2008 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (B).

【解】 由 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0$,得 $x=0$,即 $f'(x)$ 只有一个零点,应选(B).

(2)**【答案】** (A).

【解】 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

由 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$,则 $f(x,y)$ 在(0,1)处的梯度为 $\boldsymbol{i}$,应选(A).

(3)**【答案】** (D).

【解】 由微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$,得三阶常系数齐次线性微分方程的特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2i$,

特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda^2+4)=0$,即 $\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$,

故所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$,应选(D).

(4)**【答案】** (B).

【解】 **方法一　极限存在定理**

因为 $f(x)$ 单调,所以当 $\{x_n\}$ 单调时,$\{f(x_n)\}$ 单调;

又因为 $f(x)$ 有界,所以 $\{f(x_n)\}$ 单调有界,由极限存在定理得 $\{f(x_n)\}$ 收敛,应选(B).

方法二　反例法

取 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$,显然 $f(x)$ 单调增加,$\{x_n\}$ 收敛,

$f(x_n)=\begin{cases}-1, & n=1,3,5,\cdots,\\ 1, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$ 显然 $\{f(x_n)\}$ 发散,(A)不对;

取 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,$x_n=n$,$f(x_n)=\dfrac{n^2}{1+n^2}$,显然 $\{f(x_n)\}$ 收敛,但 $\{x_n\}$ 发散,(C)不对;

取 $f(x)=\arctan x$,$x_n=n$,显然 $\{f(x_n)\}$ 单调增加,但 $\{x_n\}$ 发散,(D)不对,应选(B).

(5)**【答案】** (C).

【解】 **方法一　逆矩阵的定义**

由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,得 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

由可逆矩阵的定义得 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$;

再由 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$ 得 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆且 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$,应选(C).

方法二　定义法求特征值

令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,则 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=\lambda^3\boldsymbol{X}$,由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$ 得 $\lambda^3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$,于是 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,1,由 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=1\neq 0$ 得 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$

与$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$都可逆，应选(C).

(6)**【答案】** (B).

【解】 题目图中的曲面是由 $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周而成的曲面，

曲面方程为 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 1 个，应选(B).

方法点评：(1) 平面曲线 $L:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面为

$$\Sigma_x:f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0;$$

平面曲线 L 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面为

$$\Sigma_y:f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

(2) 二次型的标准形不唯一，但二次型的正、负惯性指数是唯一的，即二次型标准化后正、负惯性指数不变.

(7)**【答案】** (A).

【解】 由分布函数的定义得 $F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max(X,Y)\leqslant x\}$，

由 X,Y 独立同分布，得 $F_Z(x)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F^2(x)$，应选(A).

方法点评：设(X,Y)为二维随机变量，$Z=\varphi(X,Y)$为(X,Y)的函数. 求 Z 的分布时，一般采用定义法，即

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\varphi(X,Y)\leqslant z\}.$$

如下两种常见的随机变量的函数的分布需要熟练掌握：

(1)$Z=\max\{X,Y\}$

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\},$$

若 X,Y 相互独立，则 $F_Z(z)=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z)$.

(2)$Z=\min\{X,Y\}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}=1-P\{X>z,Y>z\},\end{aligned}$$

若 X,Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}=1-[1-P\{X\leqslant z\}]\cdot[1-P\{Y\leqslant z\}]\\&=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)].\end{aligned}$$

(8)**【答案】** (D).

【解】 因为 $\rho_{XY}=1$ 的充分必要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$(其中 $a>0$)，排除(A)，(C)；由 $E(X)=0,E(Y)=1$，得 $E(2X+1)=1=E(Y)$，应选(D).

方法点评：(1)$\rho_{XY}=1$ 的充分必要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$；

(2)$\rho_{XY}=-1$ 的充分必要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$.

二、填空题

(9)【答案】 $\dfrac{1}{x}$.

【解】 方法一 由 $xy'+y=0$,得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=0$,解得 $y=C\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\dfrac{C}{x}$.

由 $y(1)=1$,得 $C=1$,于是 $y=\dfrac{1}{x}$.

方法二 由 $xy'+y=0$,得$(xy)'=0$,即 $xy=C$.

再由 $y(1)=1$,得 $C=1$,故所求的特解为 $y=\dfrac{1}{x}$.

(10)【答案】 $y=x+1$.

【解】 方法一 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边对 x 求导数,得

$$\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1}{y-x}=1,$$

将 $x=0,y=1$ 代入得$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$.

故曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点$(0,1)$处的切线方程为 $y-1=x-0$,即 $y=x+1$.

方法二 令 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\cos xy-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos xy+\frac{1}{y-x}},$$

切线的斜率为 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,1)}=1$,

故切线方程为 $y-1=x$,即 $y=x+1$.

(11)【答案】 $(1,5]$.

