

INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN



Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.
Óptica (v.2024)

La Interferencia y Difracción en aberturas de tamaño microscópico es la predicción más notable de la interpretación ondulatoria de la luz. De igual forma, nos permiten entender que la palabra “luz” no solo se limita al espectro visible, sino que abarca un espectro más amplio de longitudes de onda. Estos fenómenos de interferencia tienen un gran número de aplicaciones en el área de la metrología y el análisis de estructuras de tamaño nanométrico, y han permitido descubrimientos que van desde la estructura del ADN hasta las ondas gravitacionales, pasando por aplicaciones relacionadas a la creación de filtros de color.

Contenido

1	OBJETIVO.....	1
1.1	Material.....	1
2	INTERFERENCIA DE DOS ONDAS.	1
3	CONDICIONES PARA LA INTERFERENCIA.	3
3.1	Interferencia constructiva y destructiva.	3
3.2	Campos incoherentes.	4
3.3	Campos coherentes.	5
4	LA DOBLE RENDIJA DE YOUNG.	6
5	DIFRACCIÓN.	8
6	REFERENCIAS.....	11

1 OBJETIVO.

A partir de la medición de patrones de interferencia, caracterizar los tamaños de rendijas dobles y sencillas, así como encontrar longitud de onda de un láser.

1.1 MATERIAL.

Láseres. Rendijas sencillas. Rendijas dobles. Pantalla. Vernier.

2 INTERFERENCIA DE DOS ONDAS.

Consideremos dos ondas planas (\vec{E}_1 y \vec{E}_2) de la misma frecuencia, las cuales llegan a un punto P , donde se superponen (Figura 1a):

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(ks_1 - \omega t + \phi_1) \quad (1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(ks_2 - \omega t + \phi_2) \quad (2)$$

Donde $k = 2\pi/\lambda$, s_1 y s_2 son las distancias recorridas por cada onda, ϕ_1 y ϕ_2 son sus fases respecto de sus orígenes particulares al tiempo cero, y \vec{E}_{01} y \vec{E}_{02} son sus vectores de polarización y amplitud. En P , las ondas producen un campo neto

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (3)$$

En la práctica, los detectores de luz, incluidos nuestros ojos, miden la energía de un rayo de luz a través de la *irradiancia*, la cual es un promedio temporal del cuadrado del campo de la onda (indicado por los paréntesis ()); además, el tiempo total sobre el que se realiza dicho promedio excede, por mucho, el tiempo de un periodo de oscilación de la onda (el cual es del orden de $10^{-14}s$ a $10^{-15}s$). Así, la irradiancia de una onda electromagnética será ^[1]:

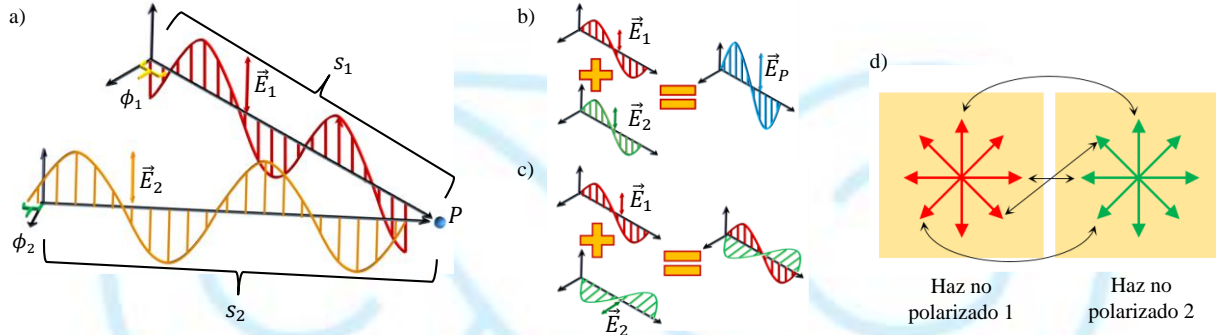


Figura 1. a) Dos ondas llegando y superponiéndose en un punto P . Cada onda tiene un desfase relativo en el punto P que depende de las fases iniciales y las distancias recorridas. b) Dos ondas con polarización paralela se superponen y producen interferencia. c) Dos ondas con polarización ortogonal, no producen interferencia. d) En el caso de luz no polarizada, cada componente de polarización de cada haz de luz, se superpone con la componente de polarización paralela del otro haz.

$$I = \epsilon_0 c \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle, \quad (4)$$

entonces, la irradiancia en el punto P , consecuencia de la superposición de las dos ondas, es:

$$I = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_P \cdot \vec{E}_P \rangle = \epsilon_0 c \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle$$

$$I = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (5)$$

Los primeros dos términos de esta ecuación corresponden a las irradiancias individuales de cada onda I_1 e I_2 ; mientras que el último término I_{12} (*término de interferencia*) es consecuencia de la superposición de las ondas:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

El término I_{12} es consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la luz, y produce incrementos o decrementos en la irradiancia cuando se superponen las dos ondas.

