

一九八七年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题满分 10 分, 每小题 2 分)

1. 设 $y = \ln(1 + ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$, $y'' = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $y' = \frac{a}{1+ax}$, $y'' = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

2. 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 点处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$; 法线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 切线方程是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi-2}{4}$; 法线方程是 $y = -2x + \frac{\pi+8}{4}$.

3. 积分中值定理的条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 结论是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 极限等于 e^{-3} .

5. $\int f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$; $\int_a^b f'(2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $f(x) + C$; $\frac{1}{2}f(2b) - \frac{1}{2}f(2a)$.

二、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

解. 由洛必达法则和等价无穷小量代换, 求得极限等于 $\frac{1}{2}$.

三、(本题满分 7 分)

设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{5(1 - \cos t)^2}$.

四、(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

解. 由分部积分法和换元积分法, 求得

$$\int_0^1 x \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

五、(本题满分 8 分)

设 D 是曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形. 求 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 V .

解. $V = \pi \int_0^\pi (\sin x + 1)^2 \, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi^2}{2}.$

六、证明题 (本题满分 10 分, 每小题 5 分)

1. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

解. 任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_2 > x_1$, 则由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$. 从而 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

2. 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$. 证明 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

解. 由导数的定义, 我们有

$$g''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x) - g'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{x - c} < 0.$$

由极限的局部保号性, 存在 c 的某个去心邻域, 使得 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$. 则当 $x < c$ 时 $g'(x) > 0$, 函数单调增加; 当 $x > c$ 时, $g'(x) < 0$. 函数单调减少. 因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ (其中 a, b 为不全为零的非负数).

解. 令 $u = \tan x$, 则原式 $= \int \frac{du}{a^2 u^2 + b^2}$. 下面分情形讨论:

(I) 当 $ab \neq 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C$.

(II) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{b^2} \tan x + C$.

(III) 当 $a \neq 0, b = 0$ 时, 原式 $= -\frac{1}{a^2} \cot x + C$.

八、计算题 (本题满分 15 分)

1. (本题满分 7 分)

求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的解.

解. 通解为 $y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)$, 满足初始条件的特解为 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

2. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

解. 原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

九、选择题 (本题满分 16 分, 每小题 4 分)

1. $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}, -\infty < x < +\infty$ 是 ()

- (A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

解. 应选 (D).

2. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()

- (A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大. (B) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限.
(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. (D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

解. 应选 (D).

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于 ()

- (A) $f'(a)$. (B) $2f'(a)$. (C) 0. (D) $f'(2a)$.

解. 应选 (B).

4. 同试卷一第五 [2] 题.

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内, 求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使该点处切线与所给曲线及两坐标轴围成的面积为最小, 并求此最小面积.

解. 设切点的坐标为 $(a, 1-a^2)$, 则切线方程为 $y = -2ax + a^2 + 1$, 所围成的面积

$$S(a) = \frac{1}{2}(a^2+1) \frac{a^2+1}{2a} - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{a^3}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{2}{3}.$$

令 $S'(a) = 0$, 得驻点 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 由于 $S''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, 故所求点的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 面积的最小值为 $\frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

一九八八年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题满分 20 分, 每小题 4 分)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} e^2(\sin x + \cos x), & x > 0 \\ 2x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $a = 1$.

2. 同试卷一第二 [1] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 1.

5. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $2(e^2 + 1)$.

二、选择题 (本题满分 20 分, 每小题 4 分)

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点的坐标是 ··· ()
(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$. (B) $(-1, 0)$. (C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$. (D) $(1, 0)$.

解. 应选 (A).

2. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有 ··· ··· ··· ()
(A) $f(-x) > g(-x)$. (B) $f'(x) < g'(x)$.
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. (D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$.

解. 可导必定连续, 从而选 (C).

3. 同试卷一第三 [1] 题.

4. 曲线 $y = \sin^{3/2} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积为 ··· ··· ··· ··· ()
(A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{4}{3}\pi$. (C) $\frac{2}{3}\pi^2$. (D) $\frac{2}{3}\pi$.

解. 应选 (B).

5. 同试卷一第三 [5] 题.

三、计算题 (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

1. 同试卷一第一 [2] 题.

2. 已知 $y = 1 + xe^{xy}$, 求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$.

解. $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 2$.

3. 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解 (一般解).

解. 通解为 $y = \frac{1}{x}(\arctan x + C)$.

四、(本题满分 12 分)

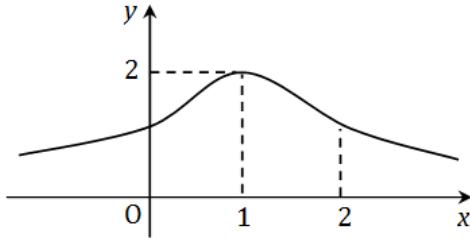
作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
极值	
凹 (\cup) 区间	
凸 (\cap) 区间	
拐点	
渐近线	

解. 所得数据如下表:

单调增区间	$(-\infty, 1)$
单调减区间	$(1, +\infty)$
极值点	1
极值	2
凹 (\cup) 区间	$(-\infty, 0)$ 及 $(2, +\infty)$
凸 (\cap) 区间	$(0, 2)$
拐点	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 及 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$
渐近线	$y = 0$

其图形如下:



五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形。问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

解. 当圆的周长为 $x = \frac{\pi a}{4 + \pi}$ ，正方形的周长为 $a - x = \frac{4a}{4 + \pi}$ 时，面积之和最小..

六、(本题满分 10 分)

同试卷一第五题.

七、(本题满分 6 分)

设 $x \geq -1$ ，求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$.

解. 当 $-1 \leq x < 0$ 时，积分等于 $\frac{1}{2}(1+x)^2$. 当 $x \geq 0$ 时，积分等于 $1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$.

八、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数，且 $m \leq f(x) \leq M$.

(I) 求 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$.

(II) 证明 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m$ ($a > 0$).

解. (I) 可以用积分中值定理和微分中值定理。这里用洛必达法则直接计算：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4a^2} \left[\int_0^{2a} f(u) du - \int_{-2a}^0 f(u) du \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{8a} [2f(2a) - 2f(-2a)] = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4a} [f(2a) - f(-2a)] \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4} [2f'(2a) + 2f'(-2a)] = f'(0). \end{aligned}$$

(II) 可以分别估计两项。这里利用积分的绝对值不等式来估计：

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [f(t) - f(x)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (M - m) dt = M - m \end{aligned}$$

一九八九年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2}$.

2. $\int_0^\pi t \sin t dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 π .

3. 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2) dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = 2x$.

4. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 用导数的定义计算, 得到 $f'(0) = n!$.

5. 同试卷一第一 [2] 题.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $a = b$.

7. 设 $\tan y = x + y$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\cot^2 y dx$.

二、计算题（本题满分 20 分，每小题 4 分）

1. 已知 $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 y' .

解. $\frac{-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1-e^{-2\sqrt{x}})}$.

2. 求 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

解. $-\frac{1}{\ln x} + C$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解. e^2 .

4. 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$.

5. 已知 $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

解. 作换元 $t = 2x$, 再由分部积分法, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f''(2x) dx &= \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 f''(t) dt = \frac{1}{8} \left([t^2 f'(t)]_0^2 - 2 \int_0^2 t f'(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{8} \left([t^2 f'(t)]_0^2 - [2t f(t)]_0^2 + 2 \int_0^2 f(t) dt \right) = \frac{1}{8}(0 - 2 + 2) = 0. \end{aligned}$$

三、选择题 (本题满分 18 分, 每小题 3 分)

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ ()
- (A) 无实根. (B) 有唯一实根.
 (C) 有三个不同实根. (D) 有五个不同实根.

解. 应选 (B).

3. 曲线 $y = \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 x 轴所围成的图形, 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 ()
- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) π . (C) $\frac{\pi^2}{2}$. (D) π^2 .

解. 应选 (C).

4. 设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x = a$ 处取得极大值, 则函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 处 ()
- (A) 必取极大值. (B) 必取极小值.
 (C) 不可能取极值. (D) 是否取极值不能确定.

解. 应选 (D).

5. 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式 (式中 a, b 为常数) ()
- (A) $ae^x + b$. (B) $axe^x + b$. (C) $ae^x + bx$. (D) $axe^x + bx$.

解. 应选 (B).

6. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导的一个充分条件是.....()

- (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h[f(a + \frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在.
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

解. 应选 (D).

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ ($0 < x < +\infty$) 满足 $y(1)=0$ 的解.

解. 原方程即 $y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{e^{2x}}{x}$. $v(x) = \exp\left(\int \frac{1-x}{x} dx\right) = \frac{x}{e^x}$, 所以通解为

$$y = \frac{1}{v(x)} \left(\int \frac{e^{2x}}{x} v(x) dx + C \right) = \frac{e^x}{x} \left(\int \frac{e^{2x}}{x} \frac{x}{e^x} dx + C \right) = \frac{e^x(e^x + C)}{x}.$$

代入初始条件, 得 $C = -e$, 因此特解为 $y = \frac{e^x(e^x - e)}{x}$.

五、(本题满分 7 分)

同试卷一第五题.

六、(本题满分 7 分)

同试卷一第六题.

七、(本题满分 11 分)

对函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$, 填写下表:

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹(\cup)区间	
凸(\cap)区间	
拐点	
渐近线	

解. 结果如下表:

单调减少区间	$(-\infty, -2), (0, +\infty)$
单调增加区间	$(-2, 0)$
极值点	-2
极值	$-1/4$
凹 (\cup) 区间	$(-3, 0), (0, +\infty)$
凸 (\cap) 区间	$(-\infty, -3)$
拐点	$(-3, -2/9)$
渐近线	$x = 0, y = 0$

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a, b, c 使此图形绕 x 旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解. $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 0$.

一九九〇年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于点 $t = \frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是_____.

解. 应填 $y = \sqrt{3}x - 1$.

2. 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

解. 应填 $-\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \left(\sec^2 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$.

3. $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx =$ _____.

解. 应填 $\frac{4}{15}$.

4. 下列两个积分的大小关系是: $\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.

解. 应填 $>$.

5. 同试卷一第一 [3] 题.

二、选择题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则.....()
(A) $a = 1, b = 1$. (B) $a = -1, b = 1$.
(C) $a = 1, b = -1$. (D) $a = -1, b = -1$.

解. 应选 (C).

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d \left[\int f(x) dx \right]$ 等于.....()
(A) $f(x)$. (B) $f(x) dx$. (C) $f(x) + C$. (D) $f'(x) dx$.

解. 应选 (B).

3. 同试卷一第二 [2] 题.

4. 同试卷一第二 [1] 题.

5. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f'(0) \neq 0, f(0)=0$, 则 $x=0$

是 $F(x)$ 的.....()

- (A) 连续点.
- (B) 第一类间断点.
- (C) 第二类间断点.
- (D) 连续点或间断点不能由此确定.

解. 应选 (B).

三、计算题 (本题满分 25 分, 每小题 5 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$, 求常数 a .

解. $a = \ln 3$.

2. 求由方程 $2y - x = (x - y)\ln(x - y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

解. $dy = \frac{x}{2x-y} dx$.

3. 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ ($x > 0$) 的拐点.

解. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

4. 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

解. 原式 $= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C$.

5. 同试卷二第四 [2] 题.

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小 (其中 $a > 0, b > 0$).

解. $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

五、(本题满分 9 分)

证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

解. 令 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$, 则当 $x > 0$ 时 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0$. 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 故结论成立.

六、(本题满分9分)

设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)} dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 x.$

七、(本题满分9分)

同试卷二第四[3]题.

八、(本题满分8分)

求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 之通解, 其中 a 为实数.

解. $a \neq -2$ 时, $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}$.

$a = -2$ 时, $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$.

一九九一年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 设 $y = \ln(1 + 3^{-x})$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{\ln 3}{3^x + 1} dx$.

2. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的上凸区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 不定积分等于 $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, 故定积分等于 1.

4. 质点以速度 $t \sin(t^2)$ 米/秒作直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒质点所经过的路程等于米 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -1.

二、选择题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则………()

(A) $a = 0, b = -2$. (B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$. (D) $a = -1, b = -1$.

解. 应选 (D).

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则………()

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{3}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{x^2}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

解. 应选(B).

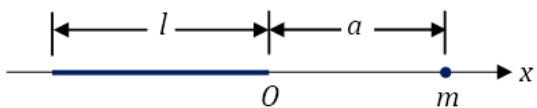
3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 则 · ()

 - (A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点
 - (B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点
 - (C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点
 - (D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$

解. 应选 (B).

- #### 4. 同试卷一第二[1]题.

5. 如图, x 轴上有一线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a , 已知引力系数为 k , 则质点和细杆之间引力的大小为 ()



- (A) $\int_{-1}^0 \frac{km\mu}{(a-x)^2} dx.$

(B) $\int_0^l \frac{km\mu}{(a-x)^2} dx$

(C) $2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{km\mu}{(a-x)^2} dx.$

(D) $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{km\mu}{(a-x)^2} dx.$

解. 应选 (A).

三、计算题（本题满分 25 分，每小题 5 分）

1. 设 $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解. } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2+t^2}{(\cos t - t \sin t)^3}.$$

2. 计算 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

解. $2 \ln \frac{4}{3}$.

- $$3. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}.$$

解.

- $$4. \text{ 求 } \int x \sin^2 x \, dx.$$

解. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.$

5. 求微分方程 $x y' + y = x e^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

解. $y = \frac{x-1}{x} e^x + \frac{1}{x}$.

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, 有不等式 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

解. 令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x\ln x$, 则 $f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$. 因此当 $x > 1$ 时有 $f(x) > f(1) = 2\ln 2 > 0$.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

解. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}x \sin x$, 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

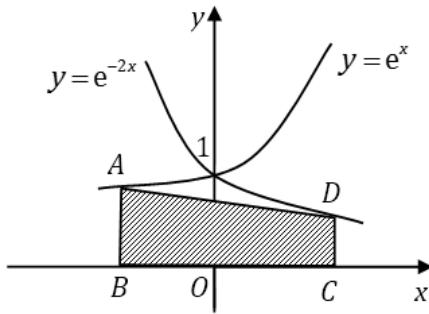
六、(本题满分 9 分)

曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解. $V = \int_1^2 2\pi x |y| dx = \frac{\pi}{2}$.

七、(本题满分 9 分)

如图, A 和 D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2 : 1$, $|AB| < 1$, 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



解. 当点 B 的横坐标为 $\frac{1}{3}\ln 2 - 1$, 点 C 的横坐标为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 时, 梯形面积最大.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$,

计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

解. $\pi^2 - 2$.

一九九二年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中 f 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 3.

2. 函数 $y = x + 2 \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 0.

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2} \ln 2$.

5. 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{e}{2} - 1$.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的 ()

- (A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.
(C) 等价无穷小. (D) 同阶但非等价的无穷小.

解. 应选 (B).

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则 ()

- (A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$
(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

解. 应选 (D).

3. 同试卷一第二[1]题.

4. 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2) dt$, 则 $F'(x)$ 等于………()
(A) $f(x^4)$. (B) $x^2 f(x^4)$. (C) $2x f(x^4)$. (D) $2x f(x^2)$.

解. 应选 (C).

5. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为………()
(A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$. (C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$.

解. 应选 (B).

三、计算题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

解. 极限等于 $e^{-3/2}$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ 的值.

解. 导数等于 $2e^2$.

3. 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

解. $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{1/2} + C$.

4. 求 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx$.

解. $4(\sqrt{2}-1)$.

5. 求微分方程 $(y - x^3) dx - 2x dy = 0$ 的通解.

解. 当 $x > 0$ 时 $y = C\sqrt{x} - \frac{1}{5}x^3$, 当 $x < 0$ 时 $y = C\sqrt{-x} - \frac{1}{5}x^3$.

四、(本题满分 9 分)

同试卷一第三[3]题.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解

解. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) e^x$.

六、(本题满分9分)

计算曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上相对于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解. $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

七、(本题满分6分)

求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

解. 设切点为 (t, \sqrt{t}) . 则当 $t=1$ 时面积最小, 此时切线方程为 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

八、(本题满分8分)

同试卷一第六题.

一九九三年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 由洛必达法则，求得极限等于 0.

2. 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $\frac{y^2 - 2x \cos(x^2 + y^2) - e^x}{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}$.

3. 同试卷一第一[1]题.

4. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

5. 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$ ，且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1+x^2)$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ()
(A) 无穷小. (B) 无穷大.
(C) 有界的，但不是无穷小. (D) 有界的，但不是无穷大.

解. 应选 (D).

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$ ()
(A) 不连续. (B) 连续，但不可导.
(C) 可导，但导数不连续. (D) 可导，且导数连续.

解. 应选 (A).

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$, 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 2$), 则 $F(x)$ 为 · ()
- (A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1; \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

解. 应选 (D).

4. 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为 · · · · · ()
- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

解. 应选 (B).

5. 设 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内 ()
- (A) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$. (B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.
 (C) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$. (D) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

解. 应选 (C).

三、计算题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)] - [f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$.

解. -50.

3. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$.

解. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$.

4. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

解. $\frac{1}{2}$.

5. 求微分方程 $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

解. $y = \frac{\sin x - 1}{x^2 - 1}.$

四、(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^{2x}$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$, 试确定常数 α, β, γ , 并求该方程的通解.

解. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x.$

五、(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解. $V = \int_0^1 2\pi [\sqrt{1-y^2} - (1-y)^2] dy = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi.$

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小, 并求出该最小值.

解. 当 $h=4r$ 时, V 取最小值 $V(4r) = \frac{8\pi r^3}{3}.$

七、(本题满分 9 分)

设 $x > 0$, 常数 $a > e$, 证明: $(a+x)^a < a^{a+x}.$

解. 令 $f(x) = (a+x)\ln a - a\ln(a+x)$, 则当 $x > 0$ 时 $f'(x) = \ln a - \frac{a}{a+x} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上单调增加, 从而 $f(x) > f(0) = 0$. 即结论成立.

八、(本题满分 9 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $f(0) = 0$, 证明:

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$.

解. 证法一: 任取 $x \in (0, a]$, 由微分中值定理有

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x, \quad \xi \in (0, x).$$

再由定积分的绝对值不等式有

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| = \left| \int_0^a f'(\xi)x dx \right| \leq \int_0^a |f'(\xi)| x dx \leq M \int_0^a x dx = \frac{Ma^2}{2}.$$

证法二：由微积分基本公式及定积分的绝对值不等式有

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx.$$

从而由积分的保号性有

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \int_0^a |f(x)| dx \leq \int_0^a Mx dx = \frac{Ma^2}{2}.$$

一九九四年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -2.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{t}(6t+5)(t+1)$.

3. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\cos 3x} f(t) dt \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-3f(\cos 3x)\sin 3x$.

4. $\int x^3 e^{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C$.

5. 微分方程 $y dx + (x^2 - 4x) dy = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y^4 = \frac{Cx}{4-x}$.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则 ()
(A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$. (B) $a = 0, b = -2$. (C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$. (D) $a = 1, b = -2$.

解. 应选 (A).

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()

- (A) 左、右导数都存在. (B) 左导数存在, 但右导数不存在.
(C) 左导数不存在, 但右导数存在. (D) 左、右导数都不存在.

解. 应选 (B).

3. 设 $y = f(x)$ 是满足微分方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在()
 (A) x_0 的某个邻域内单调增加. (B) x_0 的某个邻域内单调减少.
 (C) x_0 处取得极小值. (D) x_0 处取得极大值.

解. 应选 (C).

4. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有.....()
 (A) 1 条. (B) 2 条. (C) 3 条. (D) 4 条.

解. 应选 (B). 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-2)} = \frac{\pi}{4},$$

故 $y = \frac{\pi}{4}$ 为该曲线的一条水平渐近线. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-2)} = \infty,$$

故 $x = 0$ 为该曲线的一条垂直渐近线. 所以该曲线的渐近线有两条.

5. 同试卷一第二 [1] 题.

三、解答题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 具有二阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''}{(1-f')^3}.$

2. 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx.$

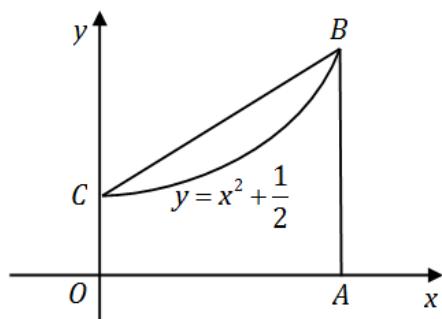
解. 令 $x^2 = \sin t$, 可求得积分等于 $\frac{3}{32}\pi$.

3. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right).$

解. $e^4.$

4. 同试卷一第三 [3] 题.

5. 如图, 设曲线方程为 $y = x^2 + \frac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 D , 曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1 , 点 A 的坐标为 $(a, 0)$ ($a > 0$). 证明: $\frac{D}{D_1} < \frac{3}{2}$.



解. $D_1 = \frac{(2a^2+3)a}{6}$, $D = \frac{(a^2+1)a}{2}$, 所以 $\frac{D}{D_1} < \frac{3}{2}$.

四、(本题满分 9 分)

设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

解. 当 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 及 $k \leq 0$ 时, 方程有且仅有一个解.

五、(本题满分 9 分)

设 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$,

(I) 求函数的增减区间及极值;

(II) 求函数图像的凹凸区间及拐点;

(III) 求其渐近线;

(IV) 作出其图形.

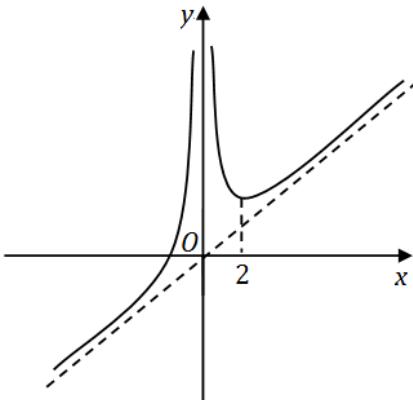
解. (I) $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 为增区间, $(0, 2)$ 为减区间, 极小值点为 $x = 2$, 极小值为

$$y = 3;$$

(II) $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 均为凹区间, 无拐点;

(III) $x = 0$ 为铅直渐近线, $y = x$ 为斜渐近线;

(IV) 其图形如下图:



六、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + a^2 y = \sin x$ 的通解, 其中常数 $a > 0$.

解. 当 $a \neq 1$ 时, 原方程的通解为 $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2-1} \sin x$;

当 $a = 1$ 时, 原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + -\frac{1}{2}x \cos x$.

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明: 当 $0 < \lambda < 1$ 时, $\int_0^\lambda f(x)dx \geq \lambda \int_0^1 f(x)dx$.

解. 由积分中值定理以及函数的单调性可得

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_0^1 f(x)dx &= (1-\lambda) \int_0^\lambda f(x)dx - \lambda \int_\lambda^1 f(x)dx \\ &= (1-\lambda) \cdot \lambda f(\xi_1) - \lambda \cdot (1-\lambda) f(\xi_2) \\ &= \lambda(1-\lambda)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geq 0.\end{aligned}$$

八、(本题满分 8 分)

求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

解. $V = \frac{448}{15}\pi$.

一九九五年考研数学试卷三解答

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设 $y = \cos(x^2) \sin^2 \frac{1}{x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-2x \sin(x^2) \sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cos(x^2)$.

2. 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x$.

3. 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = -2$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $3x - y - 7 = 0$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2}$.

5. 由曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = 0$.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\phi(x)$ 有间断点, 则 ()

(A) $\phi[f(x)]$ 必有间断点. (B) $[\phi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\phi(x)]$ 必有间断点. (D) $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解. 应选 (D).

2. 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为 ()

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$.

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$.

解. 应选 (C).

解. 应选(D).

- #### 4. 同试卷一第二 [2] 题.

