

2018 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1) 【答案】 (D).

【解】 方法一 对 $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ 不存在, 即 } f(x) = \cos\sqrt{|x|} \text{ 在 } x=0$$

处不可导, 应选(D).

方法二

当 $f(x) = |x| \sin|x|$ 时, $f(x) - f(0) \sim x^2$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0, 不选(A);

当 $f(x) = |x| \sin\sqrt{|x|}$ 时, $f(x) - f(0) \sim |x|^{\frac{3}{2}}$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0, 不选(B);

当 $f(x) = \cos|x|$ 时, $f(x) - f(0) \sim -\frac{1}{2}x^2$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0, 不选(C), 应选(D).

(2) 【答案】 (B).

【解】 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 则

$$\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2, \\ (2x_0, 2y_0, -1) \cdot (1, -1, 0) = 0, \\ (2x_0, 2y_0, -1) \cdot (x_0 - 1, y_0, z_0) = 0, \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 2, \end{cases}$$

故所求切平面为 $z=0$ 或 $2x+2y-z=2$. 应选(B).

(3) 【答案】 (B).

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \\ &= \cos 1 + 2\sin 1, \end{aligned}$$

应选(B).

(4) 【答案】 (C).

$$\text{【解】 } M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi,$$

$$\text{当 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } 1 + \sqrt{\cos x} > 1 > \frac{1+x}{e^x},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx, \text{ 即 } K > M > N. \text{ 应选(C).}$$

(5) 【答案】 (A).

【解】 方法一

$$\text{令 } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

显然矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 的特征值都是 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$\mathbf{E} - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{E} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $r(\mathbf{E} - \mathbf{M}) = r(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2$, 所以应选(A).

方法二

$$\text{取 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{因为 } \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 相似, 应选(A).}$$

(6) 【答案】 (A).

【解】 $(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$,

显然 $r(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) = r[\mathbf{A}(\mathbf{E}, \mathbf{B})] \leq r(\mathbf{A})$,

又 $r(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) \geq r(\mathbf{A})$,

于是 $r(\mathbf{A}, \mathbf{AB}) = r(\mathbf{A})$, 应选(A).

(7) 【答案】 (A).

$$\text{【解】 } \int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 0.3,$$

$$P(X < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 0.5 - 0.3 = 0.2, \text{ 应选(A).}$$

(8) 【答案】 (D).

【解】 若 σ^2 已知, 则假设 H_0 的接受域: $|u| < u_{\frac{\alpha}{2}}$, 其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为正态分布的 $\frac{\alpha}{2}$ (上) 分位数.

若 σ^2 未知, 则假设 H_0 的接受域: $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为自由度是 $n-1$ 的

t 分布的 $\frac{\alpha}{2}$ (上) 分位数. 显然检验水平 α 变小, 接受域都变大. 应选(D).

二、填空题

(9) 【答案】 -2 .

【解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin kx} \cdot \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin kx} \cdot \frac{-2 \tan x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{kx} \cdot \frac{-2x}{1 + \tan x} = -\frac{2}{k}$,

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e^{-\frac{2}{k}} = e$, 即 $k = -2$.

(10) 【答案】 $2(\ln 2 - 1)$.

【解】 $f'(1) = (2^x)'|_{x=1} = 2 \ln 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f''(x) dx &= \int_0^1 x df'(x) = x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = f'(1) - f(1) + f(0) \\ &= 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(11) 【答案】 $i - k$.

【解】 $\operatorname{rot} F(1, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix} \Big|_{(1,1,0)} = (yi - zj - xk) \Big|_{(1,1,0)} = i - k$.

(12) 【答案】 $-\frac{\pi}{3}$.

【解】 $\oint_L xy ds = \frac{1}{3} \oint_L (xy + yz + xz) ds = \frac{1}{6} \oint_L [(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds$
 $= -\frac{1}{6} \oint_L ds = -\frac{\pi}{3}$.

(13) 【答案】 -1 .

【解】 α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 则 α_1, α_2 是 A^2 的线性无关的特征向量.

由 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 得 $\alpha_1 + \alpha_2$ 也为 A^2 的特征向量, 因此 A^2 有二重特征值 $\lambda = 1$.

