Les Matrices (Partie 4)

Maths Avancé

Transformations

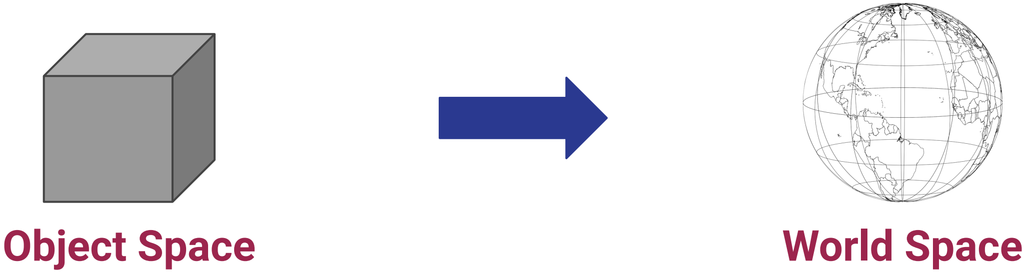
Représentation matricielle d'un vecteur

Il est possible de représenter un vecteur sous une forme matricielle.
Par exemple le vecteur V(0,-2,3) peut également être écrit de la façon suivante :

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Transformation Linéaire

Dans un moteur 3D, il arrive très souvent d'avoir besoin de changer un ou plusieurs points d'un repère vers un autre pour dessiner un objet, par exemple pour passer de coordonnées d'un modèle 3D vers des coordonnées monde.



Transformation Linéaire

À partir de deux systèmes de coordonnées 3D linéaires **C** et **C'**. Il est possible de représenter un point **P** du système C(x,y,z) par rapport C'(x', y', z') à l'aide de calculs matriciels.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U1 & V1 & W1 \\ U2 & V2 & W2 \\ U3 & V3 & W3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{bmatrix}$$

T représente la translation entre l'origine de **C** et l'origine de **C'**.
U, **V** et **W** représentent le changement d'orientation entre **C** et **C'**.

Transformation Linéaire Inversée

Si la transformation est inversible, il est possible également de représenter C en fonction de C'.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U1 & V1 & W1 \\ U2 & V2 & W2 \\ U3 & V3 & W3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{bmatrix} \right)$$

Matrices orthogonales

Une matrice inversible est dite orthogonale lorsque sa transposée correspond à la matrice inversée :

$$M^T = M^{-1}$$

Matrices orthogonales : Propriétés

Les matrices orthogonales permettent de préserver les angles et la taille. C'est un très bon outil pour appliquer des transformations sur un point.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

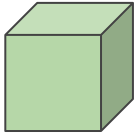
Exemple de matrice orthogonale appliquant une réflexion sur l'axe z dans le plan xy.

Matrices de changement d’échelle

Il est possible d’appliquer une matrice de changement d’échelle sur un point.

$$P' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix}$$

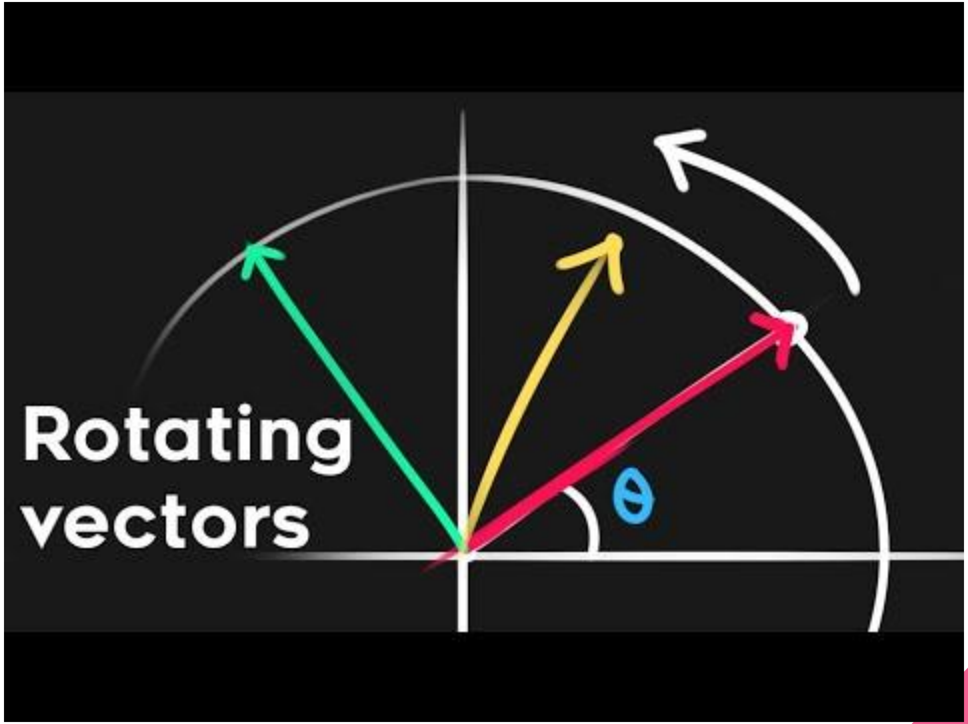
Changement d’échelle uniforme.



$$P' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix}$$

Changement d’échelle non-uniforme.

Matrices de rotation



Matrices de rotation

Il est également possible d'appliquer des matrices de rotation sur un point.

$$P' = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} P$$

Matrices de rotation

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe X

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Y

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z

Transformation à 4 dimensions.

Il est possible de représenter une transformation à 4 dimensions comportant **changement d'échelle**, **rotations** et **translation**.

$$F = \left[\begin{array}{ccc|c} M_{11} & M_{12} & M_{13} & T_x \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & T_y \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & T_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Transformation à 4 dimensions

Il est également possible de représenter l'inverse de la transformation précédente.

$$F = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & M_{12}^{-1} & M_{13}^{-1} & | & -(M^{-1}T)_x \\ M_{21}^{-1} & M_{22}^{-1} & M_{23}^{-1} & | & -(M^{-1}T)_y \\ M_{31}^{-1} & M_{32}^{-1} & M_{33}^{-1} & | & -(M^{-1}T)_z \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

Avec ce nouveau système de transformations. Nous obtenons des coordonnées et des vecteurs à 4 dimensions.

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \boxed{w} \end{bmatrix} \; ?$$


GDC
GDC

Exercice : Tests Unitaires

Ecrire le(s) classe(s) nécessaire(s) pour faire passer les tests unitaires situées dans le dossier ci-dessous (jusqu'à **Tests22_TransformChangeWorldPosition**)

[Matrices Tests Unitaires]