解. 应选(A). 设 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $f(x) \cdot |\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导, 由可导的充要条件知

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) \cdot |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \cdot |\sin x|}{x}.$$

根据重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

因此我们有 $f(0) = -f(0)$, 故 $f(0) = 0$.

三、解答题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

- $$1. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}.$$

解. $\frac{1}{2}$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x e^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解. } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3}.$$

3. 设 $f(x^2-1)=\ln \frac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\phi(x)]=\ln x$, 求 $\int \phi(x)dx$.

$$\text{解. } 2\ln|x-1| + x + C.$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

5. 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长.

解. 弧长 $s = 8$.

6. 设单位质点在水平面内作直线运动, 初速度 $v|_{t=0} = v_0$, 已知阻力与速度成正比 (比例常数为 1), 问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$? 并求到此时刻该质点所经过的路程.

解. $t = \ln 3$ 时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$, 到此时刻该质点所经过的路程 $s = \frac{2}{3}v_0$.

四、(本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值和最小值.

解. 最大值为 $f(\pm\sqrt{2}) = 1 + e^{-2}$; 最小值为 $f(0) = 0$.

五、(本题满分 8 分)

设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

解. 所求特解为 $y = e^x - e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

六、(本题满分 8 分)

如图, 设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 且 $y'' > 0$, 又 MT, MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线和法线, 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+(y'_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_0}$ (其中 $y'_0 = y'(x_0)$, $y''_0 = y''(x_0)$), 试推导出点 $P(\xi, \eta)$ 的坐标表达式.

解. $\xi = x_0 - \frac{y'_0(1+(y'_0)^2)}{y''_0}, \quad \eta = y_0 + \frac{1+(y'_0)^2}{y''_0}$.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$.

解. $\int_0^\pi f(x) dx = 2$.

八、(本题满分 8 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.

解. 因为 $f(x)$ 连续且具有一阶导数, 所以由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知 $f(0) = 0$. 从而有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$. 又由 $F''(x) = f''(x) > 0$ 知 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值和 $F'(x)$ 单调. 故 $F(x)$ 只有一个驻点, 从而 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的最小值. 因此 $F(x) \geq F(0) = 0$, 即 $f(x) \geq x$.

一九九六年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{3}$.

2. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2.

3. 微分方程的 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2.

5. 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则………()

- (A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$. (B) $a = 1, b = 1$. (C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$. (D) $a = -1, b = 1$.

解. 应选 (A).

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义，若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时，恒有 $|f(x)| \leq x^2$ ，则

$x = 0$ 必是 $f(x)$ 的………()

- (A) 间断点. (B) 连续而不可导的点.
(C) 可导的点，且 $f'(0) = 0$. (D) 可导的点，且 $f'(0) \neq 0$.

解. 应选 (C).

3. 设 $f(x)$ 处处可导，则………()

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

解. 应选(D). 取反例 $f(x)=x$, 可排除选项(A)和(C); 另取反例 $f(x)=x^2$, 可排除选项(B); 因而只能选(D).

事实上, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 知, 对任意正数 M , 存在 N , 使得当 $x > N$ 时有 $f'(x) > M$. 故由拉格朗日中值定理, 当 $x > N$ 时有

$$f(x) - f(N) = f'(x)(x - N) > M(x - N),$$

即 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) > f(N) + M(x - N) \rightarrow +\infty$.

4. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ ()

(A) 无实根. (B) 有且仅有一个实根.
 (C) 有且仅有两个实根. (D) 有无穷多个实根.

解. 应选 (C).

5. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数), 由曲线 $y = g(x)$, $y = f(x)$, $x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为.....()

解. 应选 (B).

三、计算题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

1. 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.

解. $\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $$2. \text{ 求 } \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

解. $\tan x - \sec x + C$.

3. 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2) du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4[f'(t^2) + 2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$

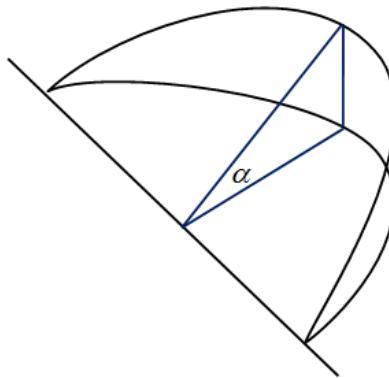
4. 求函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

解. $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 + \dots + (-1)^n 2x^n + (-1)^{n+1} \frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \quad 0 < \theta < 1.$

5. 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解.

解. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^{-x}.$

6. 设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$ ，用过此柱体底面的短轴与底面成 α 角 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平面截此柱体，得一楔形体（如图），求此楔形体的体积 V .



解. $V = \frac{2a^2 b}{3} \tan \alpha.$

四、(本题满分 8 分)

计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx.$

解. $-\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$

五、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$

(I) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(II) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点，若有，指出这些点.

$$\text{解. (I)} g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$$

(II) $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处处连续, 没有间断点. $g(x)$ 的不可导点是 $x = 0$ 和 $x = -1$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

解. 唯一驻点是 $x = 1$, 也是函数的极小值点.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$. 试证明: 存在 $\xi \in (a, b), \eta \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$.

解. 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$. 则有

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x-a} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x-b} > 0.$$

由此知在 a 的右邻域中有 x_1 使得 $f(x_1) > 0$, 在 b 的左邻域中有 x_2 使得 $f(x_2) < 0$.

由零值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

另外, 由罗尔定理, 存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$, 使得 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$. 再用一次罗尔定理, 存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ 使得 $f''(\eta) = 0$.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 为连续函数,

(I) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 是正常数.

(II) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

解. (I) 解为 $y(x) = e^{-ax} \int_0^x f(t)e^{at} dt$.

(II) $|y(x)| \leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)|e^{at} dt \leq ke^{-ax} \int_0^x e^{at} dt = \frac{k}{a} e^{-ax} (e^{ax} - 1) = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax})$.

一九九七年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $e^{-1/2}$.

2. 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y''|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{3}{2}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\pi}{8}$.

5. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 0, t, 0)$, $\alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 3.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为.....()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解. 应选 (C).

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $x f''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0$ ($x_0 \neq 0$), 则.....()

- (A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极小值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (B).

4. 同试卷一第二 [3] 题.

5. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)]$ 为 ······ ()
- (A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

解. 应选 (D).

三、计算题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$

解. 极限等于 1.

2. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - t y^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}.$

解. $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 - e^t)(1 + t^2)}{2(1 - t y)}.$

3. 计算 $\int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx.$

解. $e^{2x} \tan x + C.$

4. 求微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解.

解. 通解为 $xy^2 - x^2y - x^3 = C.$

5. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

解. $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x.$

6. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求矩阵 B .

解. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

四、(本题满分 8 分)

λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解, 有唯一解或由无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

解. 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, 原方程组无解.

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时, 原方程组有无穷多解, 其通解为

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -1, 0)^T + k(0, 1, 1)^T,$$

其中 k 为任意常数.

五、(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 L 上的任一点, $M_0(2, 0)$ 为 L 上一定点, 若极径 OM_0, OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点间弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

解. 直线方程为 $x \mp \sqrt{3}y = 2$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围成的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

解. $f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x$. 故 $a = -5$ 时, 旋转体体积 $V(a)$ 最小.

七、(本题满分 8 分)

已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 设 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解. 由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 知 $f(0) = 0, f'(0) = 2$, 且有 $\varphi(0) = 0$. 当 $x \neq 0$ 时有

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2},$$

当 $x = 0$ 时有

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= 2 - 1 = 1 = \varphi'(0), \end{aligned}$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

八、(本题满分 8 分)

就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$ 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

解. 设 $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 则 $f(x)$ 在 $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$ 处有最小值 y_0 . 因此:

- (I) 当 $k \notin [y_0, 0]$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内没有根;
- (II) 当 $k = y_0$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一根 x_0 ;
- (III) 当 $k \notin (y_0, 0)$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恰有两个不同的根.

一九九八年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{37}{12}$. 易见 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 的零点为 $-1, 0, 2$, 且当 $x \in (-1, 0)$ 时 $y < 0$; 当 $x \in (0, 2)$ 时 $y > 0$. 于是有

$$A = \int_{-1}^0 -(-x^3 + x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx = \frac{37}{12}.$$

3. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. 应填 $-\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C$. 用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln \sin x d(\cot x) = -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x dx \\ &= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. 应填 $x f(x^2)$. 作变量代换 $u = x^2 - t^2$, 则有

$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \int_{x^2}^0 -\frac{1}{2} f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du,$$

从而导函数为

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot (x^2)' = x f(x^2).$$

5. 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = x + \frac{1}{e}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是………()

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散.
- (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界.
- (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小.
- (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

解. 应选 (D).

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, 则存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时, 必有.....()

- (A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geq 0$.
(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leq 0$.
(C) $\lim_{t\rightarrow a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geq 0$ ($x\neq a$).
(D) $\lim_{t\rightarrow a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leq 0$ ($x\neq a$).

解. 应选 (C).

5. 设 A 是任一 n ($n\geq 3$) 阶方程, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k\neq 0,\pm 1$, 则必有 $(kA)^*=$()

- (A) kA^* .
(B) $k^{n-1}A^*$.
(C) k^nA^* .
(D) $k^{-1}A^*$.

解. 应选 (B).

三、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\pi/4)}}$. 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

解. $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内有第二类间断点 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4}$, 第一类(可去)间断点 $\frac{3\pi}{4}$ 和 $\frac{7\pi}{4}$.

四、(本题满分 5 分)

确定常数 a,b,c 的值, 使 $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}=c$ ($c\neq 0$).

解. $a=1, b=0, c=\frac{1}{2}$.

五、(本题满分 5 分)

利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$ 化简, 并求出原方程的通解.

解. 原方程化简为 $u''+4u=e^x$, 其通解为 $y=C_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+C_2\sin x+\frac{e^x}{5\cos x}$.

六、(本题满分 6 分)

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解. $\frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$.

七、(本题满分6分)

同试卷一第五题.

八、(本题满分8分)

同试卷一第九题.

九、(本题满分8分)

设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

解. $\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

十、(本题满分8分)

设 $y = y(x)$ 是一向上凸的连续曲线, 其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程, 并求函数 $y = y(x)$ 的极值.

解. 曲线的方程为 $y = \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right| + 1 + \frac{1}{2} \ln 2$. 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 函数有极大值 $y = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$.

十一、(本题满分6分)

设 $x \in (0, 1)$, 证明: (I) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$; (II) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

解. (I) 令 $\varphi(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, 则有

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, \\ \varphi''(x) &= \frac{2}{1+x} [\ln(1+x) - x].\end{aligned}$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, 由 $\varphi''(x) < 0$ 可得 $\varphi'(x) < \varphi'(0) = 0$, 从而 $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$, 即有 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

(II) 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$. 则有

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

由(I)知, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 于是 $f(x)$ 单调减少. 又 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} > f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1.$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2},$$

故当 $x \in (0, 1)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

十二、(本题满分 5 分)

设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩

$$\text{阵, } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } A.$$

$$\text{解. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

十三、(本题满分 8 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$. 问:

(I) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(II) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 并写出表达式.

解. (I) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(II) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有唯一解:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T,$$

于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有无穷多个解:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (-1, 2, 0)^T \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

这时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示:

$$\beta = -(2k+1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3 \quad (k \text{ 为任意常数}).$$

一九九九年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 _____.

解. 应填 $y + 2x - 1 = 0$. 曲线的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2 \cos 2t}.$$

点 $(0, 1)$ 对应 $t = 0$, 把 $t = 0$ 代入得 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, 所以该点处法线斜率为 -2 , 故所求法线方程为 $y + 2x - 1 = 0$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \text{_____}$.

解. 应填 1. $y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 所确定, 所以当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 在方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 两边分别对 x 求导得

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x.$$

把 $x = 0$ 和 $y = 1$ 代入得 $y'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$.

3. $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \text{_____}$.

解. 应填 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C$. 事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx &= \int \frac{x-3}{x^2-6x+13} dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \int \frac{d\left(\frac{x-3}{2}\right)}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C. \end{aligned}$$

4. 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为 _____.

解. 应填 $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$. 令 $x = \sin t$, 可得所求平均值为

$$\bar{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt$$

$$= (\sqrt{3}+1) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = (\sqrt{3}+1) \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{12} \pi.$$

5. 同试卷一第一 [3] 题.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 同试卷一第二 [2] 题.

2. 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{1/t} dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ()
- (A) 高阶无穷小. (B) 低阶无穷小.
 (C) 同阶但不等价的无穷小. (D) 等价无穷小.

解. 应选 (C). 当 $x \rightarrow 0$ 时有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{1/t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1+\sin x)^{1/\sin x} \cdot \cos x} \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{1}{\lim_{\sin x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{1/\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 5 \times 1 \times \frac{1}{e \times 1} = \frac{5}{e}, \end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 同阶但不等价的无穷小.

3. 同试卷一第二 [1] 题.

4. “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()
- (A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
 (C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

解. 应选 (C). “必要性”: 数列极限的定义“对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$ ”. 由该定义可以直接推出题中所述, 即必要性.“充分性”: 对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 取 $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$, 这时 $\varepsilon \in (0, 1)$, 由已知, 对于此 ε 存在 $N > 0$, 使得当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 2\varepsilon$, 现取 $N_1 = N - 1$, 于是有当 $n \geq N > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$. 这证明了数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a .

5. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为 ()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解. 应选 (B). 利用行列式性质计算 $f(x)$ 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (-x) \times (-5x+5) = 5x \cdot (x-1), \end{aligned}$$

故 $f(x)=x \cdot (5x-5)=0$ 有两个根 $x_1=0, x_2=1$, 故应选 (B).

三、(本题满分 5 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

解. 先作恒等变形, 再利用等价无穷小量代换和洛必达法则:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}{(x \ln(1+x) - x^2)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\ln(1+x) - x) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{2x(\ln(1+x) - x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{\ln(1+x) - x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-x/(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

四、(本题满分 6 分)

计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

解. 利用分部积分法, 得到

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[-\frac{1}{x} \arctan x \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

五、(本题满分 7 分)

求初值问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0 \quad (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$ 的解.

解. 将原方程变形得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入上式得

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

积分得 $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln(Cx)$, 其中 C 是常数. 由 $x > 0$ 得 $C > 0$, 去掉根号得

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx.$$

把 $y|_{x=1} = 0$ 代入并化简得 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ ($x > 0$).

六、(本题满分 7 分)

同试卷一第七题.

七、(本题满分 8 分)

已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

- (I) 函数的增减区间及极值;
- (II) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (III) 函数图形的渐近线.

解. 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 对函数求导, 得

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = 0, x = 3$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$. 列表讨论如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y''	-	0	+	+	+	+
y'	+	0	+	-	0	+
y	凸, 增	拐点	凹, 增	凹, 减	极小值	凹, 增

由此可知,

(I) 函数的单调增区间为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 单调减区间为 $(1, 3)$, 极小值为

$$y|_{x=3} = \frac{27}{4}.$$

(II) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是向上凸的, 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内是向上凹的, 拐点为 $(0, 0)$ 点.

(III) 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$, 可知 $x = 1$ 是函数图形的铅直渐近线. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} \right] = 2,$$

故 $y = x + 2$ 是函数的斜渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

解. 方法 1: 由麦克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 介于 0 与 x 之间, $x \in [-1, 1]$. 分别令 $x = -1$ 和 $x = 1$, 结合已知条件得

$$f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\eta_1) = 0, \quad -1 < \eta_1 < 0;$$

$$f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\eta_2) = 1, \quad 0 < \eta_2 < 1.$$

两式相减, 得 $f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1) = 6$. 由 $f'''(x)$ 的连续性, 知 $f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上有最大值和最小值, 设它们分别为 M 和 m , 则有

$$m \leq \frac{1}{2}[f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1)] \leq M.$$

再由连续函数的介值定理知, 至少存在一点 $\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_2) + f'''(\eta_1)] = 3.$$

方法 2: 构造函数 $\varphi(x)$, 使得 $x \in [-1, 1]$ 时 $\varphi'(x)$ 有三个零点, 再用罗尔定理证明 ξ 的存在性. 设具有三阶连续导数的 $\varphi(x) = f(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$, 令

$$\begin{cases} \varphi(-1) = -a + b - c + d = 0, \\ \varphi(0) = f(0) + d = 0, \\ \varphi(1) = 1 + a + b + c + d = 0, \\ \varphi'(0) = c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = f(0) - \frac{1}{2}, \\ c = 0, \\ d = -f(0). \end{cases}$$

代入 $\varphi(x)$ 得

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3 + \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)x^2 - f(0).$$

由罗尔定理可知, 存在 $\eta_1 \in (-1, 0)$, $\eta_2 \in (0, 1)$, 使 $\varphi'(\eta_1) = 0$, $\varphi'(\eta_2) = 0$. 又因为 $\varphi'(0) = 0$, 再由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0)$, $\xi_2 \in (0, \eta_2)$, 使得 $\varphi''(\xi_1) = 0$, $\varphi''(\xi_2) = 0$. 再由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (\eta_1, \eta_2) \subset (-1, 1)$, 使得 $\varphi'''(\xi) = f'''(\xi) - 3 = 0$, 即 $f'''(\xi) = 3$.

九、(本题满分 9 分)

同试卷一第五题.

十、(本题满分6分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n = \sum_{i=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

解. 利用单调有界必有极限的准则来证明. 因为

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(k) + f(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx + f(n),$$

而且 $f(x)$ 单调减少且非负, $k \leq x \leq k+1$, 所以 $a_n \geq 0$. 又因为

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[\sum_{i=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right] - \left[\sum_{i=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right] \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} [f(n+1) - f(x)] dx \leq 0, \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少. 因为单调有界必有极限, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

十一、(本题满分8分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

解. 由题设条件 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 两端左乘 A 得

$$|A|X = E + 2AX \Rightarrow (|A|E - 2A)X = E \Rightarrow X = (|A|E - 2A)^{-1}.$$

又因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |A|E - 2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$X = (|A|E - 2A)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

十二、(本题满分5分)

设向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T.$$

(I) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;

(II) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解. 对方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 的增广矩阵作初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & : & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & : & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & : & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & : & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & : & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & : & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & : & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & : & -8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & : & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & : & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & : & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & : & 1-p \end{pmatrix}.$$

(I) 当 $p \neq 2$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha) = 4$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 有唯一解, 解得

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3p-4}{p-2}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \frac{1-p}{p-2}.$$

即 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 且表达式为

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-p}{p-2}\alpha_4.$$

(II) 当 $p = 2$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$) 线性无关, 是其极大线性无关组.

二〇〇〇年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{1}{6}$. 事实上，由等价无穷小量代换和洛必达法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6}.$$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定，则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $(\ln 2 - 1)dx$. 对方程 $2^{xy} = x + y$ 两边求微分得

$$2^{xy} \ln 2 \cdot (x dy + y dx) = dx + dy.$$

由所给方程知，当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 将 $x = 0, y = 1$ 代入上式，有 $\ln 2 \cdot dx = dx + dy$.
所以， $dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.

3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. 应填 $\frac{\pi}{3}$. 令 $\sqrt{x-2} = t$, 则 $x-2 = t^2$, $dx = 2t dt$. 从而

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(t^2+9)t} dt = 2 \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

4. 曲线 $y = (2x-1)e^{1/x}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = 2x + 1$. 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x-1)e^{1/x} - 2x] = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{2e^u - 2}{u} - e^u\right) = 2 - 1 = 1.$$

所以，曲线有斜渐近线 $y = 2x + 1$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵，而且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则
 $(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. 由于 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 所以

$$\begin{aligned} (E + B)^{-1} &= [E + (E + A)^{-1}(E - A)]^{-1} \\ &= [(E + A)^{-1}(E + A) + (E + A)^{-1}(E - A)]^{-1} \\ &= [2(E + A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足.....()
- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$. (C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

解. 应选 (D). 排除法: 如果 $a < 0$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)$ 的分母 $a + e^{bx}$ 必有零点 x_0 , 从而 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续, 与题设不符. 若 $b > 0$, 则无论 $a = 0$ 还是 $a \neq 0$ 均有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, 与题设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 矛盾. 故选 (D).

2. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则.....()
- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
 (C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (C). 令等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0 - [f'(0)]^2 = 0$. 再求导数 (因为下式右边存在, 所以左边也存在):

$$f'''(x) = (x - [f'(x)]^2)' = 1 - 2f'(x)f''(x)$$

以 $x = 0$ 代入, 有 $f'''(0) = 1$, 所以

$$f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 1.$$

从而存在 $x = 0$ 的去心邻域, 在此去心邻域内, $f''(x)$ 与 x 同号. 于是在此去心邻域内, 当 $x < 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 是凸的, 当 $x > 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 即点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故选 (C).

3. 同试卷一第二[1]题.

4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为.....()
 (A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞ .

解. 应选 (C). 凑成已知极限得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + \sin 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \cos 6x)}{3x^2} + 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = 36.\end{aligned}$$

5. 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是··()

- (A) $y''' - y'' - y' + y = 0$. (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
 (C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

解. 应选 (B). 由特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, 对照常系数线性齐次微分方程的特征方程、特征根与解的对应关系知道, $r_2 = -1$ 为特征方程的二重根; 由 $y_3 = 3e^x$ 可知 $r_1 = 1$ 为特征方程的单根, 因此特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2 = r^3 + r^2 - r - 1 = 0,$$

由常系数齐次线性微分方程与特征方程的关系, 得该微分方程为

$$y''' + y'' - y' - y = 0.$$

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

解. 作积分变量替换, 令 $x = \ln t$, 则有

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int f(\ln t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = - \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= - \left[\frac{\ln(1+t)}{t} - \int \frac{1}{t(1+t)} dt \right] = - \frac{\ln(1+t)}{t} + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= - \frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{1+t} d(1+t) = - \frac{\ln(1+t)}{t} + \ln t - \ln(1+t) + C \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.\end{aligned}$$

四、(本题满分 5 分)

设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t$ ($t \geq 0$). 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t) dt$ ($x \geq 0$).

解. 先写出面积 $S(t)$ 的分段表达式. 当 $0 < t < 1$ 时, 图形为三角形, 利用三角形的面积公式: $S(t) = \frac{1}{2}t^2$; 当 $1 < t < 2$ 时, 图形面积可由正方形面积减去小三角形面积:

$$S(t) = 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2 = 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 4) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1;$$

当 $t > 2$ 时, 图形面积就是正方形的面积: $S(t) = 1$, 则有

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

所以, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = \frac{x^3}{6};$$

当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^1 S(t) dt + \int_1^x S(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dt + \int_1^x [1 - \frac{1}{2}(t-2)^2] dt \\ &= \frac{1}{6} + (x-1) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{6} = -\frac{x^3}{6} + x^2 - x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

当 $x > 2$ 时,

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^x S(t) dt = 1 + \int_2^x 1 dt = x - 1.$$

因此

$$\int_0^x S(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

五、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)$ ($n \geq 3$).

解. 由麦克劳林公式,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}),$$

所以

$$x^2 \ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^n).$$

对照麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

可以得到 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$, 从而 $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$

六、(本题满分6分)

设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(I) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(II) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

解. (I) 因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq \int_0^x |\cos x| dx < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx.$$

又因为 $|\cos x|$ 具有周期 π , 在长度为 π 的积分区间上的积分均相等, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^\pi |\cos x| dx = 2n, \quad \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = 2(n+1).$$

所以当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时 $2n \leq \int_0^x |\cos x| dx < 2(n+1)$, 即 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$.

(II) 由 (I) 有, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, $\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$. 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+\frac{1}{n})}{\pi} = \frac{2}{\pi},$$

由极限存在准则 1, 得到 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$.

