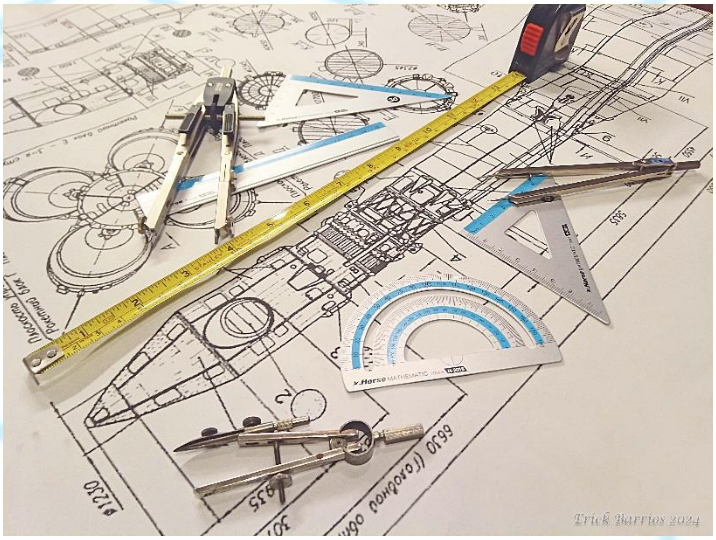
INCERTIDUMBRES Y ANÁLISIS DE MEDICIONES



Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.
Óptica (v.2024)

Toda medición, sin importar lo cuidadosa que se haya hecho, está sujeta a errores e incertezas. El estudio y análisis de estas incertezas es muy importante para estimar su magnitud y ayudarnos a evitarlas o reducirlas, de forma que las mediciones sean útiles y puedan ser comparadas con las predicciones teóricas. De igual forma, uno de los recursos más usados para evaluar y visualizar la congruencia entre mediciones experimentales y predicciones teóricas consiste en hacer gráficos, por lo que manejarlos de forma correcta también es de gran importancia.

Contenido

El objetivo de la docencia en ciencias experimentales es practicar y mejorar el uso del método científico, corroborando predicciones de teorías existentes o cantidades de referencia, lo cual nos ayudará a saber si nuestra aplicación de dicho método es correcta. Esto puede parecer trivial, sin embargo, *el reto del aprendizaje radica en identificar si los resultados encontrados se ajustan a dichas teorías, dentro de las limitaciones que se tengan y si se pueden mejorar*. Aquí es donde el análisis de incertidumbres toma relevancia, ya que no comprender dicha importancia y la lógica subyacente, torna el análisis en un ejercicio sin significado donde solo se aplican fórmulas sin evaluar su pertinencia.

Lo siguiente es una guía general para reportar resultados y estimar, manejar y expresar incertidumbres, la cual no debe pensarse como un instructivo con pasos específicos. Se trata de una versión simplificada de “Guide to the expression of uncertainty in measurements” [1], con la particularidad que está enfocada a las condiciones generales de los laboratorios de enseñanza.

1 OBJETIVO.

Repasar el manejo de incertidumbres, el análisis gráfico y analítico (con fórmulas) de datos experimentales. Como ejemplo se usará el calculo de la aceleración de la gravedad (g) usando un péndulo simple.

1.1 MATERIAL.

Cronómetro. Flexómetro. Soporte universal. Soporte para péndulo. Péndulo.

2 LA INCERTIDUMBRE Y SU ESTIMACIÓN.

Para comenzar, es necesario conocer la diferencia entre *error* e *incertidumbre*: *ERROR es la diferencia entre un valor medido y uno de referencia* [2], no es una equivocación, además es posible reducirlos mediante procesos experimentales cuidadosos; por otro lado, *INCERTIDUMBRE es un parámetro numérico que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a mediciones de un mesurando* [2], se puede reducir mediante experimentación y análisis. Por ello, tener idea de cómo asignar la incertidumbre de una medición es siempre importante.