【解】 由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\geqslant|0+2|=2$ 且

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n2^n$ 收敛;

由$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=-4$ 处发散得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\leqslant|-4+2|=2$ 且

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-2)^n$ 发散,

即幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=2$,收敛域为$(-2,2]$,

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $-2<x-3\leqslant 2$,即$(1,5]$.

(12)【答案】 4π.

【解】 方法一 高斯公式法

补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$,$\Sigma_0$ 取下侧,

则$\iint\limits_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

而$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}v=0$,

$$\iint\limits_{\Sigma_0} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r=-4\pi,$$

故原式$=4\pi$.

方法二　二重积分法

令$\Sigma_1: x=\sqrt{4-y^2-z^2}\,(y^2+z^2\leqslant 4(z\geqslant 0))$，取前侧，由对坐标的曲面积分及二重积分的奇偶性质得

$$\iint\limits_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\iint\limits_{\Sigma_1} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 4} y\sqrt{4-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r=4\pi,$$

故$\iint\limits_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\pi$.

(13)**【答案】** 1.

【解】　方法一　令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$\boldsymbol{P}$可逆.

由$\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，

于是$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&\lambda-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0$，得$\boldsymbol{A}$的非零特征值为$\lambda=1$.

方法二　由$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，得$\lambda_1=0$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

又由$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，得$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=1(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，注意到$2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$为非零向量，从而$\lambda_2=1$为$\boldsymbol{A}$的另一个特征值，故$\boldsymbol{A}$的非零特征值为1.

方法点评：求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值通常有三种方法：

(1) 公式法，即通过$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$求特征值，但前提是矩阵已知；

(2) 定义法，即令$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，利用所给矩阵关系等式求特征值；

(3) 关联矩阵法，即通过$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$得$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，从而得$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值相同，求$\boldsymbol{B}$的特征值即可得$\boldsymbol{A}$的特征值.

(14)**【答案】** $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

【解】　由$X\sim P(1)$得$E(X)=D(X)=1$，从而$E(X^2)=D(X)+(EX)^2=2$，

于是$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\dfrac{1^2}{2!}\cdot\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

三、解答题

(15)【解】 **方法一**

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{\sin^3 x}\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{\sin^3 x}$$

$$\xlongequal{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

方法二 $$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}\xlongequal{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{(t-\sin t)t}{\arcsin^4 t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(t-\sin t)t}{t^4}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

方法三 由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(\sin^3 x),$$

从而 $\sin x-\sin(\sin x)\sim\dfrac{1}{6}\sin^3 x\sim\dfrac{1}{6}x^3$,

故 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$.

方法点评:计算不定型$\dfrac{0}{0}$型的极限需要熟练掌握等价无穷小、麦克劳林公式、洛必达法则等工具.$\dfrac{0}{0}$型的极限需要补充如下两点:

(1)x,$\sin x$,$\tan x$,$\arcsin x$,$\arctan x$ 五个函数中任意两个函数之差为三阶无穷小.

【例】 求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}$.

【解】 $$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3},$$

而 $$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}\xlongequal{x=\tan t}\lim_{t\to0}\frac{t-\tan t}{\tan^3 t}=\lim_{t\to0}\frac{t-\tan t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sec^2 t}{3t^2}=-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}\xlongequal{x=\sin t}\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{\sin^3 t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6},$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=-\frac{1}{2}$.

(2) 加减法使用等价无穷小时一定要保证精确度,否则会出现错误结果.

如 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}$,若分子使用 $\arctan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$ 将导致错误结果,因为分母为三阶无穷小,分子等价无穷小的精确度不够.

(16)【解】 **方法一** 设点 $A(\pi,0)$,$P(x,y)=\sin 2x$,$Q(x,y)=2(x^2-1)y$,则

$$\int_L \sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy=\oint_{L+\overline{AO}}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy+\int_{\overline{OA}}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy,$$

由格林公式得

$$\oint_{L+\overline{AO}}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy=-\iint_D 4xy\,dx\,dy=-4\int_0^{\pi}x\,dx\int_0^{\sin x}y\,dy$$

$$=-2\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx=-2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$

$$=-2\pi I_2=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2};$$

$$\int_{\overline{OA}}\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy=\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=0,$$

故$\int_L\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy=-\dfrac{\pi^2}{2}$.

方法二 $\int_L\sin 2x\,dx+2(x^2-1)y\,dy=\int_0^{\pi}[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cos x]dx$

$$=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\,dx=\int_0^{\pi}x^2\,d(\sin^2 x)$$

$$=x^2\sin^2 x\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx$$

$$=-2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=-\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

(17)【解】 设$P(x,y,z)$为曲线C上任意一点,P到xOy平面的距离为$d=|z|$,

令$F(x,y,z)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$,

由$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+\mu=0,\\F'_y=2\lambda y+\mu=0,\\F'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0,\\F'_\mu=x+y+3z-5=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-5,\\y=-5,\\z=5.\end{cases}$

故曲线C到xOy平面距离最近和最远的点分别为$(1,1,1)$和$(-5,-5,5)$.