七、(本题满分7分)

某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$, 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需要经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内? (注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

解. 设从 2000 年初 (相应 $t=0$) 开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m , 浓度为 $\frac{m}{V}$, 则在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 排入湖泊中 A 的量为

$$\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} (t+dt - dt) = \frac{m_0}{6} dt,$$

流出湖泊的水中 A 的量为

$$\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt.$$

因而时间从 t 到 $t+dt$ 相应地湖泊中污染物 A 的改变量为

$$dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt.$$

由分离变量法, 可解得 $m = \frac{m_0}{2} - C \cdot e^{-\frac{t}{3}}$. 代入初始条件 $m(0) = 5m_0$, 得 $C = -\frac{9}{2}m_0$.

于是 $m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}})$. 令 $m = m_0$, 得 $t = 6\ln 3$. 即至多需经过 $6\ln 3$ 年, 湖泊中 A 的含量将降至 m_0 以内.

八、(本题满分 6 分)

同试卷一第九题.

九、(本题满分 7 分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解. 将 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$ 两边令 $x \rightarrow 0$ 取极限, 由 f 的连续性得

$$f(1) - 3f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} (8x + \alpha(x)) = 0 \Rightarrow f(6) = f(1) = 0.$$

又由原设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 两边同除 $\sin x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x) - f(1)}{\sin x} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\sin x}.$$

根据导数的定义, 得

$$f'(1) + 3f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 8 \Rightarrow f'(1) = 2.$$

所以 $f'(6) = f'(1) = 2$, 从而切线方程为

$$(y - f(6)) = f'(6)(x - 6) \Rightarrow 2x - y - 12 = 0.$$

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=ax^2$ ($a>0, x \geq 0$) 与 $y=1-x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

解. 当 $x \geq 0$ 时, 直线与曲线的交点为 $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a}\right)$. 故直线 OA 的方程为 $y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$. 从而旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi \left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}} \right)^2 dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi (ax^2)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi \left(\frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{a^2 x^3}{3(1+a)} - \frac{a^2 x^5}{5} \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} = \frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{5/2}}. \end{aligned}$$

函数对 a 求导得

$$\frac{dV}{da} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{2a \cdot (1+a)^{5/2} - a^2 \cdot \frac{5}{2}(1+a)^{3/2}}{(1+a)^5} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{[4a-a^2]}{(1+a)^{7/2}}, \quad (a>0).$$

令 $\frac{dV}{da} = 0$, 得唯一驻点 $a = 4$, 所以 $a = 4$ 也是 V 的最大值点, 最大体积为
 $V|_{a=4} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$ 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0,$$

(I) 求导数 $f'(x)$;

(II) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

解. (I) 在已知等式两边同乘 $(x+1)$, 得到

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

两边对 x 求导, 整理得

$$(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0$$

令 $u = f'(x)$, 化为 $(x+1)u' + (x+2)u = 0$, 即

$$\frac{du}{u} = -\frac{(x+2)}{(x+1)} dx.$$

两边求积分, 解得 $f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$. 已知 $f(0) = 1$, 再以 $x = 0$ 代入原方程得 $f'(0) = -1$. 于是 $C = -1$, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$.

(II) 因 $f(0) = 1$, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \leq 1$. 令 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$, 则 $\varphi(0) = 1 - 1 = 0$, 且 $x \geq 0$ 时

$$\varphi'(x) = f'(x) + e^{-x} \geq f'(x) + \frac{e^{-x}}{x+1} = 0.$$

所以, 当 $x \geq 0$ 时 $\varphi(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq e^{-x}$. 结合两个不等式可得, 当 $x \geq 0$ 时 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$. 其中 β^T 是 β 的转置, 求解

方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

解. 由题设得

$$A = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \beta^T\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

所以 $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\alpha\beta^T)\beta = 2A$, $A^4 = 8A$; $B^2 = 4$, $B^4 = 16$. 代入原方程得 $16Ax = 8Ax + 16x + \gamma$, 即 $8(A - 2E)x = \gamma$, 其中 E 是三阶单位矩阵. 令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 代入上式, 得线性非齐次方程组.

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

方程组通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ k - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (k 为任意常数).

十三、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

解. 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 作初等行变换得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可以看出 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组. 又 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 从而得

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

计算三阶行列式得 $-a + 3b = 0$, 得 $a = 3b$. 又 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即可由 α_1, α_2 线性表示, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 线性相关, 从而有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

解得 $b = 5$, 从而 $a = 3b = 15$.

二〇〇一年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x^2 + x - 2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e-1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $x-2y+2=0$. 在等式 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e-1$ 两边对 x 求导得

$$e^{2x+y} \cdot (2+y') + \sin(xy) \cdot (y+xy') = 0.$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式解得 $y'(0)=-2$. 故所求法线方程斜率 $k=\frac{1}{2}$, 从而法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}x$, 即 $x-2y+2=0$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\pi}{8}$. 由定积分的对称性及倍角公式可得

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \, dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) \, dx = \left[\frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{16} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

4. 过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 的曲线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$. 这是因为已知关系式可改写为 $(y \arcsin x)' = 1$, 从而 $y \arcsin x = x + c$. 将 $x=\frac{1}{2}, y=0$ 代入上式, 解得 $c=-\frac{1}{2}$. 故所求曲线方程为 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

5. 设方程 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -2. 利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形, 可得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(2+a) \end{pmatrix}$$

可见, 只有当 $a = -2$ 时才有秩 $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 3$, 对应方程组有无穷多个解.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 ()
- (A) 0. (B) 1.
 (C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ (D) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

解. 应选 (B). 因为 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$, 所以在整个定义域内 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 1$, 所以 $|f(x)| \leq 1$, 于是 $f[f(x)] = 1$, 从而 $f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1$.

2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 ()
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解. 应选 (B). 由题设可得

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)}{x \sin x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2}{x \cdot x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^{3-n} \Rightarrow n \leq 2;$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^n}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^n}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \Rightarrow n \geq 2.$$

综上可得正整数 $n = 2$, 故选 (B).

3. 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 ()
- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选 (C). 由 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 可得

$$y' = 4(x-1)(x-2)(x-3), \quad y'' = 4(3x^2 - 12x + 11), \quad y''' = 24(x-2).$$

令 $y'' = 0$, 得 $3x^2 - 12x + 11 = 0$. 故 $y'' = 0$ 有两个不相等的实根, 且在使 $y'' = 0$ 这两点处, 三阶导数 $y''' \neq 0$, 因此曲线有两个拐点, 故选 (C).

4. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数, $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1)=f'(1)=1$, 则 ()
- (A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$.
 (B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$.
 (C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内 $f(x) > x$.
 (D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内 $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内 $f(x) < x$.

解. 应选 (A). 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F'(x)=f'(x)-1=f'(x)-f'(1)$. 由于 $f'(x)$ 严格单调减少, 因此当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, $F'(x)=f'(x)-f'(1)>0$; 当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $f'(x) < f'(1)$, 则 $F'(x)=f'(x)-f'(1)<0$, 且在 $x=1$ 处 $F'(1)=f'(1)-f'(1)=0$. 从而知 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值, 即在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $F(x) < F(1)=0$, 也即 $f(x) < x$. 故选 (A).

5. 同试卷一第二 [1] 题.

三、(本题满分 6 分)

$$\text{求 } \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

解. 令 $x=\tan u$, 则 $dx=\sec^2 u du$, 从而

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{du}{(2\tan^2 u+1)\cos u} = \int \frac{\cos u du}{2\sin^2 u + \cos^2 u} \\ &= \int \frac{d(\sin u)}{\sin^2 u + 1} = \arctan(\sin u) + C = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C. \end{aligned}$$

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解. 由于 $f(x)=\exp\left(\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)\right)$, 而

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln\left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln\left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \left(\frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}, \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\exp\left(\frac{x}{\sin x}\right)$. 它的间断点为 $x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$, 所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类 (或可去) 间断点; 对于非零整数 k , 当 k 为奇数时 $\lim_{x \rightarrow k\pi^-} f(x) = +\infty$, 当 k 为偶数时 $\lim_{x \rightarrow k\pi^+} f(x) = +\infty$. 故 $x=k\pi, k=\pm 1, \pm 2, \dots$ 为 $f(x)$ 的第二类 (或无穷) 间断点.

五、(本题满分7分)

设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值 (在直角坐标系下曲率公式为 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$).

解. 由 $y = \sqrt{x}$, 有 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, 抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1+\frac{1}{4x}} dx.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x}, \\ \frac{d^2\rho}{ds^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{1+4x}}. \end{aligned}$$

于是

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} (1+4x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+4x}} - (6\sqrt{x})^2 = 9.$$

六、(本题满分7分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x,$$

求 $f(x)$.

解. 根据反函数的性质有 $g(f(x)) = x$, 已知等式两边对 x 求导可得

$$\begin{aligned} g[f(x)] f'(x) &= x^2 e^x + 2x e^x \Rightarrow x f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x \\ &\Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

两边积分得

$$f(x) = \int (x+2)e^x dx = (x+1)e^x + C.$$

由题设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 所以在 $x=0$ 处连续, 故有

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + C = 0.$$

所以 $C = -1$, 于是

$$f(x) = (x+1)e^x - 1, \quad x \in [0, +\infty).$$

七、(本题满分7分)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 2$, 求

$$\int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx.$$

解. 由已知条件, 可得 $f(x)$ 满足

$$f''(x) + f(x) = 2e^x, \quad f(0) = 0, f'(0) = 2.$$

此为二阶常系数线性非齐次方程, 解得

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x.$$

从而所求的积分可以计算如下:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx &= \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx = \int_0^\pi d\left(\frac{f(x)}{1+x}\right) \\ &= \left[\frac{f(x)}{1+x} \right]_0^\pi = \frac{f(\pi)}{1+\pi} - \frac{f(0)}{1+0} = \frac{1+e^\pi}{1+\pi}. \end{aligned}$$

八、(本题满分9分)

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(I) 试求曲线 L 的方程.

(II) 求 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形面积最小.

解. (I) 设曲线 L 过点 $P(x, y)$ 的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$, 则有 $Y = -xy' + y$, 即它在 y 轴上的截距为 $-xy' + y$. 由题设可得

$$-xy' + y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x > 0).$$

此为一阶齐次微分方程, 求得通解为

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{C}{x} \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

由题设曲线经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 代入通解得 $C = \frac{1}{2}$, 故所求方程为

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} - x^2.$$

(II) 由 (I) 知 $y = \frac{1}{4} - x^2$, 则 $y' = -2x$, 设过曲线上点 $P(x, y)$ 的切线方程为

$$Y - \left(\frac{1}{4} - x^2\right) = -2x(X - x).$$

它在 x 轴, y 轴上的截距分别为 $\frac{x}{2} + \frac{1}{8x}$ 和 $x^2 + \frac{1}{4}$. 此切线与两坐标轴围成的三角形面积为:

$$A(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{64x} (4x^2 + 1)^2, \quad x > 0.$$

由于该曲线在第一象限中与两坐标轴所围成的面积为定值，记为 S_0 ，于是题中所要求的面积为

$$S(x) = A(x) - S_0 = \frac{1}{64x} (4x^2 + 1)^2 - S_0.$$

对 $S(x)$ 求导得

$$S'(x) = \frac{(4x^2 + 1)(12x^2 - 1)}{64x^2}.$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时， $S'(x) < 0$ ；当 $x > \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，

$S'(x) > 0$ ，从而知 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $x > 0$ 处的唯一极小值点，即最小值点。

于是所求切线方程为：

$$Y - \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) = -\frac{2\sqrt{3}}{6} \left(X - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \Rightarrow Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{1}{3}.$$

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K > 0$ 。假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$ ，问雪堆全部融化需要多少小时？

解. 设半球形雪堆在时刻 t 时的半径为 r ，则半球的体积 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ ，侧面积 $S = 2\pi r^2$ 。

由题设体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，则有

$$\frac{dV}{dt} = -kS \Rightarrow \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -kS \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -k.$$

积分得 $r = -kt + c$ ，把 $r|_{t=0} = r_0$ 代入得 $c = r_0$ ，所以 $r = -kt + r_0$ 。又半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$ ，即 $V|_{t=3} = \frac{1}{8}V|_{t=0}$ 。以 V 的公式代入上式，得到

$$\frac{2}{3}\pi(-3k + r_0)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi r_0^3 \Rightarrow k = \frac{1}{6}r_0,$$

于是 $r = -kt + r_0 = r_0 \left(1 - \frac{t}{6}\right)$ 。当 $t = 6$ 时 $r = 0$ ，雪堆全部融化需 6 小时。

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数， $f(0) = 0$ 。

(I) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(II) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η ，使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$ 。

解. (I) $f(x)$ 的拉格朗日余项一阶麦克劳林公式为：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

其中 ξ 位于 0 和 x 为端点的开区间内， $x \in [-a, a]$ 。

(II) 将 $f(x)$ 的麦克劳林公式从 $-a$ 到 a 积分, 得到

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx.$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 所以 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上存在最大值 M 和最小值 m , 因此

$$\frac{1}{3}ma^3 = \frac{1}{2}m \int_{-a}^a x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \leq \frac{1}{2}M \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{Ma^3}{3},$$

从而 $m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M$. 由连续函数介值定理知, 存在 $\eta \in [-a, a]$, 使

$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E,$$

其中 E 是 3 阶单位矩阵, 求 X .

解. 由题设的关系式可得 $(A - B)X(A - B) = E$. 其中

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $|A - B| = 1 \neq 0$, 故知矩阵 $A - B$ 可逆, 求其逆矩阵得

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是, 在等式 $(A - B)X(A - B) = E$ 两边左乘和右乘 $(A - B)^{-1}$ 可得

$$X = [(A - B)^{-1}]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系,

$$\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1.$$

试问实数 t 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也为 $AX = 0$ 的一个基础解系.

解. 由题设知, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 均为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 均为 $Ax=0$ 的解. 下面证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 0,$$

代入整理得

$$(t k_4 + k_1)\alpha_1 + (t k_1 + k_2)\alpha_2 + (t k_2 + k_3)\alpha_3 + (t k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 即

$$\begin{cases} t k_4 + k_1 = 0, \\ t k_1 + k_2 = 0, \\ t k_2 + k_3 = 0, \\ t k_3 + k_4 = 0. \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^4.$$

由齐次线性方程组只有零解得充要条件可得: 当 $t \neq \pm 1$ 时, 上述方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关, 此时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

二〇〇二年考研数学试卷二解答

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0 \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -2. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\frac{x}{2}} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a = f(0).$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必有 $f(0^+) = f(0^-) = f(0)$, 即 $a = -2$.

2. 位于曲线 $y = xe^{-x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界图形的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 1. 事实上, 所求面积即为

$$S = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x d(e^{-x}) = -[xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + 1 = 1.$$

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. 应填 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. 令 $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, $\Delta x_i = \frac{\pi}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 由定积分的定义有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n} i} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i\pi}{n}\right) \Delta x_i \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

5. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 4. 记 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4).$$

令 $|\lambda E - A| = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$, 故 $\lambda = 4$ 是矩阵的非零特征值.

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

解. 应选(D). 在可导条件下, Δy 的线性主部即为微分 dy . 由于 $dy = f'(x^2)2x\Delta x$,
以 $x = -1, \Delta x = -0.1$ 代入得 $0.1 = f'(1) \times 0.2$, 于是 $f'(1) = 0.5$, 从而选 (D).

解. 应选(D). 对于(D), 令 $F(x) = \int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} t[f(t) + f(-t)] dt = \int_0^x (-u)[f(-u) + f(u)] d(-u) \\ &= \int_0^x u[f(-u) + f(u)] du = F(x), \end{aligned}$$

所以(D)为偶函数. 同理证得(A)和(C)为奇函数, 而(B)不确定, 如 $f(t)=1+t$. 故应选(D).

3. 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 ()

(A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 2. (D) 等于 3.

解. 应选(C). 由 $y'' + p y' + q y = e^{3x}$ 和 $y(0) = y'(0) = 0$ 得 $y''(0) = 1$. 由洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{1} = 2.$$

本题也可利用泰勒公式求解.

- #### 4. 同试卷一第二 [3] 题.

5. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有………()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关. (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

解. 应选 (A). 取 $k=0$, 则显然能排除 (B) 和 (C); 而取 $k=1$, 则由反证法不难排除 (D). 故仅有 (A) 是正确的. 用反证法, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 因已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $k\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 即存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$k\beta_1 + \beta_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3.$$

又已知 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即存在常数 l_1, l_2, l_3 , 使得

$$\beta_1 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3.$$

由上述两式得

$$\beta_2 = (\lambda_1 - k l_1) \alpha_1 + (\lambda_2 - k l_2) \alpha_2 + (\lambda_3 - k l_3) \alpha_3.$$

这与 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示矛盾. 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解. 由极坐标到直角坐标的变换公式 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 得参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta - \cos^2 \theta, \\ y = \sin \theta - \cos \theta \sin \theta. \end{cases}$$

曲线上 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 的点对应的直角坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, 切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{-\sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta} \Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1.$$

于是切线的直角坐标方程为

$$y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right) \Rightarrow x - y - \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4} = 0.$$

法线的直角坐标方程为

$$y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -\frac{1}{1} \left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right) \right) \Rightarrow x + y - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

四、(本题满分7分)

设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0; \\ \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

解. 当 $-1 \leq x < 0$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (2t + \frac{3}{2}t^2) dt = \left[t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right]_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}.$$

当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \left[t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right]_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^x t d\left(\frac{1}{e^t+1}\right) = -\frac{1}{2} - \left[\frac{t}{e^t+1} \right]_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t+1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} - \int_0^x \frac{d(e^{-t})}{1+e^{-t}} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} - [\ln(1+e^{-t})]_0^x \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} + \ln 2. \end{aligned}$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0; \\ \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{x}{e^x+1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导 $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\ln f(x+hx) - \ln f(x)) \\ &= x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x+hx) - \ln f(x)}{hx} = x [\ln f(x)]' = \frac{xf'(x)}{f(x)}, \end{aligned}$$

从而得到

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = \exp \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right) \right) = \exp \left(\frac{xf'(x)}{f(x)} \right).$$

于是推得

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = x[\ln f(x)]' = \frac{1}{x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{x^2}.$$

解此微分方程, 得到 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + C_1$. 整理得 $f(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$. 再利用条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C = 1$, 求得 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

六、(本题满分 8 分)

求微分方程 $x dy + (x-2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

解. 这是一阶线性微分方程 $y' - \frac{2}{x}y = -1$, 由通解公式有

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[- \int e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = x^2 \left[- \int \frac{1}{x^2} dx + C \right] = x^2 \left(\frac{1}{x} + C \right) = x + Cx^2.$$

由曲线 $y = x + Cx^2$ 与 $x = 1, x = 2$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (x + Cx^2)^2 dx = \pi \left(\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right).$$

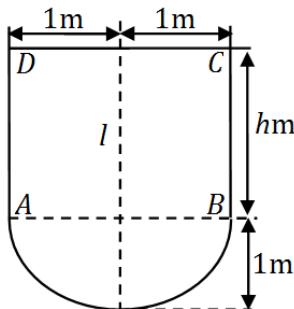
求导并令导数为零, 得到

$$\frac{dV}{dC} = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0.$$

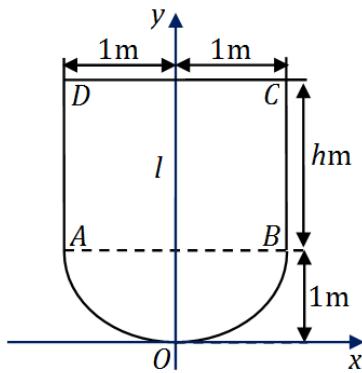
解得 $C = -\frac{75}{124}$. 又 $V''(C) > 0$, 故 $C = -\frac{75}{124}$ 为 V 的惟一极小值点, 也是最小值点, 于是所求曲线为 $y = x - \frac{75}{124}x^2$.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成, 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)?



解. 建立坐标系如下图:



设底部抛物线为 $y = px^2 + q$, 由坐标轴的建立知此抛物线过 $(0, 0), (1, 1)$ 点, 代入抛物线的方程, 解得 $q = 0, p = 1$. 即底部抛物线是 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$). 已知压力 = 压强 \times 面积. 设 ρ 为水的密度, g 为重力加速度, 则平板 $ABCD$ 上

所受的总压力为

$$P_1 = \int_1^{1+h} 2\rho g(1+h-y) dy = \rho g h^2,$$

抛物板 AOB 上所受的总压力为

$$P_2 = \int_0^1 2\rho g(1+h-y)\sqrt{y} dy = 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right).$$

由题意得

$$P_1 : P_2 = 5 : 4 \Rightarrow \frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}.$$

解之得 $h = -\frac{1}{3}$ (舍去) 或 $h = 2$ (米), 即闸门矩形部分的高应为 2m.

八、(本题满分 8 分)

设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

解. 先说明有界性: 由 $0 < x_1 < 3$ 知 x_1 及 $3-x_1$ 均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}.$$

假设 $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$ ($k \geq 2$), 则有

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}.$$

由数学归纳法知, 对任意正整数 $n \geq 2$ 有 $0 < x_n \leq \frac{3}{2}$, 即数列有界. 再说明单调性: 因为

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n \leq \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加. 数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a .

由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限得 $a = \sqrt{a(3-a)}$, 即 $2a^2 - 3a = 0$. 解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$, 但因 $x_1 > 0$ 且单调增加, 故 $a \neq 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

九、(本题满分 8 分)

设 $0 < a < b$, 证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

解. (I) 先证左边不等式. 由拉格朗日中值定理. 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

而 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2+b^2}$, 所以左边不等式成立.

(II) 再证右边不等式. 令

$$\psi(x) = \ln x - \ln a - \frac{1}{\sqrt{ax}}(x-a),$$

则有 $\psi(a)=0$, 及

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) = -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0.$$

所以当 $x > a > 0$ 时, $\psi(x) < 0$, 再以 $x = b$ 代入, 得

$$\ln b - \ln a < \frac{1}{\sqrt{ab}}(b-a) \Rightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

从而右边不等式成立.

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$. 证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$$

是比 h^2 高阶的无穷小.

解. 要证存在唯一的一组 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

由极限的四则运算法则知, 分子极限应为 0, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h)] = f(0)$$

由 $f(0) \neq 0$, 求得 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. 再由洛必达法则得

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h}. \end{aligned}$$

由极限的四则运算法则知分子的极限应是 0, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)) = 0.$$

由 $f'(0) \neq 0$, 求得 $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$. 继续用洛必达法则, 由 $f''(x)$ 在 $x=0$ 连续可得

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3) f''(0) = 0.$$

由 $f''(0) \neq 0$, 求得 $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0$. 所以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 由克莱姆法则知, 存在唯一的一组解满足题

设要求, 证毕.

注记: 也可由泰勒公式求得 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足的方程组.

十一、(本题满分6分)

已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵. (I) 证

明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆; (II) 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

解. (I) 由题设条件 $2A^{-1}B = B - 4E$, 两边左乘 A , 整理得 $AB - 2B - 4A = 0$. 所以

$$(A - 2E)(B - 4E) = 8E \Rightarrow (A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E.$$

根据可逆矩阵的定义知 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(II) 由 (I) 结果知 $A = 8(B - 4E)^{-1} + 2E$. 而

$$B - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B - 4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

代入 $A = 8(B - 4E)^{-1} + 2E$ 可得

$$A = 8(B - 4E)^{-1} + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

十二、(本题满分6分)

同试卷一第九题.

二〇〇三年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 若 $x \rightarrow 0$ 时， $(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -4 . 由等价无穷小量代换可得

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2} = -\frac{1}{4}a,$$

从而 $a = -4$.

