

## 2023 年数学二试题

一、选择题(1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项时最符合题目要求的.)

(1) 曲线  $y = x \ln \left( e + \frac{1}{x-1} \right)$  的斜渐近线为

(A)  $y = x + e$

(B)  $y = x + \frac{1}{e}$

(C)  $y = x$

(D)  $y = x - \frac{1}{e}$

(2) 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0, \\ (x+1)\cos x, & x > 0. \end{cases}$  的一个原函数是

(A)  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$

(B)  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$

(C)  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x), & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(D)  $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(3) 已知  $\{x_n\}, \{y_n\}$  满足:  $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2 (n = 1, 2, \dots)$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,

(A)  $x_n$  是  $y_n$  高阶无穷小

(B)  $y_n$  是  $x_n$  高阶无穷小

(C)  $x_n$  与  $y_n$  是等价无穷小

(D)  $x_n$  与  $y_n$  是同阶但不等价无穷小

(4) 若微分方程  $y'' + ay' + by = 0$  的解在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 则

(A)  $a < 0, b > 0$

(B)  $a > 0, b > 0$

(C)  $a = 0, b > 0$

(D)  $a = 0, b < 0$

(5) 设函数  $y = f(x)$  是由  $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t| \sin t. \end{cases}$  确定, 则

(A)  $f(x)$  连续,  $f'(0)$  不存在

(B)  $f'(0)$  存在,  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不连续

(C)  $f'(x)$  连续,  $f''(0)$  不存在

(D)  $f''(0)$  存在,  $f''(x)$  在  $x = 0$  处不连续

(6) 若函数  $f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx$  在  $\alpha = \alpha_0$  处取得最小值, 则  $\alpha_0 =$

(A)  $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$

(B)  $-\ln(\ln 2)$

(C)  $\frac{1}{\ln 2}$

(D)  $\ln 2$

(7) 设函数  $f(x) = (x^2 + a)e^x$ . 若  $f(x)$  没有极值点, 但曲线  $y = f(x)$  有拐点, 则  $a$  得取值范围是

- (A)  $[0, 1)$       (B)  $[1, +\infty)$       (C)  $[1, 2)$       (D)  $[2, +\infty)$

(8) 设  $A, B$  为  $n$  阶可逆矩阵,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵,  $M^*$  为  $M$  的伴随矩阵, 则  $\begin{bmatrix} A & E \\ O & B \end{bmatrix}^* =$

- (A)  $\begin{bmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$       (B)  $\begin{bmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$   
 (C)  $\begin{bmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$       (D)  $\begin{bmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$

(9) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$  的规范形为

- (A)  $y_1^2 + y_2^2$       (B)  $y_1^2 - y_2^2$       (C)  $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$       (D)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(10) 已知向量  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 若  $\gamma$  可有  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 也可由  $\beta_1, \beta_2$  线性表示, 则  $\gamma =$

- (A)  $k \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$       (B)  $k \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$       (C)  $k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$       (D)  $k \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$

## 二、填空题 (11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(11) 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$  与  $g(x) = e^{x^2} - \cos x$  是等价无穷小, 则  $ab =$ \_\_\_\_\_.

(12) 曲线  $\int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^2} dt$  的弧长为\_\_\_\_\_.

(13) 设函数  $z = z(x, y)$  由  $e^z + xz = 2x - y$  确定, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} =$ \_\_\_\_\_.

(14) 曲线  $3x^3 = y^5 + 2y^3$  在  $x = 1$  对应点处的法线斜率为\_\_\_\_\_.

(15) 设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) - f(x) = x$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 0$ , 则  $\int_1^3 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(16) 已知线性方程组  $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$  有解, 其中  $a, b$  为常数. 若  $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$ , 则

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**三、解答题** (17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

设曲线  $L: y = y(x)$  ( $x > e$ ) 经过点  $(e^2, 0)$ ,  $L$  上任一点  $P(x, y)$  到  $y$  轴的距离等于该点处的切线在  $y$  轴上的截距.

(I) 求  $y(x)$ ;

(II) 在  $L$  上求一点, 使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小, 并求此最小面积.

(18) (本题满分 12 分)

求函数  $f(x, y) = xe^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$  的极值.

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$ .

(I) 求  $D$  的面积;

(II) 求  $D$  绕  $x$  轴旋转所成旋转体的体积.

(20) (本题满分 12 分)

设平面有界区域  $D$  位于第一象限, 由曲线  $x^2 + y^2 - xy = 1$ ,  $x^2 + y^2 - xy = 2$  与直线

$y = \sqrt{3}x, y = 0$  围成, 计算  $\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$ .

(21) (本题满分 12 分)

设函数  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上具有 2 阶连续导数, 证明:

(I) 若  $f(0) = 0$ , 则存在  $\xi \in (-a, a)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{1}{a^2} [f(a) + f(-a)]$ ;

(II) 若  $f(x)$  在  $(-a, a)$  内取得极值, 则存在  $\eta \in (-a, a)$ , 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|.$$

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵  $\mathbf{A}$  满足: 对任意  $x_1, x_2, x_3$ , 均有  $\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$ .

(I) 求  $\mathbf{A}$ ;

(II) 求可逆矩阵  $\mathbf{P}$  与对角矩阵  $\mathbf{\Lambda}$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ .