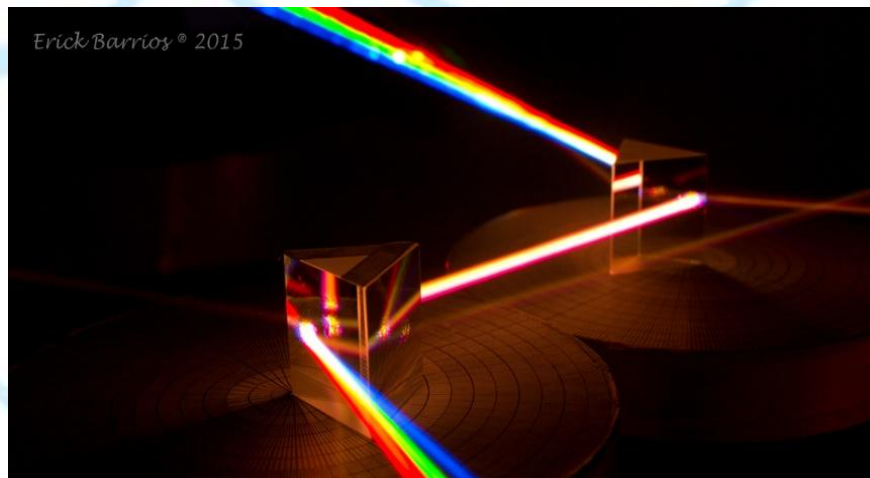


DISPERSIÓN Y ESPECTROSCOPIA



Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.
Óptica (v.2024)

Una consecuencia del cambio en el índice de refracción con la longitud de onda, es la dispersión de colores, responsable de fenómenos como los arcoíris. Esta dispersión también ocurre en prismas, y puede ser aprovechada para estudiar qué longitudes de onda emiten distintas fuentes de luz. Esto es de importancia dado que distintos elementos emiten distintos colores particulares, posibilitando conocer qué elementos componen una fuente a través de la luz que emite, lo cual es llamado espectroscopia. Esta herramienta es de gran importancia en la astronomía para el estudio de los cuerpos celestes.

Contenido

1	OBJETIVO.....	1
1.1	Material.....	1
2	LA ESPECTROSCOPÍA.....	1
2.1	Espectros de Emisión.....	1
2.2	Espectros de Absorción.....	3
3	EL PRISMA DE DISPERSIÓN.....	3
4	EL ESPECTRÓMETRO.....	5
4.1	Uso del Espectrómetro.....	6
5	REFERENCIAS.....	8

1 OBJETIVO.

Caracterizar un prisma de dispersión, deducir su índice de refracción como función del ángulo de desviación $n(\delta)$ y como función de la longitud de onda $n(\lambda)$ usando las desviaciones angulares de ciertas longitudes de onda específicas de una lámpara de mercurio. Con esta información identificarán los valores de longitud de onda de ciertas líneas espectrales de lámparas de gas desconocidos.

1.1 MATERIAL.

Espectrómetro. Prisma de dispersión equilátero. Lámpara de Mercurio y/o de otro gas. Nivel. Lupa.

2 LA ESPECTROSCOPÍA.

La espectroscopia es el estudio de la interacción de la materia con la radiación electromagnética (luz). El concepto de *espectro* fue introducido por Isaac Newton refiriéndose a los colores que se observan cuando luz blanca es dispersada por un prisma en sus colores constituyentes. Actualmente el término se relaciona a la intensidad de la luz como función de la frecuencia o longitud de onda (Figura 1). Los espectros se pueden clasificar en dos tipos: de emisión y de absorción [1, 2, 3].

2.1 ESPECTROS DE EMISIÓN.

Estos espectros son producidos cuando la materia emite radiación a ciertas longitudes de onda. Se subdividen en espectros de línea (“discretos”) y espectros continuos. A continuación, se describe de forma simplificada cómo se generan estos espectros [2, 4].

A) ESPECTROS DE LINEA.

Imaginemos un gas de un elemento particular en un bulbo de vidrio a baja presión (baja densidad) de forma que sus átomos estén lo bastante separados e interactúen “poco” entre ellos. Mientras al gas no se le proporcione de energía, los

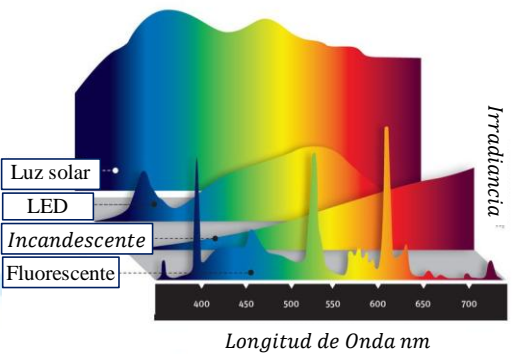


Figura 1. Espectros de fuentes comunes [3].