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $x - y = 0$. 对所给方程两边对 x 求导数得

$$y + xy' + \frac{2}{x} = 4y^3 y'.$$

将 $x = 1, y = 1$ 代入上式，得 $y'(1) = 1$. 故曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad x - y = 0.$$

3. $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$. 因为 $y^{(n)} = 2^x (\ln 2)^n$ ，所以 $y^{(n)}(0) = (\ln 2)^n$ ，从而所求系数为

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

4. 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$)，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a} - 1)$. 由极坐标下平面图形的面积公式得

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{2a\theta} d\theta = \left[\frac{1}{4a} e^{2a\theta} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4a}(e^{4\pi a} - 1).$$

5. 设 α 为 3 维列向量， α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha \alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $\alpha^T \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 3. 若矩阵的秩为 1，则可把它分解为一列乘一行的形式. 因为

$$A = \alpha \alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 于是 $\alpha^T \alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$.

6. 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2 B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 由 $A^2 B - A - B = E$, 知 $(A + E)(A - E)B = A + E$. 易知矩阵 $A + E$ 可逆, 于是有 $(A - E)B = E$. 两边取行列式得 $|A - E| \cdot |B| = 1$, 所以

$$|B| = |A - E|^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}.$$

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 同试卷一第二 [2] 题.

2. 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 等于………()
- (A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$. (C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

解. 应选 (B). 由换元积分法得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx = \frac{3}{2n} \int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n} d(1+x^n) \\ &= \left[\frac{1}{n} (1+x^n)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由重要极限之二可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = (1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1.$$

3. 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解, 则 $\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为………()
- (A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$.

解. 应选 (A). 由 $y = \frac{x}{\ln x}$ 得 $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. 代入微分方程得

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + \phi(\ln x) \Rightarrow \phi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \Rightarrow \phi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}.$$

4. 同试卷一第二 [1] 题.

5. 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则.....()
 (A) $I_1 > I_2 > 1$. (B) $1 > I_1 > I_2$. (C) $I_2 > I_1 > 1$. (D) $1 > I_2 > I_1$.

解. 应选 (B). 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时 $\tan x > x > 0$, $\frac{\tan x}{x} > 1$, $\frac{x}{\tan x} < 1$. 从而有

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \frac{\pi}{4} > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx = I_2.$$

利用 $I_1 > I_2$ 且 $I_2 < \frac{\pi}{4}$, 可以排除选项 (A), (C), (D). 也可以利用 $\frac{\tan x}{x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调增加直接得到 $I_1 < 1$.

6. 同试卷一第二 [4] 题.

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0; \\ 6, & x = 0; \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0. \end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

a 为何值时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

解. 因为 $f(0) = 6$, 而单侧极限为

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a, \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{\frac{x^2}{4}} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2a^2 + 4. \end{aligned}$$

所以, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的连续点当且仅当 $-6a = 6 = 2a^2 + 4$, 即 $a = -1$; $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点当且仅当 $-6a = 2a^2 + 4 \neq 6$, 即 $2a^2 + 6a + 4 = 0$ 但 $a \neq -1$, 即 $a = -2$.

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2, \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \quad (t > 1) \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=9}$.

解. 设 $x = \varphi(t) = 1 + 2t^2$, $y = \psi(t) = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du$, 则

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t) = \frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t} = \frac{e \cdot t^2}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t} = \frac{2et}{1+2\ln t}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{e}{2(1+2\ln t)} \right)' \cdot \frac{1}{4t} \\ &= \frac{-4e \frac{1}{t}}{4(1+2\ln t)^2} \cdot \frac{1}{4t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}.\end{aligned}$$

当 $x=9$ 时, 由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$. 故有

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=9} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

解. 作积分换元 $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$), 得到

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{e^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \sec^2 t dt = \int e^t \frac{\tan t}{\sec t} dt = \int e^t \sin t dt.$$

又由分部积分法得到

$$\begin{aligned}\int e^t \sin t dt &= -\int e^t d(\cos t) = -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt \\ &= -e^t \cos t + \int e^t d(\sin t) = -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t dt.\end{aligned}$$

从而有

$$\int e^t \sin t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C.$$

因此

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

六、(本题满分 12 分)

同试卷一第七题.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

解. 问题等价于讨论 $\phi(x) = \ln^4 x - 4 \ln x + 4x - k$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的零点个数, 对 $\phi(x)$ 求导得

$$\phi'(x) = \frac{4 \ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x} (\ln^3 x - 1 + x).$$

可以看出 $x = 1$ 是 $\phi(x)$ 的驻点, 而且当 $0 < x < 1$ 时, $\phi'(x) < 0$, 即 $\phi(x)$ 单调减少; 当 $x > 1$ 时, $\phi'(x) > 0$, 即 $\phi(x)$ 单调增加, 故 $\phi(1) = 4 - k$ 为函数 $\phi(x)$ 的惟一极小值即最小值.

- (I) 当 $\phi(1) = 4 - k > 0$, 即当 $k < 4$ 时, $\phi(x) \geq \phi(1) > 0$, $\phi(x)$ 无零点.
- (II) 当 $\phi(1) = 4 - k = 0$, 即当 $k = 4$ 时, $\phi(x) \geq \phi(1) = 0$, $\phi(x)$ 有且仅有一个零点.
- (III) 当 $\phi(1) = 4 - k < 0$, 即当 $k > 4$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty.$$

由连续函数的介值定理和函数的单调性, $\phi(x)$ 有且仅有两个零点, 分别位于区间 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内.

综上所述, 当 $k < 4$ 时, 两曲线没有交点; 当 $k = 4$ 时, 两曲线仅有一个交点; 当 $k > 4$ 时, 两曲线有两个交点.

八、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;
- (II) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

解. (I) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

令 $X = 0$, 则它与 y 轴的交点为 $Q\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$. 由题设, 线段 PQ 被 x 轴平分, 从而

$$\frac{1}{2}(y + y + \frac{x}{y'}) = 0 \Rightarrow 2y dy + x dx = 0.$$

积分得 $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$ (C 为任意常数), 代入初始条件 $y|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 得 $C = \frac{1}{2}$,

故曲线 $y = f(x)$ 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = \frac{1}{2}$, 即 $x^2 + 2y^2 = 1$.

(II) 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt.$$

另一方面，曲线 $y = f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

于是该曲线的弧长为（其中换元 $u = \frac{\pi}{2} - t$ ）

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 + \cos^2 u} (-du) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u} du \end{aligned}$$

所以 $s = \frac{\sqrt{2}}{4} l$.

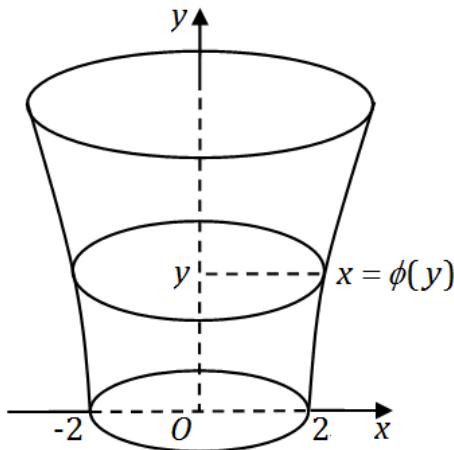
九、(本题满分 10 分)

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x = \phi(y)$ ($y \geq 0$) 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为 $2m$. 根据设计要求，当以 $3m^3/min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/min$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）。

(I) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\phi(y)$ 之间的关系式；

(II) 求曲线 $x = \phi(y)$ 的方程。

(注： m 表示长度单位米， min 表示时间单位分。)



解. (I) 设在 t 时刻液面的高度为 y ，则此时液面的面积为 $\pi\phi^2(y) = 4\pi + \pi t$ ，从而

$$t = \phi^2(y) - 4.$$

(II) 液面的高度为 y 时，液体的体积

$$\pi \int_0^y \phi^2(u) du = 3t = 3\phi^2(y) - 12.$$

上式两边对 y 求导得

$$\pi\phi^2(y)=6\phi(y)\phi'(y) \Rightarrow \frac{d\phi(y)}{dy}=\frac{\pi}{6}\phi(y).$$

解此微分方程, 得 $\phi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}$, 其中 C 为任意常数. 由 $\phi(0)=2$ 知 $C=2$, 故所求曲线方程为 $x=2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(I) 在 (a, b) 内 $f(x)>0$;

(II) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(III) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a} \int_a^b f(x)dx$.

解. (I) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)=0$, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a)=0$. 又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a)=f(a)$, 则 $f(a)=0$. 由于 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加, 所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值, 即 $f(x)>f(a)=0$, $x \in (a, b)$.

(II) 取 $F(x)=x^2$, $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$), 则 $g'(x)=f(x)>0$, 则 $F(x)$, $g(x)$ 满足柯西中值定理的条件, 于是在 (a, b) 内存在点 ξ , 使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\frac{2\xi}{f(\xi)} \Rightarrow \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(III) 在区间 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得在 (a, ξ) 内存在一点 η , 使

$$f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a).$$

因 $f(a)=0$, 上式即 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$, 代入 (II) 的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)} \Rightarrow f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a} \int_a^b f(x)dx.$$

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并求可逆矩阵 P

使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解. 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)[(\lambda - 2)^2 - 16] = (\lambda - 6)^2(\lambda + 2).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$. 由于 A 相似于对角矩阵 Λ , 故对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 应有两个线性无关的特征向量, 因此 $r(6E - A) = 1$. 从而由

$$6E - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $a = 0$. 于是对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = -2$ 时,

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 并有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

十二、(本题满分 8 分)

同试卷一第十题.

二〇〇四年考研数学试卷二解答

一、填空题 (1~6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 0. 当 $x=0$ 时, $f(x)=0$; 而当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

2. 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $(-\infty, 1]$. 由参数方程可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1} \right)' \cdot \frac{1}{3(t^2 + 1)} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{3(t^2 + 1)} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, $t < 0$. 又 $x'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, 所以 $x(t)$ 单调增. 当 $t=0$ 时, $x=1$,
当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $x \rightarrow -\infty$. 从而 $x \in (-\infty, 1]$ 时, 曲线是向上凸的.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. 应填 $\frac{\pi}{2}$. 令 $x = \sec t$, 则有

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2. 令 $F(x, y, z) = e^{2x-3z} + 2y - z = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{e^{2x-3z} \cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}}. \end{aligned}$$

从而 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

5. 微分方程 $(y + x^3)dx - 2x dy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 _____.

解. 应填 $y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}$. 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2}x^2$, 则由一阶线性微分方程的通解公式, 可得 (由初始条件可设 $x > 0$)

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{2x} dx} \left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx + C \right] = e^{\frac{1}{2}\ln x} \left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}\ln x} dx + C \right] \\ &= \sqrt{x} \left[\int \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} dx + C \right] = \sqrt{x} \left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \right]. \end{aligned}$$

再由 $y(1) = \frac{6}{5}$ 得 $C = 1$, 从而特解为 $y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}$.

6. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题 (7~14 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

7. 同试卷一第二 [7] 题.

8. 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则 ()

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
- (D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (C). 由于 $f(x) = |x(1-x)| \geq 0 = f(0)$, 所以 $x=0$ 为极小值点. 又

$$f(x) = \begin{cases} -x(1-x), & -1 < x \leq 0; \\ x(1-x), & 0 < x < 1. \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0; \\ -2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

于是 $(0, 0)$ 为拐点.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ()

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.
- (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.
- (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$.
- (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

解. 应选 (B). 由对数性质和定积分的定义可得

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \int_1^2 \ln t dt = 2 \int_1^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

10. 同试卷一第二 [8] 题.

11. 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为………()

- (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.
- (B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.
- (C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.
- (D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.

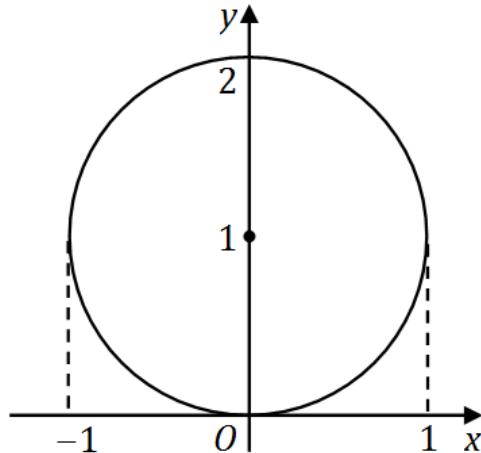
解. 应选 (A). 原方程对应的齐次方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 则特征根为 $\lambda = \pm i$. 对 $y'' + y = x^2 + 1$, 其特解形式可设为 $y_1^* = ax^2 + bx + c$; 对 $y'' + y = \sin x$, 其特解形式可设为 $y_2^* = x(A\sin x + B\cos x)$. 由叠加原理, 方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x).$$

12. 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于()

- (A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$.
- (B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$.
- (C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr$.
- (D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$.

解. 应选 (D). 由 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则积分区域是以 $(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆及其内部, 积分区域见图.



在直角坐标系下, 先 x 后 y , 则有

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx.$$

先 y 后 x , 则有

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy.$$

在极坐标系下，则有

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr.$$

13. 同试卷一第二 [11] 题.

14. 同试卷一第二 [12] 题.

三、解答题 (15~23 小题，共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$

解. 由等价无穷小量代换可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，在区间 $[0, 2]$ 上， $f(x) = x(x^2 - 4)$ ，若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$ ，其中 k 为常数。

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式；

(II) 问 k 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解. (I) 当 $-2 \leq x < 0$ ，即 $0 \leq x+2 < 2$ 时，

$$f(x) = kf(x+2) = k(x+2)[(x+2)^2 - 4] = kx(x+2)(x+4).$$

(II) 由题设 $f(0) = 0$ ，

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 - 4) - 0}{x} = -4, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{kx(x+2)(x+4) - 0}{x} = 8k. \end{aligned}$$

令 $f'_-(0) = f'_+(0)$ ，得 $k = -\frac{1}{2}$ 。即当 $k = -\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

17. (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt.$

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；(II) 求 $f(x)$ 的值域。

解. (I) 令 $t = u + \pi$. 则有

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_x^{\frac{x+\pi}{2}} |\sin(u + \pi)| du \\ &= \int_x^{\frac{x+\pi}{2}} |\sin u| du = f(x) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(II) 因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 故只需在 $[0, \pi]$ 上讨论其值域. 令

$$f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x| = 0,$$

在区间 $[0, \pi]$ 内求得驻点 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. 计算

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = 2 - \sqrt{2},$$

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1,$$

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin t) dt = 1.$$

因此 $f(x)$ 的最小值是 $2 - \sqrt{2}$, 最大值是 $\sqrt{2}$. 故 $f(x)$ 的值域是 $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

18. (本题满分 12 分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0$, $x = t$ ($t > 0$) 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值; (II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

解. (I) 旋转体体积

$$V(t) = \pi \int_0^t y^2 dx = \pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx,$$

旋转体的侧面积

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx = 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

所以 $\frac{S(t)}{V(t)} = 2$.

(II) 在 $x = t$ 处旋转体的底面积为

$$F(t) = \pi y^2 \Big|_{x=t} = \pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2,$$

所以由洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\pi}{2} \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx}{\pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{2} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2}{2 \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = 1.\end{aligned}$$

19. 同试卷一第三 [15] 题.

20. 同试卷一第三 [16] 题.

21. (本题满分 10 分)

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解. 令 $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$, 则 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy}) = f(u, v)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x f'_1 + y e^{xy} f'_2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y f'_1 + x e^{xy} f'_2.\end{aligned}$$

从而二阶偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2y f'_1 + x e^{xy} f'_2) \\ &= -2y \left(f''_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + e^{xy} f'_2 + x y e^{xy} f'_2 + x e^{xy} \left(f''_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{22} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= -2y (2x f''_{11} + y e^{xy} f''_{12}) + e^{xy} f'_2 + x y e^{xy} f'_2 + x e^{xy} (2x f''_{21} + y e^{xy} f''_{22}) \\ &= -4x y f''_{11} + 2(x^2 - y^2) e^{xy} f''_{12} + x y e^{2xy} f''_{22} + e^{xy} (1 + x y) f'_2.\end{aligned}$$

22. (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

解. 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2a & a & 0 & 0 \\ -3a & 0 & a & 0 \\ -4a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = B.$$

当 $a=0$ 时, $r(A)=1 < 4$, 故次方程组有非零解. 其同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \quad \eta_3 = (-1, 0, 0, 1)^T.$$

于是方程组的通解为 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数. 当 $a \neq 0$ 时, 对矩阵 B 作初等行变换, 有

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可知 $a=-10$ 时, $r(A)=3 < 4$, 故此方程组也有非零解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_4 = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为 $\eta = (1, 2, 3, 4)^T$, 于是方程组的通解为 $x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇〇五年考研数学试卷二解答

一、填空题 (1~6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\pi dx$. 两边取对数得 $\ln y = x \ln(1 + \sin x)$. 对 x 求导得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x},$$

于是导函数

$$y' = (1 + \sin x)^x \cdot \left[\ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right].$$

故 $dy|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx$.

2. 曲线 $y = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = x + \frac{3}{2}$. 由求斜渐近线公式得:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{3/2}}{x\sqrt{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{3/2} - x^{3/2}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y = x + \frac{3}{2}$.

3. $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\pi}{4}$. 令 $\sqrt{1-x^2} = t$, 有 $x^2 = 1-t^2$, $x dx = -t dt$. 从而

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{-t dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

4. 同试卷一第一 [2] 题.

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{3}{4}$. 由题设,

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2(\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2k} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4k}, \end{aligned}$$

所以 $k = \frac{3}{4}$.

6. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题 (7~14 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

7. 同试卷一第二 [7] 题.

8. 同试卷一第二 [8] 题.

9. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 ()

解. 应选(A). 当 $x=3$ 时, 有 $t^2+2t=3$, 得 $t=-3$ (舍去) 或 $t=1$. 曲线 $y=y(x)$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{2t+2}{2(t+1)^2}},$$

所以曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ (即 $t = 1$) 处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$. 于是在该处的法线的斜率为 -8 , 所以过点 $(3, \ln 2)$ 的法线方程为

$$y - \ln 2 = -8(x - 3).$$

令 $y=0$, 得其与 x 轴交点的横坐标为 $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$.

10. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = \dots \quad (\quad)$

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

解. 应选(D). 由于积分区域 D 是关于 $y = x$ 对称的, 所以 x 与 y 互换后积分值不变, 所以有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi. \end{aligned}$$

11. 同试卷一第二 [9] 题.

12. 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则………()

- (A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.
- (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
- (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

解. 应选(D). 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 点处无定义, 因此它们是间断点. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 所以 $x=0$ 为第二类间断点; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, 所以 $x=1$ 为第一类间断点.

13. 同试卷一第二 [11] 题.

14. 同试卷一第二 [12] 题.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

解. 作积分变量代换, 令 $x-t=u$, 则

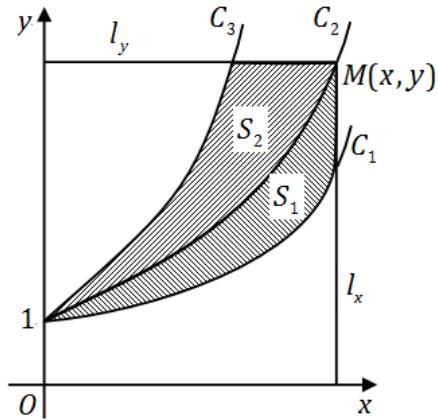
$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du.$$

于是由洛必达法则和微分中值定理, 存在 ξ 介于 0 和 x 之间, 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{f(\xi) + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 11 分)

如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图象, 过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \phi(y)$.



解. 由题设图形知, C_3 在 C_1 的左侧, 根据平面图形的面积公式得,

$$S_1(x) = \int_0^x \left[e^t - \frac{1}{2}(1 + e^t) \right] dt = \frac{1}{2}(e^x - x - 1),$$

$$S_2(y) = \int_1^y (\ln t - \phi(t)) dt.$$

由 $S_1(x) = S_2(y)$ 得

$$\frac{1}{2}(e^x - x - 1) = \int_1^y (\ln t - \phi(t)) dt.$$

注意到 $M(x, y)$ 是 $y = e^x$ 的点, 于是

$$\frac{1}{2}(y - \ln y - 1) = \int_1^y (\ln t - \phi(t)) dt.$$

两边对 y 求导得

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{y} \right) = \ln y - \phi(y).$$

整理得曲线 C_3 的方程为: $x = \phi(y) = \ln y - \frac{y-1}{2y}$.

17. 同试卷一第三 [17] 题.

18. (本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

解. 由复合函数求导的链式法则得

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right).$$

代入原方程得

$$(1 - \cos^2 t) \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right) - \cos t \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) + y = 0.$$

化简得 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, 其特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根 $r_{1,2} = \pm i$, 通解为 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. 所以

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2},$$

$$y' = C_1 x' + C_2 (\sqrt{1-x^2})' = C_1 + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

将初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 代入, 解得 $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. 故所求特解为

$$y = 2x + \sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

19. 同试卷一第三 [18] 题.

20. (本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解. (I) 由 $dz = 2x dx - 2y dy$ 知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. 对 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 两边积分得

$$z = f(x, y) = x^2 + c(y).$$

将 $z(x, y) = x^2 + c(y)$ 代入 $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得 $c'(y) = 2y$. 所以 $c(y) = y^2 + c$. 所以

$$z = x^2 - y^2 + c.$$

再由 $x = 1, y = 1$ 时 $z = 2$ 知 $c = 2$. 于是所讨论的函数为

$$z = x^2 - y^2 + 2.$$

(II) 先求 z 在 D 的内部 $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$ 中的驻点: 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ 得驻点 $(0, 0)$, 对应的 $z = f(0, 0) = 2$. 再求 $z = x^2 - y^2 + 2$ 在 D 的边界 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的最值: 把 $y^2 = 4(1-x^2)$ 代入 z 的表达式有

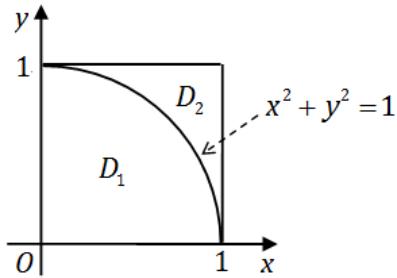
$$z = x^2 - y^2 + 2 = 5x^2 - 2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

令 $z'_x = 10x = 0$ 解得 $x = 0$, 对应的 $y = \pm 2$, $z|_{x=0, y=\pm 2} = -2$. 还要考虑 $-1 \leq x \leq 1$ 的端点 $x = \pm 1$, 对应的 $y = 0$, $z|_{x=\pm 1, y=0} = 3$. 由 $z = 2, z = -2, z = 3$ 比较小, 故 $z = f(x, y)$ 在椭圆域 D 的最小值为 -2 (对应于 $x = 0, y = \pm 2$), 最大值为 3 (对应于 $x = 0, y = \pm 2$).

21. (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

解. 如图, 将 D 划分为 D_1 与 D_2 两部分:



则有

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy.$$

前一个积分用极坐标计算：

$$\iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

后一个积分用直角坐标计算：

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2 + y^2 - 1) dy \\ &= \int_0^1 \left[\left(x^2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) dx + \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

所以原积分

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

22. (本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T$, $\beta_2 = (-2, a, 4)^T$, $\beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 由于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故 $r(A) < 3$ (若 $r(A) = 3$, 则任何三维向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示). 从而

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+a)(a-1)^2 = 0,$$

从而得 $a = 1$ 或 $a = -2$. 当 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = (1, 1, 1)^T$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但 $\beta_2 = (-2, 1, 4)^T$ 不

能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，故 $a=1$ 符合题意。当 $a=-2$ 时，作初等行变换

$$(B:A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & : & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & : & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & : & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & : & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & : & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

因 $r(B) = 2 \neq r(B:\alpha_2) = 3$ ，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，故方程组 $BX = \alpha_2$ 无解，即 α_2 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，与题设矛盾。所以 $a=-2$ 不合题意。

23. 同试卷一第三 [21] 题。

二〇〇六年考研数学试卷二解答

一、填空题 (1~6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 曲线 $y = \frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 _____.

