

ESPEJOS



Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.
Óptica (v.2024)

Una de las aplicaciones más conocidas de la ley de reflexión es la construcción de espejos, los cuales, dependiendo de su geometría, pueden ser utilizados para magnificar objetos, concentrar la luz, darnos un gran campo de visión (espejos de seguridad) o poder observar de forma indirecta (retrovisores). Aquí estudiaremos el funcionamiento de los espejos, así como su caracterización.

Contenido

1	OBJETIVO.....	1
1.1	Material.....	1
2	ESPEJOS PLANOS.....	1
3	CONVENCIÓN DE SIGNOS.....	2
4	ESPEJOS ESFÉRICOS.....	3
4.1	Espejos Convexos.....	3
4.2	Espejos Cóncavos.....	4
5	DIAGRAMAS DE RAYOS.....	6
6	EL ESFERÓMETRO.....	7
7	COMENTARIOS SOBRE LA APROXIMACIÓN PARAXIAL.....	8
8	REFERENCIAS.....	9

Un espejo es una superficie pulida (por lo común con recubrimiento metálico) en la que la luz incidente se refleja totalmente (no hay luz transmitida) o parcialmente, de acuerdo a la *Ley de la Reflexión*. Dependiendo de la geometría de la superficie, la reflexión presenta características particulares que sirven para clasificar los espejos ^[1, 2, 3].

1 OBJETIVO.

Comprobar el funcionamiento de espejos planos y curvos. Encontrar la distancia focal de un espejo cóncavo por dos métodos distintos y comprobar la validez de la ecuación de los espejos.

1.1 MATERIAL.

1 Espejo plano de primera superficie. 1 Espejo cóncavo de primera superficie. Regla y/o mira. Hoja de papel cuadriculado. Esferómetro. Flexómetro. Vernier. Objeto luminoso. Pantalla. Bases.

2 ESPEJOS PLANOS.

Como su nombre lo indica son superficies planas. Si colocamos una fuente puntual O (*objeto*) a una distancia ' o ' frente del espejo, y a una altura h sobre un eje de referencia normal al espejo, los rayos emitidos por la fuente se reflejarán en el espejo, y para un observador situado frente a él (del mismo lado que la fuente), parecerá que los rayos provienen de un punto I (*imagen*) localizado a una distancia ' i ' y altura h' detrás del espejo aparentando divergir de la imagen.

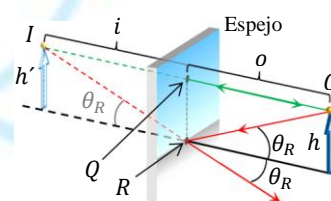


Figura 1. Geometría de un espejo plano.

La posición de la imagen se puede localizar por triangulación utilizando las extensiones de un par de rayos reflejados. El primero es uno que incide en el espejo de forma normal a él, es decir, con un ángulo de incidencia $\theta_I = 0^\circ$ (rayo verde en el punto Q en la Figura 1); este rayo se *retro-reflejará* sobre sí mismo (\overline{QO}). El segundo es un rayo que incide en el origen del eje de referencia (R) en el espejo.

Debido a la ley de reflexión y la geometría de la figura, la extensión hacia atrás del espejo del rayo reflejado (rojo) intersectará la extensión del rayo normal (verde) a una distancia i del espejo. Dado que los triángulos $\triangle OQR$ e $\triangle IQR$ son congruentes, y el cateto opuesto a θ_R es común a ambos triángulos ($h = h'$), entonces $o = i$.

“La imagen formada por un espejo plano, y de la cual parecerían provenir los rayos reflejados, está a la misma distancia que la del objeto frente al espejo.”

Para comprobar experimentalmente esta relación, el montaje experimental es como el mostrado en la Figura 2. El espejo plano se coloca sobre una hoja cuadriculada de forma vertical, y se marca su posición en ella con una línea (se recomienda trabajar con la superficie reflectora que tiene el recubrimiento metálico, por lo que, hay que tener cuidado de no tocar con los dedos dicha superficie). Posteriormente se coloca un objeto (de preferencia muy delgado) frente al espejo y se marca su posición en la hoja. Con ayuda de una mira o una regla (utilizando su canto como mira) se observa la imagen del objeto a través del espejo desde distintos puntos de observación frente al espejo y al nivel del papel (mínimo 2), y se traza una línea en dirección de la imagen para cada uno de estos puntos de observación.

