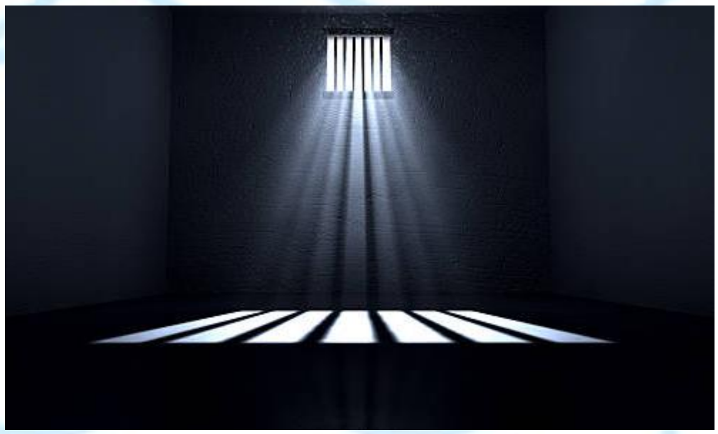
# LEY COSENO DE LAMBERT



Erick Barrios Barocio.
Óptica v.2025

La Irradiancia no solo depende de la distancia a la fuente, también depende de la forma angular en que la luz llega a la superficie de interés, es decir, desde que dirección. Esta dependencia es bastante notoria y juega un papel muy importante en la industria de celdas solares, en particular en su instalación y aprovechamiento de la irradiancia. Al colocarlas en cierta dirección mejora su rendimiento, además de que su eficiencia aumenta dependiendo de la hora del día.

## Contenido



# 1 DEFINICIONES RADIOMÉTRICAS

Las definiciones más importantes en radiometría son la Irradiancia y la Radiancia, siendo la última la más general. La *Irradiancia* ($I\ [W/m^2]$) se define como la densidad de flujo de radiación por unidad de área que incide, cruza o emerge de una superficie [1]:

$$I = \frac{d\Phi}{ds_0}, \tag{1}$$

donde $ds_0$ es un elemento de área en la superficie de estudio $A$ (Figura 1). En general, $I$ es una función de la posición sobre la superficie bajo estudio y de la dirección del flujo; sin embargo, si el flujo es homogéneo, la información de la posición se puede omitir y definir a $I$ en términos del flujo y área totales.

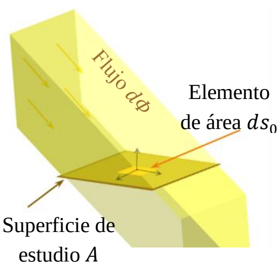



Figura 1. Irradiancia ($I$) en una superficie.

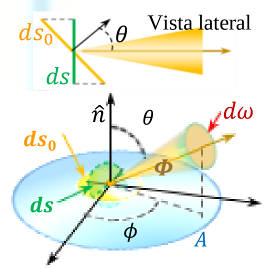



Figura 2. Radiancia en un elemento de área $ds_0$ en una dirección $(\theta, \phi)$.

La *Radiancia* ($L\ [W/(m^2 sr)]$) es la densidad de flujo por unidad de ángulo sólido y por unidad de área proyectada que incide, cruza o emerge en una dirección angular específica desde un elemento de área particular ($ds_0$) en una cierta superficie $A$ (Figura 2),

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega\ ds}, \tag{2}$$

en este caso $ds = ds_0 \cos\theta$ es la proyección del elemento de área $ds_0$ (que se encuentra sobre la superficie de estudio) en la dirección del ángulo sólido $d\omega$ en el cual queremos calcular la radiancia. Hay que notar que el área que define a $d\omega$ es $ds$, siendo $\theta$ el ángulo entre la dirección del ángulo sólido (dirección de propagación) y la normal de la superficie de estudio. Así, la radiancia es una función tanto de la posición en la superficie $(x, y)$, como de la dirección del ángulo sólido $(\theta, \phi)$ y, si se conoce su función específica, se puede encontrar $\Phi$ integrando:

$$\Phi = \int_A \int_\Omega L(x, y, \theta, \phi)\, cos\, \theta\ d\omega ds_0, \tag{3}$$

donde $\Omega$ es el ángulo sólido definido por el área de detección del instrumento de medición de flujo.