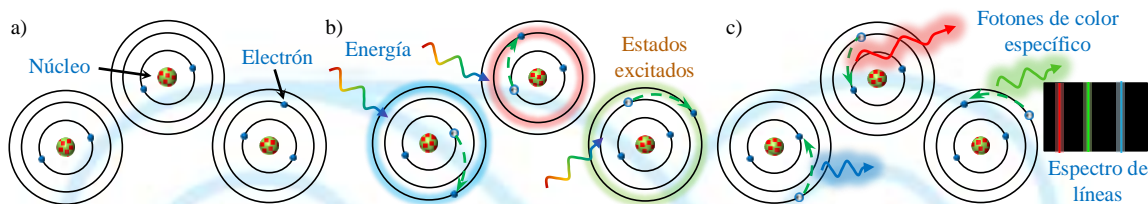


Figura 2. Generación de espectros de línea. a) Átomos en su estado base (nivel de energía más bajo). b) La absorción de energía produce que los electrones suban a niveles superiores. c) Emisión de radiación de color específico cuando los electrones regresan a sus niveles originales.

electrones en los átomos se encontrarán en los niveles más bajos de energía (Figura 2a). Cuando se proporciona energía a los electrones, ya sea calentando el gas (transferencia de energía cinética por colisiones), por diferencia de potencial eléctrico, o por absorción de luz, dichos electrones se excitan y *transitan* a niveles de mayor energía dentro del átomo, dejando vacancias en los niveles originales (Figura 2b). Dependiendo de la cantidad de energía absorbida por los electrones, estos podrán llegar a niveles de energía más elevados.

Después de un cierto tiempo y por distintas razones (*emisión espontánea* o *emisión estimulada*), los electrones regresarán a sus niveles originales mediante la emisión de radiación (*fotones*). Debido a que los niveles de energía en los átomos son discretos y fijos, cuando el electrón baja de nivel, emite radiación con una energía (frecuencia o longitud de onda) muy bien definida, la cual es la diferencia de energía entre los niveles en que ocurrió la transición (Figura 2c), dando lugar a luz con longitudes de onda específicas. Cada transición entre dos niveles en el átomo emitirá luz de un color específico, generando un espectro de emisión particular a la estructura de niveles de los átomos del gas, y dado que cada elemento tiene una estructura de niveles diferente, cada uno tendrá un espectro de emisión único.

B) ESPECTROS CONTINUOS.

Cuando se tiene un gas con una densidad alta o un sólido, los átomos están tan juntos que interactuarán entre ellos, compartiendo electrones y modificando el valor de sus niveles de energía a tal grado que dejan de tener valores discretos y se tornan rangos (o bandas) de energía (Figura 3a) cuyo ancho depende de la magnitud de la interacción. Cuando se les proporciona energía a los electrones, éstos tendrán mayores opciones para moverse a una posición dentro de las bandas; así, una transición podrá corresponder a un cierto rango continuo de valores de energía ya que las bandas no tienen un único valor. Cuando los electrones bajan de nivel también lo hacen emitiendo luz en un rango de longitudes de onda, las cuales forman una banda espectral continua (rango de varios colores), aunque el ancho y la intensidad de la banda espectral puede ser distinta dependiendo de la probabilidad de transición.

Si la energía suministrada es lo suficientemente grande, los electrones pueden incluso quedar libres (fuera de los átomos), dejando vacancias en las bandas de energía (Figura 3b). Cuando algún electrón libre (no necesariamente salido del mismo átomo) es absorbido por un átomo ionizado (con alguna vacancia en la banda), éste cederá la energía extra que porta emitiendo un fotón. Debido a que la energía que porta el electrón libre también tiene un rango muy amplio de