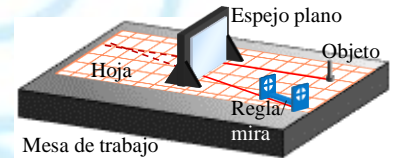


Figura 2. Montaje experimental para el espejo plano.

Finalmente, se quita el espejo plano y se extienden las líneas trazadas más allá de donde se encontraba el espejo, hasta que se crucen. Al medir la distancia de la posición del objeto al espejo y del espejo al punto (o región) de cruce de las líneas (posición esperada de la imagen), se debe comprobar que son iguales dentro de la incertidumbre.

3 CONVENCION DE SIGNOS.

Dado que la imagen que forma un espejo plano “pareciera” estar detrás de él y los rayos “parecieran” provenir de dicha imagen, sin que realmente lo hagan, se denominará a este tipo de imágenes como *imágenes virtuales*. Esto permite clasificar las imágenes en dos tipos:

IMAGEN REAL: se forma cuando los rayos de luz pasan físicamente por la imagen.
IMAGEN VIRTUAL: los rayos de luz no pasan por la imagen, pero parecen venir de ella.

En espejos planos las imágenes siempre son virtuales. Por otro lado, las imágenes reales siempre pueden proyectarse en una pantalla ya que los rayos de luz convergerán en ella, lo cual no es posible con las virtuales.

Lo anterior permite definir un sistema de referencia para medir distancias. En dicho sistema el origen estará en la superficie (o vértice) del espejo y, por convención, las cantidades frente al espejo serán positivas y las cantidades detrás de él serán negativas [1, 2, 3]. En la Tabla 1 se resume esta convención para las distintas variables de un espejo, las cuales se definirán más adelante.

Tabla 1. Convención de signos para espejos.	
Frente (lado real)	Atrás (lado virtual)
$(o, i) > 0$	$(o, i) < 0$
$(f, R) > 0$ (Cóncavo)	$(f, R) < 0$ (Convexo)
Incide y se refleja la luz	No pasa la luz
$M > 0$, imagen derecha	$M < 0$, imagen invertida

4 ESPEJOS ESFÉRICOS.

La superficie más común para hacer espejos es la superficie esférica ya que es la más sencilla y económica de construir. Así, la superficie de estos espejos es la sección de una esfera con un *centro de curvatura* (C) y *radio* (R). Los *espejos esféricos* pueden ser de dos tipos, *cóncavos* o *convexos*, dependiendo de si C está al frente o atrás de la superficie reflejante respectivamente. El funcionamiento de estos espejos se puede deducir a partir de relaciones trigonométricas y aproximaciones apropiadas relacionadas a su superficie.

4.1 ESPEJOS CONVEXOS.

En estos espejos C está del lado opuesto a la superficie reflejante (atrás del espejo). Al igual que con el espejo plano, buscamos encontrar la posición de la imagen de un objeto puntual y la relación entre las distancias o e i tomando en cuenta R (que es negativo en estos espejos). El caso más sencillo es cuando el objeto puntual se encuentra sobre el *eje de simetría del espejo* (Figura 3a), y donde el punto de referencia es el *vértice del espejo* (V). Así, utilizaremos dos rayos, uno que incida de forma normal al espejo en V (rayo verde) y otro que incida en cualquier otro lugar P del espejo (rayo rojo) y que forme un triángulo.

