

2022 年数学二试题解析

一、选择题 (1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 给出下列四个命题:

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

其中正确的序号是

(A) ①②

(B) ①④

(C) ①③④

(D) ②③④

【答案】选(C).

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right]^2 = 1; \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \text{ 则 } \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x));$$

所以①③正确.

$$\text{若 } \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - o(\alpha(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 则}$$

$\alpha(x) \sim \beta(x)$; 故④正确;

若取 $\alpha(x) = -x, \beta(x) = \sin x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 但 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不是等价无穷小, 故②错误. 综上, 答案选(C).

$$(2) \int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$$

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

【答案】选(D).

【解析】 交换积分次序得

$$\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^2 dx \int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dy = \int_0^2 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} d(1+x^3) = \frac{1}{3} \sqrt{1+x^3} \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 2 阶导数, 则

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x_0) > 0$

(B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$

(D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

【答案】选(B).

【解析】依题设, 有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ 存在,}$$

当 $f'(x_0) > 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) > 0$. 由保号性知, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时,

$f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

(4) 设函数 $f(t)$ 连续, 令 $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$, 则

$$(A) \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$(B) \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$(C) \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$(D) \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

【答案】选(C).

【解析】由

$$F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt = (x-y) \int_0^{x-y} f(t)dt - \int_0^{x-y} tf(t)dt,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^{x-y} f(t)dt + (x-y)f(x-y) - (x-y)f(x-y) = \int_0^{x-y} f(t)dt,$$

且

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x-y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = - \int_0^{x-y} f(t)dt - (x-y)f(x-y) + (x-y)f(x-y) = - \int_0^{x-y} f(t)dt,$$

且

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x-y);$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

(5) 设 p 为常数, 若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} dx$ 收敛, 则 p 的取值范围是

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(-\infty, 1)$ (D) $(-\infty, 2)$

【答案】选 (A).

【解析】 $x=0, 1$ 为瑕点. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} x^{p+\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0$,

知当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{|\ln x|}{x^p(1-x)^{1-p}} < \frac{1}{x^{p+\varepsilon}}$, 而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{p+\varepsilon}}$ 收敛当且仅当 $p + \varepsilon < 1$ 时, 即

$p < 1 - \varepsilon < 1$ 时. 反之, 如果 $p \geq 1$ 时, 积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} dx$ 显然发散.

由 $x \rightarrow -1$ 时, $\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} \sim \frac{x-1}{(1-x)^{1-p}} = -\frac{1}{(1-x)^{-p}}$, 则当 $-p < 1$, 即 $p > -1$ 时收敛; 综上, $-1 < p < 1$.

(6) 设有数列 $\{x_n\}$, 其中 x_n 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

【答案】选 (D).

【解析】若取 $x_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n) = \cos 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 均不存在,

故排除 (A) 与 (C); 当 $x_n = (-1)^n$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n) = \sin 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 故排除

(B); 所以答案选 (D).

【注】如果注意到 $\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加, $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上不是单调的, 则易知 (D) 正确.

(7) 已知 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_1 < I_3 < I_2$ (D) $I_3 < I_2 < I_1$

【答案】选(A).

【解析】当 $0 < x < 1$ 时， $\frac{x}{2} < \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 且 $1+\cos x > 1 > \frac{1+\sin x}{2}$ ，

$$\frac{x}{2(1+\cos x)} < \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} < \frac{x}{1+\cos x} < \frac{2x}{1+\sin x}，$$

所以 $I_1 < I_2 < I_3$.

(8) 设 A 为三阶矩阵， $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，则 A 的特征值为 $1, -1, 0$ 的充分必要条件是

(A) 存在可逆矩阵 P, Q ，使得 $A = P\Lambda Q$

(B) 存在可逆矩阵 P ，使得 $A = P\Lambda P^{-1}$

(C) 存在可逆矩阵 Q ，使得 $A = Q\Lambda Q^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵 P ，使得 $Q = P\Lambda P^T$

【答案】选(B).

