2004 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** $y=x-1$.

【解】 设曲线 $y=\ln x$ 上切点坐标为$(a,\ln a)$.

因为 $x+y=1$ 的斜率为 -1,所以切线的斜率为 1.

令$\frac{1}{a}=1$ 得 $a=1$,切点为$(1,0)$,切线为 $y-0=x-1$,即 $y=x-1$.

(2)**【答案】** $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

【解】 令 $e^x=t$,由 $f'(e^x)=xe^{-x}$,得 $f'(t)=\frac{\ln t}{t}$,从而 $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$.

于是 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$,由 $f(1)=0$ 得 $C=0$,故 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

(3)**【答案】** $\frac{3\pi}{2}$.

【解】 **方法一** 令 $A(\sqrt{2},0)$,$B(0,\sqrt{2})$,则

$$\int_L x\,dy-2y\,dx=\oint_{L+\overline{BO}+\overline{OA}}x\,dy-2y\,dx+\int_{\overline{OB}}x\,dy-2y\,dx-\int_{\overline{OA}}x\,dy-2y\,dx,$$

$$\oint_{L+\overline{BO}+\overline{OA}}x\,dy-2y\,dx=3\iint_D dx\,dy=3\times\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{3\pi}{2},$$

$$\int_{\overline{OB}}x\,dy-2y\,dx=0,\quad \int_{\overline{OA}}x\,dy-2y\,dx=0,$$

于是$\int_L x\,dy-2y\,dx=\frac{3\pi}{2}$.

方法二 令$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$$\left(\text{起点 }\theta=0,\text{终点 }\theta=\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\begin{aligned}\int_L x\,dy-2y\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta)d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\theta)d\theta=\pi+2I_2=\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

(4)**【答案】** $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

【解】 令 $x=e^t$,则 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$, $x\frac{dy}{dx}=Dy=\frac{dy}{dt}$,

代入原方程得$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$,通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$,

故原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

(5)**【答案】** $\frac{1}{9}$.

【解】 $|A|=3$，在 $ABA^*=2BA^*+E$ 两边右乘 A，得 $3AB=6B+A$ 或 $3(A-2E)B=A$，于是 $3^3|A-2E|\cdot|B|=|A|$.

而 $A-2E=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$|A-2E|=1$，故 $|B|=\frac{1}{9}$.

方法点评： 本题考查由矩阵关系等式确定的矩阵的行列式.
本题的关键是要应用公式 $AA^*=A^*A=|A|E$.

(6)**【答案】** $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【解】 由 $X\sim E(\lambda)$，得 $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$，且其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$

于是 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{1}{\lambda}\right\}=1-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

二、选择题

(7)**【答案】** (B).

【解】 **方法一** 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x^2=1$，得 $\alpha\sim x$；

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\beta}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{mx^{m-1}}$，得 $m-1=2$，即 $m=3$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\beta}{x^3}=\frac{2}{3}$，

于是 $\beta\sim\frac{2}{3}x^3$；

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\gamma}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\sqrt{x}}{mx^{m-1}}$，得 $m-1=1$，即 $m=2$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\gamma}{x^2}=\frac{1}{4}$，

于是 $\gamma\sim\frac{1}{4}x^2$.

故无穷小量从低阶到高阶的次序为 α,γ,β，应选(B).

方法二 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\tan x}=+\infty$，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x\sqrt{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x\sqrt{x}}{\cos x^2}=0,$$

所以无穷小量的阶数从低阶到高阶的次序为 α,γ,β，应选(B).

方法三　由 $t \to 0^+$ 时，$\cos t^2 \to 1$，$\tan\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$，$\sin t^3 \sim t^3$ 得

$$\alpha \sim \int_0^x 1\mathrm{d}t = x,\beta \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2} = \frac{2}{3}x^3,\gamma \sim \int_0^{\sqrt{x}} t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^2,$$

显然无穷小量从低阶到高阶的次序为 α,γ,β，应选(B).

方法点评：本题考查无穷小量阶数的比较. 判断无穷小量的阶数有如下几种常用的方法：

(1) 等价无穷小. 如：$\sqrt[3]{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{3}x^2$；

(2) 麦克劳林公式. 如：$x-\sin x = x-\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right] \sim \frac{1}{6}x^3$；

(3) 待定阶数法. 如：$\alpha = \int_0^{x^2}\frac{\tan t}{t}\mathrm{d}t$，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\frac{\tan x^2}{x^2}}{mx^{m-1}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{mx^{m-1}}$，

得 $m-1=1$，即 $m=2$，得 $\alpha \sim x^2$.