Como se puede ver en la figura, los triángulos $\triangle POV$ y $\triangle PIV$ no son rectángulos, esto genera un problema ya que sin poder conocer la distancia QV no es posible conocer la relación entre o e i . Sin embargo, si los ángulos φ y α son pequeños, el punto P estará muy próximo a V (i.e. $QV \approx 0$), haciendo que ambos triángulos se puedan asumir como rectángulos y congruentes. Esto se denomina *régimen paraxial* (cerca del eje de la lente) o régimen de la *óptica Gaussiana*, donde $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ y $\cos \varphi \approx 1$. Así, de los triángulos $\triangle CPO$ e $\triangle IPO$

$$\theta = \varphi + \alpha \quad y \quad 2\theta = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta = -2\varphi$$

Utilizando la aproximación paraxial en las tangentes de los ángulos α , β y φ ,

$$\frac{h}{|o|} - \frac{h}{|i|} = -2 \frac{h}{|R|} \Rightarrow \frac{1}{|o|} + \frac{1}{(-|i|)} = \frac{2}{(-|R|)}$$

Donde i y R se agrupan con el signo negativo ya que están detrás del espejo (convención de signos). Esto permite agrupar los términos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} \quad (1)$$

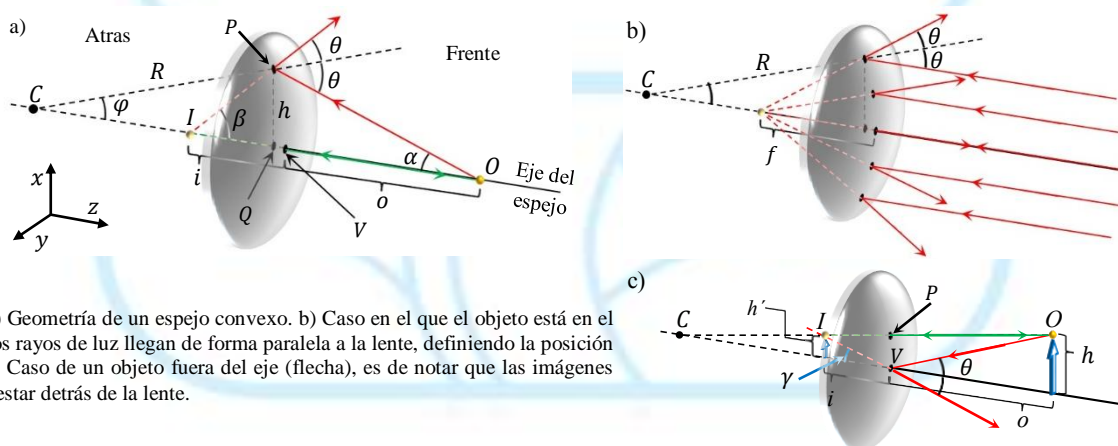


Figura 3. a) Geometría de un espejo convexo. b) Caso en el que el objeto está en el infinito y los rayos de luz llegan de forma paralela a la lente, definiendo la posición del foco. c) Caso de un objeto fuera del eje (flecha), es de notar que las imágenes parecerían estar detrás de la lente.

Donde implícitamente se toma en cuenta la convención de signos. Esta *ecuación del espejo* describe su funcionamiento ya que permite conocer la posición de la imagen, conociendo la distancia del objeto al vértice del espejo y su radio de curvatura.

Un caso de referencia es cuando el objeto está en el “infinito” y los rayos inciden de forma paralela en el espejo (Figura 3b), en este caso la imagen se encontrará en

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} \Rightarrow i = \frac{R}{2} = f \quad (2)$$

Este punto es denominado *foco del espejo* (f), y es de gran importancia para la construcción de diagramas de rayos.

Si el objeto esta fuera del eje como en la Figura 3c, para encontrar su imagen se vuelven a utilizar dos rayos, uno que incida de forma normal al espejo (rayo verde) en un punto P , lo cual implica que su extensión por la parte posterior del mismo llegará a C , y un segundo rayo que llegue al espejo en V (rayo rojo). Las extensiones de ambas reflexiones se intersectarán en el punto I . Por geometría de los triángulos $\triangle O\overline{VO}$ e $\triangle I\overline{VI}$, $\theta = \gamma$, es decir, son triángulos similares. Debido a esto, es posible deducir el factor de proporcionalidad entre ellos, el cual es llamado *magnificación lateral* (M). Del diagrama, tanto objeto como imagen tienen el mismo sentido (ambas flechas azules apuntan hacia arriba), por lo que los lados de los triángulos serán proporcionales $h' = Mh$, donde M es positivo.

