2019 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 方法一

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$得

$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$,故 $x-\tan x$ 为 3 阶无穷小,即 $k=3$,应选(C).

方法二

由 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ 得 $x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3(x\to 0)$,

故 $k=3$,应选(C).

(2)【答案】 (B).

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=0$ 得 $f'_-(0)=0$,

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ 得 $f'_+(0)$ 不存在,

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的不可导点;

当 $x<0$ 时,$f(x)<0=f(0)$,当 $0<x<1$,$f(x)<0=f(0)$,

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,应选(B).

(3)【答案】 (D).

【解】 因为$\{u_n\}$单调增加有界,所以$\{u_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,因为$\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=u_{n+1}^2-u_1^2$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_1^2)=A^2-u_1^2$,应选(D).

(4)【答案】 (D).

【解】 因为曲线积分与路径无关,所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}$,且 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在上半平面内连续可偏导,所以可取 $P(x,y)=x-\dfrac{1}{y}$,应选(D).

(5)【答案】 (C).

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,

由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 得$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda-2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

从而有 $\lambda^2+\lambda-2=0$,即 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$,

因为 $|\boldsymbol{A}|=4$,所以 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=\lambda_3=-2$,

故二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$,应选(C).

(6)【答案】 (A).

【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$， $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix}$，

因为任两个平面不平行，所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$，

又因为三个平面没有公共的交点，所以 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$，

再由 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant 3$ 得 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，应选(A).

(7)【答案】 (C).

【解】 由减法公式得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$， $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，

则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，

即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$，应选(C).

(8)【答案】 (A).

【解】 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 X, Y 相互独立，

所以 $X-Y \sim N(0, 2\sigma^2)$，或$\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，

故 $P\{|X-Y|<1\}=P\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$，

即 $P\{|X-Y|<1\}$ 与 μ 无关，与 σ^2 有关，应选(A).

二、填空题

(9)【答案】 $\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

【解】 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x \cdot f'(\sin y-\sin x)+y$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y \cdot f'(\sin y-\sin x)+x$，

得$\dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

(10)【答案】 $\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

【解】 **方法一** 由 $2yy'-y^2-2=0$ 得 $\dfrac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+2}=\mathrm{d}x$，

积分得 $\ln(y^2+2)=x+C$，

再由 $y(0)=1$ 得 $C=\ln 3$，即 $\ln(y^2+2)=\ln(3\mathrm{e}^x)$，

从而 $y^2+2=3\mathrm{e}^x$，故 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

方法二 令 $y^2=u$，则原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=2$，

解得 $u=\left(\int 2\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}=(-2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^x$，

即 $y^2=(-2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^x=C\mathrm{e}^x-2$，

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$，故 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

(11)**【答案】** $\cos\sqrt{x}$.

【解】 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$.

(12)**【答案】** $\frac{32}{3}$.

【解】 $\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\sqrt{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

令 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.$$

(13)**【答案】** $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

【解】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $r(\boldsymbol{A})=2$,

于是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量,

由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

即 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(14)**【答案】** $\frac{2}{3}$.

【解】 $E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$,

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$,

当 $x<0$ 时,$F(x)=0$;

当 $0\leqslant x<2$ 时,$F(x)=\int_0^x\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}$;

当 $x\geqslant 2$ 时,$F(x)=1$,即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

故 $P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{F(X)>\frac{1}{3}\right\}=1-P\left\{F(X)\leqslant\frac{1}{3}\right\}$

$$=1-P\left\{\frac{X^2}{4}\leqslant\frac{1}{3}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$=1-\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=1-\frac{x^2}{4}\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

(15)【解】 (Ⅰ)$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的通解为

$$y=\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int x\,dx}dx+C\right)e^{-\int x\,dx}=(x+C)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$,故 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(Ⅱ)$y'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$,$y''=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}$,

令 $y''=0$ 得 $x=-\sqrt{3}$,$x=0$,$x=\sqrt{3}$,

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 时,$y''<0$;当 $x\in(-\sqrt{3},0)$ 时,$y''>0$;当 $x\in(0,\sqrt{3})$ 时,$y''<0$;

当 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时,$y''>0$,

故 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$及$(0,\sqrt{3})$;凹区间为$(-\sqrt{3},0)$及$(\sqrt{3},+\infty)$,

曲线 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$,$(0,0)$及$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

(16)【解】 (Ⅰ)$\mathbf{grad}\ z=\{2ax,2by\}$, $\mathbf{grad}\ z\,|_{(3,4)}=\{6a,8b\}$,

因为梯度的方向即为方向导数最大的方向,

所以有$\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}$,即 $a=b$,

再由$\sqrt{36a^2+64b^2}=10$ 得 $a=b=-1$.

