一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目

要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 曲线 $y = x\ln(e+\frac{1}{x-1})$ 的渐近线方程为(　　)

(A) $y = x + e$　　　　(B) $y = x + \frac{1}{e}$

(C) $y = x$　　　　(D) $y = x - \frac{1}{e}$

【答案】(B)

【解析】$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x-1})}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x-1}) = 1$，

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x-1}) - x] = \lim_{x\to\infty}x[\ln(e+\frac{1}{x-1}) - 1]$$

$$= \lim_{x\to\infty}x\ln[1+\frac{1}{e(x-1)}] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e(x-1)} = \frac{1}{e}.$$

所以斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

(2) 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，则(　　)

(A) $a < 0, b > 0$　　　　(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a = 0, b > 0$　　　　(D) $a = 0, b < 0$

【答案】(C)

【解析】微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$，

当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时，特征方程有两个不同的实根 λ_1, λ_2，则 λ_1, λ_2 至少有一个不等于零，若 C_1, C_2 都不为零，则微分方程的解 $y = C_1e^{-\lambda_1 x} + C_2e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$

无界；

当$\Delta = a^2 - 4b = 0$时，特征方程有两个相同的实根，$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$，

若$C_2 \neq 0$，则微分方程的解$y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$在$(-\infty, +\infty)$无界；

当$\Delta = a^2 - 4b < 0$时，特征方程的根为$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} i$，

则通解为$y = e^{-\frac{a}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x)$，

此时，要使微分方程的解在$(-\infty, +\infty)$有界，则$a = 0$，再由$\Delta = a^2 - 4b < 0$，知$b > 0$.

(3) 设函数$y = f(x)$由$\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$确定，则(　　)

(A) $f(x)$连续，$f'(0)$不存在　(B) $f'(0)$存在，$f'(x)$在$x = 0$处不连续

(C) $f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　(D) $f''(0)$存在，$f''(x)$在$x = 0$处不连续

【答案】(C)

【解析】$t \geq 0$时，$\begin{cases} x = 3t \\ y = t\sin t \end{cases}$，得$y = \frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$；$t < 0$时，$\begin{cases} x = t \\ y = -t\sin t \end{cases}$，得$y = -x\sin x$；

综上，$y = \begin{cases} \frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}, x \geq 0 \\ -x\sin x, x < 0 \end{cases}$，

从而由$y'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3} - 0}{x} = 0, y'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x\sin x - 0}{x} = 0$，得$y'(0) = 0$；

于是$y' = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\sin x - x\cos x, x < 0 \end{cases}$，得$y'$连续；

又由 $y''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}-0}{x}=\dfrac{2}{9}, y''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sin x-x\cos x-0}{x}=-2$，

得 $y''(0)$ 不存在.

(4) 已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛的”(　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

【答案】(A)

【解析】由条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则由 $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$ 与比较判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛；

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则由 $|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|b_n-a_n|+|b_n|$ 与比较判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(5) 已知 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $ABC=0$，E 为 n 阶单位矩阵，记矩阵 $\begin{pmatrix}0 & A\\ BC & E\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}AB & C\\ 0 & E\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}E & AB\\ AB & 0\end{pmatrix}$ 的秩分别为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则(　　)

(A) $\gamma_1\le\gamma_2\le\gamma_3$　　(B) $\gamma_1\le\gamma_3\le\gamma_2$

(C) $\gamma_3\le\gamma_1\le\gamma_2$　　(D) $\gamma_2\le\gamma_1\le\gamma_3$

【答案】(B)

【解析】因初等变换不改变矩阵的秩，

$$r_1=r\begin{bmatrix}0&A\\BC&E\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-ABC&0\\BC&E\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}0&0\\BC&E\end{bmatrix}=n,$$

$$r_2=r\begin{bmatrix}AB&C\\0&E\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}AB&0\\0&E\end{bmatrix}=r(AB)+n,$$

$$r_3=r\begin{bmatrix}E&AB\\AB&0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}E&0\\AB&-ABAB\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}E&0\\0&-ABAB\end{bmatrix}=r(ABAB)+n,$$

故选(B).

