2000 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** $\frac{\pi}{4}$.

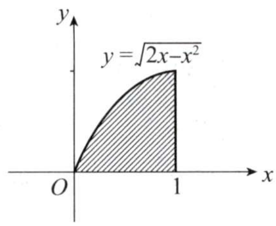
【解】 **方法一**

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=I_2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

方法二 根据定积分的几何应用,$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 即以曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

如图所示,显然$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.



一(1) 题图

(2)**【答案】** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

【解】 $\boldsymbol{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}\big|_{(1,-2,2)}=\{2x,4y,6z\}\big|_{(1,-2,2)}=\{2,-8,12\}$,

则曲面在点$(1,-2,2)$处的法线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

(3)**【答案】** $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$(C_1,C_2 为任意常数).

【解】 **方法一** 由 $xy''+3y'=0$,得 $y''+\frac{3}{x}y'=0$.

解得 $y'=C_0\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}=\frac{C_0}{x^3}$,积分得原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$(C_1,C_2 为任意常数).

方法二 由 $xy''+3y'=0$,得 $x^3y''+3x^2y'=0$ 或$(x^3y')'=0$.

于是 $x^3y'=C_0$,解得 $y'=\frac{C_0}{x^3}$,积分得原方程通解为 $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$(C_1,C_2 为任意常数).

(4)**【答案】** -1.

【解】 因为原方程组无解,所以 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$,而 $r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant 3$,所以 $r(\boldsymbol{A})<3$.

于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,解得 $a=-1$ 或 $a=3$.

当 $a=3$ 时,由 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&1&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

得 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$,原方程组有无数个解,所以 $a\neq 3$,故 $a=-1$.

(5)**【答案】** $\frac{2}{3}$.

【解】 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$, $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$,

由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，得 $P(A)=P(B)$.

由 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\dfrac{1}{9}$，得 $P(A+B)=\dfrac{8}{9}$.

又 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-P^2(A)$，

得 $P^2(A)-2P(A)+\dfrac{8}{9}=0$，解得 $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(6)**【答案】** (A).

【解】 由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，得 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，

即$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为减函数，当 $a<x<b$ 时，有$\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$.

于是 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$，应选(A).

方法点评：本题考查函数单调性.

若 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 严格递增或严格递减.

注意如下技巧：若题中出现 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$ 时，一般构造辅助函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$；

若题中出现 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，一般构造辅助函数 $f(x)g(x)$.

(7)**【答案】** (C).

【解】 由对面积的曲面积分的对称性质，得

$$\iint_S x\,dS=\iint_S y\,dS=0,\quad \iint_S z\,dS=4\iint_{S_1} z\,dS,$$

又因为$\iint_{S_1} x\,dS=\iint_{S_1} y\,dS=\iint_{S_1} z\,dS$，所以$\iint_S z\,dS=4\iint_{S_1} x\,dS$，应选(C).

方法点评：二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分有类似的对称性，对面积的曲面积分的对称性如下：

若 Σ 关于 xOy 平面对称，其中 xOy 平面上方为 Σ_1，则有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\begin{cases}0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS, & f(x,y,-z)=f(x,y,z).\end{cases}$$

其他两种情形同上.

(8)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 令 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，所以$\lim_{n\to\infty}u_n=0$且$\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在.

设$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，令 $S'_n=(u_1+u_2)+(u_2+u_3)+\cdots+(u_n+u_{n+1})=2S_n-u_1+u_{n+1}$.

因为$\lim_{n\to\infty}S'_n=2S-u_1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛，应选(D).

方法二 取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散，(A) 不对；

取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，(B) 不对；

取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，(C) 不对，应选(D).

(9)**【答案】** (D).

【解】 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$， $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，得 $r(\boldsymbol{A})=m$.

若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，则 $r(\boldsymbol{B})=m$，因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$，所以矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价；反之，若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，因为 $r(\boldsymbol{A})=m$，所以 $r(\boldsymbol{B})=m$，又因为矩阵的秩与矩阵列向量组的秩相等，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 m，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，应选(D).

(10)**【答案】** (B).

【解】 ξ,η 不相关的充分必要条件是 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=0$.

而 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=D(X)-D(Y)$，

又 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$， $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$，

所以 ξ,η 不相关的充分必要条件是 $D(X)=D(Y)$，

即 $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$，应选(B).

三、解答题

(11)**【解】** 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=0+1=1$，

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2-1=1,$$

得 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

(12)**【解】** 由复合函数求偏导法则，得

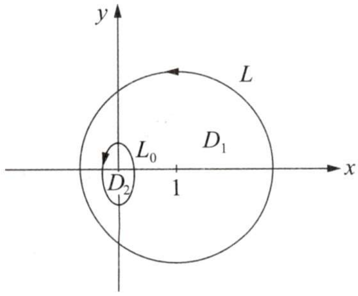
$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\&=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.\end{aligned}$$

(13)**【解】** 令 $P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}\quad((x,y)\neq(0,0)).$$

如图所示，作 $L_0:4x^2+y^2=r^2$($r>0$ 且 L_0 位于 L 内，取逆时针方向)，设 L_0^- 与 L 围成的区域为 D_1，L_0 围成的区域为 D_2，由格林公式得



三(13) 题图

$$\oint_{L+L_0^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

于是$\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}x\,dy-y\,dx$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_{D_2}2d\sigma=\frac{2}{r^2}\iint_{D_2}d\sigma=\frac{2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=\pi.$$

(14)【解】 $P=xf(x)$， $Q=-xyf(x)$， $R=-e^{2x}z$，

由高斯公式得

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=\pm\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$=\pm\iiint_\Omega[f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x}]dv=0$,其中 Ω 为 S 围成的有界闭区域.