De la ecuación 5, es importante notar que, si las ondas son paralelas en su polarización, el producto punto es máximo y la interferencia tiene su mayor contribución (Figura 1b). Por otro lado, cuando las ondas tienen polarización ortogonal, el término de interferencia se anula, es decir, las ondas no se pueden superponer y por tanto no se produce interferencia (Figura 1c). Por otro lado, dos haces de luz no polarizada pueden producir interferencia debido a que cada componente de polarización en uno de los haces puede ser superpuesta con la correspondiente polarización de la descomposición del otro haz de luz (Figura 1d). Sin embargo, también se deben cumplir otras condiciones, las cuales serán explicadas más adelante.

Por lo pronto, consideremos ahora el término de interferencia

$$I_{12} = 2\epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (6)$$

El producto punto de los dos campos será:

$$2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 2(\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \cos(ks_1 - \omega t + \phi_1) \cos(ks_2 - \omega t + \phi_2)$$

Esta expresión puede ser simplificada haciendo $\alpha = ks_1 + \phi_1$, $\beta = ks_2 + \phi_2$ y utilizando la identidad trigonométrica $2 \cos(A) \cos(B) = \cos(A + B) + \cos(B - A)$, con lo que:

$$2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) [\langle \cos(\alpha + \beta - 2\omega t) \rangle + \langle \cos(\beta - \alpha) \rangle]$$

Dado que el primer término depende del tiempo, y que su periodo de oscilación es mucho menor al tiempo en el que se realiza el promedio, éste será igual a cero, por lo que:

$$2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1) \rangle$$

Es decir, el término de interferencia solamente depende de la diferencia total de fase $\delta = k(s_2 - s_1) + \phi_2 - \phi_1$ entre las dos ondas al llegar al punto P . Como podemos ver, δ depende no solo de la fase relativa entre las dos ondas al momento de haber sido generadas ($\phi_2 - \phi_1$), también depende de la diferencia de trayectorias recorridas (o diferencia de camino óptico ($s_2 - s_1$)) por cada una para llegar a P . Así, finalmente:

$$I_{12} = \varepsilon_0 c (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \langle \cos \delta \rangle \quad (7)$$

Generalmente, para campos monocromáticos (con una sola frecuencia) emitidos por la misma fuente, δ es constante, en cuyo caso $\langle \cos \delta \rangle = \cos \delta$. Sin embargo, para campos que son combinación de alguna distribución de frecuencias (varios colores) o producidos por varias fuentes diferentes, δ se torna función de la distancia recorrida, por lo que se debe tratar de forma particular ^[2, 3].

Regresando a la ecuación 5, para las irradiancias I_1 e I_2 , se encuentra que

$$I_1 = \varepsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle = \varepsilon_0 c E_{01}^2 \langle \cos^2(\alpha - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{01}^2 \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_{02}^2 \quad (9)$$

Donde se utilizó que el promedio temporal del cuadrado de funciones coseno, en tiempos de oscilación mucho menores que el tiempo de promediado, es $\frac{1}{2}$. En los casos que se estudiarán en este texto, se asumirá que ambos campos tienen polarización paralela, y que sus amplitudes pueden ser expresadas en términos de I_1 e I_2 utilizando las ecuaciones 8 y 9. En estos casos, el término de interferencia se puede escribir como:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta \rangle \quad (10)$$

3 CONDICIONES PARA LA INTERFERENCIA.

Dado que las fuentes de luz reales no son monocromáticas y cada átomo que las constituye emite luz de forma independiente sin mantener una fase ϕ constante, la *visibilidad* (magnitud) del término de interferencia cambiará con la fase. Así, para que haya interferencia, es necesario que ϕ (y en consecuencia δ) cumpla ciertas condiciones. En esta sección se abordarán los casos extremos que se pueden tener para δ ^[2, 3].

3.1 INTERFERENCIA CONSTRUCTIVA Y DESTRUCTIVA.

Para comenzar, imaginemos una situación en la que una fuente puntual emite de forma simultánea (diferencia de fase $\delta = 0$) dos ondas de luz monocromáticas, con la misma polarización y en direcciones iguales (Figura 2a). Dado que las ondas viajan a la misma velocidad, dichas ondas siempre mantendrán su misma posición relativa una respecto de la otra (siempre estarán en fase) y su superposición producirá una nueva onda con el doble de amplitud ($\vec{E}_P = 2\vec{E}_1$), según las ecuaciones 5 a 8, la irradiancia de la superposición será $4I_1$. Esto se denomina *Interferencia Constructiva* (la amplitud de la onda resultante es mayor que la de cualquiera de las ondas individuales).

