2022 年数学二试题解析

一、选择题（1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出下列四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中正确的序号是

（A）①② （B）①④ （C）①③④ （D）②③④

【答案】 选(C).

【解析】 当$x\to 0$时，若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right]^2=1$；且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

所以①③正确.

若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)-o(\alpha(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，则

$\alpha(x)\sim\beta(x)$；故④正确；

若取$\alpha(x)=-x,\beta(x)=\sin x$，则当$x\to 0$时，$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，但$\alpha(x)$与$\beta(x)$不是等价无穷小，故②错误.综上，答案选(C).

（2）$\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^2\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=$

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ （B）$\dfrac{1}{3}$ （C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ （D）$\dfrac{2}{3}$

【答案】 选（D）.

【解析】 交换积分次序得

$$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^2\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^x\frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}y=\int_0^2\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}(1+x^3)=\frac{1}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

（3）设函数$f(x)$在$x=x_0$处有 2 阶导数，则

（A）当$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$

（B）当$f'(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加

（C）当$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$

（D）当$f''(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数

【答案】选（B）.
【解析】依题设，有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\text{存在，}$$

当$f'(x_0)>0$时，有$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)>0$.由保号性知，存在$\delta>0$，当$x\in U(x_0,\delta)$时，

$f'(x)>0$，故$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加.

（4）设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

（A）$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ （B）$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（C）$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ （D）$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】选(C).
【解析】由

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

且
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

且
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y);$$

故 $$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

（5）设p为常数，若反常积分$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则$p$的取值范围是

（A）$(-1,1)$　（B）$(-1,2)$　（C）$(-\infty,1)$　（D）$(-\infty,2)$

【答案】 选（A）.

【解析】 $x=0,1$为瑕点.对$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}x^{p+\varepsilon}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\varepsilon}\ln x=0$，

知当$x\to0^+$时，$\frac{|\ln x|}{x^p(1-x)^{1-p}}<\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}$，而$\int_0^{\frac12}\frac{dx}{x^{p+\varepsilon}}$收敛当且仅当$p+\varepsilon<1$时，即

$p<1-\varepsilon<1$时.反之，如果$p\geq1$时，积分$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$显然发散.

由$x\to-1$时，$\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\sim\frac{x-1}{(1-x)^{1-p}}=-\frac{1}{(1-x)^{-p}}$，则当$-p<1$，即$p>-1$时收敛；综上，$-1<p<1$.

（6）设有数列$\{x_n\}$，其中x_n满足$-\frac{\pi}{2}\leq x_n\leq\frac{\pi}{2}$，则

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

【答案】 选（D）.

【解析】 若取$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)=\cos1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$均不存在，故排除（A）与（C）；当$x_n=(-1)^n$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)=\sin1$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，故排除（B）；所以答案选（D）.

【注】 如果注意到$\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，$\cos x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上不是单调的，则易知（D）正确.

（7）已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_2<I_1<I_3$　（C）$I_1<I_3<I_2$　（D）$I_3<I_2<I_1$

【答案】选(A).

【解析】当$0<x<1$时，$\dfrac{x}{2}<\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$且$1+\cos x>1>\dfrac{1+\sin x}{2}$，

$$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{x}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x},$$

所以$I_1<I_2<I_3$.

（8）设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是

（A）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$

（B）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

（C）存在可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$

（D）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{T}$

【答案】选（B）.

【解析】若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，即$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\Lambda}$相似，且$\boldsymbol{\Lambda}$的特征值为$1,-1,0$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$；

若$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$，则三阶矩阵$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.故答案选（B）.

（9）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解的情况为

（A）无解　（B）有解　（C）有无穷多解或无解　（D）有唯一解或无解

【答案】选(D).

【解析】$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&a^2&b^2\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$，当$|A|\neq0$，即$a\neq1,b\neq1,a\neq b$时，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解；

当$a=1$时，$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&b&b^2&4\end{array}\right]$，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解；

当$b=1$时，$(A,b)=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&1&1&4\end{array}\right]$，方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$无解；

当$a=b$时，$(A,b)=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&a&a^2&\vdots&2\\1&b&b^2&\vdots&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&a&a^2&\vdots&2\\1&a&a^2&\vdots&4\end{bmatrix}$，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解；

因此线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解或无解.

（10）设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda$的取值范围是

（A）$\{0,1\}$

（B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq 2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R$且$\lambda\neq -1,\lambda\neq 2\}$

（D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq -1\}$

【答案】选(C).

【解析】由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&(2+\lambda)(1-\lambda)&(\lambda+1)^2(1-\lambda)\end{bmatrix},$$

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$且$\lambda\neq -1$时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=-1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&0&2&0\end{bmatrix}$，

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

当$\lambda=-2$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，

此时$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$不等价.

综上，答案选(C).

二、填空题（11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】此为"1^{∞}"型.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}-1\right)\cdot\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=e^{\frac{1}{2}}$.

（12）已知函数$y=y(x)$是由方程$x^2+xy+y^3=3$所确定，则$y''(1)=$________.

【答案】 $-\frac{31}{32}$.

【解析】 当$x=1$时，$y=1$，在方程$x^2+xy+y^3=3$两边对x求导，得

$$2x+y+xy'+3y^2y'=0,$$

当$x=1,y=1$时，$y'(1)=-\frac{3}{4}$；在$2x+y+xy'+3y^2y'=0$两边对x求导，得

$$2+2y'+xy''+6yy'^2+3y^2y''=0,$$

将$x=1,y(1)=1,y'(1)=-\frac{3}{4}$代入，得$y''(1)=-\frac{31}{32}$.

