

2003 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} e^{\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

(2) 【答案】 $2x + 4y - z - 5 = 0$.

【解】 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$,

设切点坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 则切平面的法向量为 $\mathbf{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}|_{(x_0, y_0, z_0)} = \{2x_0, 2y_0, -1\}$,
因为切平面与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行,

所以 $\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1}$, 解得 $x_0 = 1, y_0 = 2$, 从而 $z_0 = x_0^2 + y_0^2 = 5$,

所求的平面为 $2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$, 即 $2x + 4y - z - 5 = 0$.

(3) 【答案】 1.

【解】 $a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 d(\sin 2x)$
 $= \frac{1}{\pi} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2x dx$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x d(\cos 2x) = \frac{x}{\pi} \cos 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2x dx = 1.$

(4) 【答案】 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

【解】 令 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$, $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$.

设从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为 \mathbf{Q} , 则 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$, 于是 $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(5) 【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解】 $P\{X + Y \leqslant 1\} = \iint_{x+y \leqslant 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 6x dy$
 $= \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}.$

(6) 【答案】 $(39.51, 40.49)$.

【解】 $\alpha = 0.05, u_{0.025} = 1.96$, 统计量 $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{1}{\sqrt{16}}} = 4(\bar{X} - \mu) \sim N(0, 1)$,

由 $P\{-1.96 < 4(\bar{X} - \mu) < 1.96\} = 0.95$ 得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{1.96}{4}, \bar{x} + \frac{1.96}{4}\right) = (39.51, 40.49).$$

方法点评:对正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的参数 μ 进行区间估计分两种情况:

情形一: σ^2 已知

取 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$, 由 $P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$, 得参数 μ 的置信度为 $1 - \alpha$

的置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$;

情形二: σ^2 未知

取 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$, 由 $P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$, 得参数 μ

的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

二、选择题

(7) 【答案】 (C).

【解】 设 $f'(x)$ 与 x 轴交点的横坐标从左到右分别为 a, b, c , 显然 $f(x)$ 有三个驻点 $x = a, x = b, x = c$ 及一个不可导点 $x = 0$.

当 $x < a$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $x = a$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

当 $x \in (b, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $x = b$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

当 $x \in (0, c)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

当 $x > c$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $x = c$ 为 $f(x)$ 的极小值点,

故 $f(x)$ 有两个极大值点和两个极小值点, 应选(C).

方法点评:求函数的极值时按如下步骤进行:

(1) 找出 $f(x)$ 的驻点及不可导的点;

(2) 判断每个点是否为极值点(按照具体情况选用第一充分条件和第二充分条件).

(8) 【答案】 (D).

【解】 方法一 取 $a_n = \frac{3}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{n}{3}$, 显然(A),(B),(C) 不成立, 应选(D).

方法二 取 $\epsilon = \frac{1}{2}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, 所以存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$|b_n - 1| < \frac{1}{2}$, 从而有 $b_n > \frac{1}{2}$.

当 $n > N$ 时, $|b_n c_n| > \frac{1}{2} |c_n|$,

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n c_n| = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 应选(D).

(9) 【答案】 (A).

【解】 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 及 $f(x, y)$ 的连续性, 得 $f(0, 0) = 0$.

再由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 得 $f(x, y) - xy = (x^2 + y^2)^2 + o[(x^2 + y^2)^2]$

或 $f(x, y) = xy + (x^2 + y^2)^2 + o[(x^2 + y^2)^2]$.

当 $y = x$ 时, $f(x, x) = x^2 + 4x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^2) > 0$;

当 $y = -x$ 时, $f(x, -x) = -x^2 + 4x^4 + o(x^4) = -x^2 + o(x^2) < 0$, 则 $(0, 0)$ 不是函数 $f(x, y)$ 的极值点, 应选(A).

(10) 【答案】 (D).

【解】 方法一 因为向量组 I 可由向量组 II 线性表示, 所以 $r(I) \leq r(II)$,
显然 $r(II) \leq s$, 于是 $r(I) \leq s$.

当 $r > s$ 时, 因为 $r(I) \leq s < r$, 即向量组 I 的秩小于向量组 I 所含的向量个数, 所以向量组 I 线性相关, 应选(D).