### 1.1 EMISOR LAMBERTIANO

La Radiancia es la cantidad más general, sin embargo, no es la más utilizada ya que es difícil de manejar de forma práctica. En consecuencia, la Irradiancia es la más socorrida para situaciones sencillas donde las áreas de la fuente y el receptor son lo más relevante.

Para poder trabajar con la irradiancia es indispensable conocer el flujo de energía, por lo que podemos comenzar de la ecuación (3) y realizar algunas aproximaciones. La primera es suponer que la fuente de luz tiene un área fija, que emite radiación de forma homogénea desde cualquier posición en su superficie y en todas direcciones (Figura 3), es decir, que tiene una radiancia constante ($L(x, y, \theta, \phi) = L_0$), lo cual es denominado *Difusor o Emisor Lambertiano*[1]. En la práctica es complicado implementar fuentes Lambertianas, sin embargo, se pueden aproximar iluminando superficies que difuminen y reemitan la luz (papel blanco común o papel albanene denso) y, de está reemisión, solamente tomando una región cerca del centro de incidencia.

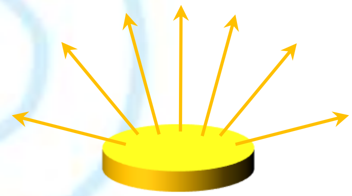


Figura 3. Flujo isotrópico que sale de un emisor o difusor Lambertiano. Toda la superficie se observa iluminada homogéneamente.

## 2 LEY COSENO DE LAMBERT

Para comprobar si una fuente se comporta como un difusor lambertiano, se configura una situación como en la Figura 4. Con ayuda de la ecuación (3), podemos calcular el flujo $\Phi$ que llega a un elemento diferencial de área $dv_D$ en la superficie $V$ de un radiómetro a partir de la radiancia emitida por una fuente Lambertiana de área $A$. Cada elemento de área del emisor ($ds_0$) radia como fuente puntual de forma homogénea hacia todas direcciones arriba del plano, pero solamente una parte de esta radiación llega al detector; dicha porción fluye a través del ángulo sólido $d\omega$ hacia el elemento de área $dv_D$. Utilizando la definición de ángulo sólido:

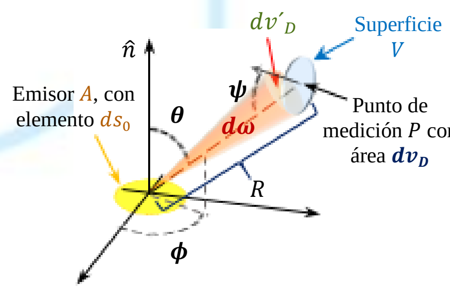



Figura 4. Geometría del problema.

$$d\omega = \frac{dv'_D}{R^2}(1[sr]) = \frac{dv_D \cos\psi}{R^2}(1[sr])$$

Por lo que en la ecuación (3):

$$\Phi = \int_A \int_V L_0 \frac{\cos\theta \cos\psi}{R^2}(1[sr]) dv_D ds_0 \,,$$

donde $A$ es el área de la fuente y $V$ la del detector. Derivando respecto del elemento diferencial de la superficie del radiómetro ($dv_D$), podemos encontrar la Irradiancia que llega a él:

$$\frac{d\Phi}{dv_D} = I_D = \int_A L_0 \frac{\cos\theta \cos\psi}{R^2}(1[sr]) ds_0$$

En este punto el objetivo es conocer cómo se comporta la irradiancia de una fuente (emisor) lambertiana, y para esto se pueden incluir condiciones y simplificaciones extra:

I. Sí colocamos el radiómetro ($V$) a una distancia fija, $R$ puede ser sacada de la integral junto con la radiancia.
II. En el sistema experimental, es de importancia que el radiómetro siempre apunte en la dirección de la fuente, es decir que $\psi = 0$ en la Figura 4.

