Coeficientes de Fresnel

Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.
Laboratorio de Óptica, v.2018

La relación entre la teoría electromagnética y la óptica es particularmente apreciable en los fenómenos de polarización. En particular, el estudio de los fenómenos de reflexión y refracción desde la perspectiva de las ecuaciones de Maxwell, ha permitido el diseño de dispositivos anti-reflexión como los lentes polarizados entre otras aplicaciones en pantallas de proyección.

Contenido

1 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA.

De la teoría electromagnética de Maxwell se sabe que los campos eléctrico y magnético cumplen las ecuaciones [1]:

$$(i)\ \nabla\cdot\epsilon\vec{E}=0 \quad (iii)\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$(ii)\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \quad (iv)\ \nabla\times\vec{B}=\mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Donde ϵ es la *permitividad* del material y μ la *permeabilidad* del material. La solución a estas ecuaciones son funciones armónicas (ondas) con velocidad $v=c/n$, de lo que se puede encontrar que:

$$n=\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

En los fenómenos cotidianos, $\mu\cong\mu_0$. En el caso de ondas planas monocromáticas, la intensidad (irradiancia) de dicha onda estará dada por:

$$I=\frac{1}{2}\epsilon v E_0^2$$

Donde E_0 es la amplitud de la onda. Ahora surge la siguiente pregunta: ¿Qué ocurre con el campo cuando la onda pasa de un medio transparente a otro (por ejemplo, de aire a agua)? La respuesta depende de las condiciones de frontera entre los dos medios [1]:

$$(i)\ \epsilon_1E_1^{\perp}=\epsilon_2E_2^{\perp} \qquad (iii)\ \vec{E}_1^{\parallel}=\vec{E}_2^{\parallel}$$
$$(ii)\ B_1^{\perp}=B_2^{\perp} \qquad (iv)\ \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel}=\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} \tag{1}$$

Donde el símbolo $\perp$ denota polarización (componente del campo eléctrico vectorial) perpendicular a la interfase de los medios y $\parallel$ denota polarización paralela a la interface. Haciendo referencia a la Figura 1, las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en cada medio son [1]:

$$\vec{E}_I(\vec{r},t) = \vec{E}_{0I}e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega t)}, \qquad \vec{B}_I(\vec{r},t) = \frac{1}{v_1}(\hat{k}_I \times \vec{E}_I)$$
$$\vec{E}_R(\vec{r},t) = \vec{E}_{0R}e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t)}, \qquad \vec{B}_R(\vec{r},t) = \frac{1}{v_1}(\hat{k}_R \times \vec{E}_R) \qquad (2)$$
$$\vec{E}_T(\vec{r},t) = \vec{E}_{0T}e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}, \qquad \vec{B}_T(\vec{r},t) = \frac{1}{v_2}(\hat{k}_T \times \vec{E}_T)$$

Como las tres ondas (incidente, transmitida y reflejada) tienen la misma frecuencia, se encuentra que:

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega \text{ ó } k_I = k_R = \frac{n_1}{n_2}k_T$$

Así, por continuidad, los campos en el medio 1 ($\vec{E}_I + \vec{E}_R$ y $\vec{B}_I + \vec{B}_R$) deben acoplarse sin dislocaciones (ser continuos) con los campos en el medio 2 ($\vec{E}_T$ y $\vec{B}_T$) de acuerdo a con las condiciones de frontera de las ecuaciones 1. Al realizar lo anterior se llega a que:

$$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = \vec{k}_R\cdot\vec{r} = \vec{k}_T\cdot\vec{r} \qquad cuando \quad z = 0 \qquad (3)$$

De donde se puede concluir que:

a) *Los vectores de onda (k´s) de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas están en un mismo plano normal a la superficie entre los dos medios*.

b) *El ángulo de incidencia es igual al de reflexión*: $\theta_I = \theta_R$

c) Se deduce la *ley de Snell*: $\frac{sen\theta_T}{sen\theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$

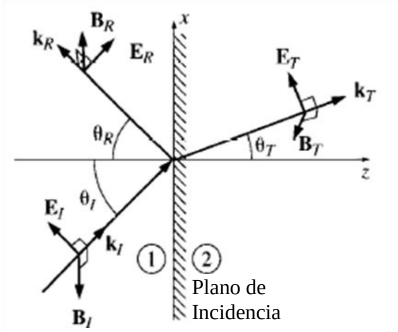

Figura 1. Geometría de una onda incidiendo en una interfase.

La relación dada por la ecuación 3 permite simplificar las ecuaciones de onda 2 y sustituirlas en las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones 1, dando origen a las ecuaciones:

$$(i)\ \epsilon_1(\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R})_z = \epsilon_2(\vec{E}_{0T})_z \qquad (iii)\ (\vec{E}_{0I} + \vec{E}_{0R})_{x,y} = (\vec{E}_{0T})_{x,y}$$
$$(ii)\ (\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R})_z = (\vec{B}_{0T})_z \qquad (iv)\ \frac{1}{\mu_1}(\vec{B}_{0I} + \vec{B}_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}(\vec{B}_{0T})_{x,y} \qquad (4)$$

Suponiendo que la polarización de la onda incidente es paralela al plano de incidencia (*xz* en la figura), se puede deducir de la ecuación 4 que:

$$E_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)E_{0I} \;\; y \;\; E_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)E_{0I} \qquad (5)$$

Con $\alpha = \frac{cos\theta_T}{cos\theta_I} = \frac{\sqrt{1-[(n_1/n_2)sen\theta_I]^2}}{cos\theta_I}$ y $\beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$. Estas son conocidas como *Ecuaciones de Fresnel para polarización en el plano de incidencia*. De estas ecuaciones se observa un ángulo particular llamado *ángulo de Brewster*, en el cual la onda reflejada se extingue completamente, es decir, $\alpha = \beta$.