Por otro lado, la proyección vertical del objeto sobre el eje del espejo está a una distancia o del mismo y la ecuación 1 indica que la proyección vertical de la imagen sobre el eje estará a una distancia i detrás del espejo. Estas dos distancias corresponden a las bases de ambos triángulos, por lo que también deben ser proporcionales ($i = Mo$); sin embargo, por la convención de signos, i es negativo por lo que, para preservar la positividad de M , será necesario introducir un signo menos a esta relación de magnificación. Así:

$$M = -\frac{i}{o} = \frac{h'}{h} \quad (3)$$

El análisis de las ecuaciones 1 y 3 nos indica que en los espejos convexos las imágenes siempre estarán detrás del espejo y serán más pequeñas que el objeto; es decir, siempre generarán *imágenes virtuales* con magnificación $0 < M < 1$. Conforme el objeto se aleja del espejo, la imagen se reduce y se acerca a f . Por principio de reversibilidad, este tipo de espejos proporcionan un campo de visión muy amplio debido a la forma en que divergen los rayos, por lo que son muy utilizados como espejos de seguridad.

4.2 ESPEJOS CÓNCAVOS.

La geometría de estos espejos hace *converger* (*enfocar*) los rayos reflejados ya que C y R ahora son positivos, es decir están del mismo lado que la superficie reflejante. Al igual que con el espejo convexo, en un primer caso, el objeto puntual estará en el eje del espejo (Figura 4a). Algo a notar en el diagrama de la situación mostrada, es que todas las cantidades son positivas de acuerdo a la convención de signos. Así, de los triángulos $\triangle POC$ y $\triangle POI$, se tienen las relaciones

$$\theta + \alpha = \varphi \quad y \quad 2\theta + \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 2\varphi$$

Aplicando la aproximación paraxial (i.e. $\overline{QV} \approx 0$), los triángulos $\triangle POV$, $\triangle PCV$ y $\triangle PIV$ serán triángulos rectángulos donde $\alpha = \frac{h}{o}$; $\beta = \frac{h}{i}$ y $\varphi = \frac{h}{R}$, que al sustituir en las relaciones anteriores, nuevamente dan la *ecuación del espejo*:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