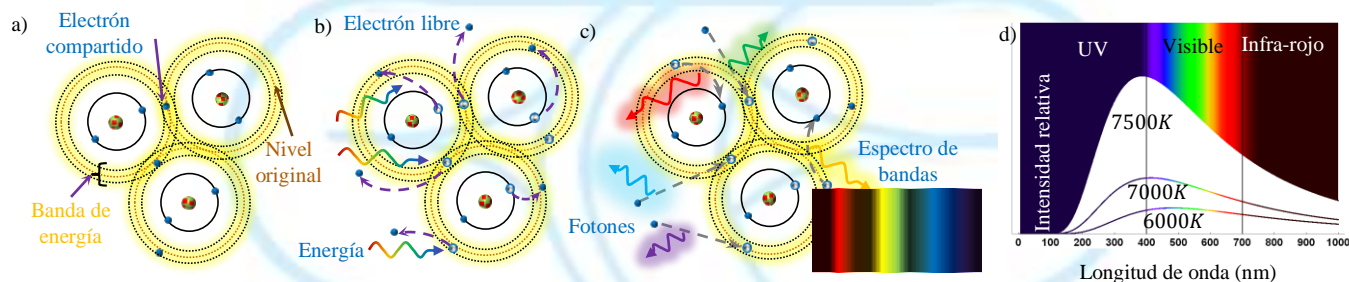


Figura 3. Espectros continuos. a) La interacción entre átomos crea bandas de energía. b) Cuando se les proporciona energía a los electrones, algunos electrones suben a bandas con mayor energía o quedan libres dejando vacancias. c) Cuando los electrones regresan a las vacancias emiten radiación a longitudes de onda en rangos más amplios. d) Un ejemplo extremo es la radiación de cuerpo negro, cuya distribución de longitudes de onda depende de la temperatura.

posibles valores, la diferencia de energía emitida no tendrá restricción a un solo valor de frecuencia (Figura 3c). De este modo, se generan distribuciones de longitudes de onda continuas por regiones y, en el caso extremo (muchas interacciones entre átomos y mucha energía proporcionada), dichas distribuciones tienden a una distribución de radiación de cuerpo negro (Figura 3d), donde la distribución es continua en todo el espectro y la intensidad relativa de cada longitud de onda varía con la temperatura.

2.2 ESPECTROS DE ABSORCIÓN.

Estos espectros se generan por un proceso inverso a los espectros de emisión. Supongamos que luz con espectro continuo (del tipo de cuerpo negro), es decir, con todas las longitudes de onda, incide en un gas con densidad baja, frío (electrones en sus estados de mínima energía) y donde los átomos no interactúan entre ellos (niveles de energía discretos y fijos). En dicha situación los electrones absorberán solamente las longitudes de onda que produzcan transiciones a niveles con mayor energía; en consecuencia, después de cruzar el gas, el espectro continuo presentará líneas oscuras correspondientes a las longitudes absorbidas. De forma similar, si el gas no tiene densidad baja, presentará bandas de absorción.

Cuando los electrones que absorbieron esas longitudes regresan a sus niveles originales, emitirán la misma longitud absorbida como espectros de línea; sin embargo, no necesariamente será emitida en la dirección original en que viajaba la radiación, por lo que, si nosotros estamos observando de frente la luz, percibiremos una franja oscura correspondiente a la luz reemitida. En la Figura 4 se ejemplifica como se producen y miden los tres tipos de espectro.

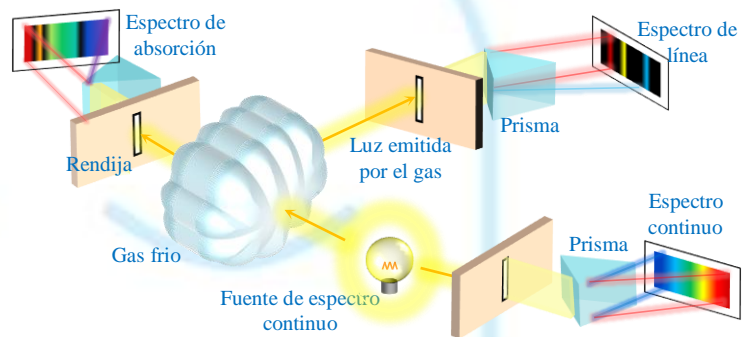


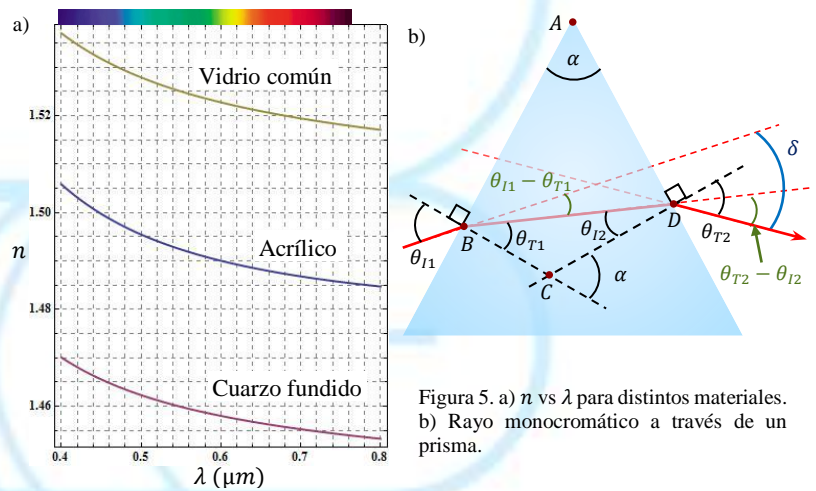
Figura 4. a) Formas de observar los tres tipos distintos de espectros.