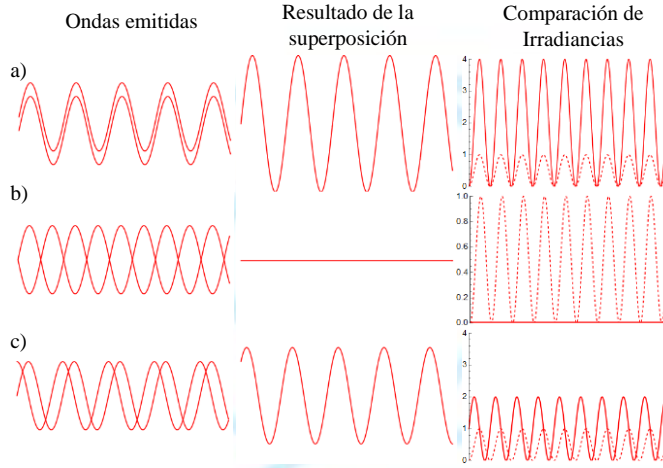


Figura 2. Superposición de dos ondas emitidas de forma simultánea cuando: a) tienen la misma polarización, amplitud y dirección, resulta en Interferencia Constructiva (línea continua gráfica extrema derecha) con irradiancia mayor a la de cada onda individual (línea punteada); b) con un desfase de media onda ($\delta = \pi$); c) con un desfase intermedio ($\delta = 0.5\pi$), la irradiancia de la onda resultante es intermedia.

Por otro lado, sí la fuente emite las dos ondas con una diferencia de tiempo tal que la fase de una respecto de la otra es $\delta = \pi$ (Figura 2b), la superposición será tal que $\vec{E}_p = I = 0$, lo cual se denomina *Interferencia Destructiva* (la amplitud resultante es menor que cualquiera de las ondas individuales).

En casos de diferencias de fase intermedias ($0 < \delta < \pi$) las ondas interferirán de forma que su irradiancia estará entre $0 < I < 4I_1$ (Figura 2c).

3.2 CAMPOS INCOHERENTES.

Si imaginamos dos focos comunes de filamento, pero monocromáticos, uno al lado del otro, no se observarán efectos de interferencia ya que cada foco emite ondas de luz de manera independiente y, además, las fases de las ondas emitidas cambian de un momento a otro en cada foco, por lo que no mantienen una relación de fase constante entre sí a lo largo su trayectoria recorrida hacia P (Figura 3a). Tales fuentes de luz se conocen como *incoherentes*. En estos casos, las ecuaciones 1 y 2 se deben re-escribir con fases dependientes del tiempo $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$, por lo que el término de interferencia tendrá la forma:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(k(s_2 - s_1) + \phi_2(t) - \phi_1(t)) \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\delta(t)) \rangle \quad (11)$$

Los valores que pueden tomar las fases ϕ van de 0 a 2π de forma aleatoria (Figura 3b), produciendo que $\delta(t)$ también varíe de forma aleatoria; en consecuencia, el $\cos(\delta(t))$ arrojará valores aleatorios entre -1 y 1 (Figura 3c). Si la variación temporal de las fases es mucho más rápida que el tiempo de promediado del coseno, el promedio tenderá a cero y el término de interferencia desaparecerá. Así, para fuentes incoherentes:

$$I = I_1 + I_2 \quad (12)$$

Lo anterior también se puede aplicar a fuentes poli-cromáticas; sin embargo, el cambio en δ es consecuencia de la diferencia en longitudes de onda. Éste fenómeno se puede ver como en la Figura 3d, donde se asume que las ondas de distinta frecuencia (color) son emitidas al mismo tiempo (en fase) y por la misma fuente; sin embargo, la diferencia en frecuencia producirá que, después de una cierta distancia, las ondas se desfasen unas respecto de otras produciendo que δ se torne aleatoria y desaparezca el término de interferencia. La distancia en que se considera que todas las ondas mantienen una relación de fase aproximadamente constante se denomina *longitud de coherencia* y depende de las distintas longitudes de onda que componen la luz (Figura 3e). Para fuentes de luz blanca, esta longitud es del orden de