(Ⅱ)曲面Σ:$z=2-x^2-y^2$,$(x,y)\in D_{xy}$,其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,

则曲面 Σ 的面积为

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13}{3}\pi.$$

(17)【解】 所求的面积为

$$A=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^k\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{e^{\pi}-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}.$$

(18)(Ⅰ)**【证明】** 因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\leqslant x^n\sqrt{1-x^2}$,

所以$\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,即 $a_{n+1}<a_n$,故$\{a_n\}$单调递减.

$$a_n\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n t-\sin^{n+2}t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=I_n-\frac{n+1}{n+2}I_n=\frac{1}{n+2}I_n,$$

$$a_{n-2}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}t-\sin^n t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t=I_{n-2}-I_n,$$

因为 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$,所以 $I_{n-2}=\frac{n}{n-1}I_n$,

于是 $a_{n-2}=\frac{n}{n-1}I_n-I_n=\frac{1}{n-1}I_n$,故 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$.

(Ⅱ)**【解】** 因为$\{a_n\}$单调递减,所以 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\frac{n-1}{n+2}a_{n-1}$,

从而有$\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$,由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(19)**【解】** 设 Ω 的形心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,

由对称性得 $\bar{x}=0$,且 $\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$,$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$,

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(z-1)^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3};$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由
$$\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\xlongequal{y-z=u}\iint\limits_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}(u+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

$$=\iint\limits_{x^2+u^2\leqslant(1-z)^2}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u=\pi z(1-z)^2\text{ 得}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12};$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},$$

故 Ω 的形心坐标为$\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

(20)(Ⅰ)**【解】** 由题意得 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,即$\begin{cases}b+c+1=1,\\2b+3c+a=1,\\b+2c+3=1,\end{cases}$

解得 $a=3,b=2,c=-2$.

(Ⅱ)**【证明】** 因为 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$,即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Q}$,

于是 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,

由 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\3&3&1&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-3&1&0\\0&1&-1&-2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&0&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$ 得

$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$$

(21)**【解】** (Ⅰ)因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$,即 $x-4=y+1$,或 $y=x-5$,

再由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 得 $-2(-2x+4)=-2y$,即 $y=-2x+4$,

解得 $x=3,y=-2$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&3&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,

显然矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,

由 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$;

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ 得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$，

故 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(22)**【解】** （Ⅰ）因为 $X \sim E(1)$，所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{XY \leqslant z\}=P\{Y=-1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=1\} \\ &=pP\{-X \leqslant z\}+(1-p)P\{X \leqslant z\}=pP\{X \geqslant -z\}+(1-p)P\{X \leqslant z\} \\ &=p[1-P\{X \leqslant -z\}]+(1-p)P\{X \leqslant z\}=p[1-F(-z)]+(1-p)F(z),\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=p\mathrm{e}^{z}$；

当 $z \geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-z})$，

故
$$f_Z(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0, \\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z \geqslant 0.\end{cases}$$

（Ⅱ）
$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Z)&=\operatorname{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)\cdot E(XY) \\ &=E(X^2)E(Y)-[E(X)]^2E(Y)=D(X)\cdot E(Y),\end{aligned}$$

因为 $X \sim E(1)$，所以 $E(X)=1, D(X)=1$，

又因为 $Y \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 \\ p & 1-p\end{pmatrix}$，所以 $E(Y)=(-1)p+(1-p)=1-2p$，

X 与 Z 不相关的充分必要条件是 $\operatorname{Cov}(X,Z)=0$，

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（Ⅲ）设 $F(x,y)$ 为 (X,Z) 的联合分布函数，

$$\begin{aligned}F(1,1)&=P\{X \leqslant 1, Z \leqslant 1\}=P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1\} \\ &=P\{Y=-1\}P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1 \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1 \mid Y=1\} \\ &=\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1,-X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\}=\frac{1}{2}P\{-1 \leqslant X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\} \\ &=P\{X \leqslant 1\}=F(1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}},\end{aligned}$$

$$F_X(1)=P\{X \leqslant 1\}=1-\frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$\begin{aligned}F_Z(1)&=P\{XY \leqslant 1\}=P\{Y=-1\}P\{XY \leqslant 1 \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{XY \leqslant 1 \mid Y=1\} \\ &=\frac{1}{2}P\{-X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\}=\frac{1}{2}P\{X \geqslant -1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\} \\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\frac{1}{2\mathrm{e}},\end{aligned}$$

因为 $F(1,1) \neq F_X(1) \cdot F_Z(1)$，所以 X 与 Z 不相互独立.

(23)**【解】** （Ⅰ）由归一性得

$$\begin{aligned}1&=\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x=A\int_{\mu}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=A\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\ &=\sqrt{2\pi}A\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,\end{aligned}$$

解得 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(Ⅱ) $L(\sigma^2)=\frac{A^n}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$,

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$ 得

σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$,

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.