(8)**【答案】**　(C).

【解】　根据导数的定义，$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} > 0$.

由极限保号性，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x| < \delta$ 时，$\frac{f(x)-f(0)}{x} > 0$.

于是当 $x \in (-\delta,0)$ 时，$f(x) < f(0)$；当 $x \in (0,\delta)$ 时，$f(x) > f(0)$，应选(C).

方法点评：本题考查极限保号性的应用. 函数在一点导数大于(小于)零与函数在一个区间内大于(小于)零是不同的，需要作如下补充说明：

(1) 函数在一点导数大于(小于)零的情形

若 $f'(a)>0$，由导数的定义，$f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，于是有 $\begin{cases} f(x)<f(a), & x\in(a-\delta,a), \\ f(x)>f(a), & x\in(a,a+\delta),\end{cases}$ 但 $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内不一定单调增加；

若 $f'(a)<0$，由导数的定义，$f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，由极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，于是有 $\begin{cases} f(x)>f(a), & x\in(a-\delta,a), \\ f(x)<f(a), & x\in(a,a+\delta),\end{cases}$ 但 $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内不一定单调减少.

注意函数在一点处的导数大于(小于)零不能推出函数在该点邻域内单调递增(递减)，

如：$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}>0$，

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$，

因为 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)=\dfrac{3}{2}>0,f'\left(\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}<0$,所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内不保正号,$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不单调.

(2) 若 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内保正号或负号,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域内单调增加或单调减少.

(9)**【答案】** (B).

【解】 **方法一** 取 $a_n=\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$,显然 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散,(A) 不对;

取 $a_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,但 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$,(C) 不对;

取 $a_n=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ 发散,但 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=+\infty$,(D) 不对,应选(B).

方法二 设 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda>0$,取 $\varepsilon_0=\dfrac{\lambda}{2}>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,所以存在 N,当 $n>N$ 时,

$|na_n-\lambda|<\dfrac{\lambda}{2}$,于是 $na_n>\dfrac{\lambda}{2}$ 或 $a_n>\dfrac{\lambda}{2n}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{2n}$ 发散,由正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,应选(B).

(10)**【答案】** (B).

【解】 **方法一** 交换积分次序,得

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

$F'(t)=(t-1)f(t)$,则 $F'(2)=(2-1)f(2)=f(2)$,应选(B).

方法二 令 $G(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t[G(t)-G(y)]\mathrm{d}y\\&=(t-1)G(t)-\int_1^t G(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$F'(t)=G(t)+(t-1)G'(t)-G(t)=(t-1)f(t)$,于是 $F'(2)=f(2)$,应选(B).

(11)**【答案】** (D).

【解】 由初等变换的定义,得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,应选(D).

(12)**【答案】** (A).

【解】 **方法一** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵,所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1,r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$,于是 $r(\boldsymbol{A})<n,r(\boldsymbol{B})<n$.

因为矩阵的秩、矩阵行向量组的秩、矩阵列向量组的秩都相等,于是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩小于列数,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩小于行数,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关,应选(A).

方法二

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$,

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\\b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},\\\vdots\\b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2s}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.\end{cases}\text{及}\begin{cases}a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0},\\a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0},\\\vdots\\a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵,所以存在不全为零的常数 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}$ 及 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$,使得 $b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 及 $a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$,

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 都线性相关,应选(A).

方法点评:当研究矩阵的秩与向量相关性时,一般使用矩阵的秩、矩阵行向量组的秩、矩阵列向量组的秩相等的性质.

向量组线性相关的充要条件是该向量组的秩小于向量组所含向量的个数;向量组线性无关的充要条件是向量组的秩与向量组所含向量个数相等.

(13)**【答案】** (C).

【解】 由 $P\{|X|<x\}=1-P\{|X|\geqslant x\}=1-2P\{X\geqslant x\}=\alpha$,得 $P\{X\geqslant x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$.

再由 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,得 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$,应选(C).

(14)**【答案】** (A).

【解】 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{1}{n}[\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,X_2)+\cdots+\mathrm{Cov}(X_1,X_n)]$,

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,所以 $\mathrm{Cov}(X_1,X_i)=0(i=2,3,\cdots,n)$,

于是 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{1}{n}D(X_1)=\dfrac{\sigma^2}{n}$,应选(A).

方法点评:随机变量数字特征计算中要熟练掌握如下几个性质:

(1) 若 X,Y 相互独立,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$;

(2) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本,则 $E(\overline{X})=E(X),D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X)$.

