

2015 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解】 设 $f''(x)=0$ 左边的零点为 $x=a$, 右边的零点为 $x=b$,
又在 $x=0$ 处 $f''(x)$ 不存在.

因为 $x=a$ 的左、右两侧 $f''(x)$ 都大于零, 所以 $(a, f(a))$ 不是拐点;

因为 $x=0$ 左、右两侧 $f''(x)$ 异号, 所以 $(0, f(0))$ 为拐点;

因为 $x=b$ 左、右两侧 $f''(x)$ 异号, 所以 $(b, f(b))$ 为拐点,

故 $y=f(x)$ 有两个拐点, 应选(C).

方法点评: 本题考查拐点的判别法. 判断曲线的拐点时, 首先找出二阶导数为零的点及二阶不可导的点, 其次判断该点两侧二阶导数的符号情况, 若该点两侧二阶导数异号, 则曲线上对应的点为拐点.

(2) 【答案】 (A).

【解】 因为 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 为 $y''+ay'+by=ce^x$ 的特解,

所以 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 则 $a=-3, b=2$.

显然 $y=x e^x$ 为原方程的特解, 将 $y=x e^x$ 代入原方程得 $c=-1$, 应选(A).

(3) 【答案】 (B).

【解】 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间为 $-1 < x-1 < 1$, 即 $0 < x < 2$.

因为 $\sqrt{3}-1 \in (-1, 1)$, $3-1 \notin [-1, 1]$,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处绝对收敛, 在 $x=3$ 处发散,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛半径相同、收敛区间相同,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处绝对收敛, 在 $x=3$ 处发散, 应选(B).

(4) 【答案】 (B).

【解】 令 $\begin{cases} x=r \cos \theta, & \left(\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2 \sin 2 \theta}} \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sin 2 \theta}}\right), \\ y=r \sin \theta, \end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2 \theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2 \theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr, \text{ 应选(B).}$$

(5) 【答案】 (D).

【解】 因为 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有无数个解, 所以 $r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}}) < 3$,

由 $|\mathbf{A}|=(a-1)(a-2)=0$ 得 $a=1, a=2$,

当 $a = 1$ 时,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & d \\ 1 & 4 & 1 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d-1 \\ 0 & 3 & 0 & d^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d-1 \\ 0 & 0 & 0 & d^2-3d+2 \end{pmatrix},$$

因为方程组有无数个解, 所以 $d = 1$ 或 $d = 2$;

当 $a = 2$ 时,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & d \\ 1 & 4 & 4 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d-1 \\ 0 & 3 & 3 & d^2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d-1 \\ 0 & 0 & 0 & d^2-3d+2 \end{pmatrix},$$

因为方程组有无数个解, 所以 $d = 1$ 或 $d = 2$, 应选(D).

方法点评: 本题考查非齐次线性方程组的基本理论. 本题非齐次线性方程组有无数个解的两个关键点为: $r(\mathbf{A}) < 3$ 及 $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}})$.

(6) 【答案】 (A).

【解】 因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经过正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$ 化为标准形 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 其对应的特征向量为 e_1, e_2, e_3 , 因为 $e_1, -e_3, e_2$ 为特征值 $2, -1, 1$ 对应的特征向量, 所以 $\mathbf{X} = \mathbf{QY}$ 下二次型的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 应选(A).

方法点评: 本题考查实对称矩阵对角化及二次型理论.

二次型标准化有配方法和正交变换法, 配方法化二次型为标准形时, 其系数不一定为矩阵的特征值; 正交变换法化二次型为标准形时, 其系数一定为特征值, 注意特征向量与特征值的次序要保持一致.

(7) 【答案】 (C).

【解】 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 因为 $P(A+B) \geq P(AB)$, 所以 $P(A) + P(B) - P(AB) \geq P(AB)$, 故 $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$, 应选(C).

(8) 【答案】 (D).

【解】 由 X, Y 不相关得 $\text{Cov}(X, Y) = 0$, 从而 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

$$\begin{aligned} E[X(X+Y-2)] &= E(X^2) + E(XY) - 2E(X) \\ &= D(X) + [E(X)]^2 + E(X)E(Y) - 2E(X) = 3 + 4 + 2 - 4 = 5, \end{aligned}$$

应选(D).

二、填空题

(9) 【答案】 $-\frac{1}{2}$.

【解】 方法一 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

方法二 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$.

(10) 【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$.

【解】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{4}$.

