1987 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** $x-y+z=0$.

【解】 直线$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=\{0,1,1\}$,直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$的方向向量为$\boldsymbol{s}_2=\{1,2,1\}$,所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{0,1,1\}\times\{1,2,1\}=\{-1,1,-1\}$,

则所求平面方程为$\pi: x-y+z=0$.

(2)**【答案】** $-\dfrac{1}{\ln 2}$.

【解】 由$y'=2^x(1+x\ln 2)=0$,得$x=-\dfrac{1}{\ln 2}$.

当$x<-\dfrac{1}{\ln 2}$时$y'<0$;当$x>-\dfrac{1}{\ln 2}$时$y'>0$,故当$x=-\dfrac{1}{\ln 2}$时,函数$y=x2^x$取得极小值.

(3)**【答案】** $\dfrac{3}{2}$.

【解】 由$\ln x=(\mathrm{e}+1)-x$得出$x=\mathrm{e}$,曲线$y=\ln x$与直线$y=(\mathrm{e}+1)-x$的交点为$(\mathrm{e},1)$,则所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}(\mathrm{e}+1-x)\,\mathrm{d}x=x\ln x\,\Big|_1^{\mathrm{e}}-(\mathrm{e}-1)+(\mathrm{e}+1)-\frac{(\mathrm{e}+1)^2-\mathrm{e}^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

(4)**【答案】** -18π.

【解】 **方法一** 由格林公式得

$$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=\iint_D(2x-4-2x+2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-18\pi.$$

方法二 令$L:\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=3\sin t\end{cases}$(起点$t=0$,终点$t=2\pi$),则

$$\begin{aligned}\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}(18\sin t\cos t-6\sin t)\cdot(-3\sin t)\mathrm{d}t+(9\cos^2 t-12\cos t)\cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(-54\sin^2 t\cos t+18\sin^2 t+27\cos^3 t-36\cos^2 t)\mathrm{d}t\\&=18\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-36\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=36\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-72\int_0^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=72I_2-144I_2=-72I_2=-18\pi.\end{aligned}$$

(5)**【答案】** $(1,1,-1)$.

【解】 令$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}$,

由$\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$,得

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$(1,1,-1)$.

二、【解】 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{3x^2}=\dfrac{1}{3\sqrt{a}}$,得$\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{3\sqrt{a}}x^3$,从而 $b=1$,

再由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{3\sqrt{a}}}{x-\sin x}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$,得 $a=4$,

故$a=4,b=1$.

三、

(1)**【解】** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+yf'_y,\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'\cdot(1+y)$,故$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'(f'_x+yf'_y)(1+y)$.

(2)**【解】** 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,解得 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$,

而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$,

由$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$

得$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$,

于是 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

四、【解】 方法一

$y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 两边积分得 $y''+6y'+(9+a^2)y=x+C_0$,

$y''+6y'+(9+a^2)y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+6\lambda+(9+a^2)=0$,

解得 $\lambda_{1,2}=-3\pm a\mathrm{i}$,

则方程 $y''+6y'+(9+a^2)y=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos ax+C_2\sin ax)$;

设 $y''+6y'+(9+a^2)y=x+C_0$ 的特解为 $y^*=Ax+B$,代入得

$$A=\frac{1}{9+a^2},\quad B=\frac{C_0}{9+a^2}-\frac{6}{(9+a^2)^2},$$

故原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos ax+C_2\sin ax)+\frac{x}{9+a^2}+\frac{C_0}{9+a^2}-\frac{6}{(9+a^2)^2}.$$

方法二

特征方程为 $\lambda^3+6\lambda^2+(9+a^2)\lambda=0$,

解得特征根为 $\lambda_1=0,\quad\lambda_2=-3+a\mathrm{i},\quad\lambda_3=-3-a\mathrm{i}$,

$y'''+6y''+(9+a^2)y'=0$ 的通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)$,

显然原方程有特解 $y_0(x)=\dfrac{x}{9+a^2}$,

故原方程通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\dfrac{x}{9+a^2}$.