$$tan\ \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{6}$$

Donde se asumió que $\mu_1 \approx \mu_2$. Por otro lado, como la intensidad de cada onda (incidente, reflejada y transmitida) está dada por:

$$\begin{aligned} I_I &= \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 cos\theta_I \\ I_T &= \frac{1}{2}\epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 cos\theta_T \\ I_R &= \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 cos\theta_R \end{aligned} \tag{7}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden deducir los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \\ T &= \frac{I_T}{I_I} = \alpha\beta\left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

En la Figura 2, se muestran las gráficas de los *coeficientes de Fresnel* (razón entre los campos) y coeficientes de reflexión y transmisión, respecto del ángulo de incidencia, para polarización paralela al plano de incidencia.

En el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia, se hace un desarrollo similar al anterior; sin embargo, en este caso, las ecuaciones de Fresnel obtenidas son:

$$E_{0R} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)E_{0I}\ \ y\ \ E_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta}\right)E_{0I} \tag{9}$$

Produciendo los siguientes coeficientes de reflexión y transmisión:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)^2 \\ T &= \alpha\beta\left(\frac{2}{1 + \alpha\beta}\right)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

También se puede observar que, según estas ecuaciones, para el ángulo de Brewster se cumple que $\theta_I + \theta_T = 90°$. Esto significa que cuando el rayo incidente y el rayo refractado forman 90°, el rayo reflejado estará polarizado con su campo

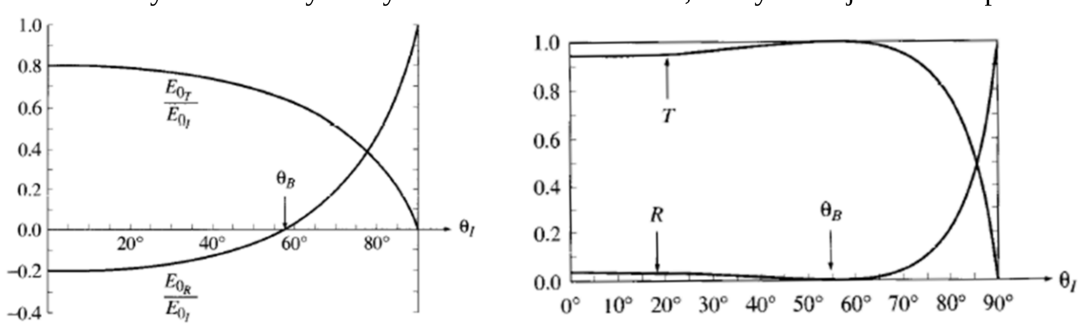

Figura 2. Razón entre los coeficientes de Fresnel vs Angulo de incidencia (izquierda). Coeficientes de Reflexión y Transmisión (derecha).

eléctrico oscilando en el plano perpendicular al plano de incidencia. La existencia de esta condición tiene implicaciones muy importantes, ya que este efecto solo tiene explicación aceptando la naturaleza electromagnética (ondulatoria) de la luz.

2 COMPROBACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FRESNEL.

Para poder medir los coeficientes de Fresnel cuando luz polarizada cruza y se refleja en una interface, es necesario usar un montaje como el mostrado en la Figura 3, el cual utiliza un polarizador para generar luz (láser es recomendada) con polarización paralela u ortogonal al plano de incidencia, dependiendo de los coeficientes que se quieran medir.

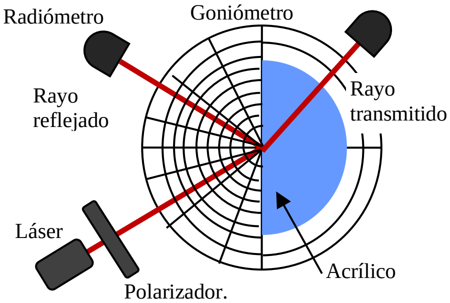

Figura 3. Arreglo experimental para analizar los coeficientes de Fresnel.

La luz polarizada llega a un semi-disco de acrílico por su cara plana (la cual será la interface de estudio), en esta cara parte de la luz se reflejará y parte refractará (para el coeficiente de transmisión hay que tomar en cuenta que el haz atraviesa dos interfases, si el semi-disco está bien alineado, la segunda interface circular con producirá cambio alguno ya que la incidencia sería normal), y dependiendo de la dirección de polarización de la luz incidente, habrá distintos valores de coeficientes de transmisión y reflexión.

Para poder medir la cantidad de irradiancia transmitida y reflejada, se utiliza un radiómetro. Esta irradiancia será medida para distintos ángulos de incidencia de la luz y su polarización.

Es de notar que los coeficientes se obtienen a partir de la razón de la irradiancia incidente I_0 y la irradiancia de salida (reflejada I_R o transmitida I_T). Haciendo una gráfica de Intensidad relativa (reflejada o transmitida) vs ángulo de incidencia, se pueden observar los comportamientos de los coeficientes, incluido el ángulo de Brewster.

3 PRACTICA.

3.1 OBJETIVO.

Comprobar las Ecuaciones de Fresnel a partir de realizar observaciones en la intensidad de la luz reflejada y transmitida, como función de la polarización y ángulo de la luz incidente.

3.2 MATERIAL.

1 diodo Láser. 1 polarizador. Radiómetro. Goniómetro. Bases. Semicírculo de Lucita.

4 REFERENCIAS.

[1] David J. Griffiths "*Introduction to Electrodynamics*". Third Edition. Prentice Hall 1999.