解. 应填 $y = \frac{1}{5}$. 由无穷小量的性质可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4\sin x}{x}}{5 - \frac{2\cos x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0}{5-0} = \frac{1}{5},$$

故 $y = \frac{1}{5}$ 是水平渐近线.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

解. 应填 $\frac{1}{3}$. 按连续性定义和洛必达法则, 有 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

3. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1+x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

4. 同试卷一第一 [2] 题.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

解. 应填 $-e$. 在原方程中令 $x=0$, 得 $y=1$. 方程两边对 x 求导得 $y' = -e^y - xe^y y'$, 令 $x=0$ 得 $y'(0) = -e$.

6. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题 (7~14 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

7. 同试卷一第二 [7] 题.

8. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是.....()

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数.

(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

解. 应选 (B). 由题设知 $f(x)$ 在任意区间 $[a, b]$ 上都可积, 故 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 处处连续. 又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = - \int_0^{-x} f(-t) dt = \int_0^x f(s) ds = F(x),$$

则 $F(x)$ 为偶函数.

9. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于 ······ ()
 (A) $\ln 3 - 1$. (B) $-\ln 3 - 1$. (C) $-\ln 2 - 1$. (D) $\ln 2 - 1$.

解. 应选 (C). 由复合函数求导法则有 $h'(x) = g'(x)e^{1+g(x)}$. 将 $x = 1$ 代入上式得 $1 = 2e^{1+g(1)}$. 解得 $g(1) = \ln \frac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1$.

10. 函数 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是 ······ ()
 (A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$. (B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.
 (C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$. (D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

解. 应选 (D). 依题意, 微分方程对应的齐次方程的特征根为 1 和 -2, 于是特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 对应的齐次微分方程为 $y'' + y' - 2y = 0$. 又 $\alpha = 1$ 是特征方程的单根, 故非齐次项为 $f(x) = Ae^x$, 所以选 (D).

11. 同试卷一第二 [8] 题.

12. 同试卷一第二 [10] 题.

13. 同试卷一第二 [11] 题.

14. 同试卷一第二 [12] 题.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得 $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$, 其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解. 用泰勒公式, 将 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 代入题设等式整理得

$$1 + (B+1)x + \left(C + B + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3).$$

比较两边同次幂函数得

$$\begin{cases} B+1=A, \\ C+B+\frac{1}{2}=0, \\ \frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0. \end{cases}$$

由此可解得 $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{6}$.

16. (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

解. 由换元积分法和分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arcsin e^x}{e^{2x}} d(e^x) = \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt = - \int \arcsin t d\left(\frac{1}{t}\right) \\&= -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{t dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} \\&= -\frac{\arcsin t}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}} = -\frac{\arcsin t}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2)}{u^3-u} \\&= -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{du}{u^2-1} = -\frac{\arcsin t}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\&= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} \right| + C.\end{aligned}$$

17. 同试卷一第三 [15] 题.

18. 同试卷一第三 [16] 题.

19. (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$.

解. 令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$, 则有

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi,$$

$$f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

所以 $f'(x)$ 严格单调减少. 又 $f'(\pi) = \pi \cos \pi + \pi = 0$, 故 $0 < x < \pi$ 时 $f'(x) > 0$.

从而 $f(x)$ 严格单调增加, 由 $b > a$ 可得 $f(b) > f(a)$.

20. 同试卷一第三 [18] 题.

21. (本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0)$.

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解. (I) 计算该参数方程的各阶导数得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left(-\frac{2}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{1}{t^3}.$$

因为 $t > 0$ 时二阶导数小于零, 所以曲线 L 在 $t \geq 0$ 处是凸的.

(II) 切线方程为 $y - 0 = \left(\frac{2}{t} - 1\right)(x + 1)$, 设 $x_0 = t_0^2 + 1$, $y_0 = 4t_0 - t_0^2$, 代入方程解得 $t_0 = 1$. 所以切点为 $(2, 3)$, 切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 设 L 的方程 $x = g(y)$, 则 $S = \int_0^3 [(g(y) - (y - 1))] dy$. 由 $y = 4t - t^2$ 解得 $t = 2 \pm \sqrt{4-y}$, 从而 $x = (2 \pm \sqrt{4-y})^2 + 1$. 由于点 $(2, 3)$ 在 L 上, 可知 $x = (2 - \sqrt{4-y})^2 + 1 = g(y)$. 所以

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 [(9 - y - 4\sqrt{4-y}) - (y - 1)] dy \\ &= \int_0^3 (10 - 2y) dy - 4 \int_0^3 \sqrt{4-y} dy = 21 - \frac{56}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇〇七年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 同试卷一第一[1]题.

2. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x = \dots$ ()

(A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

解. 应选 (A). $f(x)$ 的不连续点为 0 、 1 、 $\pm\frac{\pi}{2}$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e(1 + e^{1 - \frac{1}{x}})}{e(1 - e^{1 - \frac{1}{x}})} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{1}{x}} + e)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{1}{x}} - e)} = \frac{e}{-e} = -1,$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在左右极限，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；同样，可验证其余选项是第二类间断点：

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \infty.$$

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一[4]题.

5. 同试卷一第一[2]题.

6. 同试卷一第一 [5] 题.

7. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ······ ()

(A) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.

(B) $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{[f(x, 0) - f(0, 0)]}{x} = 0$ 且 $\lim_{y\rightarrow 0} \frac{[f(0, y) - f(0, 0)]}{y} = 0$.

(C) $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{[f(x, y) - f(0, 0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(D) $\lim_{x\rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$ 且 $\lim_{y\rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

解. 应选(C). 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{[f(x,y)-f(0,0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ 推知

$$f(x, y) - f(0, 0) = \alpha \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = 0$. 对照全微分定义, 相当于

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \Delta x = x, \Delta y = y, A = 0, B = 0.$$

可见 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微, 故选择 (C). 选项 (A) 相当于已知 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续; 选项 (B) 相当于已知两个一阶偏导数 $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 存在, (A) 和 (B) 均不能保证 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微. 选项 (D) 相当于已知两个一元导函数 $f'_x(x, 0)$, $f'_y(0, y)$ 分别在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 处连续, 但不能推出两个一阶偏导函数 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 因此也不能保证 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

8. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于………()
- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$
 (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

解. 应选 (B). 该二次积分所对应的积分区域 $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$. 交换为先 x 后 y , 则积分区域可化为: $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$. 所以

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$$

9. 同试卷一第一 [7] 题.

10. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题 (11~16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{1}{6}$. 由洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)\cos x}{3x^2(1+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} - \cos x \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} - 1 \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $1 + \sqrt{2}$. 由参数方程的导数公式,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1 + \sin t)'}{(\cos t + \cos^2 t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t - 2 \sin t \cos t}.$$

把 $t = \frac{\pi}{4}$ 代入得 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. 所以法线斜率为 $1 + \sqrt{2}$.

13. 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$. 由数学归纳法可知 $y^{(n)} = (-1)^n 2^n n! (2x+3)^{-n-1}$. 把 $x=0$ 代入得 $y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

14. 同试卷一第二 [13] 题.

15. 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $2\left(-\frac{y}{x}f'_1 + \frac{x}{y}f'_2\right)$. 由复合函数导数公式,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

所以

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \left[f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y} \right] - y \left[f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right] \\ &= \left(-\frac{y}{x}\right) \cdot f'_1 + f'_2 \cdot \frac{x}{y} - f'_1 \cdot \frac{y}{x} + f'_2 \cdot \frac{x}{y^2} = 2\left(-\frac{y}{x}f'_1 + \frac{x}{y}f'_2\right). \end{aligned}$$

16. 同试卷一第二 [15] 题.

三、解答题 (17~24 小题, 共 86 分)

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

解. 方程两边对 x 求导得

$$f^{-1}[f(x)] \cdot f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow xf'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}.$$

当 $x \neq 0$ 时, 对上式两边同时除以 x , 得 $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$, 所以

$$f(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

在已知等式中令 $x=0$, 得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t) dt = 0$. 因 $f(x)$ 是 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调可导函数, $f^{-1}(t)$ 的值域为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 它是单调非负的, 故必有 $f(0)=0$, 从而两边对上式取 $x \rightarrow 0^+$ 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = C = 0$. 于是 $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

18. (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}} (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求出最小值.

解. (I) 由旋转体的体积公式,

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^\infty x a^{-\frac{x}{a}} dx = -\frac{a}{\ln a} \pi \int_0^\infty x d\left(a^{-\frac{x}{a}}\right) \\ &= -\frac{a}{\ln a} \pi \left[x a^{-\frac{x}{a}} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{\ln a} \pi \int_0^\infty a^{-\frac{x}{a}} dx = \pi \left(\frac{a}{\ln a} \right)^2. \end{aligned}$$

(II) 对 $V(a)$ 求导得到

$$\begin{aligned} V'(a) &= \left[\pi \left(\frac{a}{\ln a} \right)^2 \right]' = \pi \cdot \frac{2a \ln^2 a - a^2 \cdot 2 \ln a \cdot \frac{1}{a}}{\ln^4 a} \\ &= \pi \cdot \frac{2a \ln a - 2a}{\ln^3 a} = 2\pi \left(\frac{a(\ln a - 1)}{\ln^3 a} \right). \end{aligned}$$

令 $V'(a)=0$, 得 $\ln a=1$, 从而 $a=e$. 当 $1 < a < e$ 时, $V'(a) < 0$, $V(a)$ 单调减少; 当 $a > e$ 时, $V'(a) > 0$, $V(a)$ 单调增加. 所以 $a=e$ 时 V 最小, 最小体积为 $V_{\min}(a)=\pi e^2$.

19. (本题满分 11 分)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

解. 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 原方程化为 $p'(x+p^2)=p$. 即

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p} = p.$$

由一阶线性微分方程求解公式, 得

$$x = e^{\int \frac{1}{p} dp} \left(\int p e^{\int -\frac{1}{p} dp} dp + C_1 \right) = p \left(\int dp + C_1 \right) = p(p+C_1).$$

代入初始条件得 $C_1=0$, 于是 $p^2=x$. 由 $y'(1)=1$ 知 $p=\sqrt{x}$, 即

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \Rightarrow y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

代入初始条件得 $C_2=\frac{1}{3}$, 所以特解为

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}.$$

20. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定. 设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}$, $\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

解. 在 $y-xe^{y-1}=1$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=1$. $y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导, 得

$$y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0 \Rightarrow (2-y)y'-e^{y-1}=0.$$

由 $x=0, y=1$ 得 $y'\Big|_{x=0}=1$. 对上式两边求导, 得

$$(2-y)y''-y'^2-e^{y-1}y'=0.$$

令 $x=0$, 由 $x=0$ 时 $y=1, y'=1$, 得 $y''\Big|_{x=0}=2$. 因为 $z=f(\ln y-\sin x)$, 所以

$$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right).$$

把 $x=0, y=1, y'=1$ 代入, 得 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}=0$. 对上式再次求导, 得

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\frac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left[-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x\right].$$

把 $x=0, y=1, y'=1, y''=2$ 代入上式, 得 $\frac{d^2z}{dx^2}=f'(0)(2-1)=1$.

21. 同试卷一第三 [19] 题.

22. (本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x, y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leq 2, \end{cases}$ 计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$,

其中 $D=\{(x, y)||x|+|y|\leq 2\}$.

解. 记 $D_1=\{(x, y)||x|+|y|\leq 1\}$, $D_2=\{(x, y)|1<|x|+|y|\leq 2\}$. 则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} x^2 d\sigma + \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma. \end{aligned}$$

再记 $\sigma_1=\{(x, y)|0\leq x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$, $\sigma_2=\{(x, y)|1\leq x+y\leq 2, x\geq 0, y\geq 0\}$.

由于 D_1 与 D_2 都与 x 轴对称, 也都与 y 轴对称, 函数 x^2 与 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都是 x 的偶函数, 也都是 y 的偶函数, 所以由区域对称性和被积函数的奇偶性有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x^2 d\sigma &= 4 \iint_{\sigma_1} x^2 d\sigma = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy \\ &= 4 \int_0^1 x^2(1-x) dx = 4 \int_0^1 (x^2-x^3) dx = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = 4 \iint_{\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma.$$

对第二个积分采用极坐标，令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 则 $x + y = 1$ 化为 $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, x + y = 2$ 化为 $r = \frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}, \sqrt{x^2 + y^2} = r$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(\theta - \frac{\pi}{4}) d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \ln \left[\sec(\theta - \frac{\pi}{4}) + \tan(\theta - \frac{\pi}{4}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \ln \left(\ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right| - \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right| \right) \\ &= 2\sqrt{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

23. 同试卷一第三 [21] 题.

24. 同试卷一第三 [22] 题.

二〇〇八年考研数学试卷二解答

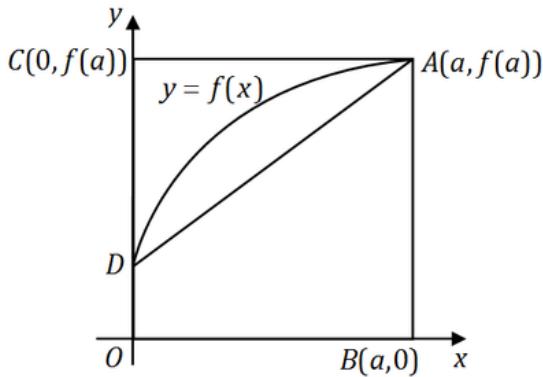
一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 求 $f'(x)$ 的零点个数为 ()

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选 (D). 因为 $f(0)=f(1)=f(2)=0$, 由罗尔定理知至少有 $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (1, 2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 所以 $f'(x)$ 至少有两个零点. 又由于三次方程 $f'(x)=0$ 的实根不是三个就是一个, 故 $f'(x)$ 的零点个数为 3.

2. 如图, 曲线段方程为 $y = f(x)$, 函数在区间 $[0, a]$ 上有连续导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于 ()



- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积. (B) 梯形 $ABOD$ 面积.
(C) 曲边三角形 ACD 面积. (D) 三角形 ACD 面积.

解. 应选 (C). 由分部积分法可得

$$\int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x d(f(x)) = [x f(x)]_0^a - \int_0^a f(x) dx = af(a) - \int_0^a f(x) dx.$$

因为 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积, $\int_0^a f(x) dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积, 所以 $\int_0^a x f'(x) dx$ 为曲边三角形的面积.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有 ()

(A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个无穷间断点. (D) 2 个跳跃间断点.

解. 应选 (A). 易知 $x=0$ 和 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0,$$

所以 $x = 0$ 是可去间断点. 又因为

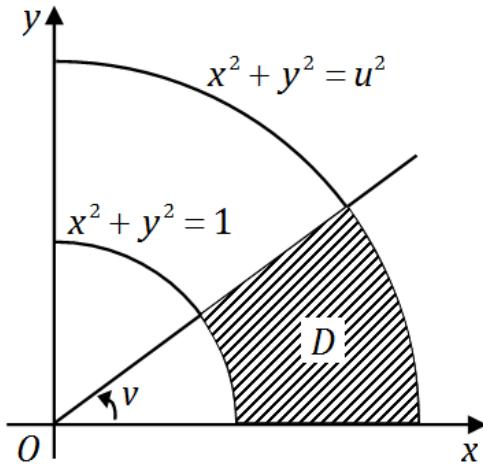
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin x = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \right) \sin 1 = \sin 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin x = -\sin 1,$$

所以 $x = 1$ 是跳跃间断点.

5. 同试卷一第一 [4] 题.

6. 设函数 f 连续. 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} = \dots \quad ()$



- (A) $v f(u^2)$. (B) $\frac{v}{u} f(u^2)$. (C) $v f(u)$. (D) $\frac{v}{u} f(u)$.

解. 应选 (A). 化为极坐标得到

$$F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^v d\theta \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial F}{\partial u} = v f(u^2).$$

7. 同试卷一第一[5]题.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为.....()

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解. 应选(D). 记 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则可求得 A 和 D 有相同的特征值 3 和 -1, 从而 A 和 D 有相同的正负惯性指数, 所以 A 和 D 合同.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 已知 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2. 因为

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^2 f(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} f(0),$$

所以 $f(0) = 2$.

10. 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - x dy = 0$ 的通解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $x(-e^{-x} + C)$. 原微分方程可变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^{-x}$, 所以其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int xe^{-x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x \left(\int xe^{-x} \cdot \frac{1}{x} dx + C \right) = x(-e^{-x} + C).$$

11. 同试卷一第二 [10] 题.

12. 求函数 $f(x) = (x - 5)x^{2/3}$ 的拐点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $(-1, -6)$. 由 $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ 得

$$y' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10(x+2)}{3x^{1/3}},$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}.$$

当 $x = 0$ 时 y'' 不存在, 但是在 $x = 0$ 左右邻域 $y'' > 0$, 因此 $x = 0$ 不是拐点. 当 $x = -1$ 时 $y'' = 0$, 而且在 $x = -1$ 左右邻域 y'' 异号, $f(-1) = -6$, 因此曲线的拐点为 $(-1, -6)$.

13. 已知 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$. 设 $u = \frac{y}{x}, v = \frac{x}{y}$, 则 $z = u^v$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v u^{v-1} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + u^v \ln u \cdot \frac{1}{y} \\ &= u^v \left(-\frac{v y}{u x^2} + \frac{\ln u}{y}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \left(-1 + \ln \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

14. 设 3 阶矩阵 A 的特征值是 $2, 3, \lambda$, 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -1 . 因为 $|A| = 2 \times 3 \times \lambda = 6\lambda$, 所以 $-48 = |2A| = 2^3 |A| = 48\lambda$, 故 $\lambda = -1$.

三、解答题（15~23 小题，共 94 分）

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解. 由 $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$ 得 $e^x dx = 2t dt$ ，两边同时积分，并由初始条件得 $e^x = 1 + t^2$ ，即 $x = \ln(1 + t^2)$. 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{2t} = (1+t^2) \ln(1+t^2) = e^x x,$$

从而 $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(x+1)$.

17. (本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

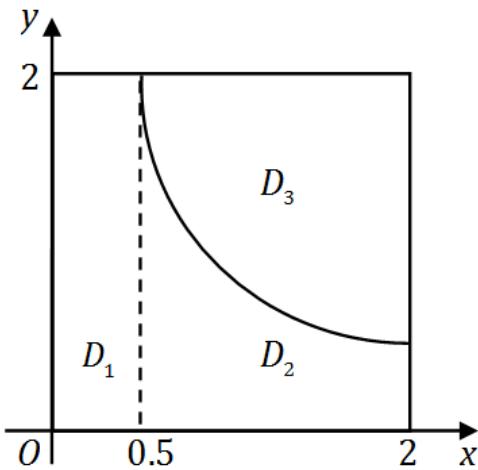
解. 令 $\arcsin x = t$ ，则 $x = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin 2t) = \frac{\pi^2}{16} - \left[\frac{t \sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \left[-\frac{1}{8} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18. (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

解. 曲线 $xy = 1$ 将区域分成三个区域 D_1, D_2, D_3 :



从而所求的积分

$$\begin{aligned}
 \iint_D \max(xy, 1) dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} dx dy + \iint_{D_3} dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy \\
 &= 1 + 2 \ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2.
 \end{aligned}$$

19. (本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对于任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x=0$, $x=t$, 曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解. 因为旋转体的体积 $V=\pi \int_0^t f^2(x) dx$, 侧面积 $S=2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$, 所以由题设有

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx.$$

上式两端对 t 求导得 $f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$, 即 $y'=\sqrt{y^2-1}$. 由分离变量法解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$, 即 $y+\sqrt{y^2-1}=C e^t$. 将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$, 故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$, 即 $y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$. 于是所求函数为 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

20. (本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点

$$\eta \in [a, b], \text{ 使得 } \int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$, $\varphi(2)>\int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi)<0$.

解. (I) 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

由定积分性质有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

由连续函数介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 由 (I) 的结论可知至少存在一点 $\eta \in [2, 3]$, 使

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta).$$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)$, 知 $2 < \eta \leq 3$. 对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 和 $[2, \eta]$ 上分别

应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2)$, $\varphi(\eta) < \varphi(2)$, 得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0, \quad 1 < \xi_1 < 2;$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} < 0, \quad 2 < \xi_2 < \eta \leq 3.$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$, 使得

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0.$$

21. (本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

解. 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4),$$

令各个偏导数为零得

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2)$, $(x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$. 故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

22. 同试卷一第三 [21] 题.

23. (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

解. (I) 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

用 A 左乘上式的两边, 并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0.$$

上面两式相减得 $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$. 因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$, 代入第一式得 $k_2\alpha_2 = 0$, 又由于 $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 P 可逆, 而且

$$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二〇〇九年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数为.....()
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

解. 应选(C). 显然 $f(x)$ 的间断点为所有整数, 但可去间断点为极限存在的点, 故应是 $x - x^3 = 0$ 的解 $x = 0$ 或 $x = -1$ 或 $x = 1$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi},$$

所以可去间断点为 3 个.

解. 应选(D). 因 $dz = x \, dx + y \, dy$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = y$, 从而

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1.$$

又在 $(0,0)$ 处, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, AC - B^2 = 1 > 0$, 故 $(0,0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 的一个极小值点.

解. 应选 (C). $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_x^2 f(x, y) dx$ 的积分区域为两部分:

$$D_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y\}.$$

将两部分合并得到 $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4 - y\}$. 故二重积分可以表示为

$$\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$$

5. 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内.....()
 (A) 有极值点, 无零点. (B) 无极值点, 有零点.
 (C) 有极值点, 有零点. (D) 无极值点, 无零点.

解. 应选 (B). 由题意可知, $f(1)=1$, $f'(1)=-1$, 且由 $f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率

$$\rho = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

可得 $f''(1)=-2$. 因为 $f''(x)$ 不变号, 所以 $f''(x)<0$. 在 $[1,2]$ 上,

$$f'(x) \leq f'(1) = -1 < 0,$$

即 $f(x)$ 单调减少, 没有极值点. 由拉格朗日中值定理,

$$f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1, \quad \zeta \in (1,2).$$

所以 $f(2)<0$. 而 $f(1)=1>0$, 由零点定理知, $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有零点.

6. 同试卷一第一 [3] 题.

7. 同试卷一第一 [6] 题.

8. 设 A,P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P =$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 Q^TAQ 为.....()

- (A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解. 应选 (A). 记 $E_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $Q = PE_{12}(1)$. 从而

$$Q^TAQ = [PE_{12}(1)]^T A [PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1) [P^TAP] E_{12}(1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.

解. 应填 $y = 2x$. 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=1} = \frac{2t \ln(2-t^2) - t^2 \cdot \frac{2t}{2-t^2}}{e^{-(1-t)^2} \cdot (-1)} \Big|_{t=1} = \frac{-2}{-1} = 2,$$

所以切线方程为 $y = 2x$.

10. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -2 . 显然有 $k < 0$. 所以

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{kx} dx = \left[\frac{1}{k} e^{kx} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{2}{k} = -\frac{2}{k},$$

从而 $k = -2$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 0 . 由分部积分法有

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} \sin nx dx = -e^{-x} \sin nx + n \int e^{-x} \cos nx dx \\ &= -e^{-x} \sin nx - n e^{-x} \cos nx - n^2 I_n, \end{aligned}$$

所以 $I_n = -\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} + C$, 即

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{n \cos nx + \sin nx}{n^2 + 1} e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n \cos n + \sin n}{n^2 + 1} e^{-1} + \frac{n}{n^2 + 1} \right) = 0. \end{aligned}$$

12. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -3 . 对方程 $xy + e^y = x + 1$ 两边关于 x 求导有

$$y + xy' + y'e^y = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-y}{x+e^y}.$$

对 $y + xy' + y'e^y = 1$ 再次求导可得

$$2y' + xy'' + y''e^y + (y')^2 e^y = 0, \Rightarrow y'' = -\frac{2y' + (y')^2 e^y}{x+e^y}.$$

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, $y'(0) = 1$, 代入上式得 $y''(0) = -3$.

