2017 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (A).

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}$, $f(0)=f(0-0)=b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$,

从而 $ab=\dfrac{1}{2}$,应选(A).

(2)**【答案】** (C).

【解】 **方法一** 若 $f(x)>0$,则 $f'(x)>0$,从而 $f(1)>f(-1)>0$;

若 $f(x)<0$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(1)<f(-1)<0$,

故 $|f(1)|>|f(-1)|$,应选(C).

方法二 由 $f(x)\cdot f'(x)=\left[\dfrac{1}{2}f^2(x)\right]'>0$ 得 $f^2(x)$ 单调递增,

从而 $f^2(1)>f^2(-1)$,故 $|f(1)|>|f(-1)|$,应选(C).

(3)**【答案】** (D).

【解】 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=4,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=1,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}=0,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3},$$

所求的方向导数为$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)}=4\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{2}{3}=2$,应选(D).

(4)**【答案】** (C).

【解】 从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 的时间段上,甲、乙走过的距离分别为

$$S_1=\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t,\quad S_2=\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t,$$

在 $t=t_0$ 时,$S_1=S_2+10$,即$\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t+10$,

或$\int_0^{t_0}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10$,故 $t_0=25$,应选(C).

(5)**【答案】** (A).

【解】 **方法一** 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,

令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,由$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2-\lambda=0,\lambda=0$ 或 $\lambda=1$,

因为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=1$,

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1,\lambda_n=0$,从而 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$,

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆,应选(A).

方法二　令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$，

再由 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r[\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]=r(\boldsymbol{E})=n$ 得

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n,$$

而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})=1$，

于是 $r(\boldsymbol{A})=n-1<n$，即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆，应选(A).

(6)**【答案】**　(B).

【解】　显然矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值都是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 不相似，

应选(B).

方法点评：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同，则

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中一个可相似对角化，一个不可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(7)**【答案】**　(A).

【解】　由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，即

$P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$；

由 $P(B|A)>P(B|\overline{A})$ 得 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，即

$P(B|A)>P(B|\overline{A})$ 等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$，应选(A).

(8)**【答案】**　(B).

【解】　若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1),$$

因为总体 $X\sim N(\mu,1)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，

再由 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\right)$ 得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，从而 $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，

不正确的是(B)，应选(B).

二、填空题

(9)**【答案】**　0.

【解】　**方法一**　$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8+o(x^8)$，

由$\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}=0$得$f^{(3)}(0)=0$.

方法二 根据求导改变奇偶性的性质,因为$f(x)$为偶函数,所以$f^{(3)}(x)$为奇函数,故$f^{(3)}(0)=0$.

(10)**【答案】** $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$($C_1,C_2$为任意常数).

【解】 特征方程为$\lambda^2+2\lambda+3=0$,特征值为$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$,

通解为$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$($C_1,C_2$为任意常数).

(11)**【答案】** -1.

【解】 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2-1},\quad Q=-\dfrac{ay}{x^2+y^2-1}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2},$$

因为曲线积分与路径无关,所以$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,故$a=-1$.

(12)**【答案】** $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

【解】 **方法一** $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=-\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right]'=-\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

方法二 令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$,

$$\text{则}\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n=-\frac{-x}{1+x}=\frac{x}{1+x},$$

故$S(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

(13)**【答案】** 2.

【解】 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,所以$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,从而$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})$,

由$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得$r(\boldsymbol{A})=2$,故向量组$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$的秩为2.

(14)**【答案】** 2.

【解】 X的密度为$f(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)dx$$
$$=0+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-4}{2}+2\right)\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)d\left(\frac{x-4}{2}\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+2)\varphi(x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=2.$$

方法点评:本题考查连续型随机变量的分布函数、密度函数及数字特征,需要注意以下几点:

(1) 若随机变量的分布函数为 $F(x)$,则其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}F'(x), & x \text{ 为 } F(x) \text{ 的可导点}, \\ 0, & x \text{ 为 } F(x) \text{ 的不可导点}.\end{cases}$$

(2) 若 $f(x)$ 为随机变量的密度函数,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

(3) 标准正态分布的密度函数 $\varphi(x)$ 为奇函数,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi(x)\mathrm{d}x=0$($k$ 为正奇数).

三、解答题

(15)【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x f_1'-\sin x\cdot f_2'$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$;

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^x f_1'+\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x f_{11}''-\sin x\cdot f_{12}'')-\cos x\cdot f_2'-\sin x(\mathrm{e}^x f_{21}''-\sin x\cdot f_{22}''),$$

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1)$.