方法点评:本题考查定积分的奇偶性质,即

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx, \text{特别地,}$$

$$\text{当 } f(-x) = f(x) \text{ 时, } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

$$\text{当 } f(-x) = -f(x) \text{ 时, } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

(11) 【答案】 $-dx$.

【解】 方法一 将 $x=0, y=1$ 代入 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 中, 得 $z=0$, $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 两边分别对 x, y 求偏导得

$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + 1 - \sin x = 0, \quad e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\text{代入得 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 0,$$

$$\text{故 } dz \Big|_{(0,1)} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} dy = -dx.$$

方法二 将 $x=0, y=1$ 代入 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 中得 $z=0$.

$e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 两边求全微分得

$$e^z dz + yz dx + xz dy + xy dz + dx - \sin x dx = 0,$$

将 $x=0, y=1, z=0$ 代入得 $dz \Big|_{(0,1)} = -dx$.

(12) 【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解】 方法一 由对称性得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dv &= 6 \iiint_{\Omega} z dv \\ &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \\ &= \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

方法二 $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$,

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dv &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} (x + 2y + 3z) dz \\ &= \iint_D \left[(x+2y)(1-x-y) + \frac{3}{2}(1-x-y)^2 \right] dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x+2y)(1-x-y) + \frac{3}{2}(1-x-y)^2 \right] dy = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(13) 【答案】 $2^{n+1} - 2$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } D_n &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + 2 \times A_{1n} \\ &= 2D_{n-1} + 2 \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2 \\ &= 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 \\ &= \cdots = 2^n + \cdots + 2^2 + 2 = \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

(14) 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解】 因为 $\rho = 0$, 所以 X, Y 独立且不相关, 且 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$,

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X - 1)Y < 0\} \\ &= P\{X < 1\}P\{Y > 0\} + P\{X > 1\}P\{Y < 0\} \\ &= \frac{1}{2}(P\{X < 1\} + P\{X > 1\}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

方法点评: 本题考查二维正态分布的性质. 设 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 X, Y 独立与 X, Y 不相关等价.

三、解答题

(15) 【解】 方法一 由 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 得

$$f(x) = x + ax - \frac{ax^2}{2} + \frac{ax^3}{3} + bx^2 + o(x^3) = (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3),$$

因为 $f(x) \sim g(x)$,

$$\text{所以 } 1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3}=k, \text{ 解得 } a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}.$$

方法二 由 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}, \text{ 得 } a = -1,$$

再由 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} + 2b \cos x - bx \sin x}{6kx}, \text{ 得 } b = -\frac{1}{2},$$

再由 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \cos x + \frac{1}{2}x \sin x}{6kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \cos x}{6kx}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{2}{(1+x)^3} + \sin x}{6k} = -\frac{1}{3k}, \text{得 } k = -\frac{1}{3}.$$

(16) 【解】 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

切线、 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积为

$$S = \frac{1}{2} f(x_0) \left[x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right) \right] = 4,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} y^2 = 4y', \text{ 变量分离得 } \frac{8dy}{y^2} = dx, \text{ 积分得 } -\frac{8}{y} = x + C,$$

$$\text{因为 } y(0) = 2, \text{ 所以 } C = -4, \text{ 故所求的曲线为 } y = \frac{8}{4-x}.$$

(17) 【解】 $f'_x(x, y) = 1 + y, f'_y = 1 + x,$

$f(x, y)$ 在点 (x, y) 的方向导数取的最大值的方向即梯度的方向, 且最大值即梯度的模,

$$\text{则最大值为 } g(x, y) = |\mathbf{grad} f(x, y)| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}.$$

$$\text{令 } F = (x+1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3),$$

$$\begin{cases} F'_x = 2(x+1) + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ F'_y = 2(y+1) + 2\lambda y + \lambda x = 0, \text{ 解得} \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

由 $g(1, 1) = \sqrt{8}, g(-1, -1) = 0, g(2, -1) = \sqrt{9} = 3, g(-1, 2) = \sqrt{9} = 3$ 得方向导数的最大值为 3.

方法点评: 本题考查方向导数与梯度的关系.

$$\text{方向导数为 } \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta\},$$

其中 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} = \mathbf{grad} f, \{\cos \alpha, \cos \beta\} = \mathbf{e}$ 为与射线 l 方向相同的单位向量,

设梯度 $\mathbf{grad} f$ 与 \mathbf{e} 的夹角为 θ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\mathbf{grad} f| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \cdot \cos \theta,$$

当 $\cos \theta = 1$, 即 $\theta = 0$ 或 $\mathbf{grad} f$ 与 \mathbf{e} 同向时, 方向导数达到最大值.

