=-f(x)\cos y$，

由$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，得$f'(x)+f(x)-\mathrm{e}^x=0$，即$f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$，

解得$f(x)=\left[\int\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right)\mathrm{e}^{-x}$，

再由$f(0)=0$得$C=-\dfrac{1}{2}$，故$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，应选(B).

(5)【答案】 (C).

【解】 由$\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$得$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant 3$，当$t\neq 6$时$r(\boldsymbol{Q})=2$，则$r(\boldsymbol{P})\leqslant 1$，

再由$\boldsymbol{P}$为非零矩阵得$r(\boldsymbol{P})\geqslant 1$，故$r(\boldsymbol{P})=1$，应选(C).

三、

(1)【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x\cdot\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}=\mathrm{e}^2.$$

(2)【解】 **方法一**

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=2\int x\mathrm{d}(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x,$$

令$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，即$x=\ln(1+t^2)$，则

$$\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2t-2\arctan t+C$$

$$=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C,$$

故$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=(2x-4)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$

**方法二** 令$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，则$x=\ln(1+t^2)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\ln(1+t^2)\mathrm{d}t=2t\ln(1+t^2)-2\int\frac{t\cdot 2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2t\ln(1+t^2) - 4t + 4\arctan t + C$$

$$= (2x-4)\sqrt{e^x - 1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$$

(3)【解】 将方程 $x^2y' + xy = y^2$ 化为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$，

令 $u = y^{-1}$，则 $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^2}$，

解得 $u = \left[\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C\right]e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = \left(\frac{1}{2x^2} + C\right)x$，即 $\frac{1}{y} = \left(\frac{1}{2x^2} + C\right)x$，

由 $y(1) = 1$ 得 $C = \frac{1}{2}$，故满足条件的特解为 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

四、【解】 由 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 得 $x^2+y^2=1$，

曲面 $\Sigma$ 所围成的几何体 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 1, \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$，

由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} 2xz\,dy\,dz + yz\,dz\,dx - z^2\,dx\,dy = \iiint_{\Omega}(2z+z-2z)dv = \iiint_{\Omega} z\,dv$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-x^2-y^2)dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 (r-r^3)dr = \frac{\pi}{2}.$$

五、【解】 令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x = \pm 1$ 时级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

由 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$$= x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)'' + \frac{1}{1-x} = x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' + \frac{1}{1-x} = \frac{1-2x+3x^2}{(1-x)^3},$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{27}$.

六、【证明】 (1) $f(x) - f(0) = f'(\xi)x \quad (0 < \xi < x)$，

由 $f'(x) \geqslant k > 0$ 得 $f(x) > f(0) + kx$，于是 $\lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.

再由 $f(0) < 0$ 得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个零点，

因为 $f'(x) \geqslant k > 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增，故零点是唯一的.

(2) $a^b > b^a$ 等价于 $b\ln a - a\ln b > 0$.

令 $f(x) = x\ln a - a\ln x$， $f(a) = 0$，

$f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} > 0 (x > a)$，

由 $\begin{cases} f(a) = 0, \\ f'(x) > 0(x > a), \end{cases}$ 得 $f(x) > 0 (x > a)$，

由 $b > a$ 得 $f(b) > 0$，故 $a^b > b^a$.

七、【解】 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$，

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$,

由 $|\boldsymbol{A}|=10$ 得 $9-a^2=5$,解得 $a=2$,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$;

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

故正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

**八、【证明】** 显然 $r(\boldsymbol{AB})=n$,

由 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$ 得 $r(\boldsymbol{A})\geqslant n,r(\boldsymbol{B})\geqslant n$.

因为矩阵的秩不超过其行数及列数,所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n,r(\boldsymbol{B})\leqslant n$,于是 $r(\boldsymbol{B})=n$.

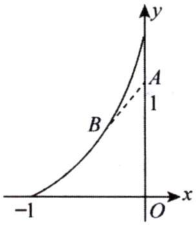
因为矩阵的秩与矩阵的行向量组的秩、列向量组的秩都相等,所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩为 $n$,故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

**九、【解】** 轨迹如右图所示.设在时刻 $t$,$B$ 位于点 $(x,y)$ 处,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+vt)-y}{-x}.$$

上式两边对 $x$ 求导,得

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}. \qquad (*)$$



九题图

由于

$$2v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

将上式代入(*)式,得到所求的微分方程为

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=0,$$

其初值条件为 $y|_{x=-1}=0,y'|_{x=-1}=1$.

**十、填空题**

(1)**【答案】** $\frac{1}{6}$.

**【解】** 设 $A_1=\{$第一次取到正品$\}$,$A_2=\{$第一次取到次品$\}$,$B=\{$第二次取到次品$\}$,

$P(A_1)=\frac{10}{12}$, $P(A_2)=\frac{2}{12}$, $P(B\mid A_1)=\frac{2}{11}$, $P(B\mid A_2)=\frac{1}{11}$,则

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)\\&=\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(2)**【答案】** $\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

**【解】** $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$,

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $y\geqslant 4$ 时,$F_Y(y)=1$;

当 $0\leqslant y<4$ 时,$F_Y(y)=P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{y}}{2}$,

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{\sqrt{y}}{2}, & 0\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

**十一、【解】** (1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$,

由 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2$,得

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2$.

(2)$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)\cdot E(|X|)$,

由 $E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0$,得 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$,即 $X$ 与 $|X|$ 不相关.

(3) 设 $F(x,y)$ 为 $(X,|X|)$ 的联合分布函数,

$F(1,1)=P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}=P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$,

$F_X(1)=P\{X\leqslant 1\}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^1\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2\mathrm{e}}$,

$F_{|X|}(1)=P\{|X|\leqslant 1\}=\int_0^1\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$,

因为 $F(1,1)\neq F_X(1)\cdot F_{|X|}(1)$,所以 $X$ 与 $|X|$ 不相互独立.