Les Matrices (Partie 3)

Maths Avancé

Matrices inversibles

Matrices inversibles

Une matrice carrée A de taille **n** x **n** est dite **inversible** ou **régulière** s’il existe une matrice B de même taille telle que :

$$AB = BA = I$$

On note également cette matrice B : A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Matrices inversibles

Toutes les matrices **ne sont pas inversibles**. Les matrices non inversibles sont dites **singulières**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple de matrice singulière.

Matrices inversibles : quelques théorèmes

- Une matrice est inversible si et seulement si sa matrice transposée est également inversible.
- Si F et G sont des matrices inversibles :
  Alors le produit FxG est inversible et $(FG)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$

Calculer une matrice inversible

Il est possible d’obtenir l’inverse d’une matrice à l’aide de l’algorithme de réduction. On appelle cette technique **L’élimination de Gauss-Jordan**.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer une matrice inversible

Créer une matrice augmentée avec la matrice M et une matrice identité de même taille.

$$\left[\;\underbrace{\begin{matrix}2 & 3 & 8\\ 6 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 2\end{matrix}}_{M}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I}\;\right]$$

Calculer une matrice inversible

Appliquer l'algorithme de réduction.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{15} & \frac{4}{45} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{-2}{15} \end{array}\right]$$

$$M^{-1}$$

Calculer une matrice inversible

Attention : Si pendant l'algorithme vous ne rencontrez pas d'élément non nul lors de l'étape C . Alors la matrice n'est pas inversible.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{l} j=1 \\ \downarrow \end{array} \\
k=? & i=1 \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}$$

Déterminant

Déterminant : Représentation

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 17 & 0 & 1 \\ 23 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det M = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 17 & 0 & 1 \\ 23 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Déterminant : Découpage Matrice

Une matrice peut-être découpée en une ou plusieurs sous matrices.

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 17 & 0 & 1 \\ 23 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{[2,3]} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & \cancel{9} \\ \cancel{17} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 23 & 4 & \cancel{1} \end{bmatrix} \Rightarrow M^{[2,3]} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$$

Déterminant : Cofacteur

A partir d’une **matrice**, d’une **ligne** et d’une **colonne**, il est possible de déterminer un **cofacteur**.

$$C_{ij}(M) = (-1)^{i+j} det M^{[i,j]}$$

$$M^{[2,3]} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 17 & 0 & 1 \\ 23 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_{23}(M) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 23 & 4 \end{vmatrix}$$

Déterminant : Cofacteur Signe

Le signe du cofacteur change à chaque fois que l’on passe à la ligne ou à la colonne suivante.

$$C_{ij}(M) = (-1)^{i+j} det M^{[i,j]} \Rightarrow \begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots \\ - & + & - & \cdots & \cdots \\ + & \cdots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}.$$

Calcul du déterminant : Matrice 2x2

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Calcul du déterminant : Matrice 3x3

$$det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Calcul déterminant

Soit **M** une matrice de taille **n** x **n**
et **1 ≤ k ≤ n.**

$$det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ik} C_{ik}(M)$$

ou

$$det M = \sum_{j=1}^{n} M_{kj} C_{kj}(M)$$

Determinant nul

Lorsque le déterminant est nul (= 0). La matrice correspondante **n’est pas inversible**.

Calcul Matrice inversée avec le déterminant

Pour une Matrice de taille 2 x 2

$$M^{-1} = \frac{1}{det M} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix}$$

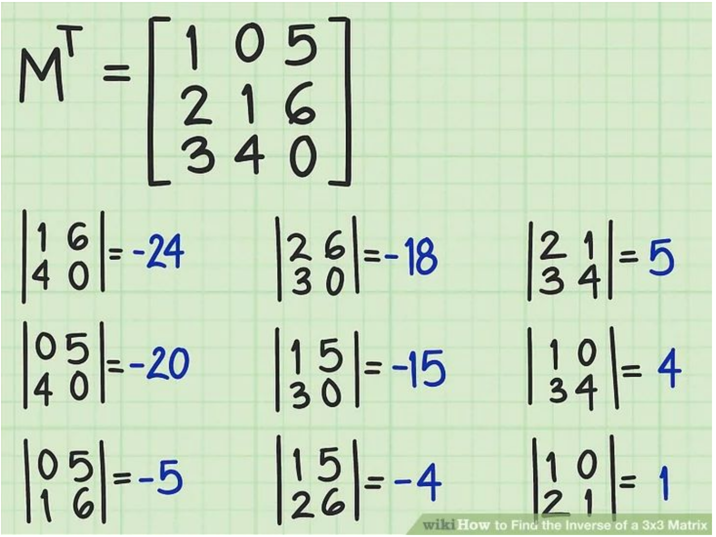
Calcul Matrice inversée avec le déterminant

Pour une Matrice de taille 3 x 3

$$M^{-1} = \frac{1}{det M} \begin{bmatrix} M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32} & M_{13}M_{32} - M_{12}M_{33} & M_{12}M_{23} - M_{13}M_{22} \\ M_{23}M_{31} - M_{21}M_{33} & M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31} & M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23} \\ M_{21}M_{32} - M_{22}M_{31} & M_{12}M_{31} - M_{11}M_{32} & M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \end{bmatrix}$$

Calcul Matrice inversée avec le déterminant

Pour une Matrice de taille 3 x 3



https://www.wikihow.com/Find-the-Inverse-of-a-3x3-Matrix

Exercices

Exercice 2 : Sous Matrice

À partir de la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ecrire :

a) $M^{[1,1]}$ b) $M^{[2,1]}$ c) $M^{[3,2]}$ d) $M^{[1,3]}$

Exercice 3 : Déterminants

À l'aide des déterminants calculer l'inverse de la matrices de l'**Exercice 1**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 : Tests Unitaires

Ecrire le(s) classe(s) nécessaire(s) pour faire passer les tests unitaires situées dans le dossier ci-dessous (jusqu'à **Tests15_InvertMatricesUsingDeterminant**)

[Matrices Tests Unitaires]()