Por ejemplo, imaginemos que queremos medir la altura en una entrada para la construcción y colocación de una puerta; una primera *estimación* simplemente observa la entrada y decimos que su altura es "*alrededor de* $210cm$", pudiendo estar en un *rango de valores* (incertidumbre) de $200cm$ a $220cm$. Con esta información, podemos hacer una puerta de $215cm$, estar en conformidad con lo solicitado y que no cuadre la puerta. Para evitar este error, necesitamos una mejor estimación, y para eso usamos una cinta métrica y encontramos que la altura es "*casi*" de $211.3cm$, sin llegar a dicha marca; es decir, hay una *incerteza* en la altura que requiere estimar donde esta la orilla de la entrada respecto de las marcas más cercanas (211.2cm y 211.3cm). Esta estimación de incertidumbre de 1mm podría ser suficiente para construir la puerta con una holgura tal que requiera ajustes menores para colocarla. Si quisiéramos todavía más precisión, podríamos utilizar un láser pero, aun así, se tendría una incertidumbre del orden de la longitud de onda del láser y, además, encontraríamos nuevas fuentes de incerteza (altura de la entrada no homogénea, variaciones con temperatura, etc.), lo cual nos llevaría a pensar que, "*el tamaño de la puerta no se puede medir con exactitud*", pero esto sería complicar la situación innecesariamente.

Este ejemplo permite hacer las siguientes conclusiones [1]:

- **Una buena medición toma en cuenta las características del mesurando, el modelo físico, el método de medición, el procedimiento de medición y la precisión requerida.**
- **La incertidumbre se puede minimizar a un valor práctico, pero no eliminar.**

La lógica detrás de la situación de medición y su propósito son lo que permite definir la incertidumbre (rango de variación esperado) así como posibles mejoras al experimento, por lo que se les debe poner atención al momento de realizar los experimentos [1].

- **La incertidumbre siempre es evaluada usando los datos e información disponibles.**
- **En la evaluación de incertidumbres es fundamental el pensamiento crítico, honestidad intelectual y experiencia práctica, así como una buena comprensión del fenómeno.**

Para entender y practicar lo anterior, tomaremos un problema experimental típico y lo desarrollaremos, introduciendo los conceptos básicos en el manejo de mediciones e incertidumbres. El experimento será "Medir la constante de gravedad con ayuda de un péndulo", la cual compararemos con el valor oficial de nuestra ubicación (Ciudad de México).

3 INCERTIDUMBRES EN MEDICIONES DIRECTAS Y ÚNICAS.

Comencemos observando el arreglo experimental del péndulo (Figura 1), las variables involucradas de acuerdo a la teoría de primer orden son la longitud del péndulo (L) y su periodo de oscilación (T) [2]. El péndulo consta de una plomada cónica colgada de un alambre muy delgado (de masa despreciable) anclado a un pivote. Así, el primer dato que necesitamos conocer es L, y para esto utilizamos una regla graduada en centímetros (cm); colocamos el cero de la regla en el pivote del soporte y medimos donde se encuentra el centro de masa (CM) de la plomada. Si la escala es confiable, el problema será decidir donde se encuentra el CM respecto de las marcas, las cuales están separadas $1mm$ (a esta mínima variación se le denomina *apreciación* [4]).

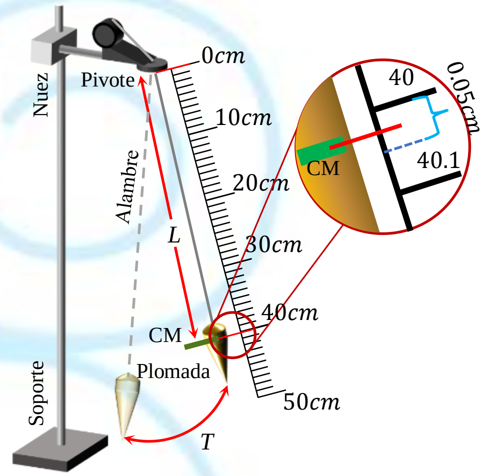


Figura 1. Montaje experimental de un péndulo. L es la longitud del péndulo, T su periodo de oscilación y CM el centro de masa.

Encontramos que el CM se encuentra entre las marcas de $40cm$ y $40.1cm$, pero "*es posible discernir que está más cerca de 40cm*". Esto implica que mentalmente podemos estimar la posición de la mitad entre las marcas 40 y 40.1 (lo cual se denomina *interpolación* y depende de la habilidad del observador), es decir, $40.05cm$. Dado que no hay una marca intermedia que permita corroborar la interpolación, la estimación de $40.05cm$ se tomará como límite superior de cualquier medición asociada a "*que $40cm$ esté más cerca*". Este mismo argumento se puede aplicar si el CM estuviera "*entre $39.9cm$ y $40cm$, pero más cerca de $40cm$*", por lo que "*una interpolación de hasta $\pm 0.05cm$ puede asociarse a la marca de $40cm$*".