13. 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $e^{-\frac{2}{e}}$. 因为 $y' = x^{2x}(2 \ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得驻点为 $x = \frac{1}{e}$. 又

$$y'' = x^{2x}(2 \ln x + 2)^2 + x^{2x} \cdot \frac{2}{x} \Rightarrow y''\left(\frac{1}{e}\right) = 2e^{-\frac{2}{e}+1} > 0.$$

故 $x = \frac{1}{e}$ 为 $y = x^{2x}$ 的极小值点, 此时 $y = e^{-\frac{2}{e}}$. 又当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $y'(x) < 0$; $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right]$ 时, $y'(x) > 0$, 故 y 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上递增. 而

$$y(1) = 1, \quad y_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \ln x} = 1,$$

所以 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

14. 设 α, β 为 3 维列向量, β^T 为 β 的转置, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^T\alpha = \underline{\hspace{1cm}}$.

- 解.** 应填 2. 因为 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 根据相似矩阵有相同的特征值, 得到 $\alpha\beta^T$ 的特征值是 2, 0, 0. 而 $\beta^T\alpha$ 是一个常数, 是矩阵 $\alpha\beta^T$ 的对角元素之和, 则 $\beta^T\alpha = 2 + 0 + 0 = 2$.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)[x - \ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)[x - \ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1+\tan x)]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+\tan x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 2\sec^2 x \tan x}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \ (x > 0)$.

解. 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = \frac{-2t dt}{(t^2-1)^2}$, 从而

$$\begin{aligned} \int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \frac{1}{t+1} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \ln(t-1) + \frac{1}{4} \ln(t+1) - \frac{1}{2(t+1)} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2(t+1)} + C \\
&= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} + C \\
&= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x+x^2} + C.
\end{aligned}$$

17. (本题满分 10 分)

设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有 2 阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + y f'_3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + x f'_3$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (f'_1 + f'_2 + y f'_3) dx + (f'_1 - f'_2 + x f'_3) dy,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11} - f''_{12} + f''_{13} \cdot x + f''_{21} - f''_{22} + f''_{23} \cdot x + f'_3 + y [f''_{31} - f''_{32} + f''_{33} \cdot x] \\
&= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + x y f''_{33} + (x+y) f''_{13} + (x-y) f''_{23}.
\end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$, 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

解. 令 $p = y'$, 代入微分方程得 $p' - \frac{1}{x}p = -\frac{2}{x}$, 解得 $p = 2 + C_1 x$, 即 $y' = 2 + C_1 x$. 因此通解为 $y = C_2 + 2x + \frac{C_1}{2}x^2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. 由题设, $y(0) = 0$ 即 $C_2 = 0$, 而且

$$2 = \int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 (2x + \frac{C_1}{2}x^2) dx = \left[x^2 + \frac{C_1}{6}x^3 \right]_0^1 = 1 + \frac{C_1}{6},$$

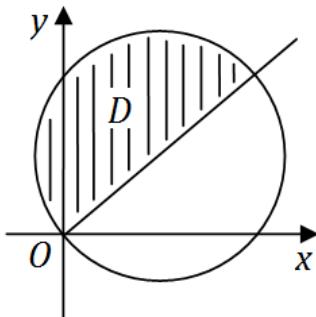
从而 $C_1 = 6$, 于是所求非负函数为 $y = 2x + 3x^2$ ($x \geq 0$). 所求体积为

$$V = 2\pi \int_0^1 x y(x) dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 + 3x^3) dx = \frac{17}{6}\pi.$$

19. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

解. 由 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 得极坐标表示 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$.



故由二重积分的极坐标公式可得

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} (r \cos\theta - r \sin\theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{3} (\cos\theta - \sin\theta) \cdot r^3 \right]_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} d\theta = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta - \sin\theta)(\sin\theta + \cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta + \cos\theta)^3 d(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} [(\sin\theta + \cos\theta)^4]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

20. (本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线，当 $-\pi < x < 0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0 \leq x < \pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

解. 由题意，当 $-\pi < x < 0$ 时， $y = -\frac{x}{y'}$ ，即 $y dy = -x dx$ ，得 $y^2 = -x^2 + C$ ，又曲线过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ ，故 $C = \pi^2$ ，从而有 $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

当 $0 \leq x < \pi$ 时， $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 它对应的齐次方程的通解为 $y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ；设它有特解 $y^* = ax + b$ ，解得 $a = -1, b = 0$ ，故 $y^* = -x$. 因此当 $0 \leq x < \pi$ 时 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$.

由于 $y = y(x)$ 是 $(-\pi, \pi)$ 内的光滑曲线，故它在 $x = 0$ 处连续且可导，于是由 $y(0^-) = \pi = y(0^+) = C_1$ ，得 $C_1 = \pi$ ；由 $y'_-(0) = 0 = y'_+(0) = C_2 - 1$ ，得 $C_2 = 1$. 所以 $y(x)$ 的表达式为

$$y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0; \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

21. 同试卷一第三 [18] 题.

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一〇年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为.....()
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选 (B). 易知 $f(x)$ 有间断点 $x=0, \pm 1$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1,$$

所以 $x=0$ 为跳跃间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $x=1$ 为可去间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

所以 $x=-1$ 为无穷间断点. 总之, 无穷间断点仅有一个.

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ·()
(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$. (C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

解. 应选 (A). 因为 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 代入方程解得 $\lambda + \mu = 1$; 又因为 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 代入方程求得 $\lambda - \mu = 0$. 由此可求得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

3. 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x$ ($a \neq 0$) 相切, 则 $a =$()
(A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .

解. 应选 (C). 设 $y = x^2$ 与 $y = a \ln x$ 的公切点为 (x_0, y_0) , 则有

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 = a \ln x_0, \quad 2x_0 = \frac{a}{x_0}.$$

从而解得 $a = 2e$.

4. 同试卷一第一 [3] 题.

5. 同试卷一第一 [2] 题.

6. 同试卷一第一 [4] 题.

7. 设向量组 I : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是 ()
- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$. (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
- (C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$. (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

解. 应选 (A). 由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以

$$r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s.$$

若向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = r$, 所以

$$r = r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s,$$

即有 $r \leq s$.

8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. 该常系数线性齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 解得特征根为 $\lambda = 2, \lambda = \pm i$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

10. 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = 2x$. 易知曲线没有铅直和水平渐近线. 因为 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 2 \neq 0$, 所以曲线有斜渐近线. 又因为 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0$, 所以斜渐近线方程为 $y = 2x$.

11. 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-2^n(n-1)!$. 由高阶导数公式可知 $\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, 所以

$$\ln^{(n)}(1-2x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1-2x)^n} \cdot (-2)^n = -2^n \frac{(n-1)!}{(1-2x)^n},$$

$$\text{从而 } y^{(n)}(0) = -2^n \frac{(n-1)!}{(1-2 \cdot 0)^n} = -2^n(n-1)!,$$

12. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$. 由极坐标弧长公式可得

$$s = \int_0^\pi \sqrt{(e^\theta)^2 + (e^\theta)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{2} e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

13. 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3cm/s 的速率增加. 则当 $l=12\text{cm}$, $w=5\text{cm}$ 时, 它的对角线增加的速率为 _____.

解. 应填 3cm/s . 设 $l=x(t)$, $w=y(t)$, 由题意知, 在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12$, $y(t_0)=5$, 且 $x'(t_0)=2$, $y'(t_0)=3$. 设该对角线长为 $S(t)$, 则

$$S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \Rightarrow S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

代入易知数据可得

$$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

14. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$, 则 $|A+B^{-1}|=$ _____.

解. 应填 3. 由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$, 所以

$$|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\times 2\times \frac{1}{2}=3.$$

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. 同试卷一第三 [16] 题.

16. 同试卷一第三 [17] 题.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases} (t>-1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数, 且 $\psi(1)=\frac{5}{2}$, $\psi'(1)=6$. 已知 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

解. 根据题意, 求导得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{2t+2}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)\cdot\frac{1}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}\cdot\frac{1}{2t+2} = \frac{3}{4(1+t)}. \end{aligned}$$

整理得 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$. 令 $y=\psi'(t)$, 则有

$$y'-\frac{1}{1+t}y=3(1+t) \Rightarrow y=(1+t)(3t+C_1).$$

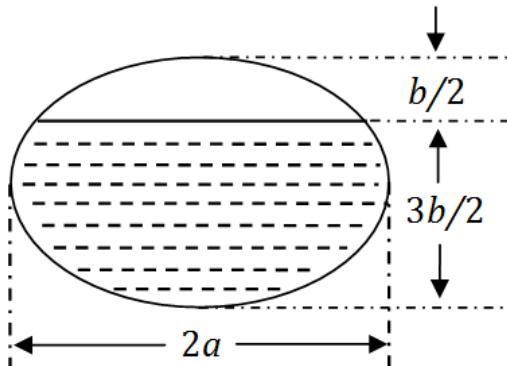
因为 $y(1)=\psi'(1)=6$, 所以 $C_1=0$, 故 $y=3t(t+1)$, 即 $\psi'(t)=3t(t+1)$. 故

$$\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_2.$$

又由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$ 得 $C_2=0$, 故 $\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3$.

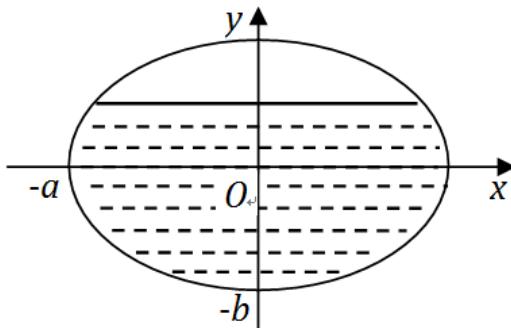
18. (本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$ ，短轴为 $2b$ 的椭圆。现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量。



(长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 $\rho \text{kg/m}^3$)

解. 如图建立坐标系，则油罐底面的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



阴影部分的面积（其中用到 $y = b \sin t$ 换元）

$$\begin{aligned} S &= \int_{-b}^{\frac{b}{2}} 2x \, dy = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - y^2} \, dy = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \, dt \\ &= 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) ab. \end{aligned}$$

所以油的质量 $m = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) ab l \rho$.

19. (本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

确定 a, b 的值，使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

解. 由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= a \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + b \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.\end{aligned}$$

因此 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 变换为

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + [12(a+b) + 10ab + 8] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

所以由题设有

$$\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0, \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0, \\ 12(a+b) + 10ab + 8 \neq 0. \end{cases}$$

由前两式可解得 $a = -\frac{2}{5}$ 或 -2 , $b = -\frac{2}{5}$ 或 -2 . 又因为当 (a, b) 为 $(-2, -2)$, $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 时不满足第三式, 所以当 (a, b) 为 $\left(-\frac{2}{5}, -2\right)$, $\left(-2, -\frac{2}{5}\right)$ 时满足题意.

20. (本题满分 10 分)

计算二重积分

$$I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} \, dr \, d\theta,$$

$$\text{其中 } D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

解. 将积分区域用直角坐标表示得 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r \sin \theta \sqrt{1 - r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cdot r \, dr \, d\theta = \iint_D y \sqrt{1 - x^2 + y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} \, dy = \int_0^1 \frac{1}{3} \left[1 - (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} dx - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{1}{3} - \frac{3}{16} \pi.\end{aligned}$$

21. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$.

证明: 存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

解. 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$. 对于 $F(x)$ 分别在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}F'(\xi), \quad F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F'(\eta).$$

两式相加, 整理得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a, Q .

解. 由题设, A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$. 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

由此可得 $a = -1, \lambda_1 = 2$. 故有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

由此可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$. 由 $(\lambda_2 E - A)x = 0$, 可解得对应于 $\lambda_2 = -4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$. 由 $(\lambda_3 E - A)x = 0$, 可解得对应于 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为 $\xi_3 = (1, -1, 1)^T$. 将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化, 得到

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \quad \eta_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T.$$

$$\text{令 } Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

二〇一一年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 $c x^k$ 是等价无穷小, 则………()
 (A) $k = 1, c = 4$. (B) $k = 1, c = -4$. (C) $k = 3, c = 4$. (D) $k = 3, c = -4$.

解. 应选(C). 由三倍角公式和等价无穷小量代换得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{c x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - (3 \sin x - 4 \sin^3 x)}{c x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 x}{c x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{c x^k}. \end{aligned}$$

所以 $c = 4, k = 3$.

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \dots \dots \dots$ ()
 (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

解. 应选 (B). 由导数的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

3. 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选(C). 由 $f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$ 得

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}$, 故 $f(x)$ 有两个不同的驻点.

解. 应选 (C). 微分方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - \lambda^2 = 0$, 解得特征根 $r_1 = \lambda, r_2 = -\lambda$. 所以非齐次方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x}$ 有特解 $y_1 = x \cdot a \cdot e^{\lambda x}$, 非齐次方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{-\lambda x}$ 有特解 $y_2 = x \cdot b \cdot e^{-\lambda x}$. 故由叠加原理可知非齐次方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $y = x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

5. 同试卷一第一 [3] 题.

6. 同试卷一第一 [4] 题.

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\sqrt{2}$. 由等价无穷小量代换得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} - 1 \right) \frac{1}{x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 2}{2x} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \ln 2 \right) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

10. 同试卷一第二 [10] 题.

11. 同试卷一第二 [9] 题.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \lambda > 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{\lambda}$. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d(e^{-\lambda x}) \\ &= -[xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

13. 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴围成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{7}{12}$. 由二重积分的极坐标公式得

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r \cos\theta \cdot r \sin\theta r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 \sin^4\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos\theta \cdot \sin^5\theta d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d(\sin\theta) = \frac{2}{3} [\sin^6\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

14. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为 _____.

解. 应填 2. 因为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 = y_1^2 + 2y_2^2, \end{aligned}$$

所以 f 的正惯性指数为 2.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a}$, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 a 的取值范围.

解. 若 $a \leq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-a} \cdot \int_0^x \ln(1+t^2) dt = +\infty,$$

与题设矛盾, 故应有 $a > 0$. 当 $a > 0$ 时, 由

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \cdot x^{3-a},$$

可得 $3-a > 0$ 即 $a < 3$. 又由

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}} = \frac{2}{a(a-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3-a}}{1+x^2},$$

可得 $3-a < 2$ 即 $a > 1$. 综上所述有 $1 < a < 3$.

16. (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3}, \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和曲线

$y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解. 首先由参数方程的导数公式有

$$y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \cdot \frac{1}{dx/dt} = \frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}.$$

令 $y'(x) = 0$ 得 $t = \pm 1$. 当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, 此时 $y'' > 0$, 所以 $y = -\frac{1}{3}$ 为极小值. 当 $t = -1$ 时, $x = -1$, $y = 1$, 此时 $y'' < 0$, 所以 $y = 1$ 为极大值. 令 $y''(x) = 0$ 得 $t = 0$, $x = y = \frac{1}{3}$. 当 $t < 0$ 时, $x < \frac{1}{3}$, 此时 $y'' < 0$; 当 $t > 0$ 时,

$x > \frac{1}{3}$, 此时 $y'' > 0$. 所以曲线的凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{3})$, 凹区间为 $(\frac{1}{3}, +\infty)$, 拐点为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

17. 同试卷一第三 [16] 题.

18. (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点, 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

解. 由题意可知当 $x = 0$ 时, $y = 0$, $y'(0) = 1$. 由导数的几何意义得 $y' = \tan \alpha$, 即 $\alpha = \arctan y'$, 由题意

$$\frac{d}{dx}(\arctan y') = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{y''}{1+(y')^2} = y'.$$

令 $y' = p$, $y'' = p'$, 则 $\frac{p'}{1+p^2} = p$, 分离变量得 $\frac{dp}{p(p^2+1)} = dx$, 积分得

$$\frac{1}{2} \ln \frac{p^2}{p^2+1} = x + C_0 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{C e^{-2x}-1}.$$

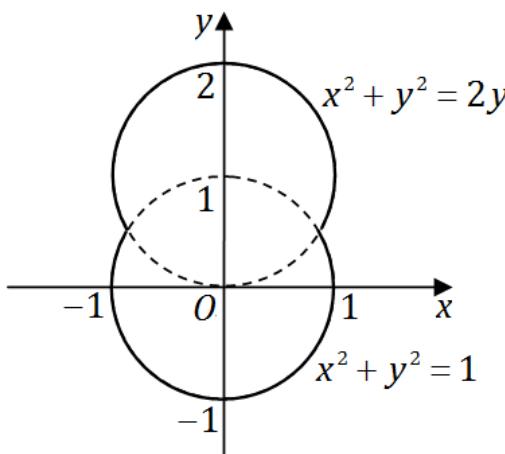
当 $x = 0$, $p = 1$, 代入得 $C = 2$, 所以 $y' = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2x}-1}}$. 积分得

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{2e^{-2t}-1}} = \int_0^x \frac{e^t dt}{\sqrt{2-e^{2t}}} \\ &= \int_0^x \frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \left[\arcsin \frac{e^t}{\sqrt{2}}\right]_0^x = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

19. 同试卷一第三 [18] 题.

20. (本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成.



(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?

(长度单位: m, 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 $10^3 kg/m^3$.)

解. (I) 由对称性, 所求的容积为

$$V = V_1 + V_2 = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi x^2 dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) dy = \frac{9}{4}\pi.$$

(II) 所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \pi \rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2-y)(1-y^2) dy + \pi \rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2-y)(2y-y^2) dy \\ &= \pi \rho g \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (y^3 - 2y^2 - y + 2) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (y^3 - 4y^2 + 4y) dy \right) \\ &= \frac{27 \times 10^3}{8} \pi g = 3375g\pi. \end{aligned}$$

21. 同试卷一第三 [19] 题.

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一二年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 同试卷一第一 [1] 题.
2. 同试卷一第一 [2] 题.
3. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的.....()
(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 即非充分也非必要条件.

解. 应选 (B).

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$. 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是
(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

解. 应选 (D). $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ 表示函数 $f(x, y)$ 关于变量 x 是单调递增的, 关于变量 y 是单调递减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 必有 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$.

6. 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy = \dots$ ()
(A) π . (B) 2. (C) -2. (D) $-\pi$.

解. 应选 (D). 由二重积分的奇偶对称性,

$$\begin{aligned}\iint_D (x^5 y - 1) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 (x^5 y - 1) dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^5 \sin x - 1 + \sin x \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1) dx = -\pi\end{aligned}$$

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \dots$.

解. 应填 1. 将 $x=0$ 代入方程, 可得 $y=0$. 求导得 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=1$.

10. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\pi}{4}$. 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

11. 设 $z=f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 0. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{1}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$, 所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

12. 微分方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 \sqrt{x} . 微分方程整理得 $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 3y$. 这是一阶线性微分方程,

$$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[\int 3y \cdot e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right] = \frac{1}{y} \left[\int 3y^2 dy + C \right] = (y^3 + C) \frac{1}{y}.$$

又因为 $x=1$ 时 $y=1$, 解得 $C=0$, 故 $x=y^2$, 由初始条件得到 $y=\sqrt{x}$.

13. 曲线 $y=x^2+x$ ($x < 0$) 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $(-1, 0)$. 将代入曲率计算公式, 有

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理得 $(2x+1)^2=1$, 解得 $x=0$ (舍去) 或 $x=-1$. 此时 $y=0$, 故该点坐标为 $(-1, 0)$.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -27 . 由于 $B=E_{12}A$, 故 $BA^*=E_{12}A \cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$, 所以

$$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27 \times (-1)=-27.$$

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$, 记 $a=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(I) 求 a 的值; (II) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小, 求 k .

解. (I) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} + 1 \right)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^2}+1=1$, 即 $a=1$.

(II) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 由 $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x \sin x}$. 又因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $x-\sin x$ 与 $\frac{1}{6}x^3$ 等价, 故 $f(x)-a \sim \frac{1}{6}x$, 即 $k=1$.

16. 同试卷一第三 [16] 题.

17. (本题满分 10 分)

过 $(0,1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解. 设切点坐标为 $A(x_0, \ln x_0)$, 斜率为 $\frac{1}{x_0}$, 切线方程为

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

又因为该切线过 $(0,1)$, 所以 $x_0 = e^2$, 故切点为 $A(e^2, 2)$. 而 L 与 x 轴的交点为 $B(1,0)$. 从而区域 D 的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \ln x \, dx - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2 = [x \ln x - x]_1^{e^2} - (e^2 - 1) \\ &= (e^2 + 1) - (e^2 - 1) = 2. \end{aligned}$$

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x \, dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot (e^2 - 1) = \pi [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_1^{e^2} \\ &= (2e^2 - 2) - \frac{4}{3}\pi(e^2 - 1) = \frac{2}{3}\pi(e^2 - 1). \end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy \, d\sigma$, 其中区域 D 为曲线

$$r = 1 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

与极轴围成.

解. 由极坐标的面积公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (1 + \cos \theta)^4 \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 t(1+t)^4 \, dt = \frac{1}{4} \int_0^2 (u-1)u^4 \, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{15} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

19. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$.

(I) 求表达式 $f(x)$;

(II) 求曲线的拐点 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$.

解. (I) 解微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$, 得到通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 可知 $C_1 = 1, C_2 = 0$. 故 $f(x) = e^x$.

(II) 曲线方程为 $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 则

$$y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad y'' = 2x + 2(1+2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

当 $x=0$ 时 $y''=0$; 当 $x>0$ 时, $y''>0$; 当 $x<0$ 时, $y''<0$. 因此 $(0,0)$ 点就是曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 唯一的拐点.

20. 同试卷一第三 [15] 题.

21. (本题满分 11 分)

(I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

解. (I) 令 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$, 则 $f_n(1) = n-1 > 0$, 而 $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$, 由零点定理得 $f_n(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 肯定有实根. 又因为

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 1 > 1 > 0$$

所以方程只有唯一的实根.

(II) 设该实根为 x_n , 则有 $f_n(x_n) = 0$. 因为 $f'_n(x) > 1$, 由拉格朗日中值定理得

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \left| f'_n(\xi) \left(x_n - \frac{1}{2} \right) \right| = \left| f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| 0 - \left(-\frac{1}{2^n} \right) \right| = \frac{1}{2^n}$$

则由迫敛准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{1}{2} \right) = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一三年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 ······ ()
 (A) 比 x 高阶的无穷小. (B) 比 x 低阶的无穷小.
 (C) 与 x 同阶但不等价的无穷小. (D) 与 x 等价的无穷小.

解. 应选 (C). 因为 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0.$$

从而当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \sim -\frac{1}{2}x$, 即 $\alpha(x)$ 与 x 同阶但不等价.

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = (\quad)$

解. 应选 (A). 首先 $f(0)=1$, 方程两边对 x 求导得

$$-(y + x y') \sin(x y) + \frac{y'}{y} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1.$$

所以由导数的定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n} - 0} = 2f'(0) = 2.$$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则………()

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

解. 应选 (C). 依题意有

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt = 2 + 2x - 2\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

由于 $F(\pi^-) = F(\pi^+) = F(\pi) = 2$, $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1 - \cos x}{x - \pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2(x - \pi)}{x - \pi} = 2,$$

所以 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e, \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 ()

(A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$.

解. 应选(D). 因为积分 $\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx$ 收敛当且仅当 $\alpha-1 < 1$, 即 $\alpha < 2$. 积分 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^{\alpha+1} x}$ 收敛当且仅当 $\alpha+1 > 1$, 即 $\alpha > 0$, 所以反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx$ 收敛当且仅当 $0 < \alpha < 2$.

