



一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 函数 $f(x) = \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 已知 $\begin{cases} x = 1+t^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(2+\frac{2}{x}) - f(2)] = ()$

- A. $2e$ B. $\frac{4}{3}e$ C. $\frac{2}{3}e$ D. $\frac{e}{3}$

3. 已知 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^3 dt$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为奇函数;
B. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数;
C. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为偶函数;
D. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数;

4. 已知数列 $\{a_n\} (a_n \neq 0)$, 若数列 $\{a_n\}$ 发散, 则 ()

- A. $\{a_n + \frac{1}{a_n}\}$ 发散 B. $\{a_n - \frac{1}{a_n}\}$ 发散 C. $\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散 D. $\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散

5. 已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处 ()

- A. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 可微; B. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 不可微;
C. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 可微; D. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 不可微。

6. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$; B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$;
C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$; D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$ 。

7. 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 给定以下三个命题:





(1) 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(2) 若存在 $p > 1$, 使极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(3) 若 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则存在 $p > 1$, 使极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在。

其中正确的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则矩阵 A 为 ()

- A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

9. 设 A 为四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $A(A - A^*) = 0$, 且 $A \neq A^*$, 则 $r(A)$ 的可能取值为 ()

- A. 0 或 1 B. 1 或 3 C. 2 或 3 D. 1 或 2

10. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, 且 $AB = BA$, 则“ A 有两个不相等的特征值”是“ B 可对角化”的 ()

- A. 充要条件; B. 充分非必要条件 C. 必要非充分条件 D. 既非充分又非必要条件

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

11. 曲线 $y^2 = x$ 在 $(0,0)$ 点处的曲率圆方程为_____。

12. 函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是_____。

13. 微积分方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$ 满足 $y(1) = 0$ 的解为_____。

14. 已知函数 $f(x) = (e^x + 1)x^2$, 则 $f^{(5)}(1) =$ _____。

15. 某物体以速度 $v(t) = t + k \sin \pi t$ 做直线运动, 若它从 $t = 0$ 到 $t = 3$ 的时间段内平均速度是 $\frac{5}{2}$, 则 $k =$ _____。

16. 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量

均线性无关, 则 $ab =$ _____。





三、解答题：17~22 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。请将答案写在答题纸指定位置上。

17. (本题满分 10 分)

设已知区域 D 是第一象限内的有界区域，它由 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成，计算

$$\iint_D (1+x-y) dx dy.$$

18. (本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 满足方程 $xy'' + xy' - 9y = 0$ ，且 $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 6$ ，

(1) 利用变换 $x = e^t$ 化简方程，并求 $y = y(x)$ 的表达式；

(2) 求 $\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx$ 。

19. (本题满分 12 分)

已知 $t > 0$ ，曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $V(t)$ ，求 $V(t)$ 的最大值。

20. (本题满分 12 分)

设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导， $g(x, y) = f(2x+y, 3x-y)$ ，且 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$ ，

(1) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ ；

(2) 若 $\frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = ue^{-u}$ ，且 $f(0, v) = \frac{1}{50}v^2 - 1$ ，求 $f(u, v)$ 的表达式。

21. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 由 2 阶导数， $f'(0) = f'(1)$ ， $|f''(x)| \leq 1$ ，

① 当 $x \in (0, 1)$ 时， $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$ ；

② $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$ 。

22. (本题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ ，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$ ，已知方程组 $Ax = 0$

的解是 $B^T x = 0$ 的解，但两个方程组不同解。





(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型。