因为 A 有两个不同的特征值, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 于是 $|A| = -1$.

(14) 【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解】 由 $BC = \emptyset$, 得 $P(BC) = 0$, 因为 $ABC \subset BC$, 所以 $P(ABC) = 0$.

$$\begin{aligned} P(AC | AB \cup C) &= \frac{P[AC(AB \cup C)]}{P(AB \cup C)} = \frac{P[(ABC) \cup (AC)]}{P(AB \cup C)} = \frac{P(AC)}{P(AB \cup C)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B) + P(C) - P(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + P(C) - 0} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

解得 $P(C) = \frac{1}{4}$.

三、解答题

(15) 【解】 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$
 $= \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{e^x - 1} de^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} \int e^{2x} d \arctan \sqrt{e^x - 1}$
 $= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} \int e^x d \sqrt{e^x - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} (e^x \sqrt{e^x - 1} - \int \sqrt{e^x - 1} de^x) \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} [e^x \sqrt{e^x - 1} - \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}}] + C \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6} (e^x + 2) \sqrt{e^x - 1} + C.
\end{aligned}$$

(16) 【解】 设铁丝分成的三段长分别是 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 且依次围成的圆、正方形与正三角形三个图形的面积之和为

$$f(x, y, z) = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{z}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2,$$

构造拉格朗日函数: $L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$

$$\text{令} \begin{cases} L'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0, \\ L'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0, \\ L'_z = \frac{\sqrt{3}}{18} z + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x + y + z - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x_0 = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \\ y_0 = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \\ z_0 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \end{cases} \quad \text{此时 } f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

又当 $x + y + z = 2, xyz = 0$ 时, $f(x, y, z)$ 的最小值为 $f\left(0, \frac{8}{4 + 3\sqrt{3}}, \frac{6\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4 + 3\sqrt{3}}$.

所以三个图形的面积之和存在最小值, 最小值为 $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

(17) 【解】 补曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x = 0, \\ 3y^2 + 3z^2 = 1, \end{cases}$ 取后侧, Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的立体. 利用高斯公式可得

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy - \iint_{\Sigma_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy \\
&= \iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz - 0 = \iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz
\end{aligned}$$

利用柱坐标变换 $y = r \cos \theta, z = r \sin \theta, x = x$ 得

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} dr \int_0^{\sqrt{1-3r^2}} (1 + 3r^2) r dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt{1-3r^2} (1 + 3r^2) r dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 (2-t^2) t^2 dt = \frac{14\pi}{45}.
\end{aligned}$$

(18) 【解】 (I) 当 $f(x) = x$ 时, 方程化为 $y' + y = x$, 其通解为

$$y = e^{-x} (C + \int x e^x dx) = e^{-x} (C + x e^x - e^x) = C e^{-x} + x - 1.$$

(II) 方程 $y' + y = f(x)$ 的通解为 $y = e^{-\int_0^x dt} \left[C + \int_0^x e^{\int_0^t ds} f(t) dt \right],$

即 $y = e^{-x} \left[C + \int_0^x e^t f(t) dt \right].$

$$\text{得 } y(x+T) - y(x) = e^{-x} \left[\left(\frac{1}{e^T} - 1 \right) C + \frac{1}{e^T} \int_0^{x+T} e^t f(t) dt - \int_0^x e^t f(t) dt \right]$$

若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^T} \int_0^{x+T} e^t f(t) dt &= \frac{1}{e^T} \int_0^T e^t f(t) dt + \frac{1}{e^T} \int_T^{x+T} e^t f(t) dt \\ &= \frac{1}{e^T} \int_0^T e^t f(t) dt + \frac{1}{e^T} \int_0^x e^{u+T} f(u+T) du \\ &= \frac{1}{e^T} \int_0^T e^t f(t) dt + \frac{1}{e^T} \int_0^x e^T e^u f(u) du = \frac{1}{e^T} \int_0^T e^t f(t) dt + \int_0^x e^s f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{于是 } y(x+T) - y(x) = e^{-x} \left[\left(\frac{1}{e^T} - 1 \right) C + \frac{1}{e^T} \int_0^T e^t f(t) dt \right],$$

因此当且仅当 $C = \frac{1}{e^T - 1} \int_0^T e^t f(t) dt$ 时, $y(x+T) - y(x) = 0$, 即方程存在唯一的以 T 为周期的解.

$$(19) \text{ 【证明】 因为 } x_1 \neq 0, \text{ 所以 } e^{x_2} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1}.$$

由微分中值定理, 存在 $\xi \in (0, x_1)$, 使得 $\frac{e^{x_1} - 1}{x_1} = e^\xi$, 即 $e^{x_2} = e^\xi$, 因此 $0 < x_2 < x_1$.