De forma similar, si el CM estuviera justo a la mitad entre 40 y 40.1 de forma que no pudiera identificarse con certeza si está más cerca de una u otra marca, la interpolación de $\pm 0.05cm$ sigue siendo válida; sin embargo, en este caso tomamos como valor medido a $40.05cm$ con límites de $40cm$ y $40.1cm$. De esto se puede deducir una guía de uso para escalas como la de nuestra regla: *"Si la medición esta entre dos mitades interpoladas alrededor de una marca o entre dos marcas de la escala, la medida (x) será el punto medio de los dos puntos, es decir el promedio"*:

$$x = \frac{x_{superior} + x_{inferior}}{2}$$

Esta medida es incierta, pero no lo será más allá de la mitad de la apreciación ($0.05cm$ en este caso), es decir, la *incertidumbre de apreciación* (σ_{ap}) será:

$$\sigma_{ap} = \frac{apreciación}{2} \qquad (1)$$

La incertidumbre en la apreciación de un instrumento es la mitad de su mínima escala.

Así, podremos decir que la medición de la longitud del péndulo es: $40.0cm$ con una incertidumbre de $\pm 0.05cm$, (o $40.05 \pm 0.05cm$ en la segunda situación).

Lo anterior es una forma sencilla y lógica de asignar una incertidumbre a instrumentos de medición que cuentan con una escala visible. Gráficamente, podemos interpretar lo anterior como un proceso en el que asignamos una distribución de probabilidad cuadrada (Figura 2) a la incertidumbre (existen otras construcciones de distribuciones de probabilidad: rectangular, triangular, etc.), cuyo ancho es igual a la apreciación ($1mm$), centrada en la marca más cercana a la medición (o centrada a la mitad interpolada de dos marcas). Es decir, "*cualquier objeto cuya longitud esté dentro de un rango de interpolación de* ± 0.05cm *tendrá la misma probabilidad de ser representado por la marca central del rango*".

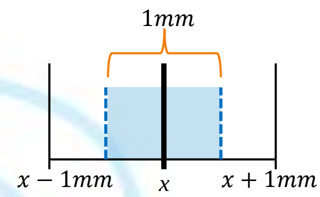


Figura 2. Distribución de probabilidad de la incertidumbre de apreciación. Las mediciones dentro de dicho rango tienen la misma probabilidad de ser representadas por el valor x.

3.1 OTROS COMPONENTES COMUNES DE INCERTIDUMBRE.

La incertidumbre de apreciación, es de las más utilizadas ya que es fácil de identificar; sin embargo, pueden encontrarse otras fuentes de incertidumbre que requieren de un análisis distinto. A estas otras fuentes de incertidumbre se les denomina como *componentes de incertidumbre*, en nuestro caso podemos identificar comúnmente tres más [1,7]:

- ***Interacción*** (σ_{int}). Surge de la interacción del instrumento con el objeto a medir, por ejemplo: si al momento de medir la longitud del péndulo lo colocamos en una mesa de forma horizontal, es muy probable que cambie su longitud debido a que ya no está bajo tensión, por lo que se debería evitar esta situación. En caso de que no sea posible evitarla, se debe tomar en cuenta como una nueva incertidumbre, la cual puede ser definida de forma similar a la de apreciación, dando un rango de posibles valores.
- ***Definición del objeto*** (σ_{def}). Surge de que el mesurando no tenga limites definidos. En nuestro caso, esto lo podemos ver en la posición del CM. En la Figura 3, vemos que la forma de la plomada no es sencilla, por lo que no es posible conocer de forma rápida y precisa la posición del CM hasta la cual medir L. Para aproximar su posición podemos balancear la plomada en un objeto delgado, por ejemplo, en el dedo, entonces la incertidumbre estará dada por la mitad el grosor del dedo; por ejemplo, si nuestro dedo tiene 1cm de grosor, la incertidumbre en la posición del CM será de $0.5cm$.
- ***Errores espurios***. Surgen por equivocaciones o descuidos en el uso de los instrumentos o de fórmulas. No se pueden cuantificar (asignarles una incertidumbre), solo se pueden evitar siendo cuidadosos.

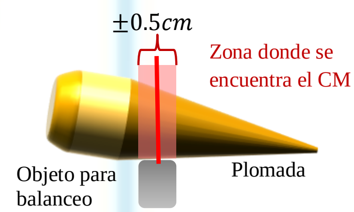


Figura 3. Arreglo experimental para encontrar el CM de una plomada cónica.