三、解答题

(15)**【证明】　方法一　辅助函数法(单调性)**

$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$ 等价于 $\ln^2 b-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(b-a)>0$,

令 $f(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$,　$f(a)=0$.

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$,因为 $f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0(x>e)$,所以当 $x>e$ 时,$f'(x)$ 单调减少.

由 $\begin{cases}f'(e^2)=0,\\ f''(x)<0(x>e),\end{cases}$ 得 $f'(x)>0(e<x<e^2)$,即 $f(x)$ 在 (e,e^2) 内单调增加,由 $e<a<b<e^2$ 及 $f(a)=0$ 得 $f(b)>0$,故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法二　中值定理法

$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$ 等价于 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$.

令 $f(x)=\ln^2 x$,$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$,由微分中值定理得

$$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln c}{c},\text{其中 } c\in(a,b).$$

令 $\varphi(x)=\frac{2\ln x}{x}$,因为 $\varphi'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0(x>e)$,所以 $\varphi(x)$ 在 (e,e^2) 内单调减少且 $\varphi(e^2)=\frac{4}{e^2}$,从而 $\frac{2\ln c}{c}>\frac{4}{e^2}$,即 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$.

(16)**【解】　方法一**　设飞机着陆时 $t=0$,从着陆开始的 t 时刻飞机速度为 $v(t)$,

由牛顿第二定律得 $F_{阻}=ma$,由题意得 $\begin{cases}m\frac{dv}{dt}=-kv,\\ v(0)=700.\end{cases}$

由 $m\frac{dv}{dt}=-kv$,得 $m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-kv$,即 $m\,dv=-k\,dx$,积分得 $mv=-kx+C$.

由 $v(0)=700$,$x(0)=0$,得 $C=700m$,于是 $x=\frac{1}{k}(700-v)m$,

取 $v=0$ 得 $x=\frac{1}{6\times10^6}\times700\times9\ 000=1.05$ (km),即飞机从着陆到停止最长可以滑行 1.05 千米.

方法二　设从着陆($t=0$)开始 t 时刻飞机滑行的速度为 $v(t)$,根据题意得

$$\begin{cases}m\frac{dv}{dt}=-kv,\\ v(0)=700.\end{cases}$$

由 $m\frac{dv}{dt}=-kv$,得 $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=0$,解得 $v(t)=Ce^{-\int\frac{k}{m}dt}=Ce^{-\frac{k}{m}t}$,

由 $v(0)=700$ 得 $C=700$,于是 $v(t)=700e^{-\frac{k}{m}t}$.

故飞机滑行的最大距离为

$$S=\int_0^{+\infty} v(t)\mathrm{d}t=700\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{700m}{k}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}\left(\frac{k}{m}t\right)=\frac{700m}{k}\Gamma(1)=\frac{700m}{k}=1.05\ (\mathrm{km}).$$

(17)**【解】** 补充 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$,取下侧,

$$I=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0})2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v,$$

$$=6\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}r(r^2+z)\mathrm{d}r$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{(1-z)^2}{4}+\frac{z(1-z)}{2}\right]\mathrm{d}z=3\pi\int_0^1(1-z^2)\mathrm{d}z=2\pi,$$

而$\iint\limits_{\Sigma_0}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$

故$\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi-3\pi=-\pi.$

(18)**【证明】** 令 $f(x)=x^n+nx-1$, $f(0)=-1$, $f(1)=n$.

因为 $f(0)f(1)<0$,所以由零点定理,存在 $x_n\in(0,1)$,使得 $f(x_n)=0$,即方程 $x^n+nx-1=0$ 有正根 x_n.

因为 $f'(x)=nx^{n-1}+n>0(x>0)$,所以 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调增加,

故 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一的正根 x_n.

由 $x_n^n+nx_n-1=0$ 得 $0<x_n=\frac{1}{n}(1-x_n^n)<\frac{1}{n}$,于是 $0<x_n^\alpha<\frac{1}{n^\alpha}$.

因为 $\alpha>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛,所以由正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

(19)**【解】** **方法一** $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边对 x 求偏导,

得 $2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$,解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z}$;

$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边对 y 求偏导,

得 $-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$,解得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}$.

