Les Matrices

(Partie 2)

Equations et Systèmes Linéaires

Equations Linéaires : Introduction

Les matrices sont un outil très pratique pour résoudre des équations linéaires.
Par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = -13 \\ 4x - 3y + 6z = 7 \\ x - z = -5 \end{cases}$$

Peut-être représenté sous la forme de matrices :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Equations Linéaires : Introduction

$$\boxed{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} -13 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}}$$

Matrice de transformation

Matrice colonne 1

Matrice colonne 2

Matrice augmentée

On peut construire une **matrice augmentée** à partir de la matrice de transformation et de la matrice colonne située à droite du signe =.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -13 \\ 4 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Matrice de transformation

Matrice colonne 2

Opérations élémentaires

Une opération élémentaire est une manipulation algébrique qui ne modifient pas les propriétés d'indépendance linéaire.

Il existe trois opérations élémentaires que l'on peut faire sur les lignes d'une matrice :

- Échanger deux lignes (ou deux colonnes).
- Multiplier les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par un nombre réel (différent de 0).
- Additionner deux lignes (ou deux colonnes).

Opérations élémentaires

Échanger deux lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Opérations élémentaires

Multiplier les éléments d'une ligne par un nombre réel (différent de 0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \times 3 & 2 \times 3 & 3 \times 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplication de L1 x 3

Opérations élémentaires

Additionner deux lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{4+1} & \color{red}{5+2} & \color{red}{6+3} \end{bmatrix}$$

L2 = L2 + L1

Forme échelonnée réduite (FER)

Une matrice est sous forme échelonnée réduite si elle satisfait les conditions suivantes :

- A chaque ligne, l’élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.
- Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures
- Chaque ligne ne contenant que des éléments nuls se retrouve au bas de la matrice.

Forme échelonnée réduite (FER)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forme réduite valide

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forme réduite invalide

Algorithme de réduction

Nous allons appliquer un algorithme afin de convertir la partie à gauche de la matrice augmentée sous sa forme réduite à l'aide d'opérations élémentaires.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -13 \\ 4 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Algorithme de réduction : Exemple

On se place sur la première ligne et la première colonne.

$$\begin{array}{rl} & \;\begin{matrix} j=1 \\ \downarrow \end{matrix} \\ i=1 \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -13 \\ 4 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

A partir de la ligne i : on trouve sur la colonne j la valeur la plus grande et non nulle.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{llll} j=1 & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \\ k=2 \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -13 \\ \boxed{4} & -3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

La ligne k trouvé est différente de i. On inverse les deux lignes.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} j=1 & & & \end{array} \\ \begin{array}{r} i=1 \\ k=2 \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & -13 \\ 4 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

La ligne k trouvé est différente de i. On inverse les deux lignes.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{l} \;j=1 \\ \;\;\downarrow \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\ k=2 \rightarrow \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Algorithme de réduction : Exemple

On multiplie Li par 1/M(ij). On multiplie donc L1 par 1/4.

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{l} \;\; j=1 \\ \;\;\;\;\downarrow \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\ 3 & 2 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On multiplie Li par 1/M(ij). On multiplie donc L1 par 1/4.

$$
\begin{array}{cc}
 & j=1 \\
i=1 \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\
3 & 2 & -3 & -13 \\
1 & 0 & -1 & -5
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -3xLi à L2.

$$\begin{array}{rl}
 & \quad j=1 \\
 & \quad\ \downarrow \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\[1.5em] r=2 \rightarrow \\[1.5em] \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\
\boxed{3-3\times 1} & \boxed{2-3\times\frac{-3}{4}} & \boxed{-3-3\times\frac{6}{4}} & \boxed{-13-3\times\frac{7}{4}} \\
1 & 0 & -1 & -5
\end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -3xLi à L2.

$$
\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{l} j=1 \\ \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\[2ex] r=2 \rightarrow \\[2ex] \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\
0 & \frac{17}{4} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\
1 & 0 & -1 & -5
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -1xLi à L3.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} j=1 & & & \\ \downarrow & & & \end{array} \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\ \\ r=3 \rightarrow \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\
0 & \frac{17}{4} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\
\boxed{1-1\times 1} & \boxed{0-1\times \frac{-3}{4}} & \boxed{-1-1\times \frac{6}{4}} & \boxed{-5-1\times \frac{7}{4}}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -1xLi à L3.

$$\begin{array}{rl}
 & \quad j=1 \\
 & \quad \downarrow \\
\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\ \\ \\ \\ r=3 \rightarrow \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4} \end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On passe à la ligne suivante.

$$\begin{array}{rl} & \quad j=1 \\ & \quad\ \downarrow \\ \begin{matrix} \\ i=2 \rightarrow \\ \\ \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4} \end{array}\right] \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On passe à la colonne suivante.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j=2 & \phantom{\frac{3}{2}} & \phantom{\frac{7}{4}} \\ & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ i=2 \rightarrow \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\
0 & \frac{17}{4} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\
0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

A partir de la ligne i : on trouve sur la colonne j la valeur la plus grande et non nulle.