方法二 取 I : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, II : $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 显然向量组 I 可由向量组 II 线性表示且 $r < s$, 但向量组 II 线性无关, (A), (C) 不对;

取 I : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, II : $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 显然向量组 I 可由向量组 II 线性表示且 $r > s$,

但向量组 II 线性无关, (B) 不对, 应选(D).

(11) 【答案】 (B).

【解】 方法一 若 $AX = \mathbf{0}$ 的解为 $BX = \mathbf{0}$ 的解, 则 $AX = \mathbf{0}$ 的基础解系所含的线性无关的解向量的个数不超过 $BX = \mathbf{0}$ 的基础解系所含的线性无关的解向量个数, 即 $n - r(A) \leq n - r(B)$, 从而 $r(A) \geq r(B)$;

若 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 同解, 则 $r(A) = r(B)$, 反之不对, 故应选(B).

方法二 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = (1 \ 1 \ 1)$, $r(A) = 2 \geq r(B) = 1$,

但 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $AX = \mathbf{0}$ 的解, 不是 $BX = \mathbf{0}$ 的解, 第 2 个命题不对;

取 $A = (1 \ 1 \ -1), B = (1 \ -1 \ -1)$, $r(A) = r(B)$,

但 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 不同解, 第 4 个命题不对, 应选(B).

方法点评: 本题考查两个齐次线性方程组的解与系数矩阵的秩的关系.

齐次线性方程组系数矩阵的秩即为方程组中约束条件的个数, 系数矩阵的秩越大则约束条件越多, 解就越少; 系数矩阵的秩越小则约束条件越少, 解就越多. 设 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 为两个齐次线性方程组, 则:

- (1) 若 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 同解, 则 $r(A) = r(B)$, 反之不对;
- (2) 若 $AX = \mathbf{0}$ 的解为 $BX = \mathbf{0}$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$;
- (3) 若 $AX = \mathbf{0}$ 的解为 $BX = \mathbf{0}$ 的解, 反之不对, 则 $r(A) > r(B)$;
- (4) 若 $AX = \mathbf{0}$ 的解为 $BX = \mathbf{0}$ 的解, 且 $r(A) = r(B)$, 则 $AX = \mathbf{0}$ 与 $BX = \mathbf{0}$ 同解.

(12) 【答案】 (C).

【解】 因为 $X \sim t(n)$, 所以存在 $U \sim N(0,1), V \sim \chi^2(n)$ 且 U, V 独立,

使得 $X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$, 于是 $Y = \frac{1}{X^2} = \frac{V/n}{U^2/1}$.

注意到 $U^2 \sim \chi^2(1)$ 且与 V 独立, 故 $Y \sim F(n,1)$, 应选(C).

三、解答题

(13) 【解】 (I) 方法一 设切点坐标为 $(a, \ln a)$,

由导数的几何意义得 $\frac{\ln a}{a} = \frac{1}{a}$, 解得 $a = e$,

即切点坐标为 $(e, 1)$, 故切线为 $y = \frac{x}{e}$.

方法二 设切点坐标为 $(a, \ln a)$, 所求的切线为

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a), \text{ 或 } y = \frac{x}{a} + \ln a - 1,$$

因为切线经过原点, 所以 $\ln a - 1 = 0$, 即 $a = e$, 故所求的切线为 $y = \frac{x}{e}$.

$$\text{所以 } A = \frac{1}{2} \times e \times 1 - \int_1^e \ln x \, dx = \frac{e}{2} - 1.$$

(II) 切线 $y = \frac{x}{e}, x = e$ 及 x 轴围成的三角形区域绕 $x = e$ 旋转而成的圆锥体的体积为

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi e^2 \times 1 = \frac{\pi e^2}{3};$$

曲线 $y = \ln x, x = e$ 及 x 轴围成的区域绕 $x = e$ 旋转而成的体积为 V_2 .

