Nombres Complexes
Quaternions

Maths Avancé

Nombres complexes

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ Entiers Naturels

$\mathbb{Z}$ Entiers Relatifs

$\mathbb{R}$ Nombre réels

Nombre imaginaire

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$\cancel{\mathbb{R}}$$

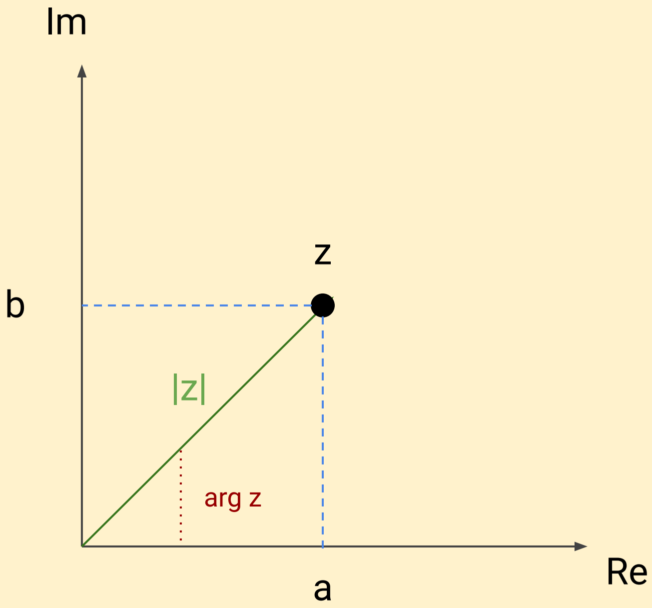
Nombres complexes : Définition

$$z = a + bi$$

$$\mathbb{C}$$

Si a = 0 alors z est un nombre imaginaire pur.

Nombres Complexes : Représentation visuelle



Forme Trigonométrique
(si z est non nul)

$$z = |z| \times (cos\alpha + isin\alpha)$$

$$\alpha = argz$$

$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{a}{|z|} \\ sin\alpha = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Nombres complexes : addition

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Nombres complexes multiplication

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2$$

$$i^2 = -1$$

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci-bd$$

$$(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$$

Nombres complexes : Conjugaison

$$z = a + bi$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{z} = a - bi$$

Nombres complexes : Module

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$|z| = \sqrt{(a+bi)(a-bi)}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 - b^2 i^2} \qquad i^2 = -1$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Les Quaternions

Quaternions : Définition

Un quaternion est ce qu'on appelle un nombre **hypercomplexe** qui contient **1 partie réelle** et **3 parties imaginaires**.

$$q(w, x, y, z) = \underbrace{\boxed{w}}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{\boxed{xi + yj + zk}}_{\text{Parties imaginaires}}$$

Quaternions : Propriétés

Un quaternion respecte un certain nombre de propriétés vis à vis de ces parties imaginaires :

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{cases}$$

Quaternions : Autre forme

Il est également possible de représenter un quaternion sous une autre forme.

$$q(w, x, y, z) = \boxed{w} + \boxed{x}i + \boxed{y}j + \boxed{z}k$$

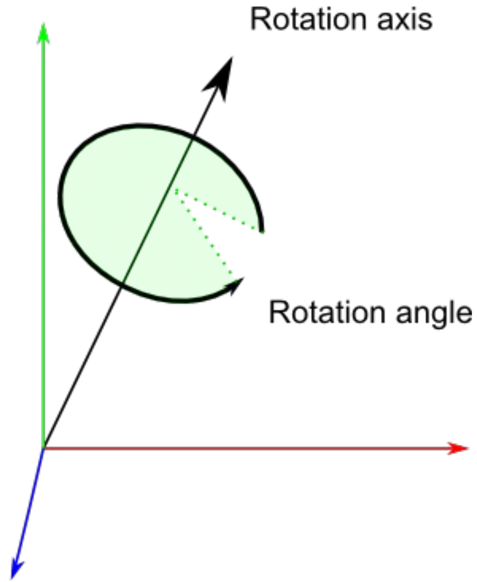
$$q = \boxed{s} + \boxed{v}$$

Partie Vectorielle

Partie scalaire

Quaternion Unitaire : À partir d'un angle

Il est possible de représenter un **quaternion unitaire** (de taille 1) à partir **d'un angle θ** et d'un **vecteur unitaire A**.



$$q = cos(\frac{\theta}{2}) + Asin(\frac{\theta}{2})$$

$$\Updownarrow$$

$$q = cos(\frac{\theta}{2}) + \begin{pmatrix} A.x * sin(\theta/2) \\ A.y * sin(\theta/2) \\ A.z * sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Quaternions : Multiplication

Attention : La multiplication de quaternions n’est pas commutative.

$$q_1(w_1, x_1, y_1, z_1) \quad q_2(w_2, x_2, y_2, z_2)$$

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = & (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) \\ & + (w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) i \\ & + (w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2) j \\ & + (w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2) k \end{aligned}$$

Quaternions : Conjugaison

Tout comme il existe une conjugaison pour les nombres complexes, il existe une conjugaison pour les quaternions :

$$q(w, x, y, z) = w + xi + yj + zk$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{q} = w - xi - yj - zk$$

Quaternions : Taille

Et tout comme il existe un module pour les nombres complexes, il existe une taille pour les quaternions :

$$||q|| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

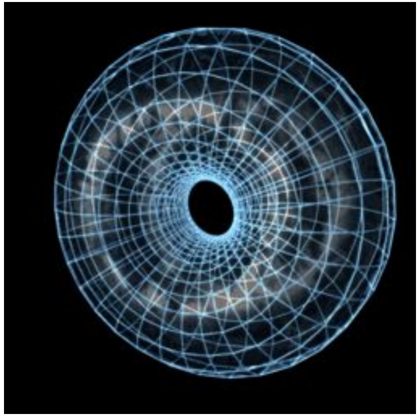
Quaternions : Inverse

L'inverse d'un quaternion est défini par :