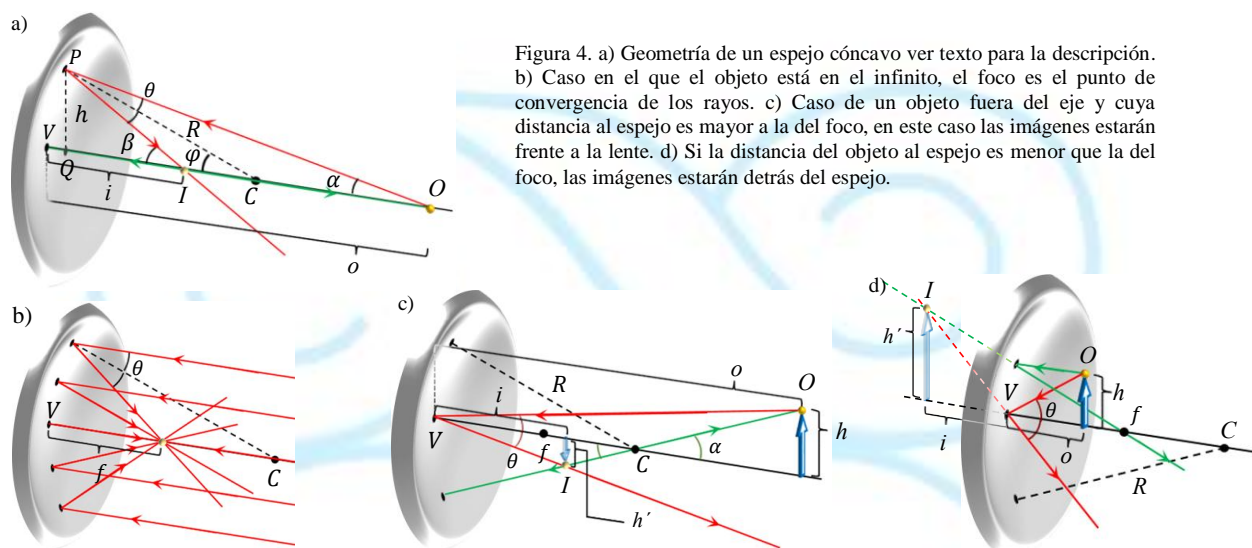


Figura 4. a) Geometría de un espejo cóncavo ver texto para la descripción. b) Caso en el que el objeto está en el infinito, el foco es el punto de convergencia de los rayos. c) Caso de un objeto fuera del eje y cuya distancia al espejo es mayor a la del foco, en este caso las imágenes estarán frente a la lente. d) Si la distancia del objeto al espejo es menor que la del foco, las imágenes estarán detrás del espejo.

Cuando el objeto está en el infinito, los rayos reflejados se concentran en el foco f , el cual será positivo (Figura 4b) y estará a la mitad entre C y V . Por el principio de reversibilidad, cuando el objeto este en el foco, su imagen estará en el “infinito”.

En el caso donde el objeto esta fuera del eje del espejo (Figura 4c), para conocer la posición de la imagen (i) bastan dos rayos provenientes del objeto, uno que pase por C y que se refleje sobre sí mismo (al pasar por C viaja sobre el radio de la esfera) y otro que se refleje en V de acuerdo a la ley de reflexión. El punto donde se crucen los rayos reflejados será donde se forme la imagen. Del triángulo $\triangle OVh$ se tiene que $\theta = h/o$, mientras que en $\triangle IVh'$, $\theta = h'/i$, donde implícitamente se sabe que h' es negativo, debido a que la imagen esta invertida. Por ser triángulos congruentes, la (*magnificación*) será:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{i}{o}$$

En este caso M es negativo (debido a que h' lo es); sin embargo, i/o es positivo, por lo que para mantener congruencia con la ecuación 3, se introduce un signo negativo a esta parte. Es de señalar que mientras el objeto este fuera del foco ($o > f$), las imágenes estarán frente al espejo ($i > 0$) e invertidas ($-\infty < M < 0$). Como los rayos reflejados pasan por la imagen se trata de *imágenes reales* y se pueden proyectar en una pantalla colocada en I .

Finalmente, los espejos cóncavos presentan un caso adicional (Figura 4d). Cuando el objeto está a una distancia del espejo menor que el foco, los rayos no podrán converger en un punto. En este caso, utilizando la ecuación 2 con $o < f = \frac{R}{2}$, se tiene que:

$$\frac{1}{i} = \frac{2}{R} - \frac{1}{o} < 0$$

La *imagen es virtual y magnificada* detrás del espejo ($i < 0$), vertical y aumentada ($M > 1$)

Ejemplo. Un objeto de 3cm de altura se coloca a una distancia de 20cm ; para los casos, (I) de un espejo convexo y (II) de un espejo cóncavo, cada uno con 10cm de longitud focal, se requiere determinar la posición y el tipo de imagen formada.

I. $f = -10\text{cm}$, $o = 25\text{cm}$

$$\frac{1}{25\text{cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{-10\text{cm}} \Rightarrow i = -7.14\text{cm}; \quad M = -\frac{-7.14\text{cm}}{25\text{cm}} = 0.286$$

Dado que $i < 0$, la imagen es virtual (detrás del espejo) y es vertical.

II. $f = 10\text{cm}$, $o = 25\text{cm}$

$$\frac{1}{25\text{cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{10\text{cm}} \Rightarrow i = 16.67\text{cm}; \quad M = -\frac{16.67\text{cm}}{20\text{cm}} = -0.833$$

Como $i > 0$ y $M < 0$, la imagen es real (frente al espejo) y esta invertida.

Como se puede ver del ejemplo, las ecuaciones 1 y 3 son congruentes con la convención de signos y pueden describir tanto el funcionamiento de espejos convexos como cóncavos.

Para comprobar experimentalmente la ecuación de los espejos (en nuestro caso para un espejo cóncavo), se necesita implementar un arreglo experimental como el de la Figura 5. El espejo se coloca en una base fija a partir de la cual se extiende una escala de medición (el cero se coloca justo bajo el vértice del espejo). A un lado de la escala de medición se coloca una pantalla (donde se proyectará la imagen) y al otro lado un objeto luminoso (por ejemplo una lámpara); los cuales también se colocan sobre bases que se puedan desplazar de posición a lo largo de la escala (se recomienda usar rieles con carros móviles para que el movimiento tanto de la pantalla como del objeto sea solamente en una dirección y facilitar la medición). Los tres elementos tienen que estar a la misma altura para ayudar a que la imagen esté lo menos deformada posible.