取 $[x, x+dx] \subset [1, e]$, $dV_2 = 2\pi(e-x) \times \ln x \times dx$,

$$V_2 = 2\pi \int_1^e (e-x) \ln x \, dx = 2\pi e \int_1^e \ln x \, dx - 2\pi \int_1^e x \ln x \, dx = \frac{\pi}{2} (4e - e^2 - 1),$$

$$\text{于是 } V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e + 3).$$

(14) 【解】 $f'(x) = \frac{-2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n} \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right),$

由 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 得 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) \, dx = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right),$

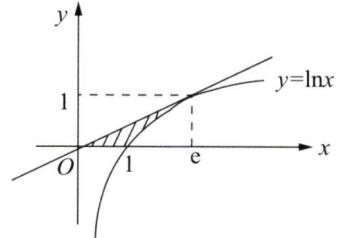
当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

(15) 【证明】 (I) 方法一 由格林公式, 得

$$\oint_L x e^{\sin y} \, dy - y e^{-\sin x} \, dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) \, d\sigma,$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} \, dy - y e^{\sin x} \, dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) \, d\sigma,$$



三(13) 题图

因为区域 D 关于 $y = x$ 对称, 所以 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin y}) d\sigma$,

$$\text{于是 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

方法二 令 $L_1 : y = 0$ (起点 $x = 0$, 终点 $x = \pi$),

$L_2 : x = \pi$ (起点 $y = 0$, 终点 $y = \pi$),

$L_3 : y = \pi$ (起点 $x = \pi$, 终点 $x = 0$),

$L_4 : x = 0$ (起点 $y = \pi$, 终点 $y = 0$),

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{L_1} x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx + \int_{L_2} x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx + \\ &\quad \int_{L_3} x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx + \int_{L_4} x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \\ &= \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \int_{L_1} x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx + \int_{L_2} x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx + \\ &\quad \int_{L_3} x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx + \int_{L_4} x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx \\ &= \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx &= \frac{1}{2} \left[\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma + \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin y} + e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_D (2+2) d\sigma = 2\pi^2. \end{aligned}$$

(16) 【解】 (I) 设 n 次击打桩打进地下深度为 x_n , 汽锤第 n 次击打所做的功为 W_n , 则

$$W_1 = \int_0^{x_1} kx dx = \int_0^a kx dx = \frac{k}{2} a^2,$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - a^2),$$

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx dx = \frac{k}{2} (x_3^2 - x_2^2),$$

由 $W_2 = rW_1$ 得 $x_2^2 - a^2 = ra^2$, 解得 $x_2^2 = (1+r)a^2$.

由 $W_3 = rW_2 = r^2 W_1$, 得 $x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2 a^2$ 或 $x_3^2 = (1+r+r^2)a^2$.

于是 $x_3 = \sqrt{1+r+r^2} a$, 即汽锤经过 3 次击打后桩的深度为 $\sqrt{1+r+r^2} a$ 米.

(II) 由归纳法, 设 $x_n = \sqrt{1+r+\dots+r^{n-1}} a$,

$$W_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} kx dx = \frac{k}{2} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = \frac{k}{2} [x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2],$$

由 $W_{n+1} = r^n W_1$ 得 $\frac{k}{2} [x_{n+1}^2 - (1+r+\dots+r^{n-1})a^2] = \frac{k}{2} r^n a^2$,

解得 $x_{n+1} = \sqrt{1+r+\dots+r^n}a = \sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a$,

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{a}{\sqrt{1-r}}$, 即若不限击打次数, 汽锤最多可以将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ 米.

方法点评:本题考查定积分的物理应用. 理解元素法的思想本质, 掌握元素法的分析方法.

$$(17) \text{【解】 (I)} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(x)},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left[\frac{1}{y'(x)}\right]}{dy/dx} = \frac{\left[\frac{1}{y'(x)}\right]'}{y'(x)} = -\frac{y''(x)}{y'^3(x)} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3},$$

代入原方程整理得 $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \sin x$.

(II) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$,

$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \sin x$ 的特解为 $y_0(x) = a \cos x + b \sin x$, 代入原方程得 $a = 0, b = -\frac{1}{2}$,

原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{2} \sin x$.

由初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 得 $C_1 = -1, C_2 = 1$, 故 $y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$.

方法点评:本题考查原函数与反函数一阶导数与二阶导数之间的关系及微分方程的求解.