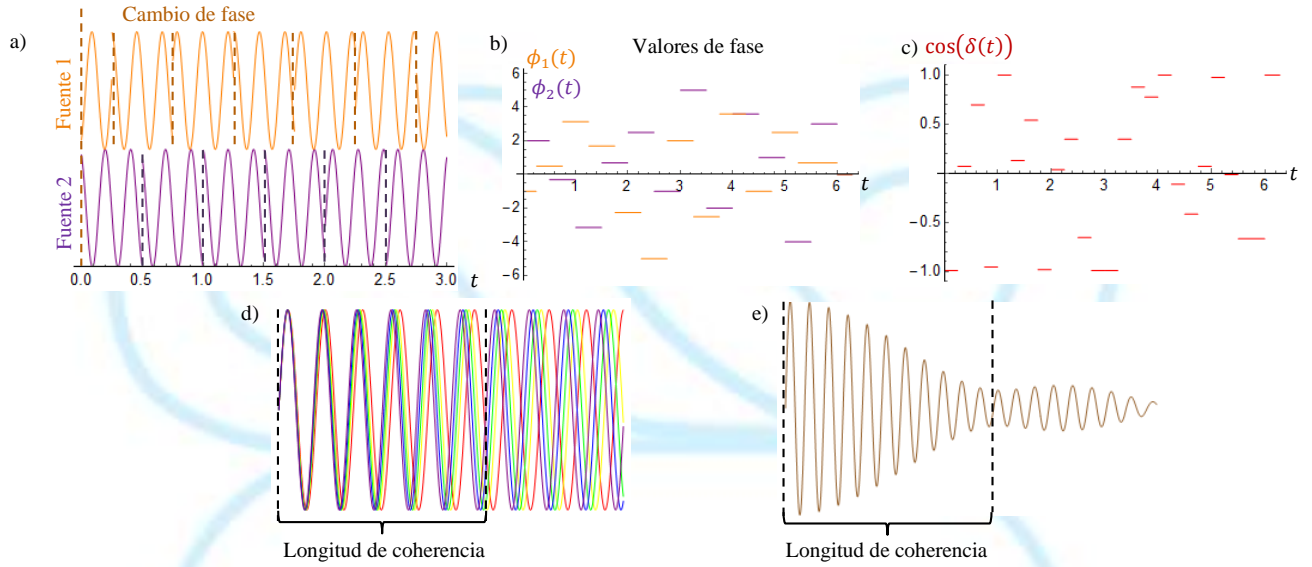


Figura 3. Características y superposición de ondas incoherentes. a) Ondas emitidas por dos fuentes sin relación de fase, la cual cambia de forma aleatoria cada cierto tiempo. b) Valores de las fases de las dos ondas en el tiempo. c) Valor del $\cos(\delta(t))$ a distintos tiempos, el promedio de dichos valores en un tiempo mucho más largo que el tiempo de duración de las fases da un valor de cero. d) Ondas de distinta frecuencia emitidas en fase; sin embargo, después de una cierta distancia las ondas se desfasan unas de otras. e) La superposición de ondas de distinta frecuencia produce interferencia constructiva solamente en una cierta región, mientras las ondas estén en fase.

$< 1\mu m$, mientras que en los láseres (fuentes coherentes) se pueden alcanzar distancias de metros o kilómetros. Es de señalar que, dentro de la longitud de coherencia, la luz poli-cromática sí produce interferencia.

3.3 CAMPOS COHERENTES.

Si las ondas emitidas tienen frecuencias muy similares, son emitidas por la misma fuente de forma simultánea y además el tiempo de promediado es más corto que el tiempo de cambio de fase, ésta podrá ser considerada constante (dentro del tiempo de promediado) y el término de interferencia no se eliminará.

En esta situación podremos asumir que al tiempo de emisión $\phi_1 = \phi_2$, por lo que $\delta = k(s_2 - s_1)$. Así, mientras la diferencia de distancias recorridas por las ondas sea menor a la longitud de coherencia, se tendrá que éstas son *coherentes*:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(k(s_2 - s_1)) \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta) \quad (13)$$

Dependiendo del valor que tome δ (debido a la diferencia de trayectorias), la interferencia puede ser constructiva o destructiva. Esto implica que diferentes puntos de observación tendrán distintas irradiancias, dependiendo de la diferencia de caminos desde la fuente hasta el punto. Por ejemplo, cuando $\cos \delta = +1$, es decir $\delta = 2m\pi$ con $m = 0, 1, 2, \dots$, se tendrá interferencia constructiva (máxima irradiancia)

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (14)$$

Por otro lado, si $\cos \delta = -1$, es decir $\delta = (2m + 1)\pi$, la interferencia es destructiva (mínima irradiancia)