五、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}=k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$,

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$绝对收敛,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$条件收敛,所以原级数条件收敛,应选(C).

(2)【答案】 (D).

【解】 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}(tx)\xlongequal{tx=u}\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$,

显然 I 与 s 有关,与 t 无关,应选(D).

(3)【答案】 (B).

【解】 由极限的保号性可知,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,

即 $f(x)<f(a)$,故 $x=a$ 为极大值点,应选(B).

(4)【答案】 (C).

【解】 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得出 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$,

由 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=a^{n-1}$,应选(C).

六、【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$,得幂级数的收敛半径为 $R=2$,

当 $x=-2$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛;

当 $x=2$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}2^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故收敛域为$[-2,2)$;

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$,

当 $x=0$ 时,$S(0)=\frac{1}{2}$;

当 $x\neq 0$ 时,$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$,

故 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0,\\ -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2 \text{ 且 } x\neq 0.\end{cases}$

七、【解】 曲面 S 的方程为 $S:y-1=x^2+z^2(1\leqslant y\leqslant 3)$,取外侧,

令 $S_0:y=3(x^2+z^2\leqslant 2)$,取右侧,则

$I=\left(\oiint\limits_{S+S_0}-\iint\limits_{S_0}\right)x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

由$\oiint\limits_{S+S_0}x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_1^3\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant y-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\pi\int_1^3(y-1)\mathrm{d}y=2\pi$,

$$\iint_{S_0} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S_0}2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-16\iint_{S_0}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-16\iint_{x^2+z^2\leqslant 2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-32\pi,$$

故 $I=34\pi$.

八、**【证明】** 令 $g(x)=f(x)-x$,

因为 $0<f(x)<1(0\leqslant x\leqslant 1)$,所以 $g(0)=f(0)>0, g(1)=f(1)-1<0$,

由零点定理,$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点,即存在 $x\in(0,1)$,使得 $g(x)=0$,即 $f(x)=x$.

$g'(x)=f'(x)-1$,因为 $f'(x)\neq 1$,所以 $g'(x)>0$ 或 $g'(x)<0$,

即 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调,故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内零点唯一,

即在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x,使得 $f(x)=x$.

九、**【解】** $$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right),$$

当 $a\neq 1$,b 为任意常数时,方程组有唯一解;

当 $a=1,b\neq -1$ 时,方程组无解;

当 $a=1,b=-1$ 时,方程组有无数个解,将 a,b 代入后得出

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$得方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

十、填空题

(1)**【答案】** $1-(1-p)^n$, $[1+(n-1)p](1-p)^{n-1}$.

【解】 设 n 次试验中 A 发生的次数为 X,显然 $X\sim B(n,p)$,

则 $P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-C_n^0p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$;

$$P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p(1-p)^{n-1}$$
$$=(1-p)^{n-1}[1+(n-1)p].$$

(2)**【答案】** $\frac{53}{120}$, $\frac{20}{53}$.

【解】 记 $A_i=\{$取的是第 i 个箱子$\}(i=1,2,3)$,$B=\{$从箱子中取出的是白球$\}$,则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},P(B\mid A_1)=\frac{1}{5},P(B\mid A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},P(B\mid A_3)=\frac{5}{8}.$$

① 由全概率公式知: $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{53}{120}.$$

②$P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{53}{120}}=\dfrac{20}{53}$;

(3)**【答案】** 1，$\dfrac{1}{2}$.

【解】 方法一

由 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$，得 $X\sim N\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，

故 $E(X)=1$，$D(X)=\dfrac{1}{2}$.

方法二

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[1+(x-1)]e^{-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x^2=t}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

十一、【解】 因为随机变量 X,Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X+Y\leqslant z\}=\displaystyle\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=\displaystyle\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x=\frac{z}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$，

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{2}e^{-z}(e^2-1), & z>2.\end{cases}$$