Es de notar que, para producir la dispersión de la luz es indispensable un prisma, por lo que saber cómo funcionan es indispensable, lo cual se abordará en la siguiente sección.

3 EL PRISMA DE DISPERSIÓN.

Una propiedad importante de cada material translúcido es que sus átomos interactúan de forma diferente con los distintos colores (longitudes de onda)^[1, 2], es decir, el índice de refracción depende de la longitud de onda ($n(\lambda)$) que pasa a través del material (Figura 5a). En la ley de Snell esto producirá un ángulo de refracción distinto para cada color. Dicho fenómeno se denomina *dispersión*.

Un rayo de luz con una longitud de onda específica que incide sobre el prisma emergerá refractado de su dirección original, en un ángulo δ , denominado *ángulo de desviación*. Como se



observa en la Figura 5b, en la primera interface el rayo se desvía un ángulo $(\theta_{I1} - \theta_{T1})$, mientras que en la segunda interface es desviado un ángulo de $(\theta_{T2} - \theta_{I2})$. La desviación total será ^[1, 2]:

$$\delta = (\theta_{I1} - \theta_{T1}) + (\theta_{T2} - \theta_{I2}) \quad (1)$$

Como el polígono \overline{ABCD} contiene dos ángulos rectos (en B y D), el ángulo $\angle \overline{BCD}$ debe ser el suplemento del ángulo en el vértice A y, en consecuencia, α es el ángulo exterior al $\triangle \overline{BCD}$. De la suma de los ángulos alternos internos:

$$\alpha = \theta_{T1} + \theta_{I2} \xrightarrow{\text{en 1}} \delta = \theta_{I1} + \theta_{T2} - \alpha \quad (2)$$

En la práctica, es útil escribir δ solamente como función del ángulo de incidencia (θ_{I1}) y del ángulo del prisma (α) , los cuales pueden medirse directamente. Asumiendo que el prisma (con índice de refracción $n(\lambda)$) está rodeado de aire ($n_{\text{ext}} \approx 1$), la Ley de Snell en la segunda interfaz produce que:

$$n(\lambda)\text{sen}(\theta_{I2}) = n(\lambda)\text{sen}(\alpha - \theta_{T1}) = \text{sen}(\theta_{T2})$$

Expandiendo el $\text{sen}(\alpha - \theta_{T1})$, utilizando que $\cos(\theta_{T1}) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{T1})}$ y la Ley de Snell en la primera interfaz ($\text{sen}(\theta_{I1}) = n(\lambda)\text{sen}(\theta_{T1})$), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_{T2}) &= n(\lambda) \left\{ \text{sen}(\alpha) \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{T1})} - \text{sen}(\theta_{T1}) \cos(\alpha) \right\} \\ &= \text{sen}(\alpha) \sqrt{n(\lambda)^2 - \text{sen}^2(\theta_{I1})} - \text{sen}(\theta_{I1}) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Utilizando esta relación en la expresión del ángulo de desviación (ecuación 2), se tiene:

$$\delta = \theta_{I1} + \text{sen}^{-1} \left\{ \text{sen}(\alpha) [n(\lambda)^2 - \text{sen}^2(\theta_{I1})]^{\frac{1}{2}} - \text{sen}(\theta_{I1}) \cos(\alpha) \right\} - \alpha \quad (3)$$

Si se hace una gráfica de $\delta(\theta_{I1})$, manteniendo la longitud de onda y el índice de refracción constante, observaremos que existe un valor mínimo de δ (Figura 6a); sin embargo, este valor mínimo, o *ángulo de desviación mínima* (δ_m), es distinto para cada longitud de onda.