由$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=9,\\ y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-9,\\ y=-3.\end{cases}$

当$(x,y)=(9,3)$ 时,

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3)}=\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3)}=-\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3)}=\frac{5}{3},$$

因为 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$ 且 $A>0$,所以当 $(x,y)=(9,3)$ 时,函数 $z=f(x,y)$ 取极小值 $f(9,3)=3$;

当 $(x,y)=(-9,-3)$ 时,

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{5}{3},$$

因为 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$ 且 $A<0$,所以当 $(x,y)=(-9,-3)$ 时,函数 $z=f(x,y)$ 取极大值 $f(-9,-3)=-3$.

方法二 令 $F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$,

$F'_x=2x-6y,F'_y=-6x+20y-2z,F'_z=-2y-2z$,

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{x-3y}{y+z}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}=0,\\ x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0,\end{cases}$ 得 $(x,y)=(9,3)$ 或 $(x,y)=(-9,-3)$.

当 $(x,y)=(9,3)$ 时,$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3)}=\frac{1}{6},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3)}=-\frac{1}{2},C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3)}=\frac{5}{3}$,

由 $AC-B^2=\frac{1}{36}$ 且 $A>0$ 得 $(x,y)=(9,3)$ 为函数 $z=z(x,y)$ 的极小值点,极小值为 3;

当 $(x,y)=(-9,-3)$ 时,

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3)}=-\frac{5}{3},$$

由 $AC-B^2=\frac{1}{36}$ 且 $A<0$ 得 $(x,y)=(-9,-3)$ 为函数 $z=z(x,y)$ 的极大值点,极大值为 -3.

(20)**【解】** **方法一**

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

$$=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}.$$

当 $a=0$ 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时,方程组有非零解.

当 $a=0$ 时,由 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ 得方程组的通解为

$$X=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ (C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}\text{ 为任意常数})；$$

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，

$$\text{由 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\-2a&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-na&0&\cdots&a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\-2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&\cdots&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&0&\cdots&0\\-3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

原方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$（$C$ 为任意常数）.

方法二

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+\frac{n(n+1)}{2}&a+\frac{n(n+1)}{2}&\cdots&a+\frac{n(n+1)}{2}\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix},$$

当 $a+\dfrac{n(n+1)}{2}=0$，即 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$，由 $r(\boldsymbol{A})=n-1<n$ 得原方程组有无数个解，

显然 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，故方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$（$C$ 为任意常数）；

当 $a+\dfrac{n(n+1)}{2}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2+a&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a\end{pmatrix}$，

当 $a=0$ 时，方程组有无数个解，由 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ 得通解为

$$\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+C_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\ (C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

(21)【解】 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+3a+18)$，

情形一：$\lambda=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则当 $\lambda=2$ 时，$\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$，即 $4-16+3a+18=0$，解得 $a=-2$.

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix},$$

因为 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，所以方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含两个线性无关的解向量，即 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

情形二：$\lambda=2$ 为一重特征值，则 $\lambda^2-8\lambda+3a+18=0$ 有二重根，即 $\Delta=64-4(3a+18)=0$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$，二重特征值为 $\lambda_2=\lambda_3=-\dfrac{-8}{2}=4$.

因为 $r(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

方法点评：本题考查矩阵对角化.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，判断矩阵可否对角化有如下常见思路：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单值，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 存在 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的重数与该特征值对应的线性无关的特征向量个数相等，即若 λ_0 为 r 重特征值，且 $n-r(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可相似对角化.

(22)【解】 由 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，得 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{12}$.

又由 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，得 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\dfrac{1}{6}$.

(Ⅰ) (X,Y) 的可能取值为 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$，

$$\begin{aligned}P\{X=0,Y=0\}&=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3};\end{aligned}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12};$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}.$$

（Ⅱ）$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$， $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$， $XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$，

$E(X)=\frac{1}{4}$， $E(X^2)=\frac{1}{4}$， $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{16}$，

$E(Y)=\frac{1}{6}$， $E(Y^2)=\frac{1}{6}$， $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{36}$，

由 $E(XY)=\frac{1}{12}$ 得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$，

则 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\frac{1}{24}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{5}}{6}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

(23)【解】（Ⅰ）总体 X 的密度函数为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1, \\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$

$$E(X)=\int_1^{+\infty} x f(x;\beta)\mathrm{d}x=\beta\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\beta}}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

（Ⅱ）似然函数为

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\beta) &= f(x_1,\beta)f(x_2,\beta)\cdots f(x_n,\beta) \\ &= \beta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{-\beta-1},(x_i>1,i=1,2,\cdots,n), \end{aligned}$$

取对数得 $\ln L=n\ln\beta-(\beta+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得 β 的最大似然估计值为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.