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} & j=2 & \phantom{\frac{3}{2}} & \phantom{\frac{7}{4}} \\ & \downarrow & & \end{array} & \\
i=2 \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & \boxed{\frac{17}{4}} & \frac{-15}{2} & \frac{-73}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4} \end{array}\right] & \leftarrow k=2
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

k = i. Pas besoin d'inverser de lignes.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} j=2 \\ \downarrow \end{array} & \\
\begin{array}{c} \\ i=2 \rightarrow \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & | \quad \frac{7}{4} \\
0 & \boxed{\frac{17}{4}} & \frac{-15}{2} & | \quad \frac{-73}{4} \\
0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & | \quad \frac{-27}{4}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \leftarrow k=2 \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On multiplie la ligne i par 1/M(ij). On multiplie donc L2 par 4/17.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j=2 & \phantom{-\frac{30}{17}} & \phantom{-\frac{73}{17}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ i=2 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\
0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\
0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute 3/4xLi à L1.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j=2 & \phantom{\frac{-30}{17}} & \phantom{\frac{-73}{17}} \\ & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{c} r=1 \rightarrow \\[2ex] i=2 \rightarrow \\[2ex] \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\[1ex]
0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\[1ex]
0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{-27}{4}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -3/4xLi à L3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & j=2 & & & \\ & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i=2 \rightarrow \\ r=3 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{17} & | & \frac{-25}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & | & \frac{-73}{17} \\ 0 & 0 & \frac{-20}{17} & | & \frac{-60}{17} \end{bmatrix} \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On passe à la ligne suivante.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j=2 & \phantom{\frac{-30}{17}} & \phantom{\frac{-73}{17}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i=3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\ 0 & 0 & \frac{-20}{17} & \frac{-60}{17} \end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On passe à la colonne suivante.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j=3 & & \end{array} \\ & \\ i=3 \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\ 0 & 0 & \frac{-20}{17} & \frac{-60}{17} \end{array}\right] \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

A partir de la ligne i : on trouve sur la colonne j la valeur la plus grande et non nulle.

$$\begin{array}{r c l}
 & \begin{array}{cccc} & & j=3 & \phantom{\frac{-25}{17}} \end{array} & \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{-20}{17}} & \frac{-60}{17} \end{array}\right] & \\
i=3 & & k=3
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

k = i. Pas besoin d'inverser de lignes.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} & & j=3 & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\
\begin{array}{r} \\[2em] \\[2em] i=3 \rightarrow \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\[1em] 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\[1em] 0 & 0 & \boxed{\frac{-20}{17}} & \frac{-60}{17} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\[2em] \\[2em] \leftarrow k=3 \end{array}
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On multiplie la ligne i par 1/M(ij). On multiplie donc L3 par -17/20.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & & j=3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i=3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{17} & \frac{-25}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{3} \end{array}\right]
\end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute -3/17xLi à L1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j=3 & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ r=1 \rightarrow & \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-30}{17} & \frac{-73}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \\ i=3 \rightarrow & \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

On ajoute 30/17xLi à L2.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & j=3 & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{array}{c} r=1 \rightarrow \\ \\ i=3 \rightarrow \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & | & -2 \\
\color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & | & \color{red}{1} \\
0 & 0 & 1 & | & 3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Algorithme de réduction : Exemple

On passe à la ligne suivante.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & j=3 & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$i=?$

Algorithme de réduction : Exemple

Dernière colonne pour la matrice de transformation. L’algorithme est terminé.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j=? & \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \\ i=? & \end{array}$$

Algorithme de réduction : Exemple

Nous avons donc pu résoudre l'équation linéaire en réduisant la matrice de transformation.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Algorithme de réduction : Déroulé

A. $i = 1$ (se placer sur la première ligne de la matrice).

B. $j = 1$ (se placer sur la première colonne de la matrice).

C. Trouver la ligne k où $k >= i$ et $M(kj)$ est la plus grande valeur.

   Si toutes les valeurs sont nulles, passer directement à l'étape H.

D. Si $k!=i$ échanger les lignes k et i.

E. Multiplier la ligne i par $1/M(ij)$.

F. Pour chaque ligne r où $i!=k$. Ajouter $-M(rj)xL(i)$ à $L(r)$.

G. Incrémenter i

H. Incrémenter j. Retourner à l'étape C s'il reste des colonnes à traiter.

Systèmes homogènes

Un système est dit homogène lorsque la partie à droite ne contient que des zéros.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Système Homogène

Exercices

Exercice 1 : Systèmes linéaires

Résoudre le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Tests Unitaires

Ecrire le(s) classe(s) nécessaire(s) pour faire passer les tests unitaires situées dans le dossier ci-dessous (jusqu'à **Tests10_RowReduction** inclus)

Matrices Tests Unitaires