En experimentos donde se trabaja con fuentes de luz monocromática (como láseres), es bastante útil saber cómo encontrar δ_m . Una forma sencilla de hallar las condiciones experimentales que permiten conocer dicho punto es analizando la gráfica de la Figura 6a. Por ejemplo, asumamos que tenemos un láser rojo ($n_{\text{rojo}} = 1.5147$) y un prisma con $\alpha = 60^\circ$, hay dos formas de obtener un ángulo de desviación $\delta = 43.97^\circ$, una haciendo incidir el láser a $\theta_I = 34^\circ$

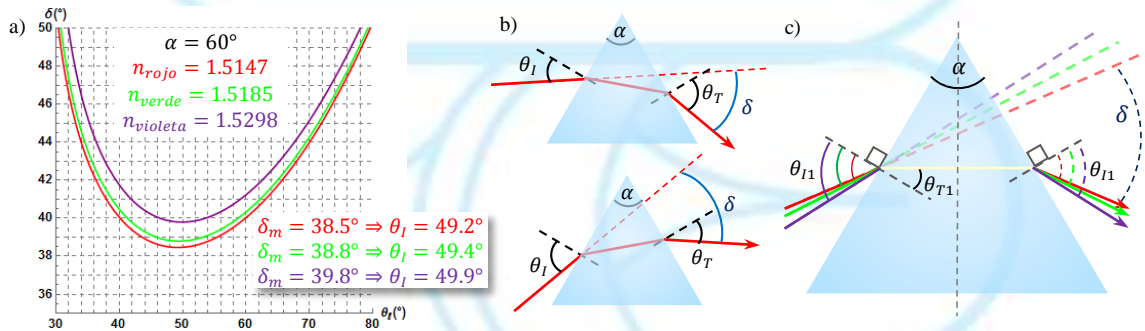


Figura 6. a) δ vs θ_I en un prisma de vidrio Crown para longitudes de onda roja (632nm), verde (543nm) y violeta (405nm). b) Debido al principio de reversibilidad, existe una simetría alrededor del ápice del prisma. c) El ángulo de desviación mínima es distinto para cada color, por lo que sus ángulos de incidencia son distintos, sin embargo todos atraviesan el prisma de forma simétrica.

(lo cual, de la aplicación de la Ley de Snell en las dos caras, implica $\theta_T = 69.97^\circ$), y la otra haciendo $\theta_I = 69.97^\circ$ (implicando $\theta_T = 34^\circ$). Esta relación entre los ángulos θ_I y θ_T es consecuencia del principio de reversibilidad y la simetría del prisma, por lo que, para cualquier ángulo δ , habrá un par de ángulos que lo generen (Figura 6b). Si queremos cambiar el ángulo de incidencia de nuestro láser de $\theta_I = 34^\circ$ a $\theta_I = 69.97^\circ$, podremos observar que necesariamente habrá un momento en que $\theta_I = \theta_T$, y si observamos la gráfica, ese momento corresponde al ángulo de desviación mínima. Así, la condición para la desviación mínima es:

$$\theta_{I1} = \theta_{T2} \Rightarrow \theta_{T1} = \theta_{I2} \quad (4)$$

“Un rayo cuya desviación es mínima, atraviesa el prisma simétricamente paralelo a su base”.

Cuando $\delta = \delta_m$, de las ecuaciones 2, se tendrá que:

$$\theta_{I1} = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \quad y \quad \theta_{T1} = \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

Aplicando estas condiciones a la Ley de Snell en la primera interfaz junto con las ecuaciones 5:

$$n(\lambda) = \left\{ \text{sen} \left(\frac{\delta_m(\lambda) + \alpha}{2} \right) \right\} / \left\{ \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad (6)$$

Sin embargo, es importante notar que la ecuación 6 implica que hay un ángulo de desviación mínima distinto para cada longitud de onda ya que el índice de refracción es distinto para cada longitud de onda; es decir, los valores de las condiciones en 4 serán distintas para cada color (Figura 6c). Esto implica que la ecuación 6 no se debe usar en caso de tener fuentes de luz policromáticas.

Las ecuaciones 3 y 6 son la base de una de las técnicas más exactas para determinar los índices de refracción de materiales, y para su aplicación en espectroscopia, siendo la ecuación 3 la más general. Conociendo los ángulos θ_{I1} y α , es posible determinar el índice de refracción asociado a cada ángulo de desviación δ . La ecuación 6 es útil cuando se trabaja con una longitud de onda particular (fuente monocromática); sin embargo, para utilizar esta ecuación es necesario colocar el prisma de forma que el rayo de la longitud de onda de interés salga en su desviación mínima (δ_m).

