

2020 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (二)

(科目代码:302)

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是() .

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

(2) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(3) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} dx = ()$.

(A) $\frac{\pi^2}{4}$

(B) $\frac{\pi^2}{8}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{8}$

(4) 设 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 当 $n \geq 3$ 时, $f^{(n)}(0) = ()$.

(A) $-\frac{n!}{n-2}$

(B) $\frac{n!}{n-2}$

(C) $-\frac{(n-2)!}{n}$

(D) $\frac{(n-2)!}{n}$

(5) 关于函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0, \\ x, & y=0, \\ y, & x=0, \end{cases}$ 给出如下结论

① $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 1$;

② $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 1$;

③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$;

④ $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$.

其中正确的个数是().

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则()。

- (A) $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ (B) $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$
(C) $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ (D) $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

(7) 设 4 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则方程组 $A^* X = \mathbf{0}$ 的通解为()。

- (A) $X = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
(B) $X = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
(C) $X = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
(D) $X = k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

(8) 设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征

值 -1 的特征向量, 则使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为()。

- (A) $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ (B) $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
(C) $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ (D) $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。请将答案写在题中的横线上。)

(9) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉入水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g , 水密度为 ρ , 则该平板一侧所受的水压力为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

(15) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线方程。

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $g'(x)$, 并证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 且满足 $2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(x)$, 并求

曲线 $y = f(x)$, $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

(19) (本题满分 10 分)

平面区域 D 由直线 $x = 1$, $x = 2$, $y = x$ 与 x 轴围成, 计算 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dx dy$.

(20) (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$.

(I) 证明: 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$;

(II) 证明: 存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta e^{\eta^2}$.

(21) (本题满分 11 分)

设曲线 $y = f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0$, 曲线 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) 经过坐标原点 O , 其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T , 又 MP 垂直 x 轴于点 P , 已知由曲线 $y = f(x)$, 直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 $3:2$, 求满足上述条件的曲线方程.

(22) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$
 化为二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求可逆矩阵 P .

(23) (本题满分 11 分)

设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明: P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.