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (15)$$

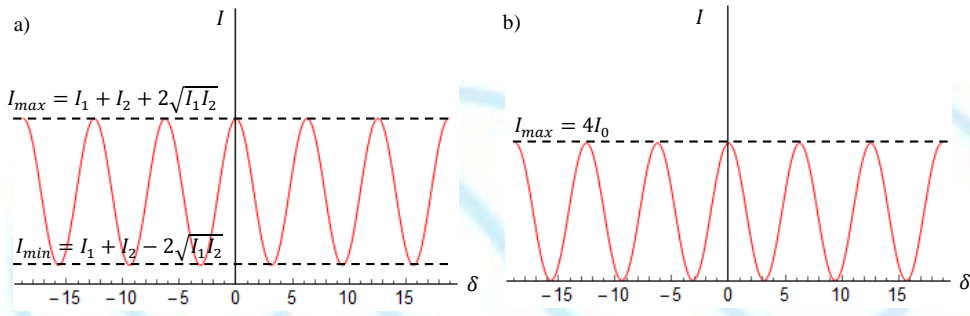


Figura 4. Irradiancia total de la interferencia de dos ondas como función de δ . a) $I_1 \neq I_2$. b) $I_1 = I_2 = I_0$.

Si las irradiancias I_1 e I_2 son distintas, una gráfica de I vs δ será como la mostrada en la Figura 4a. Sin embargo, si las irradiancias de cada onda son iguales $I_1 = I_2 = I_0$, la gráfica alcanzará la interferencia totalmente destructiva (Figura 4b), en cuyo caso $I_{max} = 4I_0$ y $I_{min} = 0$, y la irradiancia se puede escribir como:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (16)$$

En este último caso en que las irradiancias individuales de cada onda son iguales, el contraste de la interferencia es máximo (se alcanza oscuridad total); sin embargo, en caso contrario, el contraste será menor (no se tendrá oscuridad total). Esta característica se puede cuantificar con la *visibilidad*, la cual se define como:

$$vis = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (17)$$

4 LA DOBLE RENDIJA DE YOUNG.

Un método común para producir interferencia es el que implementó Thomas Young en 1802; un diagrama esquemático del arreglo utilizado en este experimento se muestra en la Figura 5. En dicho arreglo, una fuente monocromática ilumina una rendija muy delgada S_0 ($\ll 1mm$) la cual se aproxima como puntual, por lo que las ondas emergen de esta rendija de forma esférica y llegan a una segunda barrera, la cual contiene dos rendijas delgadas y paralelas, S_1 y S_2 , a distancias simétricas de S_0 . Las dos rendijas sirven como un par de fuentes de luz coherentes y de la misma intensidad, ya que las ondas que emergen de ellas provienen del mismo frente de onda y mantienen una relación de fase constante, por lo que producirán un patrón de interferencia (bandas paralelas brillantes y oscuras denominadas *franja de interferencia*), la cual será constructiva o destructiva dependiendo de las distancias s_1 y s_2 , a la pantalla.

En la Figura 5b, las dos ondas salen en fase de las dos rendijas e inciden sobre la pantalla en un punto central P ; puesto que estas ondas viajan igual distancia, llegan en fase produciendo interferencia constructiva. En la Figura 5c, las dos ondas luminosas empiezan en fase, pero en este caso la onda superior tiene que viajar una longitud de onda extra más que la onda inferior para alcanzar el punto Q ; puesto que la diferencia es exactamente una longitud de onda, las dos llegan en fase ($\delta = 2\pi$) y vuelven a producir una franja brillante. Sin embargo, en el punto R en la Figura 5d, la onda superior se ha retrasado media longitud de onda, lo cual implica un desfase tal que habrá interferencia destructiva ($\delta = \pi$), produciéndose una franja oscura.