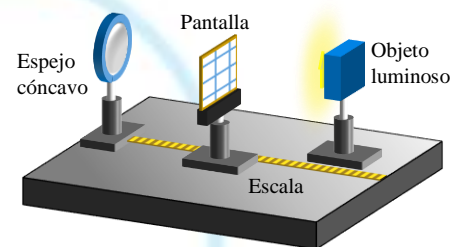


Figura 5. Montaje experimental para medir el foco de un espejo.

Ya con el sistema armado, para distintas posiciones del objeto (o) a lo largo de la escala, se encuentran las correspondientes posiciones de imágenes proyectadas (i) en la pantalla. Para cumplir con las condiciones del régimen paraxial, tanto el objeto como la pantalla deben estar lo más cercano al eje del espejo. Con ayuda de todas estas parejas (i, o) se puede utilizar la ecuación 1 para deducir el valor del foco del espejo o su radio de curvatura (lo más recomendable es hacerlo con ayuda de una gráfica). Además, si también se miden los tamaños de las imágenes (h') y del objeto (h) para cada pareja (i, o), será posible comprobar la relación de magnificación (ecuación 3).

5 DIAGRAMAS DE RAYOS.

Las posiciones y tamaños de las imágenes formadas por espejos pueden determinarse con diagramas de rayos, utilizando 2 de 4 posibles rayos principales (Figura 6) ^[2,4] y conociendo o , f y C .

- El **rayo 1** se dibuja desde el objeto y es paralelo al eje del espejo, su reflexión pasará por f .
- El **rayo 2** va del objeto como si viniera de f y su reflexión es paralela al eje óptico y hacia el infinito.
- El **rayo 3** pasa por el objeto y el centro de curvatura C , se refleja sobre sí mismo.
- El **rayo 4** va del objeto al vértice del espejo y se refleja de acuerdo a la ley de reflexión.

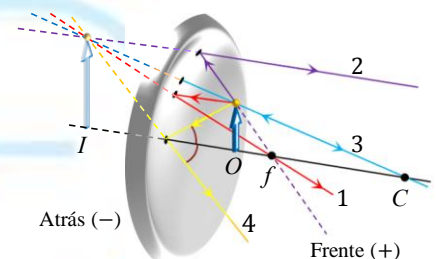


Figura 6. Diagramas de rayos para espejos.

El punto donde se cruzan todos estos rayos o sus extensiones será el lugar donde se localizará la imagen, y donde se considera que salen los rayos de luz. Si la imagen está detrás del espejo se tendrá una imagen virtual, mientras que si esta frente a él será real.

6 EL ESFERÓMETRO.

Para poder utilizar de forma práctica los espejos es indispensable poder conocer su radio de curvatura (R). Un instrumento que posibilita esto es el esferómetro, el cual mide R de una superficie esférica utilizando relaciones geométricas [5]. Consiste en un tornillo insertado en un pequeño trípode equilátero, o en un anillo, que cuenta con una escala graduada vertical (Figura 7a). La cabeza del tornillo tiene un disco graduado usado para medir fracciones de vuelta del tornillo. La combinación de ambas escalas es usada para medir la altitud o profundidad que se desplaza el tornillo central dependiendo de la curvatura de la superficie. Por lo general, la mínima escala vertical es 1mm (correspondiente a una vuelta del tornillo), y la escala del disco es de 0.01mm (100 divisiones correspondientes a fracciones de vuelta).