4 EL ESPECTRÓMETRO.

Como podemos observar de la ecuación 3 y la gráfica de la figura 6a, cambios en el índice de refracción producen variaciones en los ángulos de desviación, por lo que, para realizar espectroscopia, es recomendable utilizar un prisma que disperse mucho y/o un instrumento que facilite medir ángulos con precisión (ya que es posible que el material del prisma disperse la luz en un espectro de colores en un rango angular muy reducido). Por ejemplo, si tenemos un prisma equilátero ($\alpha = 60^\circ$) con $n(400nm) = 1.8454$ y $n(680nm) = 1.7736$, en el que incide un haz de luz blanca a $\theta_I = 60^\circ$, la luz blanca (combinación de todas las longitudes de onda visibles) se dispersará en los colores del arcoíris (en orden creciente de ángulo de desviación): rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta, dentro de un rango de ángulos de desviación de $\delta = \{65.15^\circ, 78.03^\circ\}$ (Figura 7).



Figura 7. Espectro de luz blanca producido por un prisma.

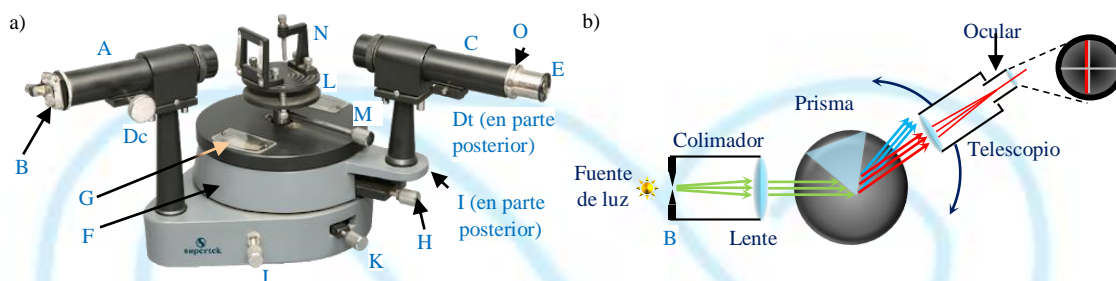


Figura 8. a) Espectrómetro típico, ver texto para descripción. b) Diagrama de rayos del funcionamiento de un espectrómetro.

El instrumento más común que permite medir esta dispersión de colores es el *espectrómetro de prisma* (Figura 8a), el cual permite estudiar los espectros de luz y determinar qué tipo de átomos están presentes en una sustancia. Por ejemplo, en química se utiliza para determinar los constituyentes de moléculas, o en astronomía para determinar la composición de estrellas o exo-planetas.

4.1 USO DEL ESPECTRÓMETRO.

Un espectrómetro consta de tres componentes principales: colimador, prisma y telescopio (Figura 8a). En general, la luz por analizar entra al colimador a través de una rendija de ancho ajustable [B] posicionada en el foco de la lente colimadora (localizada en el tubo *Colimador* [A]). Esto hace que la luz que sale del colimador sea un haz colimado delgado, lo que asegura que toda la luz llegue al prisma al mismo ángulo de incidencia (Figura 8b). El prisma dispersará cada color a un ángulo de desviación distinto muy particular, el cual será recolectado con ayuda de un *Telescopio* [C], el cual está montado en un sistema rotatorio de alta precisión [F] con escala vernier [G] (debido a esto, *la forma de transportar el espectrómetro es sujetándolo del poste base del colimador, NUNCA del telescopio*). El uso del espectrómetro suena bastante sencillo, sin embargo, requiere de una alineación cuidadosa.

Para que el telescopio pueda coleccionar de forma adecuada la luz dispersada, es necesario que este enfocado al infinito (para enfocar el haz de luz colimado en el ocular). Para esto, se tiene que observar algún objeto lejano con el telescopio (sin el colimador de por medio) y, utilizando su tornillo de enfoque [Dt], se busca una imagen nítida en el ocular [E]. Para ayudar a posicionar el telescopio sobre la imagen observada, el telescopio tiene una retícula de cruz, la cual también facilita la medición precisa de la posición del telescopio. La retícula se enfoca con ayuda de un anillo en el tubo del telescopio [O], el cual, al estar suelto, posibilita mover la posición de la retícula respecto del ocular además de alinearla de forma vertical.