(16)【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}.$$

方法点评:本题考查定积分的定义求极限.

n 项和求极限一般分为两种类型:

(1) 分子次数齐、分母次数齐,且分母的次数高于分子一次,采用定积分定义求极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若分子次数或分母次数不齐,一般使用迫敛定理.

(17)【解】 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$,

令 $y'=0$ 得 $x_1=-1,x_2=1$,对应的函数值为 $y_1=0,y_2=1$;

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ 两边再对 x 求导得 $6x+6yy'^2+3y^2y''+3y''=0$,

由 $y''(-1)=2>0$ 得 $x=-1$ 为极小值点,极小值为 $y=0$;

由 $y''(1)=-1<0$ 得 $x=1$ 为极大值点,极大值为 $y=1$.

(18)【证明】 (Ⅰ)根据极限保号性,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$,所以存在 $\delta>0$,

当 $x\in(0,\delta)$ 时,$\dfrac{f(x)}{x}<0$,即当 $x\in(0,\delta)$ 时 $f(x)<0$,

于是存在 $c\in(0,\delta)$,使得 $f(c)<0$,

因为 $f(c)f(1)<0$,所以存在 $x_0\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $f(x_0)=0$.

(Ⅱ)令 $F(x)=f(x)f'(x)$,则 $F'(x)=f(x)f''(x)+f'^2(x)$,

由 $f(0)=f(c)=0$,得存在 $x\in(0,c)$,使得 $f'(\xi_1)=0$,

因 $f(0)=f(c)=0$,所以 $F(0)=F(\xi_1)=F(c)$,
由罗尔定理,存在 $\eta_1\in(0,\xi_1)$,存在 $\eta_2\in(\xi_1,c)$,使 $F'(\eta_1)=0,F'(\eta_2)=0$,
即方程 $f(x)f''(x)+f'^2(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有两个不同的实根.

(19)【解】 (Ⅰ)由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=2x$,

故 C 在 xOy 平面上的投影曲线为 $L:\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$

(Ⅱ)$M=\iint\limits_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S$,

由 $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 得 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

则 $M=\iint\limits_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S=9\sqrt{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=18\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r$

$=18\times\dfrac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=18\times\dfrac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=64.$

(20)【证明】 (Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,
因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 两两不同,所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,
又因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,从而 $r(\boldsymbol{A})<3$,于是 $r(\boldsymbol{A})=2$.
(Ⅱ)因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 基础解系含一个线性无关的解向量,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

(21)【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$,

因为 $\lambda_3=0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$,得 $a=2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$,得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

由 $-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得

$\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得

$\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$得 $\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，

$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}} -3y_1^2+6y_2^2$.

(22)**【解】** (Ⅰ)$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 2y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$，

$$P\{Y\leqslant E(Y)\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(Ⅱ)**方法一** $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0,Y\leqslant z\}=P\{X=0,Y\leqslant z\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}=\frac{1}{2}\int_0^z 2y\,\mathrm{d}y=\frac{z^2}{2};$$

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0,Y\leqslant z\}=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$；

当 $2\leqslant z<3$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0,Y\leqslant z\}+P\{X=2,Z\leqslant z-2\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant z-2\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2}2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2,$$

即 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(z-2)^2, & 2\leqslant z<3,\\ 1, & z\geqslant 3,\end{cases}$

概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

方法二　由全概率公式得

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=2\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-2\},\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^z 2y\,\mathrm{d}y=\dfrac{z^2}{2}$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}P\{Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$；

当 $2\leqslant z<3$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P\{Y\leqslant z-2\}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2}2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{(z-2)^2}{2};$$

当 $z\geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$，

故 $f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)**【解】**（Ⅰ）由 $X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$ 得 $\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，

Z_1 的分布函数为 $F(z)=P\{Z_1\leqslant z\}$，

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F(z)=P\left\{\left|\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}\right|\leqslant\dfrac{z}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\dfrac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)-1$，

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2\Phi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)-1, & z\geqslant 0,\end{cases}$$

Z_1 的密度函数为 $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z>0.\end{cases}$

（Ⅱ）$E(Z)=E(|X_i-\mu|)=E(|X_1-\mu|)$

$$\begin{aligned}&=\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}z=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sigma}\right)\\&=2\sigma\int_0^{+\infty}t\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},\end{aligned}$$

由$\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\overline{Z}$，得$\sigma$的矩估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{Z}$.

（Ⅲ）似然函数为

$$L=f(z_1)\cdots f(z_n)=\frac{2^n}{\sigma^n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z_1^2+\cdots+z_n^2)}\ (z_i>0,i=1,2,\cdots,n),$$

$$\ln L=n\ln 2-n\ln\sigma-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}(z_1^2+\cdots+z_n^2),$$

由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}(z_1^2+\cdots+z_n^2)=0$得$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，

故σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.