一、填空题

1. 利用数值积分逼近 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(t,u)$ 的差分方程为 $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1}))\geq$，局部截断误差的阶为 $O(h^3)$.

2. 逼近方程 $-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+x^3\cdot u=\ln x$ 的中心差分格式为 $-\frac{1}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+x_i^3\cdot u_i=ln\,x_i$的_.

3. 逼近方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $-ru_{j+1}^{n+1}+(1+2r)u_j^{n+1}-ru_{j-1}^{n+1}=u_j^n$ Richardson 差分格式的收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

4. $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的差分格式的增长矩阵 $C(\tau)$ 为 $C=[(1+2r)I-rS]^{-1}$.（用单位矩阵 I 和对称矩阵 S 的关系式表示）

5. 逼近方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的差分格式的蛙跳格式稳定条件为 $\left|\frac{a\tau}{h}\right|\leq 1$.

6. 微分方程 $u_{xx}-8u_{xy}+5u_{yy}+u_x=0$ 特征方程为 $(dy)^2+8dxdy+5(dx)^2=0$，该微分方程类型为 椭圆 （椭圆、抛物、双曲）型二阶线性偏微分方程.

7. 一阶线性偏微分方程 $5u_t-7u_x=2$ 的特征线方程为 $\frac{dx}{dt}=-\frac{7}{5}$.

8. 矩阵族 $\left\{G^n(x_p,\tau);0<x_1<\cdots<x_J=l,0<\tau\leq\tau_0,0<n\tau\leq T\right\}$ 一致有界的充要条件是 矩阵族 $\left\{G^n(x_p,0);0<x_1<\cdots<x_J=l\right\}$ 一致有界.

1. **计算题** 求如下初边值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \ 0<x<+\infty,t>0,\\ u(x,0)=\ln x,\ \ u(0,t)=1.\end{cases}$$

2. **证明题** 利用 Fourier 方法给出逼近方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的差分格式

$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-r)u_j^n$ (其中网比 $r = \frac{a\tau}{h}$)稳定性条件.

3. **计 算 题** 求 逼 近 方 程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的 差 分 格 式 $u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = 2r(u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n)$ (其中网比 $r = \frac{a\tau}{h^2}$)的截断误差.

4 **计 算 题** 用 有 限 体 积 法 导 出 逼 近 椭 圆 型 方 程

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, (x,y) \in G \\ u\big|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$ 的差分格式.

5. **建立差分格式的三个主要步骤.**

6. **利用 Taylor 公式给出具有二阶导数的函数$f(x)$ 的二阶中心差分格式**

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

7. **对于边值问题**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$$

$$u\big|_{x=0} = 1, u\big|_{x=1} = 0, u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 1 - x,$$

(1) 给出该问题五点差分格式和误差阶,

(2) 取$h = 1/3$, 写出该格式对应方程组的矩阵形式. (本题 20 分)

8. **设有抛物线方程组**$\begin{cases} u_t = -av_{xx} \\ v_t = au_{xx} \end{cases}$**的初值问题的差分格式**

$$\begin{cases} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = -a\frac{1}{h^2}(v_{j-1}^k - 2v_j^k + v_{j+1}^k) \\ \frac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\tau} = a\frac{1}{h^2}(u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}) \end{cases}$$, **写出 Fourier 分析法讨论稳定性时的增长矩阵.** (本题 20 分)

9. **讨论逼近**$\frac{\partial u}{\partial t} = iw\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, i = \sqrt{-1}, w \in R$ **的显格式**

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = iw\frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{\tau}$$ **的稳定性.**

10. 设有抛物线方程组$\begin{cases} u_t = -a v_{xx} \\ v_t = a u_{xx} \end{cases}$的初值问题的差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = -a \dfrac{1}{h^2}(v_{j-1}^k - 2v_j^k + v_{j+1}^k) \\ \dfrac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\tau} = a \dfrac{1}{h^2}(u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}) \end{cases}$$，写出Fourier 分析法讨论稳定性时的增长矩阵.

11. 讨论$\dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = c,\ a,c$是常数，其格式

$$(1+ar)u_{j+1}^{k+1} + (1-ar)u_j^{k+1} - (1-ar)u_{j+1}^k - (1+ar)u_j^k - 2\tau c = 0,\ r = \tau / h,$$

的稳定性

12 对下列问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x, \in (0,1), t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 0,\ \ 0 \le x \le 1,\ u(0,t) = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,\quad t > 0,$$用误差为$O(h^2)$的方法将右边界条件离散化.）

13 求下列方程的特征线并判断其类型：

$u_t + a u_{xx} = 0,\ (a$为常数$)$；$u_t = a^2 u_{xx},\ (a > 0$为常数$)$；$u_{xx} + u_{yy} = 0.$

14 写出方程$\dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ (x \in R, t > 0)$ 的差分格式(两层显示格式)， 并把差分方程写成便于计算的迭代格式 $\lambda = \tau/h$为网格比.（本题 15 分）.

15 差分格式的稳定性和收敛性定义