

2021 考研数学三试题解析

一、选择题（本题共 10 题，每小题 5 分，共 50 分）

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

(A) 低阶无穷小

(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小

(D) 同阶但非等价无穷小

【答案】 选 (C) .

【解析一】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt \sim \int_0^{x^2} t^3 dt = \frac{1}{4} x^8$, 故 $\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt$ 是 x^7 的

高阶无穷小, 答案选 (C) .

【解析二】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^3} - 1) dt}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^{x^6} - 1)}{7x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{7} x = 0$, 故选 (C)

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取极大值

(B) 连续且取极小值

(C) 可导且导数为 0

(D) 可导且导数不为 0

【答案】 选 (D) .

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(3) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有两个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e, +\infty)$

(B) $(0, e)$

(C) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

【答案】 选 (A) .

【解析】 由题可得 $x > 0$, 令 $f'(x) = a - \frac{b}{x} = 0$, 可得 $x = \frac{b}{a}$, $f''(x) = \frac{b}{x^2}$,

若 $b < 0$, 则 $f'(x) > 0$, 则此时至多一个零点, 故 $b > 0$, 则 $f''(x) > 0$, 于是在

$x = \frac{b}{a}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{b}{a}\right) = a \cdot \frac{b}{a} - b \ln \frac{b}{a} = b - b \ln \frac{b}{a}$, 又

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - b \ln x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - b \ln x) = +\infty$,

故函数有两个零点只需满足 $f\left(\frac{b}{a}\right) = b - b \ln \frac{b}{a} < 0$ 即可, 即 $\frac{b}{a} - \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} < 0$, 解得 $\frac{b}{a} > e$.

(4) 设函数 $f(x, y)$ 可微, $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2, f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) dy (D) $-dy$

【答案】 选 (C) .

【解析】 $df(x, y) = f'_1(x, y)dx + f'_2(x, y)dy$,

$f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ 对 x 求导可得

$$f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1),$$

将 $x=0$ 带入可得 $f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1$ ①

在 $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ 两边对 x 求导可得

$$f'_1(x, x^2) + 2xf'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$$

将 $x=1$ 带入可得 $f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2$ ②

由①和②可得 $f'_1(1, 1) = 0, f'_2(1, 1) = 1$, 故选 (C) .

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

- (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

【答案】 选 (B) .

【解析 1】 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$, 二次型矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

由矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3),$$

得 \mathbf{A} 特征值为 $-1, 3, 0$, 则正、负惯性指数分别为 $1, 1$, 故选 (B) .

【解析 2】 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3 = 2\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2,$$

由以上标准形可得正、负惯性指数分别为1, 1, 故选 (B) .

(6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为4阶正交矩阵, 若矩阵 $B = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k 表示任

意常数, 则线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解 $x =$

(A) $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_1$

(B) $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_2$

(C) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + k\alpha_3$

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$

【答案】 选 (D) .

【解析】 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为4阶正交矩阵, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为一组标准正交向量

组, 则 $r(B) = 3$, 且 $B\alpha_4 = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix} \alpha_4 = \mathbf{0}$, 则 $Bx = \mathbf{0}$ 的通解为 $k\alpha_4$,

$$\text{又 } B(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta, \text{ 故线性方程组 } Bx = \beta \text{ 的通}$$

解为 $x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$, 其中 k 为任意常数, 故选 (D) .

(7) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, 若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使

PAQ 为对角矩阵, 则 P, Q 可以分别取

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【答案】 选 (C) .

【解析】 $(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (B, P), \text{ 即 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中不成立的是

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$

【答案】 选 (D) .

【解析】 $P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(AB)},$

$$P(\bar{A}|A \cup B) = \frac{P(\bar{A}(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A) + P(B) - P(AB)},$$

由 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$ 可得 $P(A) > P(B) - P(AB)$, 故选 (D) .