(6) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&2&0\\a&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$

【答案】(D)

【解析】选项(A)矩阵的特征值为三个不同特征值，所以必可相似对角化；

选项(B)矩阵为实对称矩阵，所以必可相似对角化；

选项(C)矩阵特征值为$1,2,2$，二重特征值的重数$2=3-r(C-2E)$，所以必可相似对角化；

选项(D)矩阵特征值为$1,2,2$，二重特征值的重数$2\neq 3-r(D-2E)$，所以不可相似对角化.

故选(D).

(7) 已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若$\gamma$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可由$\beta_1,\beta_2$线性表示，则$\gamma=$(　　)

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$　　(B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$　　(D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

【答案】(D)

【解析】设$r=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，

则$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$.

又$(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,

故$(x_1,x_2,y_1,y_2)^T=c(-3,1,-1,1)^T,c\in R$.

所以$r=-c\beta_1+c\beta_2=c(-1,-5,-8)^T=-c(1,5,8)^T=k(1,5,8)^T,k\in R$.

(8) 设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-EX|)=($　　$)$

(A) $\frac{1}{e}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{2}{e}$　　(D) 1

【答案】(C)

【解析】由题可知$E(X)=1$，所以$|X-EX|=\begin{cases}1, & X=0\\ X-1, & X=1,2,\cdots\end{cases}$，

故$E(|X-EX|)=1\cdot P\{X=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}$

$$=\frac{1}{e}+\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}-(0-1)P\{X=0\}$$

$$=\frac{1}{e}+E(X-1)-(0-1)\frac{1}{e}=\frac{2}{e},$$

故选(C).

(9) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自

总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2$，则(　　)

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

【答案】(D)

【解析】$X_1,X_2,\ldots,X_n$的样本方差$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$的样本方差$S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

$\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，两个样本相互独立，

所以$\dfrac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}{\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\Big/(m-1)}=\frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/2\sigma^2}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，

故选(D).

(10) 设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数. 若$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$为σ的无偏估计，则$a=$(　　)

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　(C) $\sqrt{\pi}$　　(D) $\sqrt{2\pi}$

【答案】(A)

【解析】由题可知$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$.

令$Y=X_1-X_2$，则Y的概率密度为$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2\sigma^2}}$.

$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot2\sigma^2}}dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$，

$E(a|X_1-X_2|)=aE(|Y|)=a\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

由$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$为σ的无偏估计，有$E(\hat{\sigma})=\sigma$，得$a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故选(A).

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) 当$x\to0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$____.

【答案】-2

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x^2+o(x^2)-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}=1$,

可得$a+1=0$，$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，即$a=-1,b=2$,故$ab=-2$.

(12) 曲面$z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$在点$(0,0,0)$处的切平面方程为________.

【答案】$x+2y-z=0$

【解析】$F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z$,

$\mathbf{n}=(F_x',F_y',F_z')=(1+\frac{2x}{1+x^2+y^2},2+\frac{2y}{1+x^2+y^2},-1)$，

即在点$(0,0,0)$处的法向量为$(1,2,-1)$，即切平面方程为$x+2y-z=0$.

(13) 设$f(x)$为周期为 2 的周期函数，且$f(x)=1-x,x\in[0,1]$，若

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$________.

【答案】0

【解析】由 $f(x)$ 展开为余弦级数知， $f(x)$ 为偶函数.由傅里叶系数计算公式有

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\left(\int_0^1 \cos n\pi x dx - \int_0^1 x\cos n\pi x dx\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 x d\sin n\pi x\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x d\sin n\pi x \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left(x\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x dx\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx \\
&= \frac{-2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 \\
&= \frac{-2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1).
\end{aligned}$$

故 $a_{2n} = \frac{-1}{2n^2\pi^2}(\cos 2n\pi - 1) = \frac{-1}{2n^2\pi^2}(1-1) = 0$.