解. 应选 (A). 已知 $z = \frac{y}{x} f(x y)$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy).$$

$$\text{所以 } \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2y f'(xy).$$

6. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分, 记
 $I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy \quad (k = 1, 2, 3, 4)$, 则 ()

(A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

解. 应选(B). 因为在 D_2 内部 $y - x > 0$, 故由二重积分的保号性可得 $I_2 > 0$.

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一[6]题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

- $$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

解. 应填 $e^{\frac{1}{2}}$. 取对数后求极限得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x} = \frac{1}{2},$$

因此原式 = e^{1/2}.

10. 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}= \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$. 因为 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-e^x}$, 所以 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$, 从而

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\Big|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

11. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta$ ($-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$), 则 L 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\pi}{12}$. 由极坐标的面积公式可得

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y+x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$. 由参数方程的导数公式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}} = t \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{t=1} = 1.$$

当 $t=1$ 时, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\ln \sqrt{2}$, 故法线方程为 $y+x - \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} = 0$.

13. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 该方程满足条件 $y\Big|_{x=0}=0$, $y'\Big|_{x=0}=1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $e^{3x} - e^x - xe^{2x}$. 根据线性微分方程解的性质, e^{3x} 和 e^x 是对应齐次方程的解, $-xe^{2x}$ 是非齐次方程的解, 故非齐次通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$. 由初始条件求得 $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, 故满足条件的解为 $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$.

14. 同试卷一第二 [13] 题.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

解. 由 $\cos x$ 的麦克劳林公式有：当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^2), \quad \cos 3x = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

故由 $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \left[1 - 2x^2 + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - 7x^2 + o(x^2)]}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{ax^n}. \end{aligned}$$

所以 $n = 2$ 且 $a = 7$.

16. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的平面图形, V_x , V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

解. 依题意可得

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}, \quad V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y = 10V_x$ 可得 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$, 解得 $a = 7\sqrt{7}$.

17. (本题满分 10 分)

设平面内区域 D 由直线 $x = 3y$, $y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

$$\text{解. } \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy = \frac{416}{3}.$$

18. 同试卷一第三 [18] 题.

19. (本题满分 11 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

解. 平面上点 (x, y) 到坐标原点的距离为 $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. 构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1).$$

则由 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 以及

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 - \lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 3\lambda y^2 - \lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0, \end{cases}$$

可求得唯一条件极值点 $x = 1, y = 1$. 由于 $d(1, 1) = \sqrt{2}$, $d(0, 1) = d(1, 0) = \sqrt{2}$, 故所求的最长距离为 $\sqrt{2}$, 最短距离为 1.

20. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

解. (I) 求导得 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$. 则 $f(x)$ 有唯一驻点 $x = 1$, 且 $f''(1) = 1 > 0$, 从而 $f(x)$ 有极小值和最小值 $f(1) = 1$.

(II) 由 (I) 知 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$, 故由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 得 $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$, 即 $x_{n+1} > x_n$, 故 $\{x_n\}$ 单调递增. 又由 $\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 得 $x_n < e$, 故 x_n 有上界. 从而由单调有界收敛定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 得 $\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$. 又由 (I) 有 $\ln a + \frac{1}{a} \geq 1$, 故 $a = 1$.

21. (本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ($1 \leq x \leq e$).

(I) 求 L 的弧长;

(II) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x = 1$, $x = e$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

解. (I) L 的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_1^e \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) dx = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

(II) D 的形心的横坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_1^e x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx}{\int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}.$$

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一四年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^a(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 a 的可能取值范围是 ()

(A) $(2, +\infty)$. (B) $(1, 2)$. (C) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

解. 应选(B). $\ln^\alpha(1+2x) \sim 2^\alpha x^\alpha$, 是 α 阶无穷小, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $\frac{2}{\alpha}$ 阶无穷小, 由题意可知 $\alpha > 1$ 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$, 所以 α 的可能取值范围是 $(1, 2)$.

- ## 2. 同试卷一第一[1]题.

- ### 3. 同试卷一第一 [2] 题.

4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ······ ()

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$. (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$. (C) $10\sqrt{10}$. (D) $5\sqrt{10}$.

解. 应选 (C). 由曲线的参数方程, 可得

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 4, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2t+4}{2t} = 1 + \frac{2}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{2}{t^2}}{\frac{2}{t}} = -\frac{1}{t^3}.$$

对于 $t = 1$ 的点处 $y' = 3, y'' = -1$, 所以

$$K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} = \frac{1}{10\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{K} = 10\sqrt{10}.$$

解. 应选(D). 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 所以由题设可得

$$\frac{1}{1+\xi^2} = f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 = \frac{x - \arctan x}{(\arctan x)^2}.$$

由泰勒公式可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x(\arctan x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

6. 设 $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则.....()

- (A) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上.
(B) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的内部.
(C) $u(x, y)$ 的最大值点在区域 D 的内部, 最小值点在区域 D 的边界上.
(D) $u(x, y)$ 的最小值点在区域 D 的内部, 最大值点在区域 D 的边界上.

解. 应选 (A). $u(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续, 故 $u(x, y)$ 在 D 内必有最大值和最小值. 如果在内部存在驻点 (x_0, y_0) , 即 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 在此处

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

由条件, 显然 $AC - B^2 < 0$, 从而 $u(x, y)$ 不是极值点, 当然也不是最值点. 所以 $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上.

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{3\pi}{8}$. 这是因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \left[\arctan \frac{x+1}{2} \right]_{-\infty}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

10. 同试卷一第二 [10] 题.

11. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} dy$. 设 $F(x, y, z) = e^{2yz} + x + y^2 + z - \frac{7}{4}$, 则有

$$F_x = 1, \quad F_y = 2ze^{2yz} + 2y, \quad F_z = 2ye^{2yz} + 1.$$

当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时, $z = 0$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} dy.$$

12. 曲线 L 的极坐标方程为 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$. 先把曲线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta = \theta \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta = \theta \sin \theta. \end{cases}$$

于是在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处, $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$, 从而

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \right|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

则 L 在点 $(r, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$, 即 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$.

- 13.** 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{11}{20}$. 由质心坐标的公式得

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x \rho(x) dx}{\int_0^1 \rho(x) dx} = \frac{\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + x) dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}.$$

- 14.** 同试卷一第二 [13] 题.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

- 15.** 同试卷一第三 [15] 题.

- 16.** (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

解. 将微分方程分离变量得 $(1 + y^2) dy = (1 - x^2) dx$, 两边分别积分得通解为

$$\frac{1}{3}y^3 + y = x - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

由 $y(2) = 0$ 得 $C = \frac{2}{3}$, 即

$$\frac{1}{3}y^3 + y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}.$$

令 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{1+y^2} = 0$, 得 $x = \pm 1$, 且有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x(1+y^2)^2 - 2y(1-x^2)^2}{(1+y^2)^3}.$$

当 $x = 1$ 时, 可解得 $y = 1$, $y'' = -1 < 0$, 函数取得极大值 $y = 1$; 当 $x = -1$ 时, 可解得 $y = 0$, $y'' = 2 > 0$, 函数取得极小值 $y = 0$.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

解. 积分区域关于直线 $y = x$ 对称, 所以

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

从而所求积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{(x+y) \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

18. 同试卷一第三 [17] 题.

19. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明:

$$(I) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, \quad x \in [a, b];$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

解. (I) 因为 $0 \leq g(x) \leq 1$, 所以当 $x \in [a, b]$ 时有

$$\int_a^x 0 dx \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt \Rightarrow 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a.$$

$$(II) \text{令 } F(x) = \int_a^x f(u) g(u) du - \int_a^{a+\int_a^x g(t) dt} f(u) du, \text{ 则可知 } F(a) = 0, \text{ 且}$$

$$F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t) dt\right).$$

因为 $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a$, 且 $f(x)$ 单调增加, 所以

$$f\left(a + \int_a^x g(t) dt\right) \leq f(a + x - a) = f(x),$$

从而当 $x \in [a, b]$ 时有

$$F'(x) \geq f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0.$$

也是 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加, 则 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

20. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$. 定义函数列

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f(f_1(x)), \quad \dots, \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

设 S_n 是曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$, $y = 0$ 所围平面图形的面积. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

解. 依次计算得到

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{1+f_1(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}, \quad f_3(x) = \frac{x}{1+3x}, \quad \dots$$

利用数学归纳法可得 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. 所以

$$S_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right).$$

从而所求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{n}\right) = 1.$$

21. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

解. 由于函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 所以

$$f(x, y) = y^2 + 2y + C(x),$$

其中 $C(x)$ 为待定的连续函数. 又因为

$$f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y,$$

从而可知 $C(y) = 1 - (2-y)\ln y$, 即

$$f(x, y) = y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x.$$

令 $f(x, y) = 0$, 可得 $(y+1)^2 = (2-x)\ln x$. 且当 $y = -1$ 时, $x_1 = 1, x_2 = 2$. 曲线 $f(x, y) = 0$ 所成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = \left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right)\pi.$$

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一五年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$ (B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$ (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx.$

解. 应选(D). 这是因为

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_2^{+\infty} = 3e^{-2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 3e^{-2}.$$

2. 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

(A) 连续. (B) 有可去间断点.
 (C) 有跳跃间断点. (D) 有无穷间断点.

解. 应选(B). 因为当 $x \neq 0$ 时有

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}} = \exp\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{x} \frac{x^2}{t}\right) = e^x,$$

所以 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则()

(A) $\alpha - \beta > 1$. (B) $0 < \alpha - \beta \leq 1$. (C) $\alpha - \beta > 2$. (D) $0 < \alpha - \beta \leq 2$.

解. 应选(A). $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f'(0)$ 存在, 从而有

$$0 = f'_-(0) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta}.$$

从而得到 $\alpha - 1 > 0$. 当 $x < 0$ 时 $f'(x) = 0$. 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + (-1)x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} (-\beta) \frac{1}{x^{\beta+1}} \\&= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}.\end{aligned}$$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续得

$$0 = f'(0^-) = f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right).$$

由此得到 $\alpha - \beta - 1 > 0$.

4. 同试卷一第一[1]题.

5. 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 依次是 ··· ()

(A) $\frac{1}{2}, 0$. (B) $0, \frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}, 0$. (D) $0, -\frac{1}{2}$.

解. 应选 (D). 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 从而得到

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

求偏导得 $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u(1-v)}{1+v}, \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2u^2}{(1+v)^2}$. 因而 $\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{v=1} = 0, \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=1} = -\frac{1}{2}$.

6. 同试卷一第一 [4] 题.

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 设 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = 3t + t^3, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 48. 由参数方程的求导公式得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3+3t^2}{1+t^2}}{3(1+t^2)} = 3(1+t^2)^2, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[3(1+t^2)^2 \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{dt}{dx} \cdot 3(1+t^2)^2 \right] = \frac{12t(1+t^2)}{1+t^2} = 12t(1+t^2)^2. \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = 48..$$

10. 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$. 由莱布尼茨公式得

$$f^{(n)}(x) = x^2 \cdot 2^x (\ln 2)^n + C_n^1 \cdot (2x) \cdot 2^x (\ln 2)^{n-1} + C_n^2 \cdot 2 \cdot 2^x (\ln 2)^{n-2}.$$

因此在 $x=0$ 处的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)}{2} 2 (\ln 2)^{n-2} = n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

11. 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2. 对 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$ 求导得 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2)$, 故有

$$\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1, \quad \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5.$$

从而 $f(1) = 2$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $e^{-2x} + 2e^x$. 由特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 所以微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 依题意得 $y(0) = 3, y'(0) = 0$. 代入通解求得 $C_1 = 2, C_2 = 1$. 即 $y = 2e^x + e^{-2x}$.

13. 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$. 对方程两边求偏导得

$$(3e^{x+2y+3z} + xy)\frac{\partial z}{\partial x} = -yz - e^{x+2y+3z}, \quad (3e^{x+2y+3z} + xy)\frac{\partial z}{\partial y} = -xz - 2e^{x+2y+3z}.$$

当 $x = 0, y = 0$ 时 $z = 0$, 将该点代入可求得

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

故有 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

14. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位阵, 则行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 21. 因为 A 的所有特征值为 $2, -2, 1$, 所以 B 的所有特征值为 $3, 7, 1$, 从而 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$.

三、解答题 (15~23 题, 共 94 分)

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. (本题满分 10 分)

设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转成旋转体的体积, 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

解. 由旋转体的体积公式, 得

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (A \sin x)^2 dx = \pi A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2 A^2}{4},$$

$$V_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x) dx = -2\pi A \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos x) = 2\pi A.$$

由题设 $V_1 = V_2$, 因此可求得 $A = \frac{8}{\pi}$.

17. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足

$$f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x, \quad f'_x(x, 0) = (x+1)e^x, \quad f(0, y) = y^2 + 2y.$$

求 $f(x, y)$ 的极值.

解. 在 $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分得

$$f'_x(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + \phi(x).$$

故由 $f'_x(x, 0) = \phi(x) = (x+1)e^x$, 可求得 $\phi(x) = e^x(x+1)$, 即有

$$f'_x(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + e^x(1+x).$$

在上式两边对 x 积分得

$$f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x + C$$

故由 $f(0, y) = y^2 + 2y + C = y^2 + 2y$, 可求得 $C = 0$, 即有

$$f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x.$$

对上式求偏导数并令它们等于零得

$$f'_x = (y^2 + 2y)e^x + (x+1)e^x = 0, \quad f'_y = (2y+2)e^x = 0.$$

因此得到驻点 $(0, -1)$. 又

$$f''_{xx} = (y^2 + 2y)e^x + (x+2)e^x, \quad f''_{xy} = 2(y+1)e^x, \quad f''_{yy} = 2e^x,$$

故在驻点 $(0, -1)$ 处 $AC - B^2 > 0$, 所以 $f(0, -1) = -1$ 为极小值.

18. (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

解. 由二重积分的奇偶对称性和换元积分法有

$$\begin{aligned} \iint_D x(x+y) dx dy &= \iint_D x^2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cdot 2 \cos^2 t dt - \frac{2}{5} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

19. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 的零点个数.

解. 对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}(2x-1).$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点为 $x=\frac{1}{2}$. 因为在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 内 $f(x)$ 单调递减; 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 为唯一的极小值, 也是最小值. 因为 $f(1)=0$, 所以函数在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内存在唯一的零点. 又因为

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) = 0, \quad f(-1) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt > 0,$$

所以函数在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 内存在唯一的零点. 综上所述, $f(x)$ 的零点个数为 2.

20. (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C , 若要将该物体的温度继续降至 21°C , 还需冷却多长时间?

解. 设 t 时刻物体温度为 $x(t)$, 比例常数为 $k>0$, 则有

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-20) \Rightarrow x(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

由 $x(0)=120$ 得 $C=100$, 即有 $x(t)=100e^{-kt}+20$. 又由 $x(30)=30$ 得 $k=\frac{\ln 10}{30}$, 即有 $x(t)=100\exp\left(-\frac{\ln 10}{30}t\right)+20$. 当 $x=21$ 时, $t=60$, 所以还需要冷却 $60-30=30\text{min}$.

21. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有 2 阶导数, $f(a)=0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. 设 $b>a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$.

解. 曲线在点 $(b, f(b))$ 处的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$. 令 $y=0$, 得交点 $x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$. 因为 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 从而 $f(b)>f(a)=0$. 又因为 $f'(b)>0$, 所以 $x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)} < b$. 在区间 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Rightarrow f(b) = f'(\xi)(b-a).$$

从而得到

$$x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{f'(b)(b-a) - f'(\xi)(b-a)}{f'(b)} = \frac{[f'(b) - f'(\xi)](b-a)}{f'(b)}.$$

因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增, 所以 $f'(b)>f'(\xi)$, 从而 $x_0-a>0$, 即 $x_0>a$. 综上所述, $a < x_0 < b$.

22. (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且 $A^3 = O$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, E 为 3 阶单位阵, 求 X .

解. (I) 因为 $A^3 = O$, 所以

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

(II) 由 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ 得 $(E - A)X(E - A^2) = E$, 从而

$$\begin{aligned} X &= (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = [(E - A^2)(E - A)]^{-1} = (E - A^2 - A)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一六年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 设 $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ()
- (A) a_1, a_2, a_3 . (B) a_2, a_3, a_1 . (C) a_2, a_1, a_3 . (D) a_3, a_2, a_1 .

解. 应选 (B). 这是因为当 $x \rightarrow 0^+$ 时有

$$a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2, \quad a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{5/6}, \quad a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x.$$

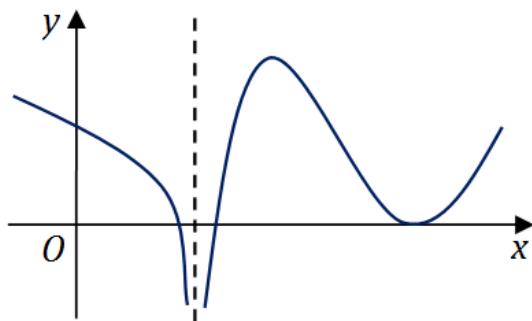
2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 反常积分① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为 ()
- (A) ①收敛, ②收敛. (B) ①收敛, ②发散.
- (C) ①发散, ②收敛. (D) ①发散, ②发散.

解. 应选 (B). 这是因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx &= \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_{-\infty}^{0^-} = 0 - (-1) = 1, \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx &= \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_{0^+}^{+\infty} = -1 - (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()



- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

解. 应选 (B). 由图像易知, 函数在前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 故有 2 个极值点; 拐点是导函数单调性发生改变的点, 故有 3 个拐点.

5. 设函数 $f_i(x)$ ($i=1,2$) 具有二阶连续导数, 且 $f_i(x_0) < 0$ ($i=1,2$), 若两条曲线 $y = f_i(x)$ ($i=1,2$) 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 ······ ()

- (A) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$. (B) $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$.
 (C) $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$. (D) $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$.

解. 应选 (A). 由切线, 凹凸性和曲率的几何意义, 画图观察可得.

6. 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ······ ()
 (A) $f'_x - f'_y = 0$. (B) $f'_x + f'_y = 0$. (C) $f'_x - f'_y = f$. (D) $f'_x + f'_y = f$.

解. 应选 (D). $f'_x = \frac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$, $f'_y = \frac{e^x}{(x-y)^2}$, 所以 $f'_x + f'_y = f$.

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1,2, 则 ······ ()
 (A) $a > 1$. (B) $a < -2$.
 (C) $-2 < a < 1$. (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

解. 应选 (C). 当 $a=0$ 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, 其矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

由此得特征值为 2, -1, -1, 满足题目条件, 故 $a=0$ 成立, 因此 (C) 为正确选项.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为 _____.

解. 应填 $y = x + \frac{\pi}{2}$. 这是因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{1+x^2} + \frac{\arctan(1+x^2)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-x}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) \right] = \frac{\pi}{2}.$$

10. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

解. 应填 $\sin 1 - \cos 1$. 由定积分的定义

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) \\ &= \int_0^1 x \sin x \, dx = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

11. 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 _____.

解. 应填 $y' - y = 2x - x^2$. 设微分方程为 $y' + p(x)y = q(x)$, 代入两个特解得到

$$\begin{cases} 2x + p(x)x^2 = q(x), \\ (2x - e^x) + p(x)(x^2 - e^x) = q(x). \end{cases}$$

解得 $p(x) = -1$, $q(x) = 2x - x^2$. 所以微分方程为 $y' - y = 2x - x^2$.

12. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t)dt$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) = _____$.

解. 应填 $2^{n-1} \cdot 5$. 易知 $f(0) = 1$, 对已知等式两边依次求导得

$$f'(x) = 2(x+1) + 2f(x) \Rightarrow f'(0) = 4,$$

$$f''(x) = 2 + 2f'(x) \Rightarrow f''(0) = 2 \cdot 5,$$

$$f'''(x) = 2f''(x) \Rightarrow f'''(0) = 2^2 \cdot 5,$$

$$f^{(n)}(x) = 2f^{(n-2)}(x) \Rightarrow f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \cdot 5.$$

13. 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是 _____.

解. 应填 $2\sqrt{2}v_0$. 首先求得 $l = \sqrt{x^2 + x^6}$, 从而

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2x + 6x^5}{2\sqrt{x^2 + x^6}} v_0 \Rightarrow \left. \frac{dl}{dt} \right|_{x=1} = 2\sqrt{2}v_0.$$

14. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a = _____$.

解. 应填 2. 设 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由两者等价可得 $r(A) = r(B) = 2$.

因此 $|A| = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -1$. 当 $a = -1$ 时 $r(A) = 1$ 不满足条件, 故有 $a = 2$.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解. 由泰勒公式可得

$$\cos 2x + 2x \sin x - 1 = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{2^4 x^4}{4!} + 2x \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) - 1 + o(x^4) = \frac{1}{3} x^4 + o(x^4),$$

因此所求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \right) = e^{\frac{1}{3}}.$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$ ($x > 0$), 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解. 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}$; 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}.$$

所以

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ x^2, & x \geq 1; \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

令 $f'(x) = 0$, 得到唯一的驻点 $x = \frac{1}{2}$. 又因为 $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

解. 对方程两边分别对 x 和 y 求偏导数得

$$\begin{cases} 2xz + (x^2 + y^2)z'_x + \frac{z'_x}{z} + 2 = 0, \\ 2yz + (x^2 + y^2)z'_y + \frac{z'_y}{z} + 2 = 0. \end{cases}$$

令 $z'_x = z'_y = 0$, 解得 $(-1, -1)$ 是函数 $z = z(x, y)$ 的惟一驻点. 对上面两个方程再求偏导数得

$$\begin{cases} 2z + 2xz'_x + 2xz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xx} + \frac{1}{z}z''_{xx} - \frac{1}{z^2}(z'_x)^2 = 0, \\ 2xz'_y + 2yz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xy} - \frac{1}{z^2}z'_x z'_y + \frac{1}{z}z''_{xy} = 0, \\ 2z + 2yz'_y + 2yz'_y + (x^2 + y^2)z''_{yy} + \frac{1}{z}z''_{yy} - \frac{1}{z^2}(z'_y)^2 = 0. \end{cases}$$

代入 $z(-1, -1) = 1$ 和 $z'_x(-1, -1) = z'_y(-1, -1) = 0$, 解得

$$A = z''_{xx}(-1, -1) = -\frac{2}{3}, \quad B = z''_{xy}(-1, -1) = 0, \quad C = z''_{yy}(-1, -1) = -\frac{2}{3}.$$

由 $AC - B^2 > 0$ 和 $A < 0$ 可得, $z(-1, -1) = 1$ 是 $z = z(x, y)$ 的极大值.

18. (本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y=1$, $y=x$, $y=-x$ 围成的有界区域,

计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

解. 利用二重积分的对称性, 可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2} r dr = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分)

已知 $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的解, 若 $u(-1) = e$, $u(0) = -1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解.

解. 将 $y_2(x) = u(x)e^x$ 代入微分方程, 整理得

$$(2x-1)u''(x) + (2x-3)u'(x) = 0.$$

这是可降阶微分方程, 解得 $u(x) = -(2x+1)e^{-x}$. 所以原微分方程的通解为

$$y = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = k_1 e^x - k_2 (2x+1),$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

20. (本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t & (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \\ y = \sin^3 t & (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 围成的平面

区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解. 旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (1-x^2) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{16\pi}{105} = \frac{18\pi}{35}. \end{aligned}$$

旋转体的表面积

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = 2\pi + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{(3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi + \frac{6\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}. \end{aligned}$$

21. (本题满分 11 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数 $f(0) = 0$.

(I) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值;

(II) 证明 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点.