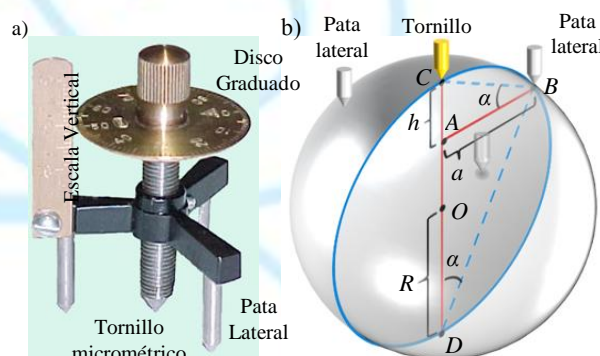


Figura 7. a) Esferómetro típico, b) geometría de un esferómetro.

Geoméricamente, cuando el esferómetro se coloca sobre una esfera, el tornillo central y alguna de las patas laterales estarán en un círculo que corta a la esfera en dos (Figura 7b).

La distancia \overline{CD} es el diámetro de la esfera, siendo $\overline{OD} = \overline{CO} = R$, el radio de curvatura. Si se conoce la distancia \overline{CA} y \overline{AB} se puede encontrar el radio de la esfera. De la geometría de triángulos similares:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD} - \overline{CA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$$

Así:

$$(\overline{CA}) \cdot (\overline{CD} - \overline{CA}) = (\overline{AB})^2$$

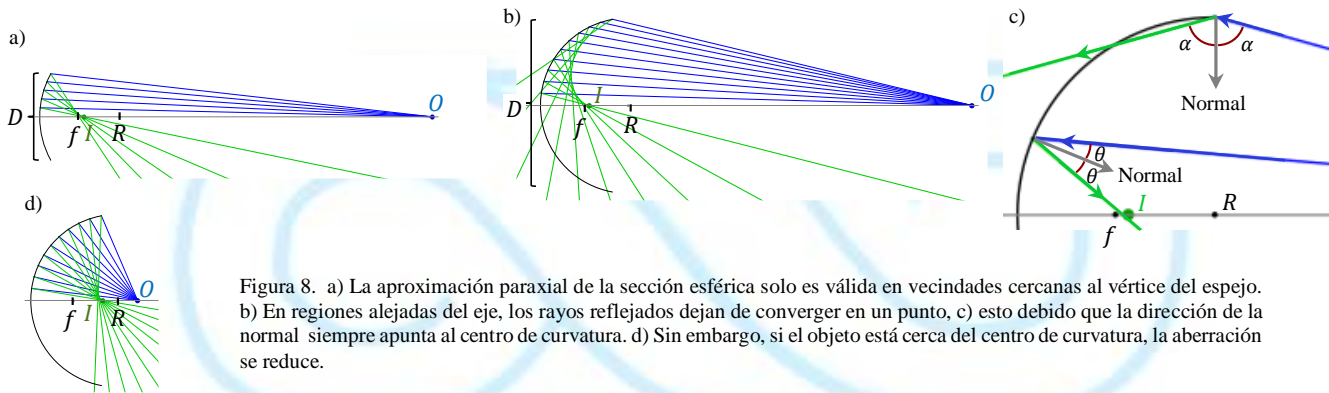
Como $\overline{CD} = 2R$:

$$R = \frac{(\overline{AB})^2}{2(\overline{CA})} + \frac{\overline{CA}}{2}$$

\overline{AB} es la distancia horizontal del tornillo central del esferómetro a una de las patas externas (a), mientras que \overline{CA} es la distancia de desplazamiento vertical (h) del tornillo micrométrico respecto del plano generado por las patas externas del esferómetro. Por lo que la *ecuación del esferómetro* es

$$R = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2} \quad (4)$$

Así, con ayuda de un esferómetro es posible medir el radio de curvatura de un espejo (y su foco) convexo o cóncavo simplemente colocándolo sobre él y midiendo cuanto se desplaza, hacia arriba o hacia abajo, el tornillo central. Por lo general, las patas de los esferómetros son metálicas y puntiagudas, por lo que hay que tener extremo cuidado al colocarlos sobre las superficies reflectoras de los espejos, ya que un movimiento tangencial puede rayarlas.



