1988 年数学(一)真题解析

一、

(1)【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\Big/\dfrac{1}{n\cdot 3^n}=\dfrac{1}{3}$,得收敛半径 $R=3$,

当 $x-3=-3$,即 $x=0$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

当 $x-3=3$,即 $x=6$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为$[0,6)$.

(2)【解】 由 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,

由 $1-x\geqslant 1$ 得 $\varphi(x)$ 的定义域为$(-\infty,0]$.

(3)【解】 由高斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_{S}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v\\&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{12\pi}{5}.\end{aligned}$$

二、填空题

(1)【答案】 $(1+2t)e^{2t}$.

【解】 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}=t\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2t}=te^{2t}$,

则 $f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(1+2t)e^{2t}$.

(2)【答案】 $\dfrac{3}{2}$.

【解】 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{f(1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$

(3)【答案】 $\dfrac{1}{12}$.

【解】 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$ 两边对 x 求导得 $3x^2f(x^3-1)=1$,

取 $x=2$ 得 $f(7)=\dfrac{1}{12}$.

(4)【答案】 40.

【解】 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)$ 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)=8(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)=40.\end{aligned}$$

三、选择题

(1)【答案】 (B).

【解】 因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微,

于是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=\dfrac{1}{2}\Delta x$,故函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是与 Δx 同阶而非等价的无穷小,应选(B).

(2)【答案】 (A).

【解】 将 $x=x_0$ 代入 $y''-2y'+4y=0$,得 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$,

从而 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$,由极值判别法得 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解】 由奇偶性得

$\iiint\limits_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v=0$, $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$, $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v=0$,显然选(C).

(4)【答案】 (B).

【解】 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,

所以其收敛半径 $R\geqslant|-1-1|=2$.

当 $x=2$ 时,因为 $|2-1|=1<R$,所以该级数在 $x=2$ 处绝对收敛,应选(B).

(5)【答案】 (D).

【解】 **方法一**

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,

使得
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

不妨设 $k_1\neq 0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\dfrac{k_s}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_s$,即至少有一个向量可由其余向量线性表示,

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不可由其余向量线性表示,应选(D).

方法二

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,显然 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3\neq\mathbf{0}$ 且其中任两个向量线性无关,但向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,排除(A),(B);

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,排除(C),应选(D).

四、【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

则 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{x}{y}f''\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{y^2}{x^2}g''\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{x}{y}f''\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{y^2}{x^2}g''\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$.

五、【解】 特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$,

$y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$;

设原方程的特解为 $y_0(x)=ax\mathrm{e}^x$,代入得 $a=-2$,

故原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$($C_1,C_2$ 为任意常数).

因为曲线 $y=y(x)$ 经过点$(0,1)$，所以 $C_1+C_2=1$；

$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率为 $k=(2x-1)\big|_{x=0}=-1$，

又由 $y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}-2(x+1)e^x$，得 $C_1+2C_2-2=-1$，即 $C_1+2C_2=1$，

从而 $C_1=1,C_2=0$，故所求函数为 $y=(1-2x)e^x$.

六、【解】 设 $M(x,y)$，则$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\}$，

$$\overrightarrow{MA}^0=\boldsymbol{F}^0=\frac{1}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}\{-x,1-y\},$$

则 $\boldsymbol{F}(x,y)=|\boldsymbol{F}|\cdot\boldsymbol{F}^0=\dfrac{k}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}\{-x,1-y\}$，

设 M 沿 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $B(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向曲线段为 L，

则 $W=k\displaystyle\int_L\frac{-x\,dx+(1-y)dy}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}$，

令 $P(x,y)=-\dfrac{x}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}$， $Q(x,y)=\dfrac{1-y}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}$，

因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分与路径无关，

故 $W=k\displaystyle\int_{\overline{BO}}\frac{-x\,dx+(1-y)dy}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}=k\int_2^0\frac{-x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

七、【解】 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

八、【解】 (1) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$，即 $x+2=y+1$，或 $x=y-1$；

再由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似得 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即 $-2=-2y$，解得 $y=1$，故 $x=0,y=1$.

(2) 显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T$；

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$；

由 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,1)^T$，

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

九、【证明】 令 $S_1(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$，$S_2(x)=\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$，

再令 $\varphi(x)=S_1(x)-3S_2(x)=\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$，

则 $\varphi(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+3\int_b^x f(t)\mathrm{d}t-3(x-b)f(x)$，

因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，

从而 $\varphi(a)=-3\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0$，$\varphi(b)=\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t>0$，

即存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $S_1(\xi)=3S_2(\xi)$.

因为
$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=(x-a)f'(x)-3(x-b)f'(x)\\&=f'(x)[(x-a)+3(b-x)]>0\quad(a<x<b),\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，故 ξ 是唯一的.

十、填空题

(1)**【答案】** $\dfrac{1}{3}$.

【解】 令 $P(A)=p$，设三次试验中 A 出现的次数为 X，则 $X\sim B(3,p)$，

由 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{19}{27}$，得 $P\{X=0\}=\mathrm{C}_3^0p^0(1-p)^3=(1-p)^3=\dfrac{8}{27}$，解得 $p=\dfrac{1}{3}$，

故事件 A 在一次试验中出现的概率为 $\dfrac{1}{3}$.

(2)**【答案】** $\dfrac{17}{25}$.

【解】 设(0,1)中任取的两个数为 X,Y，令 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，

则 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，即 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}P\left\{X+Y<\frac{6}{5}\right\}&=\iint\limits_{x+y\leqslant\frac{6}{5}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint\limits_{x+y>\frac{6}{5}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}.\end{aligned}$$

(3)**【答案】** 0.987 6.

【解】 由 $X\sim N(10,0.02^2)$ 得 $\dfrac{X-10}{0.02}\sim N(0,1)$，

则
$$\begin{aligned}P\{9.95<X<10.05\}&=P\left\{-2.5<\frac{X-10}{0.02}<2.5\right\}\\&=\Phi(2.5)-\Phi(-2.5)=2\Phi(2.5)-1=0.987\,6.\end{aligned}$$

十一、【解】
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant(1-y)^3\}\\&=1-P\{X\leqslant(1-y)^3\}=1-\int_{-\infty}^{(1-y)^3}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则 $f_Y(y)=\dfrac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$.