解. (I) 由题意, $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$. 所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dx = \frac{1}{3\pi}.\end{aligned}$$

(II) 由 $f'(x) = \frac{\cos x}{2x-3\pi}$, 可得 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一驻点 $x = \frac{\pi}{2}$. 而且当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时 $f'(x) > 0$. 因为 $f(0) = 0$, 由单调性, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x)$ 无零点. 因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 且 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$, 由零值定理和单调性, 当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时 $f(x)$ 有唯一零点. 综上所述, $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22. (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(I) 求 a 的值; (II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

解. (I) 对增广矩阵作初等行变换得

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+2a & a-2 \end{pmatrix}.$$

由方程组 $Ax = \beta$ 无解, 可知 $r(A) < r(A, \beta)$, 故 $a = 0$.

(II) 当 $a = 0$ 时,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

故由初等行变换有

$$(A^T A, A^T \beta) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一七年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$, $f(0)=-1$, 且 $f''(x)>0$, 则 ()
- (A) $\int_{-1}^1 f(x)dx > 0$.
(B) $\int_{-1}^1 f(x)dx < 0$.
(C) $\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 f(x)dx$.
(D) $\int_{-1}^0 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx$.

解. 应选 (B). 由 $f''(x)<0$ 知 $f(x)$ 的图像在其任意两点连线的曲线下方, 故有

$$f(x) \leq f(0) + [f(1)-f(0)]x = 2x-1, \quad x \in (0, 1);$$

$$f(x) \leq f(0) + [f(0)-f(-1)]x = -2x-1, \quad x \in (-1, 0).$$

因此由定积分的保号性得到

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (2x-1)dx = 0, \quad \int_{-1}^0 f(x)dx < \int_{-1}^0 (-2x-1)dx = 0.$$

从而有

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx < 0.$$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 ()

- (A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
(B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
(C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
(D) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

解. 应选 (D). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a$, 可知当 $\sin a = 0$, 也即 $a = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$, 故 (A) 错误. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = a + \sqrt{|a|}$, 可知当 $a + \sqrt{|a|} = 0$, 也即 $a = 0$ 或者 $a = -1$ 时, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$, 故 (B) 错误. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = a + a^2$, 可知当 $a + a^2 = 0$, 也即 $a = 0$ 或者 $a = -1$ 时, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$, 故 (C) 错误. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = a + \sin a$, 而要使 $a + \sin a = 0$ 只有 $a = 0$, 故 (D) 正确.

4. 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* = \dots$ ()

- (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
(B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
(C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
(D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.

解. 应选 (C). 齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, 特征根为 $\lambda = 2 \pm 2i$. 将非齐次方程拆分为: ① $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$ 与 ② $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} \cos 2x$. 方程①和②的特解可以分别设为

$$y_1^* = A e^{2x}, \quad y_2^* = x e^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x).$$

由解的叠加原理可知，原方程的特解可以设为

$$y_2^* = Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x).$$

解. 应选(D). 由于 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, 可知 $f(x, y)$ 关于 x 单调递增, 故有 $f(0, 1) < f(1, 1)$. 又由于 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 可知 $f(x, y)$ 关于 y 单调递减, 故有 $f(1, 1) < f(1, 0)$, 从而 $f(0, 1) < f(1, 0)$.

- ### 6. 同试卷一第一[4]题.

7. 设 A 为 3 阶矩阵, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则
 $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \dots \quad ()$

(A) $\alpha_1 + \alpha_2$. (B) $\alpha_2 + 2\alpha_3$. (C) $\alpha_2 + \alpha_3$. (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2$.

解. 应选(B). 这是因为

$$\begin{aligned}
A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 + 2\alpha_3.
\end{aligned}$$

- ### 8. 同试卷一第一 [6] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 _____.

解. 应填 $y = x + 2$. 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right) - x = 2,$$

所以斜渐近线方程为 $y = x + 2$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \text{_____}$.

解. 应填 $-\frac{1}{8}$. 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{1+e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)'}{1+e^t} = \frac{-\sin t(1+e^t) - e^t \cos t}{(1+e^t)^2} = \frac{-\sin t - e^t \sin t - e^t \cos t}{(1+e^t)^3},$$

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{8}$.

11. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx = \text{_____}$.

解. 应填 1. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx &= \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d\left(-\frac{1}{1+x}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x} \ln(1+x) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{1+x} \ln(1+x) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{1+x} \Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

12. 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$,
 $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) = \text{_____}$.

解. 应填 xye^y . 由题可知, $f'_x = ye^y$, $f'_y = x(1+y)e^y$, 从而

$$f(x, y) = \int ye^y dx = xy e^y + c(y),$$

$$f'_y = xe^y + xy e^y + c'(y) = xe^y + xy e^y.$$

即 $c'(y) = 0$, 即 $c(y) = c$, 由 $f(0, 0) = 0$ 得 $c = 0$, 从而 $f(x, y) = xy e^y$.

13. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \text{_____}$.

解. 应填 $-\ln(\cos 1)$. 交换积分次序可得

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -[\ln|\cos x|]_0^1 = -\ln \cos 1.$$

14. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 -1 . 因为 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3+2a \\ 2 \end{pmatrix}$, 即 $3+2a=1$, 可得 $a=-1$.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

解. 先对变上限积分 $\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt$ 作变量代换 $u=x-t$, 得

$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = \int_x^0 \sqrt{u} e^{x-u} (-du) = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du.$$

则由洛必达法则可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du + \sqrt{x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x} e^{-x}} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{-\sqrt{x} e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{-x}}{-x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x}} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16. 同试卷一第三 [15] 题.

17. 同试卷一第三 [16] 题.

18. 同试卷一第三 [17] 题.

19. 同试卷一第三 [18] 题.

20. (本题满分 11 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x+1)^2 dx dy$.

解. 因为积分区域关于 y 轴对称, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D (x+1)^2 dx dy &= \iint_D x^2 dx dy + \iint_D 1 dx dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

21. (本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数, 且 $y(1)=0$. 点 P 是曲线 $L: y=y(x)$ 上的任意一点. L 在 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, Y_p)$, 法线与 x 轴相交于点 $(X_p, 0)$, 若 $X_p=Y_p$, 求 L 上点的坐标 (x, y) 满足的方程.

解. 曲线上点 $P(x, y)$ 的切线为

$$Y - y(x) = y'(x)(X - x);$$

令 $X=0$ 得, $Y_p = y(x) - y'(x)x$. 法线为

$$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x);$$

令 $Y=0$ 得, $X_p = x + y(x)y'(x)$. 由 $Y_p=X_p$ 得

$$y - x y'(x) = x + y y'(x), \Rightarrow \left(\frac{y}{x} + 1\right) y'(x) = \frac{y}{x} - 1.$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, 从而得到

$$(u+1)\left(x \frac{du}{dx} + u\right) = (u-1) \Rightarrow \int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x}.$$

当 $x>0$ 时解得

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan u = -\ln x + C.$$

代入初始条件 $y(1)=0$ 得到 $C=0$, 从而

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一八年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则 ()
- (A) $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$. (B) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$.
(C) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. (D) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

解. 应选 (B). 由题设有

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(e^x + ax^2 + bx) \right).$$

所以由泰勒公式有

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^2 + bx - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b)x + \left(\frac{1}{2} + a\right)x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

由此可得

$$\begin{cases} 1+b=0, \\ \frac{1}{2}+a=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=-1. \end{cases}$$

2. 同试卷一第一 [1] 题.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x-b, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上

连续, 则 ()

- (A) $a = 3$, $b = 1$. (B) $a = 3$, $b = 2$.
(C) $a = -3$, $b = 1$. (D) $a = -3$, $b = 2$.

解. 应选 (D). 由题设可得

$$f(x)+g(x) = \begin{cases} 1-ax, & x \leq -1, \\ -1+x, & -1 < x < 0, \\ 1+x-b, & x \geq 0. \end{cases}$$

由 $f(x)+g(x)$ 连续可得

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (f(x)+g(x)) = 1+a, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (f(x)+g(x)) = -2, \quad \Rightarrow \quad a = -3;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)+g(x)) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)+g(x)) = 1-b, \quad \Rightarrow \quad b = 2.$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则 ()

- (A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.
(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

解. 应选(D). 对于选项(A), 取 $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ 可以排除. 对于选项(B), 取 $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ 可以排除. 对于选项(C), 取 $f(x) = -x - \frac{1}{2}$ 可以排除. 对于选项(D), 由泰勒公式可得

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2;$$

两边在 $[0, 1]$ 上积分可知它是正确的.

5. 同试卷一第一[4]题.

6. $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1 - xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1 - xy) dy = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad ()$

(A) $\frac{5}{3}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $\frac{7}{3}$. (D) $\frac{7}{6}$.

解. 应选 (C). 因为积分区域 D 关于 y 轴对称, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D (1 - xy) dx dy = \iint_D dx dy = 2 \iint_{D_1} dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx = 2 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

7. 同试卷一第一 [5] 题.

8. 同试卷一第一[6]题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2[\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 1. 由拉格朗日中值定理得

$$\arctan(x+1) - \arctan x = \frac{1}{1+\xi^2}, \quad \xi \in (x, x+1).$$

所以有

$$\frac{x^2}{1+(x+1)^2} < x^2[\arctan(x+1) - \arctan x] < \frac{x^2}{1+x^2},$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = 1.$$

10. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是 _____.

解. 应填 $y = 4x - 3$. 对函数求导得

$$y' = 2x + \frac{2}{x}, \quad y'' = 2 + \frac{-2}{x^2}.$$

令 $y''=0$, 得 $x=1$. 故拐点为 $(1, 1)$. 在此处的斜率 $k=y'(1)=4$, 从而切线方程为 $y=4x-3$.

11. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{\ln 2}{2}$. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx &= \int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \right]_5^{+\infty} = \frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{2}{3}$. 先求导数和二阶导数, 得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\tan t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{dx/dt} = \frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t \sin t}.$$

因此在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处, $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$. 从而 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$.

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 $\frac{1}{4}$. 由 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 知, 当 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 时 $z = 1$. 方程两边对 x 求偏导得

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + e^{z-1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y.$$

将 $x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 1$ 代入得 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组, 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解. 应填 2. 由题设可得

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 所以 $A \sim B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 从而 A 和 B 的特征值相等. 由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 2] = 0,$$

可知 A 的实特征值为 2.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分)

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(x-t)dt = ax^2$.

(I) 求 $f(x)$;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

解. (I) 令 $u = x - t$ 则 $t = x - u$, $dt = -du$, 从而

$$\int_0^x t f(x-t)dt = \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x u f(u)du.$$

原方程可化为

$$\int_0^x f(t)dt + x \int_0^x f(u)du - \int_0^x u f(u)du = ax^2.$$

两边对 x 求导, 整理得

$$f(x) + \int_0^x f(u)du = 2ax.$$

所以 $f(0) = 0$. 设 $F(x) = \int_0^x f(u)du$ 则 $F'(x) = f(x)$, 且有

$$F'(x) + F(x) = 2ax.$$

解这个微分方程, 得

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-\int 1 dx} \left[C + \int e^{-\int 1 dx} 2ax dx \right] = e^{-x} \left[C + \int 2ax e^x dx \right] \\ &= e^{-x} [C + 2a(x-1)e^x]. \end{aligned}$$

将 $F(0) = 0$ 代入得 $C = 2a$. 所以

$$F(x) = 2ae^{-x} + 2a(x-1) \Rightarrow f(x) = -2ae^{-x} + 2a.$$

(II) 由题设可得

$$1 = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1} = \int_0^1 (-2ae^{-x} + 2a)dx = [2ae^{-x}]_0^1 + 2a = 2ae^{-1}.$$

解得 $a = \frac{e}{2}$.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D (x+2y) dx dy.$$

解. 曲线为摆线的一拱，将积分区域视为 X 型区域，可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+2y) dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{y(x)} (x+2y) dy \\ &= \int_0^{2\pi} [xy + y^2]_0^{y(x)} dx = \int_0^{2\pi} [xy(x) + y^2(x)] dx. \end{aligned}$$

利用参数方程 $x = t - \sin t$, $y(x) = 1 - \cos t$, 可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2] d(t - \sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} [(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 + (1 - \cos t)^3] dt. \end{aligned}$$

作换元 $t = u + \pi$, 并利用定积分的奇偶性, 可得

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} [(u + \pi + \sin t)(1 + \cos u)^2 + (1 + \cos u)^3] du \\ &= 2 \int_0^{\pi} [\pi(1 + \cos u)^2 + (1 + \cos u)^3] du. \end{aligned}$$

再作换元 $u = v + \frac{\pi}{2}$, 并利用定积分的奇偶性, 可得

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\pi(1 - \sin v)^2 + (1 - \sin v)^3] dv \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} [(\pi + 1) + (\pi + 3)\sin^2 v] dv \\ &= 4 \left[(\pi + 1) \frac{\pi}{2} + (\pi + 3) \left[\frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4} \right]_0^{\pi/2} \right] = 3\pi^2 + 5\pi. \end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$.

解. (I) 当 $x = 1$ 时, 易知不等式成立.

(II) 当 $0 < x < 1$ 时, 只需证 $x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \leq 0$. 设

$$f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x}.$$

设 $g(x) = x - 2 \ln x + 2k$ ($0 < x < 1$), 则 $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减, 从而有

$$g(x) > g(1) = 1 + 2k \geq 1 + 2(\ln 2 - 1) = 2 \ln 2 - 1 > 0.$$

因此 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $f(x) \leq f(1) = 0$, 结论成立.

(III) 当 $x > 1$ 时, 只需证 $x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \geq 0$. 设

$$f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x}.$$

设 $g(x) = x - 2 \ln x + 2k$ ($x > 1$), 则 $g'(x) = 1 - \frac{2}{x}$. 当 $1 < x < 2$ 时 $g'(x) < 0$ $g(x)$ 递减; 当 $x > 2$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增. 从而有

$$g(x) \geq g(2) = 2 + 2k - 2 \ln 2 \geq 2 + 2(\ln 2 - 1) - 2 \ln 2 = 0.$$

因此 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加, 故 $f(x) \geq f(1) = 0$, 结论成立.

19. 同试卷一第三 [16] 题.

20. (本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积. 若 P 运动到 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

解. 依题意, 所围图形的面积

$$S = \frac{1}{2}(1+y)x - \int_0^x y(x)dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{9}x^2\right)x - \int_0^x \frac{4}{9}x^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{2x^3}{27}.$$

所以 P 运动到 $(3,4)$ 时 S 关于时间 t 的变化率

$$\frac{dS}{dt} \Big|_{x=3} = \frac{dS}{dx} \frac{dx}{dt} \Big|_{x=3} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}x^2\right) \Big|_{x=3} = 10.$$

21. 同试卷一第三 [19] 题.

22. 同试卷一第三 [20] 题.

23. 同试卷一第三 [21] 题.

二〇一九年考研数学试卷二解答

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$) 的拐点是 ()
(A) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (B) $(0, 2)$. (C) $(\pi, -2)$. (D) $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$.

解. 应选 (C). 由 $y = x \sin x + 2 \cos x$; 得

$$y' = x \cos x - \sin x, \quad y'' = -x \sin x.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = \pi$. 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$ 时, $y'' < 0$; 当 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y'' > 0$. 所以 $(\pi, -2)$ 是曲线的唯一拐点.

3. 下列反常积分发散的是 ()
(A) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. (B) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.
(C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.

解. 应选 (D). 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^{+\infty} = +\infty,$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散.

4. 已知微分方程 $y'' + a y' + b y = c e^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()
(A) 1, 0, 1. (B) 1, 0, 2. (C) 2, 1, 3. (D) 2, 1, 4.

解. 应选 (D). 由通解的结构可看出 $r_1 = r_2 = -1$ 是特征方程 $r^2 + a r + b = 0$ 的实根, 从而 $a = 2, b = 1$. 又 $y^* = e^x$ 是非齐次方程的特解, 代入原方程得 $c = 4$.

5. 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$,
 $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 则 ()
(A) $I_3 < I_2 < I_1$. (B) $I_2 < I_1 < I_3$. (C) $I_1 < I_2 < I_3$. (D) $I_2 < I_3 < I_1$.

解. 应选 (A). 在区域 D 内部有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, 因此 $\sin \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, 所以 $I_2 < I_1$. 令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(u) = 1 - \cos u - \sin u$ ($0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$), 则

$$f'(u) = \sin u - \cos u, \quad f''(u) = \sin u + \cos u.$$

令 $f'(u)=0$, 得唯一驻点 $u=\frac{\pi}{4}$, 且 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$. 因此 $f(u)$ 在 $u=\frac{\pi}{4}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$, 在 $u=0$ 和 $u=\frac{\pi}{2}$ 处取得最大值 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 从而当 $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $1-\cos u < \sin u$, 也就得到了 $I_3 < I_2$.

解. 应选(A). 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} = 0$ 得 $h(x) = o((x-a)^2)$ ($x \rightarrow a$).

而由泰勒公式有

$$h(x) = h(0) + h'(0)(x - a) + \frac{h''(0)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2).$$

因此有 $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$, 即

$$f(a)=g(a), \quad f'(a)=g'(a), \quad f''(a)=g''(a).$$

由曲率公式 $k = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ 可知，两条曲线在 $x=a$ 对应的点处曲率相等。反过来；由相切及曲率相等可得

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad |f''(a)| = |g''(a)|.$$

当 $f''(a) = -g''(a)$ 时，无法得出 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2} = 0$. 比如 $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$.
 $a = 0$.

解. 应选(A). $Ax = 0$ 基础解系中只有两个向量, 故有 $4 - r(A) = 2$, 从而有 $r(A) = 2 < n - 1 = 3$, 因此 $r(A^*) = 0$.

8. 同试卷一第一 [5] 题.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

解. 应填 $4e^2$. 取对数并由等价无穷小量代换可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x+2^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x+2^x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+2^x-1)}{x} \\ &= 2 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{x} = 2 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

所以原极限等于 $\exp(2 + 2 \ln 2) = 4e^2$.

10. 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴的截距为 _____.

解. 应填 $2 + \frac{3\pi}{2}$. 在 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对应点处的斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \left. \frac{\sin t}{1 - \cos t} \right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1.$$

所以在该点的切线方程为

$$y - 1 = -\left(x - \frac{3\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow y = -x + \frac{3\pi}{2} + 2.$$

它在 y 轴的截距为 $2 + \frac{3\pi}{2}$.

11. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

解. 应填 $yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$. 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{y^2}{x}\right) + \frac{2y^2}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right). \Rightarrow 2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = yf\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

12. 曲线 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) 的弧长为 _____.

解. 应填 $\frac{1}{2}\ln 3$. 因为 $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$, 所以弧长

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \left[\ln(\sec x + \tan x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

13. 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

解. 应填 $\frac{1}{4}(\cos 1 - 1)$. 交换二重积分的积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 x dx \int_x^1 \frac{\sin t^2}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\sin t^2}{t} dt \int_0^t x dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t \sin t^2 dt = \frac{1}{4}(\cos 1 - 1). \end{aligned}$$

14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中元 (i, j) 元的代数余子式, 则

$$A_{11} - A_{12} =$$
 _____.

解. 应填 -4. 直接计算得

$$A_{11} - A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

三、解答题 (15~23 题, 共 94 分)

15. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求函数 $f(x)$ 的极值.

解. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (x+1)e^x$. 在 $x=0$ 处,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{2x}(\ln x + 1)}{1} = -\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 于是

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{2x}(\ln x + 1), & x > 0; \\ (x+1)e^x, & x < 0. \end{cases}$$

令 $f'(x) = 0$ 得到 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{e}$. 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此函数有极小值 $f(-1) = 1 - e^{-1}$, 极大值 $f(0) = 1$, 极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

16. (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

解. 将有理分式拆分成部分分式得

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx &= \int \left(-\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C \end{aligned}$$

17. (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$ 的表达式;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

解. (I) 由一阶线性微分方程的通解公式, 求得 $y = (\sqrt{x} + C)e^{\frac{x^2}{2}}$, 再由初始条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 得 $C = 0$, 所以特解为 $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

(II) 由旋转体的体积公式得

$$V = \pi \int_1^2 y(x)^2 dx = \pi \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (e^4 - e).$$

18. (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

解. 由二重积分的对称性, 并用极坐标计算, 得到

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} r \sin \theta dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5 \theta d\theta = \frac{43\sqrt{2}}{120}. \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分)

设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线 $y = e^{-x} \sin x$ ($0 \leq x \leq n\pi$) 与 x 轴所围成图形的面积, 求 S_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

解. 由不定积分 $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$ 可得

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n\pi} |e^{-x} \sin x| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi e^{-(t+k\pi)} |\sin(t+k\pi)| dt \\ &= \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)} (1 - e^{-n\pi}). \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}.$$

20. (本题满分 11 分)

已知函数 $u(x, y)$ 满足关系式 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. 求 a, b 的值, 使得在变换 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x, y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

解. 由变换 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + a v(x, y) e^{ax+by}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} e^{ax+by} + b v(x, y) e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{ax+by} + 2a \frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + a^2 v(x, y) e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{ax+by} + 2b \frac{\partial v}{\partial y} e^{ax+by} + b^2 v(x, y) e^{ax+by}. \end{aligned}$$

代入等式, 整理得

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (4a+3)\frac{\partial v}{\partial x} + (3-4b)\frac{\partial v}{\partial y} + (2a^2 - 2b^2 + 3a + 3b)v(x, y) = 0.$$

依题意, 当 $a = 0, b = \frac{3}{4}$ 时, 可化为 $v(x, y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

21. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

证明: (I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$; (II) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

解. (I) 由积分中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, 1)$, 使得

$$f(1) = 1 = \int_0^1 f(x) dx = f(\xi_1).$$

对 $f(x)$ 在 $(\xi_1, 1)$ 上用罗尔定理, 则存在 $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(II) 令 $g(x) = f(x) + x^2$, 则 $g(0) = 0, g(1) = 2, g(\xi_1) = 1 + \xi_1^2$. 对 $g(x)$ 分别在 $[0, \xi_1], [\xi_1, 1]$ 上用拉格朗日中值定理, 则存在 $\eta_1 \in (0, \xi_1), \eta_2 \in (\xi_1, 1)$, 使得

$$g'(\eta_1) = \frac{g(\xi_1) - g(0)}{\xi_1 - 0} = \frac{1 + \xi_1^2}{\xi_1}, \quad g'(\eta_2) = \frac{g(\xi_1) - g(1)}{\xi_1 - 1} = 1 + \xi_1.$$

对 $g'(x) = f'(x) - 2x$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上用拉格朗日中值定理, 则存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1)$, 使得

$$g''(\eta) = \frac{g'(\eta_2) - g'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{1 - \frac{1}{\xi_1}}{\eta_2 - \eta_1} < 0,$$

即 $f''(\eta) < -2$.

22. (本题满分 11 分)

已知向量组 I : $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$; 向量组 II : $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a + 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 - a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价, 求常数 a 的值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

解. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 向量组 I 和向量组 II 等价的充分必要条件是

$$r(A) = r(B) = r(A, B).$$

对矩阵 (A, B) 作初等行变换得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2 + 3 & a + 3 & 1 - a & a^2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 & 1 - a & a^2 - 1 \end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时, $r(A)=r(B)=r(A, B)=2$, 两个向量组等价. 此时

$$(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $\beta_3 = (-2k+3)\alpha_1 + (k-2)\alpha_2 + k\alpha_3$, 其中 k 为任意常数. 当 $a \neq 1$ 时, 继续作初等行变换得到

$$\begin{aligned} (A, B) &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此当 $a=-1$ 时 $r(A)=2 \neq r(A, B)=3$, 两个向量组不等价. 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -1$ 时, $r(A)=r(B)=r(A, B)=3$, 两个向量组等价. 此时

$$(A, \beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

从而 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

23. 同试卷一第三 [21] 题.