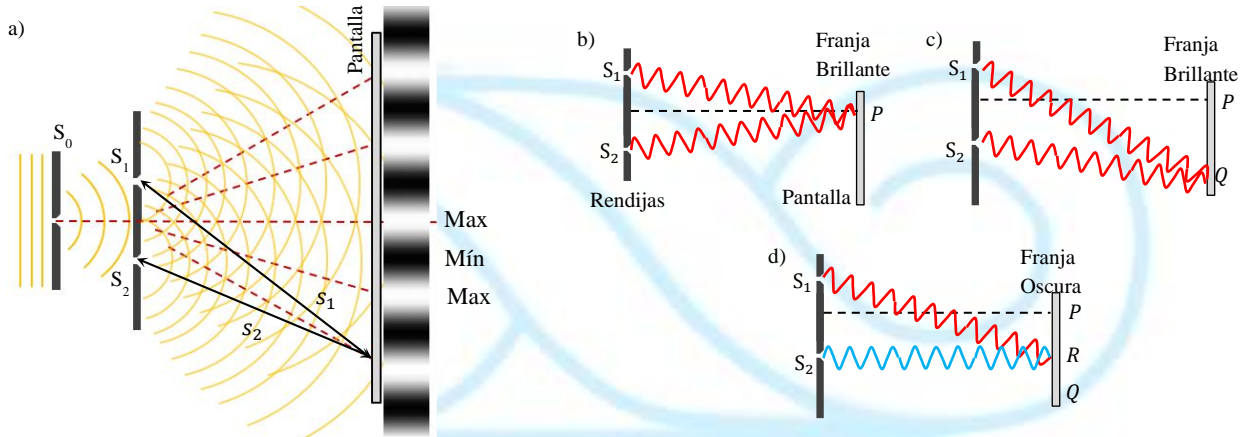


Figura 5. a) Experimento de la doble rendija de Young. b) Interferencia constructiva (orden cero), b) Interferencia constructiva (orden 1), c) Interferencia destructiva (orden cero).

Supongamos que una pantalla se localiza a una distancia L de una barrera con dos rendijas S_1 y S_2 separadas una distancia a (se asume que $L \gg a$), y las cuales son iluminadas por una fuente de luz monocromática (y de preferencia coherente, como un láser) como en la Figura 6. Para alcanzar cualquier punto arbitrario sobre la pantalla (y) desde la rendija S_2 , la onda viaja una distancia $a \sin \theta$ extra que una onda de la rendija S_1 ; a esta diferencia de trayectoria la llamaremos Δ . Como $L \gg a$, se puede usar la aproximación de ángulo pequeño, donde los rayos s_1 y s_2 son aproximadamente paralelos, por lo que Δ estará dada por:

$$\Delta = s_2 - s_1 = a \sin \theta \quad (18)$$

El valor de Δ determinará si las dos ondas están o no en fase cuando llegan a y. Si Δ es cero o algún múltiplo entero de la longitud de onda, las ondas llegarán en fase y se tendrá la condición para *interferencia constructiva*:

$$\Delta = a \sin \theta = m \lambda, \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

El número m recibe el nombre de *número de orden de interferencia*, y se relaciona con el número de franja brillante a partir de la franja central. Por otro lado, cuando Δ es un múltiplo impar de $\lambda/2$, las dos ondas llegan a y con un desfase de π , produciéndose *interferencia destructiva*:

$$\Delta = a \sin \theta = \left(m \pm \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

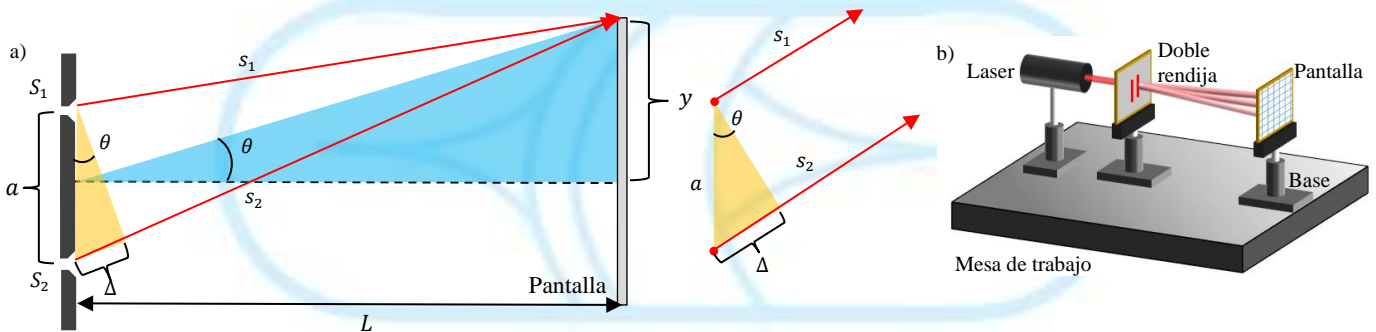


Figura 6.a) Geometría del experimento de Young. b) Arreglo experimental.

Para esta ecuación es necesario tomar en cuenta la simetría y posición (respecto del centro del arreglo), es decir, sí y se mide en una dirección positiva o negativa. Por ejemplo, para $m = 0$ (el orden cero de interferencia destructiva), se tienen dos soluciones (correspondientes a las franjas oscuras contiguas a la franja de interferencia constructiva de orden cero), una con $\Delta = 1/2$ y otra con $\Delta = -1/2$, es decir el orden cero de interferencia está duplicado. De forma similar, para los órdenes positivos de interferencia destructiva se utiliza el signo positivo de la ecuación 20, mientras que para los órdenes negativos se utiliza el signo negativo de la ecuación.

