1990 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** $x-3y-z+4=0$.

【解】 显然所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{-1,3,1\}$,

所求平面为 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$,即 $x-3y-z+4=0$.

(2)**【答案】** e^{2a}.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{x\cdot\frac{2a}{x-a}}=e^{2a}$.

(3)**【答案】** 1.

【解】 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$

因为 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$.

(4)**【答案】** $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^4}\right)$.

【解】 改变积分次序得

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2 e^{-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right).$$

(5)**【答案】** 2.

【解】 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以该向量组的秩为 2.

二、选择题

(1)**【答案】** (A).

【解】 $F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$,应选(A).

(2)**【答案】** (A).

【解】 由 $f'(x)=[f(x)]^2$ 得

$f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3$,

$f'''(x)=2\times 3[f(x)]^2f'(x)=3!\,[f(x)]^4$,

由归纳法得 $f^{(n)}(x)=n!\,[f(x)]^{n+1}$,应选(A).

(3)**【答案】** (C).

【解】 因为 $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛;

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散,应选(C).

(4)**【答案】** (D).

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,所以由极限保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$.

因为 $1-\cos x>0$,所以 $f(x)>0=f(0)$,故 $x=0$ 为极小值点,应选(D).

(5)【答案】 (B).

【解】 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}$,即$(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$,

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,所以 $k_1+k_2=0,-k_2=0$,或 $k_1=0,k_2=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系;

而$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解,应选(B).

三、

(1)【解】
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right)$$
$$=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{1}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\bigg|_0^1=\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2.$$

(2)【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+y\cos x\cdot f_2'$,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-f_{11}''+\sin x\cdot f_{12}'')+\cos x\cdot f_2'+y\cos x(-f_{21}''+\sin x\cdot f_{22}'')$$
$$=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)\cdot f_{12}''+\cos x\cdot f_2'+y\sin x\cos x\cdot f_{22}''.$$

(3)【解】 特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$,特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

$y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$;

令 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的特解为 $y_0(x)=ax^2\mathrm{e}^{-2x}$,代入得 $a=\dfrac{1}{2}$,

故 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解为
$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

四、【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得幂级数的收敛半径 $R=1$,

当 $x=\pm1$ 时,$(2n+1)(\pm1)^n\to\infty(n\to\infty)$,即 $x=\pm1$ 时,幂级数发散,

故幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$,

则 $S(x)=2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=2x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'+\dfrac{1}{1-x}$
$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

五、【解】 方法一

令 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$,取下侧,
$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=4\pi;$$

$$\iint_{\Sigma_0} yz\,dz\,dx + 2dx\,dy = \iint_{\Sigma_0} 2dx\,dy = -2\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} dx\,dy = -8\pi,$$

故 $I = 12\pi$.

方法二

$$I = \iint_{\Sigma} yz\,dz\,dx + 2dx\,dy = \iint_{\Sigma} yz\,dz\,dx + 2\iint_{\Sigma} dx\,dy,$$

令曲面 Σ 位于 xOz 平面右侧的部分为 Σ_1，由对称性得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} yz\,dz\,dx &= 2\iint_{\Sigma_1} yz\,dz\,dx = 2\iint_{D_{xz}} z\sqrt{4-x^2-z^2}\,dz\,dx \\ &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \sin\theta \cdot \sqrt{4-r^2}\,dr = 4\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\,dr \\ &\xlongequal{r=2\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t \cdot 4\cos^2 t\,dt = 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)\,dt \\ &= 64\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi;\end{aligned}$$

$$2\iint_{\Sigma} dx\,dy = 2\iint_{D_{xy}} dx\,dy = 2\times 4\pi = 8\pi,$$

故 $I = \iint_{\Sigma} yz\,dz\,dx + 2dx\,dy = 12\pi$.

六、**【证明】** 因为 $f(x)$ 不恒为常数，且 $f(a)=f(b)$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)$，不妨设 $f(c)>f(a)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0.$$

七、**【解】** 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，解得 $\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$，

而 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$，

由 $\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right)$，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

八、**【解】** 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$，

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix};$$

由 $9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=9$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，所求的正交变换为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，

则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}9y_3^2$.

九、【解】 设点 P 的坐标为 (x,y)，$\overrightarrow{OP}=\{x,y\}$，$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$，

因为 $\boldsymbol{F}$ 的方向垂直于 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\boldsymbol{F}^0=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\{-y,x\}$，则 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\cdot\boldsymbol{F}^0=\{-y,x\}$，

$$W=\int_L(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{BA}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$$

而 $\displaystyle\oint_{L+\overline{BA}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\times\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$，

$\overline{AB}$：$y=x+1$（起点 $x=1$，终点 $x=3$），则

$$\int_{\overline{AB}}(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_1^3-(x+1)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x=-2,$$

故 $W=2(\pi-1)$.

十、填空题

(1)【答案】 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【解】 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(x)\mathrm{d}x$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{x}f(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-x}$，

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(2)**【答案】** 0.3.

【解】 由 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A+B)=0.6$ 得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=0.1,$$

故 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$.

(3)**【答案】** 4.

【解】 因为 X 服从参数为 2 的泊松分布，所以 $E(X)=2$，

于是 $E(Z)=3E(X)-2=6-2=4$.

十一、【解】 区域 D 的面积 $S=1$，则 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-x}^{x}1dy=2x$，

则随机变量 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由 $E(X)=\int_{0}^{1}xf_X(x)dx=\int_{0}^{1}2x^2dx=\frac{2}{3}$，

$E(X^2)=\int_{0}^{1}x^2f_X(x)dx=\int_{0}^{1}2x^3dx=\frac{1}{2}$，得 $D(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$，

故 $D(Z)=D(2X+1)=4D(X)=\frac{2}{9}$.