【注】 由 $P(A|B) = P(A)$ 知 A 与 B 相互独立, 所以 $P(A|\bar{B}) = P(A)$, 故 (A) 正确; 若 $P(A|B) > P(A)$, 由对称性知 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$, 故 (B) 正确; 若

$$P(A|B) > P(A|\bar{B}), \text{ 则 } \frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}, \text{ 所以}$$

$P(AB) > P(A)P(B)$, 故 (C) 正确.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本,

令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$, 则

(A) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

(B) $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(C) $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

$$(D) E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

【答案】 选 (B) .

【解析】 由题意可得

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right), \text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2,$$

由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 所以 (\bar{X}, \bar{Y}) 也服从二维正态分布, 则 $\bar{X} - \bar{Y}$ 服从一维正态分布, 于是 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta$,

$$\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{n\rho\sigma_1\sigma_2}{n^2} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n},$$

$$\text{于是 } D(\hat{\theta}) = D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) - 2\text{cov}(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}, \text{ 选}$$

(B) .

$$(10) \text{ 设总体 } X \text{ 的概率分布为 } P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4},$$

则利用来自总体的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为

$$(A) \frac{1}{4}$$

$$(B) \frac{3}{8}$$

$$(C) \frac{1}{2}$$

$$(D) \frac{5}{2}$$

【答案】 选 (A)

【解析】 似然函数 $L(\theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5$, 取对数

$$\ln L(\theta) = 3\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + 5\ln\left(\frac{1+\theta}{4}\right),$$

$$\text{由 } \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{-3}{1-\theta} + \frac{5}{1+\theta} = 0, \text{ 得 } \hat{\theta} = \frac{1}{4}, \text{ 故选 (A) .}$$

二、填空题 (本题共 6 题, 每小题 5 分, 共 30 分)

$$(11) \text{ 若 } y = \cos e^{-\sqrt{x}}, \text{ 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{1}{2e} \sin \frac{1}{e}.$$

$$\text{【解析】 } \frac{dy}{dx} = -\sin e^{-\sqrt{x}} \left(e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{x}} \right), \text{ 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1}{2e} \sin \frac{1}{e}.$$

$$(12) \int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 6.

【解析】 $\int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}} dx = \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{d(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{d(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$= -\sqrt{9-x^2} \Big|_{\sqrt{5}}^3 + \sqrt{x^2-9} \Big|_3^5 = 6.$$

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x} \sin \pi x (0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} \sin \pi x)^2 dx = \pi \int_0^1 x \sin^2 \pi x dx \xrightarrow{\pi x = t} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}$.

(14) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + C$, C 为任意常数.

【解析】 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = t$, 则 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C$, 令特解为 $y^* = (at + b)t$, 带入可得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$, 则特解为 $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$, 故可得通解为 $y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + C$, C 为任意常数.

(15) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为_____.

【答案】 -5.

【解析】 只找到函数中含有 x^3 项即可, 结果为

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = -x^3 - 4x^3 = -5x^3,$$

故 x^3 项的系数为 -5.

(16) 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒中和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 由题可得

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix},$$

$$EX = EY = \frac{1}{2}, DX = DY = \frac{1}{4}, E(XY) = \frac{3}{10}, \quad cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{20},$$

$$\text{则 } \rho_{XY} = \frac{1}{5}.$$

三、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分)

(17) (本题满分 10 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值.

【解析】 极限存在的充要条件是左右极限存在且相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \arctan \frac{1}{x} + \left(1 + |x|^{\frac{1}{x}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[a \arctan \frac{1}{x} + \left(1 + x^{\frac{1}{x}} \right) \right] = \frac{\pi}{2} a + e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[a \arctan \frac{1}{x} + \left(1 + |x|^{\frac{1}{x}} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[a \arctan \frac{1}{x} + \left(1 - x^{\frac{1}{x}} \right) \right] = -\frac{\pi}{2} a + e^{-1},$$

$$\text{则 } \frac{\pi}{2} a + e = -\frac{\pi}{2} a + e^{-1}, \text{ 解得 } a = \frac{e^{-1} - e}{\pi}.$$

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.