(18)【证明】 (Ⅰ)$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_0^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$,

因为$f(x)$连续,所以由积分中值定理

$$\Delta F(x)=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)\Delta x,\text{其中}\xi\text{位于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间},$$

从而$\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(\xi)$,于是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$,即$F'(x)=f(x)$.

(Ⅱ)设$f(x+2)=f(x)$,则

$$G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt$$

$$=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=G(x)+2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

由周期函数的平移性质得$\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，于是 $2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=0$，

故 $G(x+2)=G(x)$，即 $G(x)$ 是以 2 为周期的函数.

(19)**【解】** 将 $f(x)$ 进行偶延拓，则

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$=-\frac{2x^2\sin nx}{n\pi}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}(\cos nx)=-\frac{4x\cos nx}{n^2\pi}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}(n=1,2,\cdots);$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$，于是 $f(x)=1-x^2$ 的余弦级数为

$$1-x^2=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi),$$

令 $x=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

(20)**【证明】** (Ⅰ)$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$

$=r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1+1=2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 成比例，不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}=(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，

于是 $r(\boldsymbol{A})=r[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}]=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 1<2$.

方法点评：本题需要熟悉矩阵秩的性质及向量相关性质.

研究矩阵秩时，注意以下性质的使用：

(1) 当出现矩阵加减时，往往使用 $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;

(2) 若出现 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 时，往往使用 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$;

(3) 若出现 $\boldsymbol{AB}$ 时，往往使用 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$;

(4) 若出现 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，往往使用 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(21)**【解】** (Ⅰ)**方法一　数学归纳法**

当 $n=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=D_1=2a$，结论显然成立；

设当 $n=k$ 时，$|\boldsymbol{A}|=D_k=(k+1)a^k$；

当 $n=k+1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=D_{k+1}=2aD_k-a^2D_{k-1}=2a(k+1)a^k-ka^{k+1}$

$=2(k+1)a^{k+1}-ka^{k+1}=(k+2)a^{k+1}$,

由数学归纳法，对一切的自然数 n，有 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

方法二
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a&1&0&\cdots&0\\a^2&2a&1&\cdots&0\\0&a^2&2a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&1&0&\cdots&0\\0&\frac{3a}{2}&1&\cdots&0\\0&a^2&2a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&2a\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix}2a&1&0&\cdots&0\\0&\frac{3a}{2}&1&\cdots&0\\0&0&\frac{4a}{3}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&\frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

方法三 令 $D_n=|\boldsymbol{A}|$，将 D_n 按第一列展开，得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，从而 $D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$，由递推关系得

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n,$$

于是 $D_n=aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^{n-1})+a^n=a^2D_{n-2}+2a^n$

$$=\cdots=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n.$$

（Ⅱ）当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 或 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $a\neq 0$ 时，方程组有唯一解，

由 $D_1=\begin{vmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&2a&1&\cdots&0\\0&a^2&2a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&2a\end{vmatrix}=na^{n-1}$，得 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

（Ⅲ）当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 或 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=0$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数个解，

由 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccccc:c}0&1&0&\cdots&0&1\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0\end{array}\right)$，得通解为 $\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$（$C$ 为任意常数）.

方法点评：本题需要特别注意三对角行列式的计算方法，通常三对角行列式的计算方法有按行（或列）展开、归纳法等.

(22)【解】（Ⅰ）$P\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$，

当 $z<-1$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $z\geqslant 2$ 时,$F_Z(z)=1$;

当 $-1\leqslant z<2$ 时,

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{X=-1\}\cdot P\{X+Y\leqslant z\mid X=-1\}+P\{X=0\}\cdot P\{X+Y\leqslant z\mid X=0\}+\\&\quad P\{X=1\}\cdot P\{X+Y\leqslant z\mid X=1\}\\&=\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z-1\},\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant z<0$ 时,$F_Z(z)=\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z+1\}=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z+1)$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,$F_Z(z)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{z}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z+1)$;

当 $1\leqslant z<2$ 时,$F_Z(z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}P\{Y\leqslant z-1\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{z-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z+1)$,

从而 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1,\\ \frac{1}{3}(z+1), & -1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

方法点评:设随机变量 X 为离散型,其分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,m)$,而随机变量 Y 为连续型,其分布函数为 $f(x)$,且 X,Y 独立,求 $Z=X+Y$ 的分布函数时往往使用全概率公式,即

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=x_1\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=x_1\}+\cdots+P\{X=x_m\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=x_n\}.\end{aligned}$$

(23)**【解】** (Ⅰ)由 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$,得 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$.

再由 $E(S^2)=\sigma^2$,得 $E(T)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2$.

于是 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$ 为 μ^2 的无偏估计量.

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$,标准化得 $\sqrt{n}\overline{X}\sim N(0,1)$,于是 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$.

又 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立,得

$$\begin{aligned}D(T)&=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)=\frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D[(n-1)S^2]\\&=\frac{2}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2(n-1)^2}=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$