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)dx = 0$， 则 $\int_1^3 f(x)dx =$

________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(t+2)dt \left(令 x = t+2\right) \\
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x+2)dx \\
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 [f(x)+x]dx \\
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xdx \\
&= \int_0^2 f(x)dx + \int_0^1 xdx \\
&= \int_0^1 xdx
\end{aligned}$$

$=\frac{1}{2}$.

(15) 已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，

若$\gamma^T\alpha_i=\beta^T\alpha_i(i=1,2,3)$，则$k_1^2+k_2^2+k_3^2=$_________.

【答案】$\frac{11}{9}$

【解析】

$\gamma^T\alpha_1=\beta^T\alpha_1=1\Rightarrow k_1\alpha_1^T\alpha_1+k_2\alpha_2^T\alpha_1+k_3\alpha_3^T\alpha_1=1\Rightarrow k_1\cdot3+k_2\cdot0+k_3\cdot0=1\Rightarrow k_1=\frac{1}{3}$.

同理$k_2=-1,k_3=-\frac{1}{3}$.

所以，$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\frac{11}{9}$.

(16) 设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B(1,\frac{1}{3}),Y\sim B(2,\frac{1}{2})$则$P\{X=Y\}=$

_________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】因为$X\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right)$，所以$X=0,1$；

$Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，所以$Y=0,1,2$.

又因为X与Y相互独立，所以

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{2}{3}C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演

算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

【解析】 (I) 设点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，故 y 轴的截距为 $y-y'x$，则 $x=y-y'x$，

解得 $y=x(C-\ln x)$，其中 C 为任意常数.

由 $y(1)=C=2$，故 $y(x)=x(2-\ln x)$.

(II)由(I)知 $f(x)=\int_1^x t(2-\ln t)dt$，故 $f'(x)=x(2-\ln x)=0$，则驻点为 $x=e^2$.

当 $0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^2$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $x=e^2$ 处取得极大值，同时也取得最大值，且最大值为 $f(e^2)=\int_1^{e^2} x(2-\ln x)dx=\frac{1}{4}e^4-\frac{5}{4}$.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

【解析】 $\begin{cases} f'_x=-x(2y+3xy-5x^3)=0 \\ f'_y=2y-x^2-x^3=0 \end{cases}$，得驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$.

$f''_{xx}=-(2y+3xy-5x^3)-x(3y-15x^2)$，$f''_{xy}=-x(2+3x)$，$f''_{yy}=2$.

代入 $(0,0)$，$\begin{cases} A=f''_{xx}=0 \\ B=f''_{xy}=0 \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$，则 $AC-B^2=0$，故充分条件失效，当 $x\to 0$ 时，取

$y=x^2+kx^3(k>0)$，$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)=kx^3[x^2+(k-1)x^3]=kx^5+o(x^5)$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,y)}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^5+o(x^5)}{x^5}=k>0$，由极限的局部保号性：存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$\frac{f(x,y)}{x^5}>0$，$f(x,y)<0=f(0,0)$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\frac{f(x,y)}{x^5}>0$，$f(x,y)>0=f(0,0)$，故 $(0,0)$ 不是极值点；

代入 $(1,1)$，$\begin{cases}A=f''_{xx}=12\\B=f''_{xy}=-5\\C=f''_{yy}=2\end{cases}$，则 $AC-B^2<0$，故 $(1,1)$ 不是极值点；

代入 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$ 的 $\begin{cases}A=f''_{xx}=\frac{100}{27}\\B=f''_{xy}=-\frac{8}{3}\\C=f''_{yy}=2\end{cases}$，则 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，故 $(\frac{2}{3},\frac{10}{27})$ 是极小值点；

故 $f(\frac{2}{3},\frac{10}{27})=-\frac{4}{729}$ 为极小值.