7 COMENTARIOS SOBRE LA APROXIMACIÓN PARAXIAL.

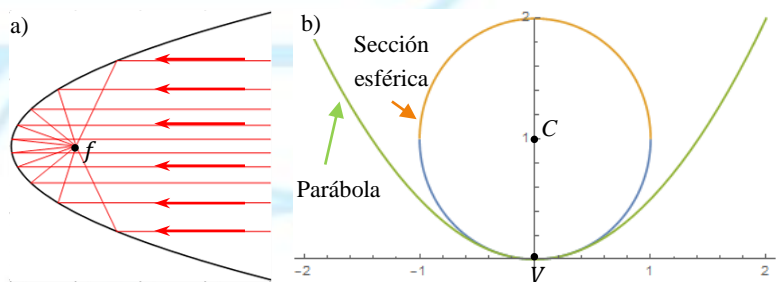
Los espejos esféricos son los más comunes debido a que su construcción es sencilla y económica; sin embargo, presentan deficiencias (denominadas **aberraciones**) en la formación de imágenes, las cuales son notorias para radios de curvatura pequeños ^[1]. Estas aberraciones pueden ser entendidas y visualizadas en un corte transversal de un espejo cóncavo (Figura 8) cuyo objeto puntual está sobre su eje.

Mientras el radio de curvatura del espejo sea mucho mayor que su diámetro (D), los rayos incidentes estarán en una región cercana a su eje (Figura 8a), la aproximación paraxial será válida y los rayos reflejados convergerán en una región prácticamente puntual correspondiente a la predicción dada por la ecuación 1 para la posición de la imagen (punto verde en la figura). Sin embargo, cuando el radio de curvatura es pequeño y el diámetro del espejo es grande (Figura 8b), los rayos que llegan a posiciones en el espejo alejadas de su eje se reflejarán de forma que no todos convergerán en un punto (Figura 8b); esto debido a que la normal del espejo siempre apunta hacia el centro de curvatura, por lo que rayos con un ángulo de incidencia muy grande se reflejarán hacia el espejo y no hacia la imagen formada por los rayos paraxiales (Figura 8c), es decir ya no se cumple $\overline{QV} \approx 0$.

En caso de que el objeto este cerca del centro de curvatura, la aberración disminuirá debido a que los rayos de luz se reflejarán casi de forma normal al espejo esférico (Figura 8d). Sin embargo, esta situación no es muy práctica si queremos que el espejo sea usado en un telescopio, donde los objetos de interés están lejos de C .

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente enunciado: *“Consecuencia de la aberración esférica, en un espejo esférico los objetos colocados cerca de su centro de curvatura se enfocaran de forma correcta, mientras que los objetos muy lejanos no.”*

Debido lo anterior, para uso en telescopios, son preferidos los **espejos parabólicos** (con forma de paraboloide) que, por definición geométrica del paraboloide (y la parábola), reflejan los rayos provenientes de objetos muy lejanos (rayo paralelos) hacia su punto focal ^[6] (Figura 9a); sin embargo, si el objeto se coloca muy cerca del espejo, la imagen no se enfocara adecuadamente, es decir estará aberrada. Esto se puede resumir con el enunciado: *“En un espejo parabólico, los objetos*



colocados muy lejos de su foco se enfocarán de forma correcta, mientras que objetos cercanos a el no.”

Además, la construcción de espejos parabólicos es más demandante, de ahí que el precio de telescopios con este tipo de espejos sea elevado. A pesar de esto, los espejos esféricos pueden funcionar de forma aceptable ya que aproximan a un espejo parabólico cerca del vértice (Figura 9b). Desde luego, entre más grande sea el radio de curvatura la región de aproximación será mayor.

8 REFERENCIAS.

- [1] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, Leno S. Pedrotti. “*Introduction to Optics*”, Cambridge University Press, 2018, 3°ed.
- [2] E. Hecht. *Óptica*. 3° edición, Addison Wesley. 2000.
- [3] Paul A. Tipler. *Physics for scientists and engineers* 4° edición. Freeman/Worth. 1999.
- [4] R.A. Serway, R.J. Beichner. *Física para ciencias e ingeniería*. 5° edición, McGraw-Hill. 2002.
- [5] Sameen Ahmed Khan. Coordinate Geometric Generalization of the Spherometer and Cylindrometer. arXiv:1311.3602. (2015)
- [6] Charles H. Lehmann. *Geometría Analítica*. Uteha. 1969.