

# Лабораторная работа

Целинко Александр, группа 677

22 мая 2019 г.

## Численное решение уравнений в частных производных эллиптического типа на примере уравнений Лапласа и Пуассона

В задании требуется решить уравнение Пуассона в квадрате с разбиением сеткой  $h_x = h_y = h = \frac{1}{20}$ . Для этого запишем схему для аппроксимации. Пусть  $W_x = a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $W_y = a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} = f \quad \Rightarrow \quad -\frac{(W_x)_{m+1}^n - (W_x)_m^n}{h} - \frac{(W_y)_m^{n+1} - (W_y)_m^n}{h} = f_m^n$$

$$(W_x)_m^n = a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}; \quad (W_y)_m^n = a_m^n \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h}$$

$$\Rightarrow -a_{m+1}^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h^2} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h^2} - a_m^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h^2} + a_m^n \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{h^2} = f_m^n$$

$$(a_{m+1}^n + 2a_m^n + a_m^{n+1})u_m^n - a_{m+1}^n u_{m+1}^n - a_m^n u_{m-1}^n - a_m^{n+1} u_m^{n+1} - a_m^n u_m^{n-1} = f_m^n h^2$$

Последнее уравнение является СЛАУ при  $n, m = \overline{1..20}$ . То есть, имеем систему вида  $Mu = s$ , которая может быть решена относительно  $u$  методом сопряженных градиентов.

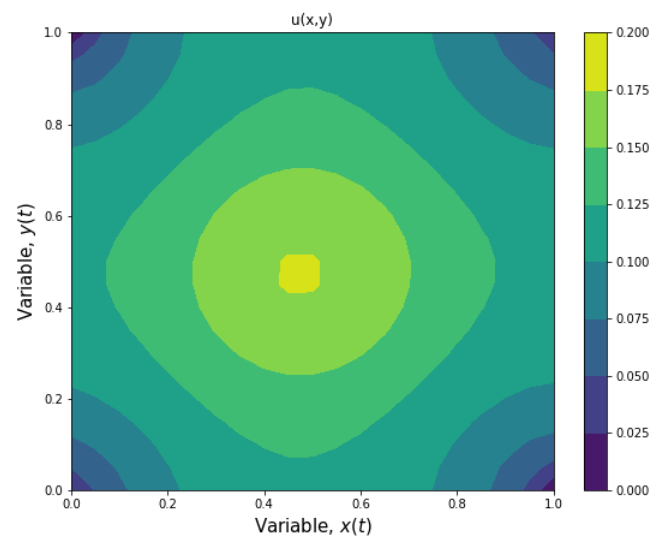


Рис. 1: Решение уравнения

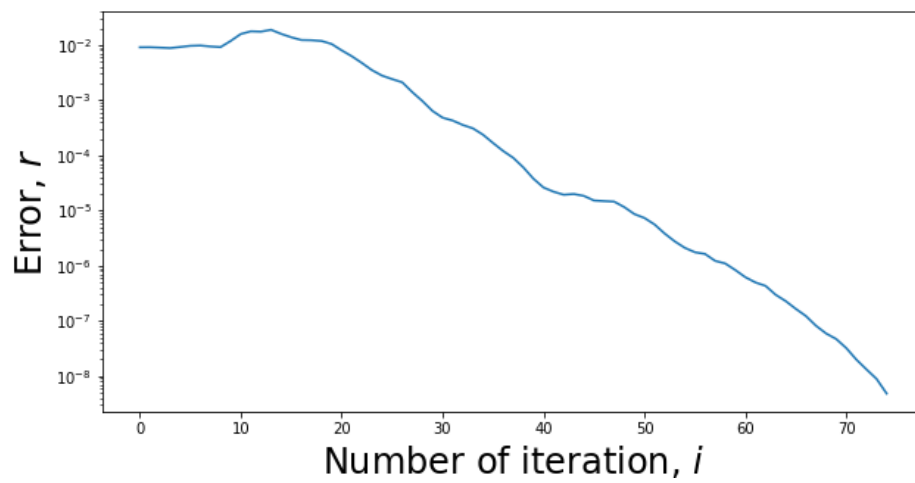


Рис. 2: График сходимости