【解析】若存在可逆矩阵 P ，使得 $A = P\Lambda P^{-1}$ ，即 A 和 Λ 相似，且 Λ 的特征值为 $1, -1, 0$ ，所以 A 的特征值为 $1, -1, 0$ ；

若 A 的特征值为 $1, -1, 0$ ，则三阶矩阵 $A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，即存在可逆矩阵 P ，使

得 $A = P\Lambda P^{-1}$.故答案选(B).

(9) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解的情况为

(A) 无解 (B) 有解 (C) 有无穷多解或无解 (D) 有唯一解或无解

【答案】选(D).

【解析】 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(b-a)$ ，当 $|A| \neq 0$ ，即

$a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$ 时，方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解；

当 $a=1$ 时， $(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & b^2 & 4 \end{array} \right]$ ，方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 无解；

当 $b=1$ 时， $(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$ ，方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 无解；

$$\text{当 } a=b \text{ 时, } (A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & 2 \\ 1 & b & b^2 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & 2 \\ 1 & a & a^2 & 4 \end{array} \right], \text{ 方程组 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 无解;}$$

因此线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解或无解.

(10) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则

λ 的取值范围是

(A) $\{0, 1\}$

(B) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq 2\}$

(C) $\{\lambda | \lambda \in R \text{ 且 } \lambda \neq -1, \lambda \neq 2\}$

(D) $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

【答案】选(C).

$$\text{【解析】由 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left[\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & (2 + \lambda)(1 - \lambda) & (\lambda + 1)^2(1 - \lambda) \end{array} \right],$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$,

此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价.

当 $\lambda = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价.

$$\text{当 } \lambda = -1 \text{ 时, } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right],$$

此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 2$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价.

$$\text{当 } \lambda = -2 \text{ 时, } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right],$$

此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 不等价.

综上, 答案选(C).

二、填空题 (11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】 此为“ 1^∞ ”型.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} - 1 \right) \cdot \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = e^{\frac{1}{2}}$.

(12) 已知函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 所确定, 则 $y''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{31}{32}$.

【解析】 当 $x=1$ 时, $y=1$, 在方程 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 两边对 x 求导, 得

$$2x + y + xy' + 3y^2 y' = 0,$$

当 $x=1, y=1$ 时, $y'(1) = -\frac{3}{4}$; 在 $2x + y + xy' + 3y^2 y' = 0$ 两边对 x 求导, 得

$$2 + 2y' + xy'' + 6yy'^2 + 3y^2 y'' = 0,$$

将 $x=1, y(1)=1, y'(1)=-\frac{3}{4}$ 代入, 得 $y''(1) = -\frac{31}{32}$.

(13) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

【解析】 $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$
 $= \ln(x^2 - x + 1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$
 $= \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$

(14) 微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 的通解为 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 对应的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$, 解得特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, 于是方程的通解为 $y(x) = C_1 + e^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(15) 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = \sin 3\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$)，则曲线 L 与极坐标所围成的面积为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{12}$.

【解析】 所求面积为 $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$.

(16) 设 A 为 3 阶矩阵，交换 A 的第二行和第三行，再将第二列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵 $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，则 A^{-1} 的迹 $\text{tr}(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1.

【解析】 依题设，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{于是 } A^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \text{tr}(A^{-1}) = -1. \end{aligned}$$

三、解答题 (17~22 小题，共 70 分)

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2$ ，求 $f'(1)$.

【解析】 由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2,$$

知 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)] = -2f(1) = 0$ ，得 $f(1) = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - f(1)}{x^2} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin^2 x) - f(1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - f(1)}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin^2 x) - f(1)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

$$= f'(1) - 3f'(1) = -2f'(1) = 2.$$

所以 $f'(1) = -1$.

(18) (本题满分 12 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $2xy' - 4y = 2\ln x - 1$ 满足 $y(1) = \frac{1}{4}$ 的解, 求曲线

$y = y(x)$ ($1 \leq x \leq e$) 的弧长.