Como, en general, la diferencia de fase estará dada por

$$\delta = k(s_2 - s_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$$

utilizando las ecuaciones 16 y 18, la distribución de irradiancia en la pantalla será:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$$

Nuevamente, bajo la aproximación de ángulo pequeño, si $y \ll L$, entonces $\sin \theta \approx \tan \theta \approx y/L$, de forma que

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a y}{\lambda L} \right) \quad (21)$$

Así, la posición de las franjas de interferencia constructiva (y_{max}) ocurrirá cuando el argumento del coseno sea igual a $m\pi$, de donde:

$$y_{max} = \frac{m\lambda L}{a}, \text{ con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

De forma similar, para las franjas oscuras:

$$y_{min,m} = \frac{\lambda L}{a} \left(m \pm \frac{1}{2} \right) \quad (23)$$

La utilidad de estas dos ecuaciones radica en que puede ser utilizada para caracterizar objetos de tamaños (a) micrométricos o de centenas de nanómetros, simplemente observando el patrón de interferencia y midiendo la separación de las franjas de interferencia constructiva o destructiva (y) de un cierto orden (m), siempre y cuando se conozca la longitud de onda de la fuente de luz (λ) y la distancia a la pantalla (L). O inversamente, si se conocen las dimensiones del objeto, es posible encontrar la longitud de onda de una fuente de luz coherente.

5 DIFRACCIÓN.

Para realizar el experimento de la doble rendija de Young, se asumió que las dos aperturas, por las que pasa la onda monocromática original, eran tan delgadas que se podían considerar como puntuales; sin embargo, en la práctica dichas aperturas tienen un ancho, el cual también produce otro efecto de interferencia. Este efecto, al ser consecuencia del ancho de la apertura, ocurre incluso cuando solamente hay una apertura y se denomina *difracción*. La difracción ocurre no solo cuando las ondas pasan por pequeñas aberturas sino también cuando pasan alrededor de obstáculos o bordes afilados.

En esta práctica pondremos nuestra atención a la difracción de Fraunhofer, la cual ocurre cuando los rayos que llegan a una rendija angosta son paralelos entre sí, es decir, los frentes de onda son planos, y cuando la pantalla de observación se encuentra muy lejos de la apertura ^[3] (Figura 7). Esto se puede lograr experimentalmente colocando una fuente de luz puntual y monocromática muy lejos de la apertura, o utilizando un láser en un arreglo experimental como el del experimento de Young.

A partir del *Principio de Huygens*, la porción del frente de onda plano que cruza la rendija se puede representar como una distribución continua de fuentes puntuales emitiendo ondas en fase; es decir, cada intervalo ds en la rendija será una fuente diferencial (cuya integración da el ancho de la rendija b), y que contribuye con una onda esférica en un punto P sobre la pantalla. Desde dicho punto, cada elemento ds contribuye con un campo

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}$$

Donde r es la distancia de ds a P . La dependencia $1/r$ es consecuencia de que la irradiancia debe ser el cuadrado de la amplitud del campo, mientras que E_L es una constante de proporcionalidad. Supongamos que la distancia del centro de la rendija al punto P es $r = r_0$, por lo que una onda generada en una posición s en la rendija tendrá una diferencia de fase debido al camino extra Δ que tiene que recorrer; es decir, producirá un campo:

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0 + \Delta} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{ik\Delta}$$

Dado que $\Delta \ll r_0$, el término Δ puede ser ignorado en el factor de la amplitud, pero no en la fase $e^{ik\Delta}$. Sin embargo, de la geometría de la Figura 7, $\Delta = s \sin \theta$, por lo que

$$dE_p = \left(\frac{E_L ds}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} e^{iks \sin \theta}$$

Así, el campo total en el punto P se encuentra integrando sobre el ancho de la rendija:

$$E_p = \left(\frac{E_L}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iks \sin \theta} ds$$

Cuyo resultado se puede encontrar en tablas de integrales, y es:

$$E_p = \left(\frac{E_L}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{b(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{2i\beta} = \left(\frac{E_L}{r_0} \right) e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{b(2i \sin \beta)}{2i\beta}$$

Donde $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$, y cuya magnitud representa la diferencia de fase en el punto P entre las ondas provenientes del centro de la rendija y sus extremos. Finalmente, la irradiancia en P será proporcional al cuadrado del campo:

$$I = \left(\frac{\epsilon_0 c}{2} \right) |E_p|^2 = \left(\frac{\epsilon_0 c}{2} \right) \left(\frac{E_L b}{r_0} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