故梯度的方向即为方向导数取最大值的方向, 且方向导数的最大值为梯度的模.

(18) 【证明】 (I) 令 $f(x) = u(x)v(x)$,

$$\begin{aligned} \Delta f &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u v(x + \Delta x) + u(x)\Delta v, \end{aligned}$$

$$\text{则 } [u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$(II) f'(x) = u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x).$$

(19) 【解】 L 的参数方程为 $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sqrt{2} \sin t, \\ z = \cos t, \end{cases}$, 其中起点 $t = \frac{\pi}{2}$, 终点 $t = -\frac{\pi}{2}$, 则

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2} \sin t + \cos t)(-\sin t) dt + \sqrt{2} \sin t \cdot \sqrt{2} \cos t dt + 2 \sin^2 t \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

(20) 【解】 (I) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$,

$$\text{因为 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ 所以 } r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基.

(II) 令 ξ 在两组基下的坐标都是 (x_1, x_2, x_3) ,

由 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3$, 或

$x_1(\beta_1 - \alpha_1) + x_2(\beta_2 - \alpha_2) + x_3(\beta_3 - \alpha_3) = \mathbf{0}$, 整理得

$$x_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + x_2\alpha_2 + x_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = \mathbf{0},$$

因为 ξ 为非零向量, 所以 $x_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + x_2\alpha_2 + x_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = \mathbf{0}$ 有非零解,

从而 $|\alpha_1 + 2k\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + k\alpha_3| = 0$,

$$\text{而 } |\alpha_1 + 2k\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + k\alpha_3| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} \text{ 且 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0,$$

$$\text{则 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0, \text{ 故 } k = 0.$$

当 $k = 0$ 时, 由 $x_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + x_2\alpha_2 + x_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = \mathbf{0}$,

$$\text{即 } \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = \mathbf{0}, \text{ 或 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个基, 所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆,

$$\text{于是 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 故 } \xi \text{ 在基 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 或 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 下坐标为}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (C \text{ 为任意常数}).$$

方法点评:本题考查向量空间的理论.

向量空间理论是数学一的专门考查内容,包括:

向量空间的概念、基、过渡矩阵、向量在基下的坐标.

(21) 【解】 (I) 因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 所以 $\begin{cases} \operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{B}, \\ |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|, \end{cases}$

从而 $\begin{cases} a+3=b+2, \\ 2a-3=b, \end{cases}$ 解得 $a=4, b=5$.

(II) 因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 所以 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的特征值相同,

$$\text{由 } |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0 \text{ 得}$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

将 $\lambda = 1$ 代入 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$, 即 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

$$\text{由 } \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 得}$$

\mathbf{A} 的属于特征值 $\lambda = 1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

将 $\lambda = 5$ 代入 $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$, 即 $(5\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

$$\text{由 } 5\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 得}$$

\mathbf{A} 的属于特征值 $\lambda = 5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

令 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(22) 【解】 (I) 令 $p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = -2^{-x} \Big|_3^{+\infty} = \frac{1}{8}$,

Y 的可能取值为 $2, 3, \dots, Y$ 的分布律为

$$P\{Y=k\} = p \cdot C_{k-1}^1 \cdot p \cdot (1-p)^{k-2} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2} (k=2, 3, \dots).$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) E(Y) &= \sum_{k=2}^{\infty} k P\{Y=k\} = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\ &= p^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k \right)'' \Big|_{x=\frac{7}{8}} = p^2 \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' \Big|_{x=\frac{7}{8}} = \frac{2p^2}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{7}{8}} = 16. \end{aligned}$$

$$(23) \text{【解】 (I)} E(X) = \int_{\theta}^1 \frac{x}{1-\theta} dx = \frac{1+\theta}{2},$$

令 $E(X) = \bar{X}$, 则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$.

(II) 似然函数为

$$L(\theta) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \frac{1}{(1-\theta)^n} (\theta \leq x_i \leq 1, i=1,2,\dots,n),$$

因为 $\frac{d}{d\theta} L(\theta) = \frac{n}{(1-\theta)^{n+1}} > 0$, 所以 $L(\theta)$ 关于 θ 为增函数,

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$.