Tomar en cuenta un solo componente de incertidumbre en una medición es poco real y lleva a subestimarla (asignarle un valor menor a lo que debería ser), produciendo un resultado con un intervalo de confianza de poca calidad práctica, por lo que:

Se debe ser cuidadoso al decidir qué incertidumbres afectan de forma relevante el experimento y cuales se pueden despreciar; así como la estimación de sus valores.

La discusión anterior muestra que *cualquier incertidumbre debe contar con fundamentos que la justifiquen* y permitan comprender su deducción y estimación (análisis) a partir de la información (escala, método de medición y mesurando) de que se dispone, y así dar un rango de confianza en el cual sabemos que nuestra medición es correcta y que puede corroborarse en mediciones posteriores.

En consecuencia, las incertidumbres de *mediciones directas* (sin usar formulas) *realizadas una vez* se construyen en base a la información de la situación de medición. Ahora solo resta pendiente encontrar la forma en que se combinan las incertidumbres, lo cual se abordará en la sección 5, después de estudiar cómo se analiza la incertidumbre de mediciones repetidas.

4 INCERTIDUMBRE EN MEDICIONES REPETIDAS.

En el caso del péndulo, podemos asumir que el alambre es rígido de tal forma que nunca cambia su tamaño durante el experimento (hasta un cierto límite práctico). En consecuencia, después de la oscilación, la longitud del péndulo (L), seguirá teniendo el mismo valor dentro de la incertidumbre de $0.05cm$, por lo que es innecesario realizar más de una medición de la longitud. Sin embargo, para la medición del periodo de oscilación no es posible hacer esto.

Para medir y analizar la variable del periodo de oscilación (T) utilizamos un cronómetro el cual tiene una mínima resolución de $0.001s$. Aplicando la lógica usada en la longitud, la incertidumbre de apreciación del cronómetro será de $\pm 0.0005s$, y podríamos dar por terminado el análisis de la incertidumbre. Sin embargo, observamos lo siguiente, tomemos el tiempo de una oscilación, $T_1 = 1.276s$; ¿qué ocurriría si volvemos a medir el tiempo de una oscilación (sin haber cambiado la longitud)?. Es muy probable que obtengamos un tiempo distinto (por ejemplo $T_2 = 1.235s$), el cual difiere del anterior en una cantidad mayor a la incertidumbre de apreciación. Esto querrá decir que hay otra incertidumbre más relevante, y para definirla habrá que realizar varias mediciones.

Repetir mediciones es lo más común (y recomendable) al realizar experimentos, pero no siempre es posible hacerlo (por cuestiones de tiempo o recursos). En nuestra situación si realizamos varias mediciones, eventualmente se observará un patrón en la distribución de ocurrencia de resultados (distribución de probabilidad, Figura 4a), que en la inmensa mayoría de los casos prácticos (bajo ciertas condiciones [4,5,6]) tiene forma Gaussiana, por lo que es denominada "*distribución Gaussiana o Normal*" (o en ocasiones aleatoria), la cual es fundamental en la teoría estadística.

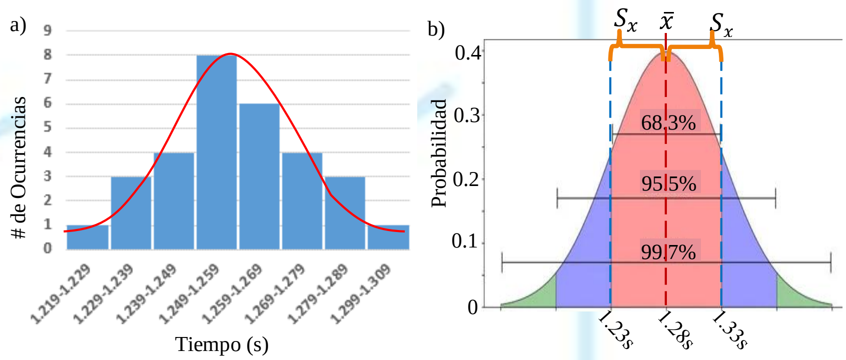


Figura 4. a) Histograma de la ocurrencia de tiempos de 30 repeticiones. La línea roja es el ajuste Gaussiano. b) La probabilidad de medir un cierto valor de periodo dentro del rango de la desviación estándar (S_x) alrededor del promedio ($\bar{x}$) es 68.3%.