Una vez enfocado el telescopio, es necesario enfocar el colimador para asegurar que genere un haz colimado. Para esto, se coloca una fuente de luz frente a la rendija del colimador (abierto a un tamaño de máximo 1mm) y se coloca el telescopio directamente frente al colimador (en caso de que la intensidad de la fuente sea considerable, es recomendable atenuar la luz con algún filtro. *No observar luz intensa directamente con el telescopio*). El movimiento del telescopio es controlado con un tornillo de seguridad [H] y un tornillo de ajuste fino [I]: mientras el tornillo de seguridad este libre, la base [F] se puede rotar de forma manual grandes distancias; si el tornillo de seguridad está puesto, el tornillo de ajuste fino permite un movimiento con mayor precisión, pero corto. Una vez que el telescopio esta frente al colimador, se asegura con el tornillo [H] y se observar la rendija a través de él. En caso de ser necesario, se debe utilizar el tornillo de ajuste fino hasta alinear la retícula vertical con la orilla fija de la rendija y si la imagen de ésta no se ve nítida, habrá que ajustar el enfoque del colimador con el tornillo [Dc].

En esta configuración, se ajusta el vernier para que marque 0° (es decir, el telescopio está frente al colimador o “el haz colimado no sufre desviación”). Para esto, se quita el seguro de la escala vernier [K] y se gira su ventana [G] hasta

que el cero de la escala principal coincida con el cero del vernier (para mayor precisión usar el tornillo de movimiento fino [J] después de asegurar la escala con el tornillo [K]).

Una vez que el telescopio y colimador está alinéalos, se procede a colocar el prisma. Como primera consideración, para que los rayos sean recolectados de forma adecuada, es necesario que el prisma este nivelado, lo cual se puede hacer con ayuda de los tres tornillos debajo la *Mesa del espectrómetro* y ajustando su altura [L, M]. Por seguridad, el prisma puede ser fijado a la mesa con la pinza de la mesa [N]. El prisma se debe colocar en la mesa del espectrómetro de forma que el ápice por donde entra la luz esté lo más cerca posible del centro de la mesa (Figura 9) y que la normal de la cara de incidencia este a alrededor de 120° del rayo sin desviar.

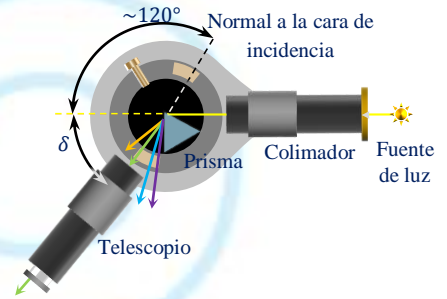


Figura 9. Colocación del prisma en un espectrómetro.

Como se vio en la teoría, cada color será desviado a un ángulo δ particular, medido respecto del rayo sin desviar (0°). Cuando el telescopio se posiciona a un cierto ángulo para coleccionar un color particular, se observará una imagen de la rendija del colimador (en caso de espectros de línea o el arcoíris en caso de espectros continuos) de un cierto color en el centro del campo de visión del telescopio. Esta posición se puede medir con ayuda del vernier. El número de imágenes de distintos colores de la rendija, vistas a través del telescopio, y su distribución dependerá del espectro de la luz de la fuente.

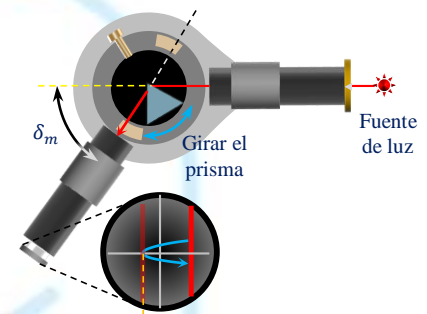


Figura 10. Búsqueda del ángulo de desviación mínima.

En caso de trabajar con fuentes monocromáticas (una sola longitud de onda) y requerir el ángulo de desviación mínima para usar la ecuación 6, es necesario encontrar la posición del prisma que lo genera ($\delta_m(\lambda)$). Para esto, hay que identificar la cara del prisma por la que sale el rayo de luz refractado y rotar el prisma (girando la mesa del espectrómetro) hasta observar el ángulo al cual la imagen de la rendija, vista a través del telescopio, invierte su dirección de movimiento (Figura 10). Una vez encontrado el ángulo, se asegura el telescopio y la mesa del espectrómetro de forma que la línea vertical de la retícula este justamente en la posición donde se invierte la dirección de movimiento.

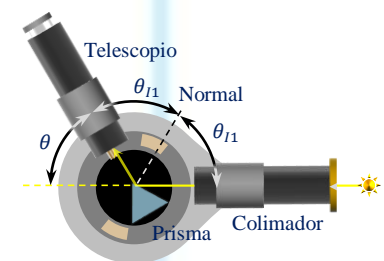


Figura 11. Medición del ángulo de incidencia.