【解析】 由
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{2x^2 + x - 1 - y^2}{x^3} = 0 \\ f'_y(x, y) = \frac{y}{x^2} = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -1 \text{ 或 } x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 又}$$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = \frac{-2x^2 - 2x + 3 + 3y^2}{x^4} \\ f''_{xy} = -\frac{2y}{x^3} \\ f''_{yy} = \frac{1}{x^2} \end{cases},$$

在驻点 $(-1, 0)$ 处, $A = 3, AC - B^2 = 3$, 故 $f(x, y)$ 在 $(-1, 0)$ 处取极小值 2;

在驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 处, $A = 24, AC - B^2 = 96$, 故 $f(x, y)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 处取极小值 $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

(19) (本题满分 12 分)

设有界区域 D 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分, 计算二重积分 $\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy$.

【解析】 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 e^{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2} \cdot (r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta) \cdot r dr$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 e^{r^2(\cos\theta + \sin\theta)^2} \cdot r^2 dr^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 u e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} du$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^1 u e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} du &= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} \int_0^1 u (\cos\theta + \sin\theta)^2 e^{u(\cos\theta + \sin\theta)^2} du (\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ &= \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} \int_0^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} t e^t dt \\ &= \frac{e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2}}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} - \frac{e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} - 1}{(\cos\theta + \sin\theta)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则原式} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^3} [e^{(\cos\theta + \sin\theta)^2} - 1] d\theta \\ &\stackrel{u = \cos\theta + \sin\theta}{=} \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u} e^{u^2} du - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{u^2} - 1}{u^3} du \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u} e^{u^2} du = \int_1^{\sqrt{2}} u^{-2} d\left(\frac{1}{2} e^{u^2}\right) = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} e + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{u^2}}{u^3} du,$$

$$\text{故原式} = \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{4} e + \frac{1}{8}.$$

(20) (本题满分 12 分)

设 n 为正整数, $y = y_n(x)$ 是微分方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 满足条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(I) 求 $y_n(x)$;

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【解析】 (I) 由 $y' - \frac{n+1}{x}y = 0$, 得 $y = Ce^{\int \frac{n+1}{x} dx} = Cx^{n+1}$, 将 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 代入可得 $C = \frac{1}{n(n+1)}$, 故 $y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

$$(II) \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \text{ 显然收敛半径为 } 1, \text{ 收敛区间为 } (-1, 1),$$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 收敛; 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 故收敛域为

$[-1, 1]$,

$$\text{令 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = (1-x)\ln(1-x) + x, x \in (-1, 1),$$

又因为 $S(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 所以 $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1$

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

(21) (本题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{bmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似与对角矩阵, 求 a, b 的值, 并求

可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda-b \end{vmatrix} = (\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0,$

当 $b = 3$ 时, 即 $\lambda = 3$ 为二重特征值, 此时 A 可相似对角化需满足 $\lambda = 3$ 对应两个线性无

关的特征向量, 即 $r(3E - A) = 1, 3E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{bmatrix}, a = -1,$

此时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 对应的线性无关特征向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$;

$$\lambda_3 = 1, E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 对应特征向量为 } \alpha_3 = (-1, 1, 1)^T,$$

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

当 $b = 1$ 时, 即 $\lambda = 1$ 为二重特征值, 类似以上求法, 可得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 所对应特征向量为 } \beta_1 = (-1, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\lambda_3 = 3 \text{ 所对应特征向量为 } \beta_3 = (1, 1, 1)^T,$$

$$\text{令 } \mathbf{P} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

(22) (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(I) 求 X 的概率密度;

(II) 求 Z 的概率密度;

(III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【解析】 (I) $X + Y = 2, X < Y$, 由题意可得, $X \sim U(0, 1)$, 则 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

(II) 由题意可得 $Y = 2 - X$, 于是 $Z = \frac{2 - X}{X}$, 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2 - X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\};$$

当 $z < 1$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $z \geq 1$ 时,

$$F_Z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1},$$

所以 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = (F_Z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

$$(III) \quad E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = 2 \ln 2 - 1.$$