假设 $0 < x_{n+1} < x_n$, 则 $e^{x_{n+2}} = \frac{e^{x_{n+1}} - 1}{x_{n+1}} = e^\eta$ ($0 < \eta < x_{n+1}$), 得 $0 < x_{n+2} < x_{n+1}$. 故

$\{x_n\}$ 是单调减少的数列, 且下有界, 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限, 得 $a e^a = e^a - 1$, 显然 $a = 0$ 为其解.

又令 $f(x) = x e^x - e^x + 1$, 则 $f'(x) = x e^x$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = x e^x > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,

所以 $a = 0$ 是方程 $a e^a = e^a - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一解, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(20) 【解】 (I) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2 = 0$ 的充分必

要条件是 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + a x_3 = 0. \end{cases}$ 对齐次线性方程组的系数矩阵作初等行变换得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix},$$

$a \neq 2$ 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 只有零解 $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$,

$$a = 2 \text{ 时, } \mathbf{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 有非零解 $x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, -1, 1)^T$, 其中 $k \neq 0$.

$$(II) a \neq 2 \text{ 时, 令 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{因 } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = a-2 \neq 0, \text{ 则矩阵 } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ 可逆,}$$

所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

$a=2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 3x_2x_3 \\ &= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

(21) 【解】 (I) 显然 $r(\mathbf{A})=2$, 因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $r(\mathbf{B})=2$,

$$\text{而 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}, \text{ 故 } a=2.$$

$$(II) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

令 $\mathbf{P} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$,

$$\text{由 } (\mathbf{A} : \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ 得}$$

$$\mathbf{X}_1 = k_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 \\ 2k_1 - 1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = k_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k_2 + 4 \\ 2k_2 - 1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_3 = k_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k_3 + 4 \\ 2k_3 - 1 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{则所求的可逆矩阵为 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} (k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数且}$$

$k_2 \neq k_3$).

(22) 【解】 (I) 因为 $E(X)=0, E(X^2)=1, E(Y)=\lambda$, 以及 X, Y 相互独立, 故

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) = E(X^2)E(Y) - E^2(X)E(Y) = \lambda.$$

(II) 由 Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 即 $P(Y=j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} (j=0, 1, 2, \dots)$, 于是, Z 的所有可能取值为全体整数. 故 Z 的概率分布为

1) 当 k 为正整数时, 有

$$P(Z=k) = P(XY=k) = P(X=1, Y=k) = P(X=1)P(Y=k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k=1, 2, 3, \dots),$$

2) 当 k 为负整数时, 有

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(XY=k) = P(X=-1, Y=-k) = P(X=-1)P(Y=-k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^{-k}}{(-k)!} e^{-\lambda} (k=-1, -2, -3, \dots), \end{aligned}$$

3) 当 k 为 0 时, 有

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(XY=0) = P(X=-1, Y=0) + P(X=1)P(Y=0) = P(X=-1, Y=0) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} + \frac{1}{2} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } P(Z=k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & k=1, 2, 3, \dots \\ e^{-\lambda}, & k=0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^{-k}}{(-k)!} e^{-\lambda}, & k=-1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

(23) 【解】 (I) 似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{2^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|}, \quad -\infty < x_i < +\infty, i=1, 2, \dots$$

$$\text{于是 } \ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0, \text{ 得 } \sigma \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} E(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(|X_i|) = E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x}{\sigma}} = -x e^{-\frac{x}{\sigma}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(|X_i|) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{E[|X|^2] - E^2(|X|)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} -x^2 d e^{-\frac{x}{\sigma}} - \sigma^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} 2x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) = \frac{1}{n} (2\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$