由曲面 S 的任意性,得 $f(x)+xf'(x)-xf(x)-e^{2x}=0$,

整理得 $f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$,

解得 $f(x)=\left[\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx+C\right]e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx}=\frac{e^x(e^x+C)}{x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,所以 $C=-1$,于是 $f(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{x}$.

(15)【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\frac{1}{3}$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为 $R=3$,幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间为$(-3,3)$.

当 $x=3$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{3^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$,

因为$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}>0$ 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{3^n}{n}$ 发散,

即 $x=3$ 时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 发散;

当 $x=-3$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{(-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{(-1)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$,

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\right]\Big/\left[\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}=\frac{2}{3}<1$ 得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛,再由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛得 $x=-3$ 时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 收敛.

(16)【解】 设球体为 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$，点 $P_0(0,0,R)$ 为球面 Σ 上一点，且设 Ω 的重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{x}=0, \bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z \cdot k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v},$$

由奇偶性得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega} R^2 \mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4 \sin\varphi\,\mathrm{d}r+\frac{4\pi R^5}{3} \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r+\frac{4\pi R^5}{3}=\frac{32\pi R^5}{15},\end{aligned}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\frac{8\pi R^6}{15},$$

于是 $\bar{z}=-\frac{R}{4}$，故 Ω 的重心坐标为 $\left(0,0,-\frac{R}{4}\right)$.

方法点评：本题考查三重积分的物理应用.

积分学的物理应用是数学一的考点，主要有：

(1) 重心

设 D 为平面区域，面密度为 $\rho(x,y)$，则重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma};$$

设 Ω 为几何体，体密度为 $\rho(x,y,z)$，则重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v};$$

设 L 为平面曲线段，线密度为 $\rho(x,y)$，则重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s},\quad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s};$$

设 Σ 为曲面，面密度为 $\rho(x,y,z)$，则重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\quad \bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}.$$

(2) 转动惯量

设 D 为平面区域，面密度为 $\rho(x,y)$，则转动惯量为

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_o=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

对几何体、空间曲线、空间曲面绕某直线旋转的转动惯量有类似公式.

(17)**【解】** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=F(\pi)=0$.

由罗尔定理，存在 $c\in(0,\pi)$，使得 $F'(c)=0$，即 $f(c)=0$.

用反证法. 不妨设在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 除 c 外没有其他零点，则 $f(x)$ 在 $(0,c)$ 与 (c,π) 内异号，不妨设当 $x\in(0,c)$ 时，$f(x)>0$；当 $x\in(c,\pi)$ 时，$f(x)<0$.

$\int_0^\pi(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^c(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x+\int_c^\pi(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x$，

因为 $(\cos x-\cos c)f(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，$(\cos x-\cos c)f(x)\geqslant 0$ 且不恒为零，所以 $\int_0^c(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x>0$.

同理 $\int_c^\pi(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x>0$，故 $\int_0^\pi(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x>0$.

而 $\int_0^\pi(\cos x-\cos c)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\cos xf(x)\mathrm{d}x-\cos c\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有两个零点.

(18)**【解】** $|\boldsymbol{A}^*|=8$，由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$，得 $|\boldsymbol{A}|=2$.

由 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}$，解得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}$.

于是 $\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=3[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]^{-1}=6(2\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，

因为 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}$，所以 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，

于是 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$.

(19)**【解】** (Ⅰ) 由题意得

$$\begin{cases}x_{n+1}=\dfrac{5}{6}x_n+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}x_n+y_n\right),\\ y_{n+1}=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}x_n+y_n\right),\end{cases}\quad \text{整理得}\begin{cases}x_{n+1}=\dfrac{9}{10}x_n+\dfrac{2}{5}y_n,\\ y_{n+1}=\dfrac{1}{10}x_n+\dfrac{3}{5}y_n.\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 不成比例，所以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

由 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{\eta}_1$，得 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量；

由 $\boldsymbol{A\eta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$，得 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$ 的特征向量.

（Ⅲ）$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，于是 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，

而 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\frac{1}{2^n}&4-\frac{1}{2^{n-2}}\\1-\frac{1}{2^n}&1+\frac{1}{2^{n-2}}\end{pmatrix}$，

故 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-\frac{3}{2^n}\\2+\frac{3}{2^n}\end{pmatrix}$.

(20)**【解】** 随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}(k=1,2,\cdots),$$

则 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$.

令 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}(|x|<1)$，则 $S(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$.

于是 $E(X)=pS(1-p)=\frac{1}{p}$；$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}$，

令 $S_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}$，

$$\begin{aligned}则\ S_1(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\\&=x\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}+\frac{1}{(1-x)^2}=x\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^k\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}\\&=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\end{aligned}$$

则 $E(X^2)=pS_1(1-p)=\frac{2-p}{p^2}$，于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1-p}{p^2}$.

(21)**【解】** 似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=2^n\mathrm{e}^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta}\quad(x_i>\theta,i=1,2,\cdots,n),$$

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta,$$

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=2n>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 为增函数，

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$.