（13）$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$________.

【答案】 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

【解析】 $\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+4\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$

$$=\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

（14）微分方程$y'''-2y''+5y'=0$的通解为$y(x)=$________.

【答案】 微分方程$y'''-2y''+5y'=0$对应的特征方程为$\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda=0$，解得特征根为$\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=1\pm 2i$，于是方程的通解为$y(x)=C_1+e^x\left(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x\right)$，其中$C_1,C_2,C_3$为任意常数.

（15）已知曲线L的极坐标方程为$r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$，则曲线$L$与极坐标所围成的面积为________.

【答案】$\frac{\pi}{12}$.

【解析】所求面积为$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta\overset{3\theta=t}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$.

（16）设A为 3 阶矩阵，交换A的第二行和第三行，再将第二列的-1 倍加到第一列，得到矩阵$\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$，则$A^{-1}$的迹$\operatorname{tr}\left(A^{-1}\right)=$________.

【答案】-1.

【解析】依题设，有

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

于是$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-1&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix},$$

于是$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，所以$\operatorname{tr}\left(A^{-1}\right)=-1$.

三、解答题（17～22 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求$f'(1)$.

【解析】由于$f(x)$在$x=1$处可导，则$f(x)$在$x=1$处连续.由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2,$$

知$\lim\limits_{x\to 0}\left[f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f(1+\sin x)\right]=-2f(1)=0$，得$f(1)=0$.于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-f(1)}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-f(1)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)=2.$$

所以$f'(1)=-1$.

（18）（本题满分 12 分）

设$y(x)$是微分方程$2xy'-4y=2\ln x-1$满足$y(1)=\dfrac{1}{4}$的解，求曲线

$y=y(x)\ (1\leqslant x\leqslant e)$的弧长.

【解析】原方程变形为$y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{2x}$，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y(x)=Cx^2-\frac{1}{2}\ln x.$$

由$y(1)=\dfrac{1}{4}$，得$C=\dfrac{1}{4}$，于是$y(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$.

故曲线$y=y(x)$的弧长为

$$\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域$\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算$I=\displaystyle\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】利用极坐标得

$$I=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\frac{(r\cos\theta-r\sin\theta)^2}{r^2}r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi-2.$$

（20）（本题满分 12 分）

已知可微函数$f(u,v)$满足$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$，且$f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（I）记$g(x,y)=f(x,y-x)$，求$\dfrac{\partial g}{\partial x}$；

（II）求$f(u,v)$的表达式和极值.

【解析】（I）

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'(x,y-x)=f_2'(x,y-x)=2(x-(y-x))\mathrm{e}^{-(x+y-x)}=2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}.$$

（II）由（I）知 $g(x,y)=2\left(x^2-xy\right)\mathrm{e}^{-y}+C(y)$，又 $f(x,0)=g(x,x)=C(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，

所以 $C(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$， $g(x,y)=2\left(x^2-xy\right)\mathrm{e}^{-y}+y^2\mathrm{e}^{-y}=\left(2x^2-2xy+y^2\right)\mathrm{e}^{-y}$.

令 $x=u,y=x-v$，于是

$$f(u,v)=-2uv\,\mathrm{e}^{(u+v)}+(u+v)^2\mathrm{e}^{-(u+v)}=\left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)},$$

由

$$\begin{cases} f_u'=\left(2u-\left(u^2+v^2\right)\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}=0 \\ f_v'=\left(2v-\left(u^2+v^2\right)\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}=0 \end{cases},$$

得驻点 $(0,0)$ 或 $(1,1)$.

在驻点 $(0,0)$ 处， $A=f_{uu}''(0,0)=2>0,B=f_{uv}''(0,0)=0,C=f_{vv}''(0,0)=2$ ， 由 $B^2-AC<0,A>0$，知 $f(0,0)=0$ 为极小值.

在驻点 $(1,1)$ 处， $A=f_{uu}''(1,1)=0,B=f_{uv}''(1,1)=-2\mathrm{e}^{-2},C=f_{vv}''(1,1)=0$ ， 由 $B^2-AC>0$，知 $(1,1)$ 不是极值点.

（21）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$ 的充要条件为对不同实数 a,b，有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】先证明必要性：不妨假设 $a<b$，当 $a<x<b$，由泰勒公式得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间，由 $f''(x)\geq 0$，知

$$f(x)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

上式两边取积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，故必要性得证.

再证明充分性：考虑利用反证法.已知 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

假设存在 x_0，使得 $f''(x_0)<0$，由 $f''(x)$ 连续可知，存在一个闭区间 $[a,b]$ 包含 x_0，使得

$f''(x)<0$ 恒成立.于是

$$f(x)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

取积分有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这与 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 矛盾，故充分性得证.

（22）（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（I）求正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形；

（II）证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.

【解析】（I）二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征值 $\lambda=4$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$.

当 $\lambda_3=2$ 时，解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^T$.

经检验 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经相互正交，故只需将其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，则经正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，经二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

$4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$.

（II）由（I）知，当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$时，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$，于是

$$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=\frac{g(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}=\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2+\frac{2y_1^2+2y_2^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant 2,$$

取$y_1=0,y_2=0,y_3=1$时等号成立，故$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.