Un dato muy importante para poder utilizar la ecuación 3 es el ángulo de incidencia (θ_{i1}). Este se puede medir observando con el telescopio la porción del haz que se refleja en la cara de incidencia y usando la ley de reflexión (Figura 11). Una vez alineada la imagen reflejada de la rendija con la línea vertical de la retícula, se mide con el vernier la posición angular del telescopio θ respecto del cero, y teniendo en mente la ley de reflexión, podemos ver que $2\theta_{i1}[\text{rad}] = \pi - \theta[\text{rad}]$.

Finalmente, ya con todo lo anterior, contamos con todo lo necesario para caracterizar los índices de refracción de un prisma a través de la medición de ángulos de desviación y la ecuación 3, o conocer las longitudes de onda con las que cuenta una fuente de luz si lo que conocemos es su índice de refracción. Sin embargo, para esto es necesario tener una fuente de luz (elemento) de referencia del cual se conozcan las longitudes de onda de sus líneas espectrales, por ejemplo, el Mercurio (Hg, Figura 12). Si colocamos la fuente luz de Hg en la entrada del colimador, en el telescopio veremos una serie de imágenes refractadas de las rendijas (de distintos colores) separadas unas de otras (ya que el Hg tiene un espectro de líneas), para medir la posición angular de las líneas con precisión, se debe utilizar el vernier junto con el tornillo fino para desplazar el telescopio (si la separación entre líneas fuera considerable se recomienda quitar el tornillo de seguridad

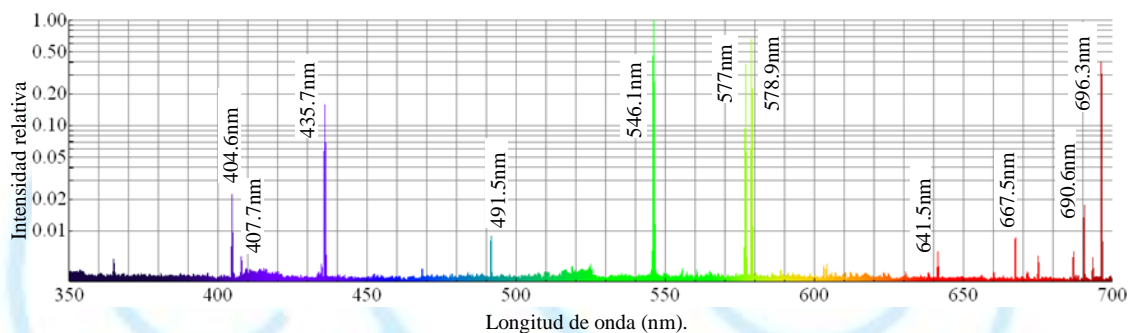


Figura 12. Espectro de una lámpara de Mercurio.

y mover el telescopio de forma manual). La posición será la desviación angular que, junto con la ecuación 3, permite obtener el índice de refracción para cada línea espectral (longitud de onda).

Así, a cada índice de refracción (o a cada ángulo de desviación) le corresponderá una longitud de onda específica (color) $n(\lambda)$. Tomando en cuenta el espectro conocido y las mediciones experimentales de los ángulos de desviación para las distintas líneas del Hg, es posible conocer la relación $\lambda(\delta)$, mientras que la ecuación 3 nos proporciona la relación $n(\delta)$, por lo que, concatenando ambas relaciones, es posible obtener $n(\lambda)$, la cual es posible aproximar, con buena calidad, con ajustes polinomiales de 2° o 3° orden. Consultando la referencia [5] se pueden comparar los resultados experimentales con los valores aceptados de $n(\lambda)$ correspondientes al material del prisma utilizado.

Una vez caracterizado el prisma de esta forma, se pueden analizar líneas espectrales de elementos más complejos o incluso con espectros continuos, es decir, hacer espectroscopia.

5 REFERENCIAS.

- [1] E. Hecht. *Óptica*. 3° edición, Addison Wesley, 2000.
- [2] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, Leno S. Pedrotti. *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 2018, 3°ed.
- [3] John Herrman. *Ultimate Light Bulb Test*. Popular Mechanics. Fecha de consulta Agosto 2018. <https://www.popularmechanics.com/technology/gadgets/reviews/g164/incandescent-vs-compact-fluorescent-vs-led-ultimate-light-bulb-test/>
- [4] Arthur Beiser. *Concepts of Modern Physics*. Mc-Graw-Hill, 2003, 6° ed.
- [5] Mikhail Polyanskiy. *Refractive index database*. <http://refractiveindex.info/> 2008-2020