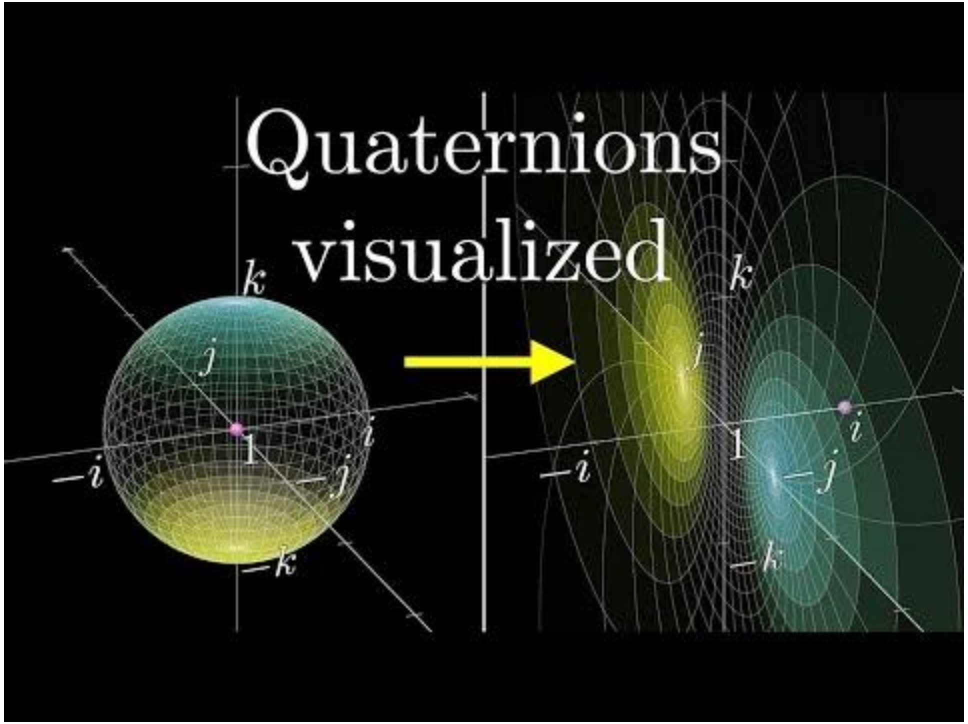
$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q^2}$$

Quaternions : Visualisation

Il est assez difficile de représenter réellement un quaternion car c’est un objet mathématiques à **4 dimensions**. On parle parfois d’une **hypersphere**.



Quaternions : Visualisation



Quaternions : Rotation d’un point

A partir d’un **quaternion unitaire**, il est possible d’appliquer une **rotation** sur un **point** avec la formule suivante.

$$\varphi_q(P) = qPq^{-1}$$

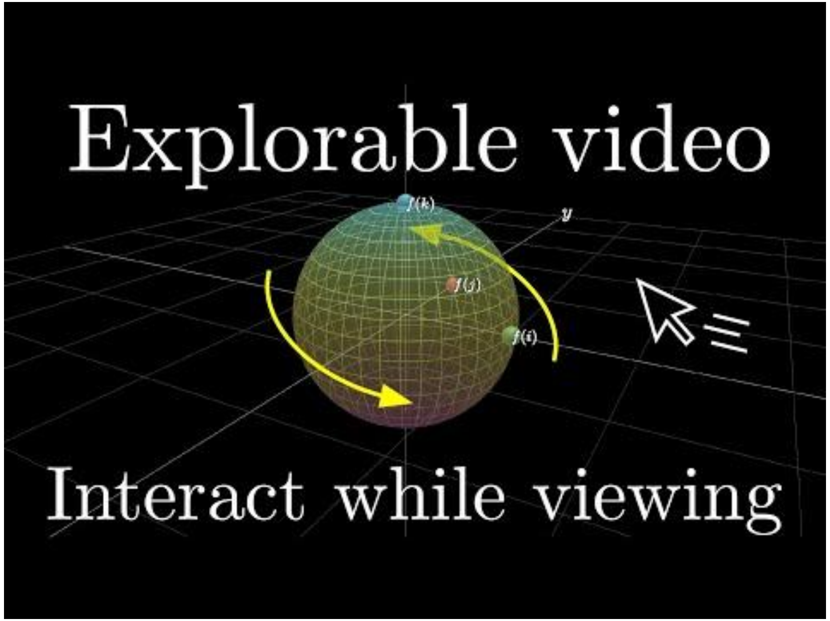
Quaternions : Matrice de rotation

Il est possible de représenter un quaternion sous forme de matrice 3x3 afin de construire et appliquer une matrice de rotation.

$$q = (w, x, y, z)$$

$$R_q = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

Quaternion : Visualisation



Visualizing quaternions

An explorable video series

Lessons by Grant Sanderson
Technology by Ben Eater

https://eater.net/quaternions

Exercices

Exercice 1 : Quaternions

Exprimer les quaternions suivants sous la forme :

$$q(w, x, y, z) = w + xi + yj + zk$$

a) ***Π***/2 autour de l'axe (1,0,0)

b) ***Π***/2 autour de l'axe (-1,0,0)

c) ***Π***/4 autour de l'axe (0,1,0)

d) ***Π***/3 autour de l'axe (0,3,4)

Exercice 2 : Tests Unitaires

Ecrire le(s) classe(s) nécessaire(s) pour faire passer les tests unitaires situées dans le dossier ci-dessous (jusqu'à **Tests28_QuaternionsEulerConversions**)

Matrices Tests Unitaires