【解析】原方程变形为 $y' - \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}$, 由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y(x) = Cx^2 - \frac{1}{2}\ln x.$$

由 $y(1) = \frac{1}{4}$, 得 $C = \frac{1}{4}$, 于是 $y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$.

故曲线 $y = y(x)$ 的弧长为

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{1+y'^2} dx &= \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right) \Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $\{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy$.

【解析】利用极坐标得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r^2} r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}} \frac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r^2} r dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta\sin\theta) d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta = 2\pi - 2. \end{aligned}$$

(20) (本题满分 12 分)

已知可微函数 $f(u, v)$ 满足 $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 2(u-v)e^{-(u+v)}$, 且 $f(u, 0) = u^2 e^{-u}$.

(I) 记 $g(x, y) = f(x, y-x)$, 求 $\frac{\partial g}{\partial x}$;

(II) 求 $f(u, v)$ 的表达式和极值.

【解析】(I)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'_1(x, y-x) = f'_2(x, y-x) = 2(x-(y-x))e^{-(x+y-x)} = 2(2x-y)e^{-y}.$$

(II) 由(I)知 $g(x, y) = 2(x^2 - xy)e^{-y} + C(y)$, 又 $f(x, 0) = g(x, x) = C(x) = x^2 e^{-x}$,

所以 $C(x) = x^2 e^{-x}$, $g(x, y) = 2(x^2 - xy)e^{-y} + y^2 e^{-y} = (2x^2 - 2xy + y^2)e^{-y}$.

令 $x = u, y = x - v$, 于是

$$f(u, v) = -2uv e^{(u+v)} + (u+v)^2 e^{-(u+v)} = (u^2 + v^2)e^{-(u+v)},$$

由

$$\begin{cases} f'_u = (2u - (u^2 + v^2))e^{-(u+v)} = 0 \\ f'_v = (2v - (u^2 + v^2))e^{-(u+v)} = 0 \end{cases},$$

得驻点 $(0, 0)$ 或 $(1, 1)$.

在驻点 $(0, 0)$ 处, $A = f''_{uu}(0, 0) = 2 > 0, B = f''_{uv}(0, 0) = 0, C = f''_{vv}(0, 0) = 2$, 由 $B^2 - AC < 0, A > 0$, 知 $f(0, 0) = 0$ 为极小值.

在驻点 $(1, 1)$ 处, $A = f''_{uu}(1, 1) = 0, B = f''_{uv}(1, 1) = -2e^{-2}, C = f''_{vv}(1, 1) = 0$, 由 $B^2 - AC > 0$, 知 $(1, 1)$ 不是极值点.

(21) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充要条件为对不同实数 a, b ,

$$\text{有 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

【证明】先证明必要性: 不妨假设 $a < b$, 当 $a < x < b$, 由泰勒公式得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间, 由 $f''(x) \geq 0$, 知

$$f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

上式两边取积分得

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 故必要性得证.

再证明充分性: 考虑利用反证法. 已知 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

假设存在 x_0 , 使得 $f''(x_0) < 0$, 由 $f''(x)$ 连续可知, 存在一个闭区间 $[a, b]$ 包含 x_0 , 使得

$f''(x) < 0$ 恒成立. 于是

$$f(x) < f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

取积分有

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 这与 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 矛盾, 故充分性得证.

(22) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

(I) 求正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 化二次型为标准形;

(II) 证明: $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2$.

【解析】 (I) 二次型矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 由特征多项式

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2),$$

得矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(4\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$4\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得特征值 $\lambda = 4$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, -1)^T$.

经检验 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 已经相互正交, 故只需将其单位化, 有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

令 $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$, 则经正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$, 经二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形

$$4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2.$$

(II) 由 (I) 知, 当 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 时, $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$, 于是

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{g(\mathbf{y})}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2 + \frac{2y_1^2 + 2y_2^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \geq 2,$$

取 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1$ 时等号成立, 故 $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = 2$.