(19) (本题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 中，柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成，Σ 为 Ω 边界的外侧，计算曲面积分

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2xzdydz+xz\cos ydzdy+3yz\sin xdxdy.$$

【解析】由高斯公式可得：

$$=\iiint_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)dV$$

$$=\iiint_{\Omega}2zdV=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x}2zdz=\iint_{D_{xy}}(1-x)^2\,dxdy\qquad\left(D_{xy}:x^2+y^2\le1\right)$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(1-2x+x^2\right)dxdy=\pi+\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^3dr=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数，证明：

(I) 若 $f(x)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$ 使得

$$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

【解析】(I) 证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$，$\eta$ 介于0与x之间，

则 $f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2,0<\eta_1<a$.①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2,-a<\eta_2<0$.②

①+②得：$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$.③

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2,\eta_1]$ 上连续，则必有最大值 M 与最小值 m，即

$,m\leq f''(\eta_1)\leq M,m\leq f''(\eta_2)\leq M,$ 从而 $m\leq\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\leq M$.

由介值定理得：存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有 $\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，

代入③得：$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$，即 $f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$.

(II) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0\in(-a,a)$ 取极值，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$.

又

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$，$\gamma$ 介于0与x之间，

则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2,-a<\gamma_1<0$.

$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2,0<\gamma_2<a$.

从而 $|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$$\le \frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2 f''(\gamma_2)\right| + \frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)\right|.$$

又$|f''(x)|$连续，设$M=\max\{|f''(\gamma_1)|,|f''(\gamma_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)| \le \frac{1}{2}M(a+x_0)^2 + \frac{1}{2}M(a-x_0)^2 = M(a^2+x_0^2)$$

又$x_0 \in (-a,a)$，则$|f(a)-f(-a)| \le M(a^2+x_0^2) \le 2Ma^2$，

则$M \ge \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$，即存在$\eta=\gamma_1$或$\eta=\gamma_2 \in (-a,a)$，

有$|f''(\eta)| \ge \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$，

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$$

(I) 求可逆变换$x=Py$，将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$；

(II) 是否存在正交变换$x=Qy$，将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

【解析】(I) 利用配方法将$f(x_1,x_2,x_3)$和$g(y_1,y_2,y_3)$化为规范形,从而建立两者的关系.

先将$f(x_1,x_2,x_3)$化为规范形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$$

$$=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$$

令$\begin{cases} z_1=x_1+x_2-x_3 \\ z_2=x_2+x_3 \\ z_3=x_3 \end{cases}$,则$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$.

即$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,使得$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$.

再将$g(y_1,y_2,y_3)$化为规范形.

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3=y_1^2+(y_2+y_3)^2$$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$,则$g(y_1,y_2,y_3) = z_1^2 + z_2^2$.

即$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,使得$g(y_1,y_2,y_3) = z_1^2 + z_2^2$.

从而有$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

于是可得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,其中$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$为所求矩阵，

可将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

(II) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)$和$g(y_1,y_2,y_3)$的矩阵分别为$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由题意知,若存在正交变换$x = Qy$，则$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = B$，可得A和B相似.

易知$tr(A) = 5, tr(B) = 3$，从而A和B不相似，于是不存在正交变换$x = Qy$，

使得$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

(22) (本题满分 12 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(I) 求X与Y的方差;

(II) 求X与Y是否相互独立;

(III) 求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

【解析】(I) $E(X)=\iint\limits_D x\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)d\sigma=0$；

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)d\sigma=4\iint\limits_{D_1} x^2\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=\frac{4}{\pi}\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^2d\sigma$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^5dr=\frac{1}{3}.$$

所以$D(X)=\frac{1}{3}$.

同理，得$D(Y)=\frac{1}{3}$.

(II) $$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)dy, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3\pi}(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

同理，得：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{3\pi}(1+2y^2)\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

因为，$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以X与Y不相互独立.

(III) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)d\sigma=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^3dr=z^2$；

当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=1$；

所以，Z的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.