Una vez aplicadas estas condiciones, la integral de irradiancia se simplifica de la siguiente manera:

$$I_D = \frac{L_0}{R^2}(1[sr]) \int_A \cos\theta \, ds_0$$

En esta expresión, podemos observar que el coseno dentro de la integral es solamente consecuencia de la proyección del área en dirección del detector, es decir, es el "área efectiva" que "observa" el radiómetro. Por ejemplo, si $\theta = 0°$ (la normal a la superficie de la fuente apunta al radiómetro) se "observa" el área completa; pero si $\theta = 60°$, se "observará" solamente la mitad del área total. Así, el término coseno, se puede sacar de la integral, dejando simplemente el área de la fuente lambertiana (la cual es constante):

$$I_D = \frac{L_0(1[sr])}{R^2} \cos\theta \, A \, , \tag{4}$$

Si hacemos un análisis de dimensiones, se encuentra que se tienen las unidades apropiadas a la irradiancia, por lo que todas las constantes se pueden agrupar en una sola denominada $I_0$.

$$I_D = I_0 \cos\theta \tag{5}$$

La cual es conocida como *Ley Coseno de Lambert*.

**"En un radiador lambertiano, la irradiancia desde su superficie cambia como el coseno del ángulo entre la dirección del flujo y la normal a la superficie".**

Experimentalmente esto se puede comprobar colocando la fuente que queramos analizar en una base rotatoria, mientras colocamos un radiómetro a una distancias fija apuntando hacia la fuente (Figura 5). Al girar la fuente, su normal hará un cierto ángulo $\theta$ respecto de la dirección al radiómetro; si medimos la irradiancia, y observamos que los datos siguen un comportamiento tipo coseno, se tratará de un radiador lambertiano.

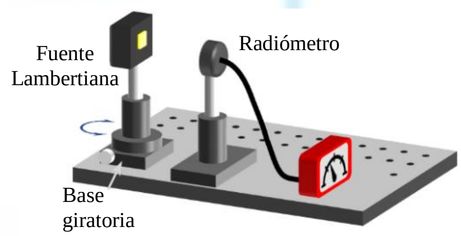


Figura 5. Montaje experimental para comprobar si una fuente sigue la ley coseno de Lambert.

## 2.1 DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA

Otra forma de abordar el problema de un radiador Lambertiano es de forma geométrica. Supongamos que tenemos una superficie rectangular (aunque puede tener cualquier forma) de área $A$, en la cual incide un haz colimado con área transversal $A_0$ también rectangular, ajustada al área de la superficie (Figura 6), que incide a un cierto ángulo $\theta$ respecto de la normal de la superficie y que tiene un flujo radiante uniforme $\Phi_0$.

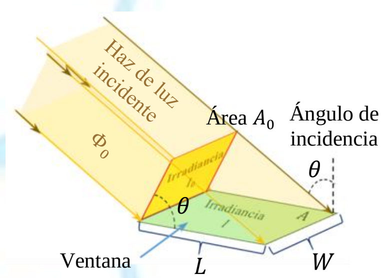


Figura 6. Haz de luz colimada incidiendo en un área a un cierto ángulo $\theta$.

Como se puede observar de la figura, se tiene la condición $A \geq A_0$, esto implica que el flujo $\Phi_0$ que contiene el haz se distribuirá en un área mayor que el área transversal del haz, por lo que el valor de la irradiancia en la superficie dependerá de la dirección de incidencia del haz. Como podemos observar en esta situación , el flujo de radiación es una constante, y según la definición de irradiancia aplicada a las dos áreas mostradas, tendremos la siguientes relaciones:

$$\Phi_0 = I_0 A_0 \quad y \quad \Phi_0 = IA$$

Donde $A_0$ es el área transversal del haz, $I_0$ la irradiancia en esa área, $A$ el área de la superficie e $I$ la irradiancia en la superficie. Así, por conservación del flujo:

$$I_0 A_0 = IA$$

Como $A_0 = A \cos\theta$, entonces se tiene la *Ley de Lambert*:

$$I = I_0\, cos\, \theta \tag{6}$$

## 3 REFERENCIAS.

[1] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, Leno S. Pedrotti. *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 2018, 3°ed.