Por otro lado, al repetir mediciones y usar la teoría estadística, podemos definir otra forma de incertidumbre asociada al periodo de oscilación. Cuando se requiere estudiar una población de elementos muy grande (en nuestro caso las posibles repeticiones de mediciones son infinitas), no es práctico analizar todos sus elementos, por lo que podemos imaginar que dividimos la población total en M subconjuntos, denominados *"muestras representativas"*, y analizamos uno solo asumiendo que sus características se extrapolan a la población (esta suposición debe cumplir ciertas condiciones [4,5,6], las cuales son comunes en laboratorios de enseñanza). Si cada muestra consta de N elementos (mediciones), con resultados comprendidos en un intervalo (x_{min}, x_{max}), y con distribución normal (Gaussiana), el *promedio*, será [1,4]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad (2)$$

Donde x_i es la i-esima medición. *El promedio es el valor que representa a la muestra*.

Otra característica de la muestra es la *desviación estándar de la muestra* (S_x), la cual se define como [1,3]:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \tag{3}$$

S_x es la distancia, alrededor del promedio, en la que se encuentran el 68.3% de las mediciones,

o de otra forma, si se tomará "una sola medición", habrá un 68.3% de probabilidad de que caiga dentro del rango $[-S_x, S_x]$ alrededor del promedio (Figura 4b). En consecuencia, la desviación estándar de la muestra *puede utilizarse como una estimación de la incertidumbre de una sola medición* [4].

Como nuestro objetivo es encontrar las características de la población, en virtud de la distribución normal de las mediciones, podemos ver que los promedios de las M muestras también presentarán una desviación del promedio de la población ($\bar{X}$), la cual será el promedio de los promedios de las muestras ($\bar{x}_M$). Se puede hacer un estimado de qué tan cerca está (rango de confianza alrededor de $\bar{X}$) el promedio de nuestra muestra ($\bar{x}$) respecto del promedio de la población; esto se puede hacer a partir de la ecuación 2, cuya incertidumbre es deducida por propagación de incertidumbres (lo cual será explicado en la sección 6):

$$\Delta\bar{X} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{X}}{\partial\bar{x}_1} S_{x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\bar{X}}{\partial\bar{x}_M} S_{x_M}\right)^2}$$

Al realizar las derivadas, asumiendo que, debido a la distribución normal, $S_{x_1} = S_{x_2} = \cdots = S_{x_M} = S_x$ y tomando en cuenta todas las muestras representativas ($M \Rightarrow N$), se encuentra la denominada *"incertidumbre estándar del promedio"* [1,4] (que será llamada *incertidumbre estadística* de aquí en adelante):

$$\sigma_{est} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} \tag{4}$$

σ_{est} cuantifica qué tan cerca está el promedio de nuestra muestra ($\bar{x}$) del valor de la población (o del mesurando).

Por esto *se puede usar como incertidumbre del promedio*. Algunas características particulares de σ_{est} es que disminuye progresivamente al aumentar N, lo cual será de importancia más adelante; otra es que esta incertidumbre es distinta de la de apreciación, por la forma del análisis con que se dedujo (haciendo estadística).

Regresando al problema del péndulo, después haber realizado 30 repeticiones de la medición del tiempo para una longitud del péndulo de $40cm$, se obtuvo el histograma de la Figura 4a. De esos datos encontramos que $\bar{t} = 1.258s$; $S_x = 0.019s$ y $\sigma_{est} = 0.003s$.

5 CLASIFICACIÓN DE INCERTIDUMBRES.

Antes de continuar con nuestro estudio, es conveniente hacer algunos comentarios de cómo se clasifican las incertidumbres. Tradicionalmente, los componentes de incertidumbre se clasifican en aleatorias (variaciones no predecibles) o sistemáticas (variaciones predecibles) [7]. Dicha clasificación se puede prestar a ambigüedad ya que una suposición inicial de incertidumbre sistemática, después de un análisis completo y que puede llevar a una corrección del modelo físico o del experimento, puede tornarse en una aleatoria.

Por lo común, la incertidumbre sistemática se origina por defectos de los instrumentos o métodos de medición y se presenta en el mismo sentido y con la misma magnitud. Por ejemplo, en la medición de L de nuestro péndulo, se mencionó: "*si la escala es confiable…*". ¿Qué ocurre si no lo es?, o ¿qué ocurre si la escala está mal hecha y es más chica de lo que debería ser? En tal caso, habrá una desviación de cada marca de la regla respecto de una escala correcta (estándar de calibración); dicha desviación se presentará siempre en la misma dirección y se irá incrementando para valores mayores en la regla (Figura 5).