函数与其反函数一阶导数与二阶导数之间的关系有如下两点:

(1) 设 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 则 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = g(y), x = g(y)$ 可导且 $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

(2) 设 $y = f(x)$ 二阶可导且 $f'(x) \neq 0$, 则 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = g(y), x = g(y)$ 二阶可导且 $g''(y) = \frac{d[g'(y)]}{dy} = \frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dy} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right] = \frac{\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$.

$$(18) \text{【解】 (I)} \quad \iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t r^2 \sin \varphi f(r^2) dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr,$$

$$\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r f(r^2) dr = 2\pi \int_0^t r f(r^2) dr,$$

$$\int_{-t}^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(x^2) dx,$$

$$\text{则 } F(t) = 2 \frac{\int_0^t r^2 f(r^2) dr}{\int_0^t r f(r^2) dr}, \quad G(t) = \pi \frac{\int_0^t r f(r^2) dr}{\int_0^t f(x^2) dx}.$$

$$F'(t) = 2t f(t^2) \frac{t \int_0^t r f(r^2) dr - \int_0^t r^2 f(r^2) dr}{\left(\int_0^t r f(r^2) dr \right)^2},$$

$$\text{令 } \varphi(t) = t \int_0^t r f(r^2) dr - \int_0^t r^2 f(r^2) dr, \quad \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(t) = \int_0^t r f(r^2) dr > 0 (t > 0),$$

由 $\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(t) > 0 (t > 0), \end{cases}$ 得 $\varphi(t) > 0 (t > 0)$, 于是 $F'(t) > 0 (t > 0)$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$

内单调增加.

$$(II) G(t) = \frac{\pi \int_0^t r f(r^2) dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

当 $t > 0$ 时, $F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) > 0$ 等价于 $\int_0^t f(r^2) dr \int_0^t r^2 f(r^2) dr - \left[\int_0^t r f(r^2) dr \right]^2 > 0$.

$$\text{令 } h(t) = \int_0^t f(r^2) dr \int_0^t r^2 f(r^2) dr - \left[\int_0^t r f(r^2) dr \right]^2, \quad h(0) = 0,$$

$$h'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr, \text{ 当 } t > 0 \text{ 时, } h'(t) > 0,$$

由 $\begin{cases} h(0) = 0, \\ h'(t) > 0 (t > 0), \end{cases}$ 得 $h(t) > 0 (t > 0)$, 于是 $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

$$(19) \text{【解】 方法一} \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\text{由 } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{由 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{得 } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} + 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } |\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{E})| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 7 & 4 \\ 2 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 9)^2 = 0,$$

得 $\mathbf{B} + 2\mathbf{E}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 解方程组 $[3\mathbf{E} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{E})]\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

$$\text{由 } 3\mathbf{E} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \mathbf{B} + 2\mathbf{E} \text{ 的属于特征值 } \lambda_1 = 3$$

$$\text{的特征向量为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $[9\mathbf{E} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{E})]\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

$$\text{由 } 9\mathbf{E} - (\mathbf{B} + 2\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \mathbf{B} + 2\mathbf{E} \text{ 的属于特征值 } \lambda_2 = \lambda_3 = 9 \text{ 的线}$$

$$\text{性无关的特征向量为 } \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故 $\mathbf{B} + 2\mathbf{E}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 9$, 属于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为 $k_1 \xi_1$ (k_1 为任意非零常数); 属于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ 的全部特征向量为 $k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$ (k_2, k_3 为不全为零的任意常数).

$$\text{方法二} \quad \text{由 } |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7) = 0 \text{ 得矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的特}$$

征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 代入 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

$$\text{由 } \mathbf{E} - \mathbf{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 得 } \mathbf{A} \text{ 的属于 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 的线性无关的特征向量为}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\lambda_3 = 7$ 代入 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$,

由 $7E - A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 A 的属于 $\lambda_3 = 7$ 的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 7, A^* \text{ 的特征值为 } \frac{|A|}{\lambda_1} = 7, \frac{|A|}{\lambda_2} = 7, \frac{|A|}{\lambda_3} = 1,$$

因为 $B \sim A^*$, 所以 B 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$, 从而 $B + 2E$ 的特征值为 9, 9, 3.

$B + 2E$ 的相应于特征值 9, 9, 3 对应的线性无关的特征向量为

$$\beta_1 = P^{-1}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = P^{-1}\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = P^{-1}\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

方法点评: 本题考查矩阵的特征值与特征向量.

矩阵与其关联的矩阵特征值与特征向量之间有一定的关系, 主要有如下结论:

(1) 设 $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 则 $f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha$,

特别地, 若 A 可逆, 则 $\begin{cases} A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha, \\ A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha, \end{cases}$ 即 A 与 A^{-1}, A^* 特征向量相同.