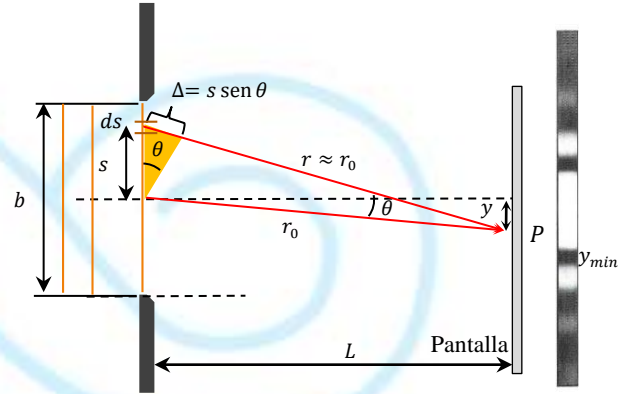


Figura 7. Geometría de difracción.

Dado que todos los elementos en los dos primeros paréntesis son constantes, se pueden agrupar, siendo la irradiancia debido a la difracción:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) \quad (24)$$

Una gráfica de la irradiancia en la pantalla, debido a la difracción en una rendija, se muestra en la Figura 8. Como se puede observar, los ceros de dicha función ocurren cuando $\sin \beta = 0$, es decir, para valores de

$$\frac{1}{2}kb \sin \theta = m\pi ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es importante notar que se excluye el valor $m = 0$ debido a que en el centro de la distribución, la irradiancia es máxima. Utilizando $k = 2\pi/\lambda$, la *condición para la interferencia destructiva en difracción* es:

$$m\lambda = b \sin \theta \quad (25)$$

La posición transversal de estos mínimos en la pantalla se puede encontrar utilizando la aproximación de ángulo pequeño, de la misma forma que en el experimento de Young, respecto de la irradiancia máxima en el centro del patrón ($\theta = 0, y = 0$):

$$y_{min} = \frac{m\lambda L}{b} ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (26)$$

Es de notar que, debido al tipo de función, los máximos posteriores no caen en los puntos intermedios entre mínimos. Al igual que la ecuación 23, la ecuación 26 permite caracterizar tamaños de aperturas midiendo los patrones de difracción que generan, siempre y cuando se conozcan m, λ y L ; y de forma inversa, si conocemos b, y_{min}, m y L , podemos encontrar la longitud de onda (λ) de alguna fuente de luz coherente.

Como nota final, en la práctica, toda abertura presenta difracción, y al tratarse de un fenómeno ondulatorio, sigue el principio de superposición de los campos. Esto permite concluir que, en el experimento de la doble rendija de Young, se tendrá una superposición del fenómeno de difracción con el de interferencia por doble rendija; es decir, el patrón de interferencia de doble rendija será *modulado* por el patrón de difracción, por lo que la intensidad de los máximos en el patrón de Young no será homogénea como en la Figura 5. Combinando (multiplicando) las ecuaciones 21 y 24 se obtiene que:

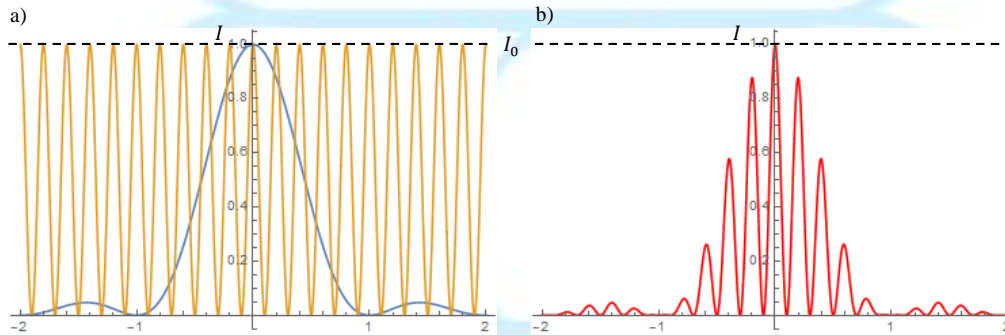


Figura 9. a) Irradiancia en la pantalla de los patrones de difracción e interferencia de doble rendija separados. b) Irradiancia de los dos patrones superpuestos.

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi by}{\lambda L} \right)}{\left(\frac{\pi by}{\lambda L} \right)^2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi ay}{\lambda L} \right) \quad (27)$$

Donde se han utilizado aproximaciones de ángulo pequeño. Como se puede ver en la Figura 9, el patrón de interferencia de doble rendija es modulado por el de difracción, esto también se puede observar en la fotografía de presentación de este texto.

6 REFERENCIAS.

- [1] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 3° edición. Prentice Hall. 1999.
- [2] E. Hecht. *Óptica*. 3° edición, Addison Wesley. 2000.
- [3] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, Leno S. Pedrotti. *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 2018, 3°ed.