(2) 设 $A\alpha = \lambda_0\alpha$ 且 $P^{-1}AP = B$, 则 $B \cdot P^{-1}\alpha = \lambda_0 P^{-1}\alpha$, 即 A 与 B 特征值相同, B 的属于特征值 λ_0 的特征向量为 $P^{-1}\alpha$.

(20) 【证明】 方法一

必要性: 设三条直线交于一点 (x_0, y_0) , 即方程组 $AX = \mathbf{0}$ 有非零解 $(x_0, y_0, 1)^T$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix}, \text{ 则 } |A| = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |A| &= \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2c-2b & 3a-3b \\ 0 & 2a-2c & 3b-3c \end{vmatrix} \\ &= -6(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= -3(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \text{ 且 } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

故 $a+b+c=0$.

充分性: 设 $a+b+c=0$, 将方程组前两个方程相加得方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a. \end{cases}$$

$$\text{因为} \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac - b^2) = -2[a(a+b) + b^2] = -[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0,$$

所以方程组有唯一解,即三条直线交于一点.

方法二

$$\text{必要性: 设三条直线交于一点, 即方程组} \begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a, \\ cx + 2ay = -3b \end{cases} \text{有唯一解,}$$

$$\text{令 } \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}, \text{ 则 } r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2,$$

$$\text{从而 } |\bar{\mathbf{A}}| = -3(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0,$$

$$\text{而 } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0, \text{ 故 } a+b+c=0.$$

充分性: 设 $a+b+c=0$, 则 $r(\bar{\mathbf{A}}) < 3$,

$$\text{又} \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac - b^2) = -2[a(a+b) + b^2] = -[a^2 + b^2 + (a+b)^2] \neq 0,$$

$$\text{则 } r(\mathbf{A}) = 2, \text{ 从而 } r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2, \text{ 即方程组} \begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a, \\ cx + 2ay = -3b \end{cases} \text{ 有唯一解,}$$

故三条直线交于一点.

(21) 【解】 (I) 方法一 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$P\{X=0\} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad P\{X=1\} = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, \quad P\{X=3\} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20},$$

$$X \text{ 的分布律为 } X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}, \text{ 于是 } E(X) = \frac{3}{2}.$$

方法二 令 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{从甲箱中所取的第 } i \text{ 件产品为次品,} \\ 0, & \text{从甲箱中所取的第 } i \text{ 件产品为合格品} \end{cases} (i=1,2,3)$,

$$X_i \text{ 的分布律为 } X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} (i=1,2,3),$$

设乙箱中的次品个数为 X , 则 $X = X_1 + X_2 + X_3$,

$$\text{故 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{3}{2}.$$

(II) 令 $A_i = \{X=i\} (i=0,1,2,3)$, $B = \{\text{从乙箱中取一件产品为次品}\}$,

$$P(B | A_0) = 0, P(B | A_1) = \frac{1}{6}, P(B | A_2) = \frac{2}{6}, P(B | A_3) = \frac{3}{6}, \text{ 由全概率公式得}$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^3 P(A_i)P(B | A_i) = \frac{1}{4}.$$

方法点评:本题考查一维离散型随机变量的分布及全概率公式.

若一件事需要两步完成,第一步发生的结果未知,求第二步某事件的概率时,一般采用全概率公式,第一步构造完备事件组 A_1, A_2, \dots, A_m , 第二步事件为 B , 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(A_i)P(B | A_i).$$

(22) 【解】 (I) 总体 X 的分布函数为 $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx$,

当 $x < \theta$ 时, $F(x) = 0$;

$$\text{当 } x \geq \theta \text{ 时, } F(x) = \int_{\theta}^x 2e^{-2(x-\theta)} dx = -e^{-2(x-\theta)} \Big|_{\theta}^x = 1 - e^{-2(x-\theta)},$$

$$\text{于是 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} \\ &= 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - [1 - P\{X_1 \leq x\}][1 - P\{X_2 \leq x\}] \cdots [1 - P\{X_n \leq x\}] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \\ &= \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\text{III}) \hat{\theta} \text{ 的密度函数为 } f_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \theta, \\ 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } E(\hat{\theta}) &= \int_{\theta}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} x e^{-2n(x-\theta)} d[2n(x-\theta)] \\ &\stackrel{2n(x-\theta)=t}{=} \int_0^{+\infty} \left(\theta + \frac{t}{2n}\right) e^{-t} dt = \theta \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \theta + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量.