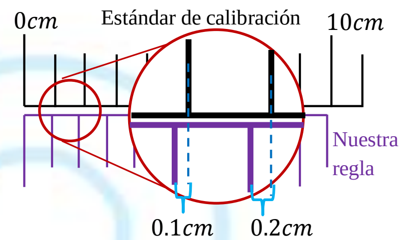


Figura 5. Comparación de una regla con error sistemático y una escala estándar de calibración.

Sí detectamos el *error* antes de la medición, podremos reducirlo o incluso eliminarlo (comparando nuestra regla con un estándar de calibración y deduciendo la ecuación que corrija la diferencia de tamaño); por otro lado, si lo detectamos al final de la medición, al comparar los resultados con alguna referencia también podremos identificar la desviación y hacer las correcciones adecuadas. Sin embargo, dichas correcciones, eventualmente presentarán el problema de "*la colocación del cero de la escala*", el cual no es un problema sistemático sino estadístico muy similar al de la medición del periodo (colocar el cero de nuestra regla nunca se puede hacer con infinita precisión, siempre hay errores aleatorios); es decir, la corrección del efecto sistemático se puede reducir hasta un límite estadístico.

Otro ejemplo, que puede ayudar a clarificar el problema con esta clasificación, es el tiro al blanco (Figura 6). Las incertidumbres estadísticas serán causadas por desviaciones aleatorias (v.g. mano temblorosa) en los tiros, lo que produce que caigan en diferentes puntos. Los errores sistemáticos surgen si algo produce que todos los tiros caigan fuera del centro por una misma cantidad (v.g. mira mal alineada). Al comparar la posición de los tiros, respecto del blanco, podemos identificar el efecto sistemático (Figura 6b) e intentar corregirlo; sin embargo, dado que los tiros presentan una cierta distribución, la corrección no se puede hacer con total precisión (Figura 6c), quedando como incertidumbre aleatoria.

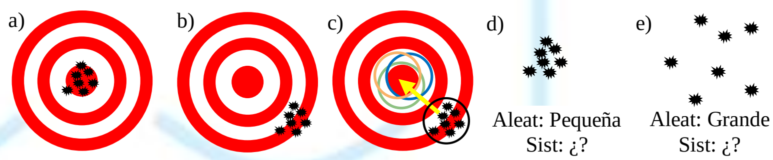


Figura 6. Problema del tiro al blanco desde la perspectiva de error sistemático. a) Caso ideal sin efecto sistemático. b) Efecto sistemático presente. c) Cualquiera de las correcciones mostradas en colores es válida dentro de una incertidumbre aleatoria. d), e) Sin la referencia del blanco no es fácil identificar efectos sistemáticos.

En ciertas situaciones experimentales, la analogía del blanco no es correcta ya que muestra el centro del objetivo (conocer de antemano el resultado). Cuando la referencia se desconoce, una mejor analogía sería quitar el objetivo (Figura 6 d - e); en dicho caso, es fácil identificar errores aleatorios, pero no los sistemáticos.

De estos ejemplos se puede apreciar que el principal problema práctico para identificar los errores sistemáticos, y que generalmente se encuentra en laboratorios de enseñanza, es no contar con estándares de calibración para comparar nuestros instrumentos de medición y tampoco recursos para ajustarlos. Por esto, generalmente, las incertidumbres sistemáticas son omitidas o solo se menciona su presencia sin poder cuantificarlas.

Debido a lo anterior, es preferible utilizar una clasificación que se base en cómo se deducen las incertidumbres en lugar del tipo de incertidumbre, lo cual lleva a dos clases de incertidumbres [1]:

A) INCERTIDUMBRES CLASE A.

Se obtienen de usar una distribución de probabilidad *derivada del análisis estadístico* de mediciones observadas. Implica tomar un conjunto de mediciones que pueden variar al azar, por exceso o por defecto, con igual probabilidad, como se hizo con la incertidumbre del periodo (T) de nuestro péndulo.

B) INCERTIDUMBRES CLASE B.

Caracterizadas por una distribución de probabilidad de la que se asume su existencia, basados en un juicio científico de información disponible (datos previos, experiencia, especificaciones de fábrica). En casos sencillos se puede asumir que presentan una distribución normal o rectangular. Esta forma de definir incertidumbres es útil cuando no se cuenta con el tiempo y/o recursos para llevar a cabo un análisis estadístico exhaustivo. La incertidumbre de la longitud del péndulo fue de esta clase.

Esta clasificación, la cual es recomendada a nivel internacional [1], evita las ambigüedades generadas de usar las definiciones de incertidumbres sistemáticas y aleatorias.

6 INCERTIDUMBRES EN MEDICIONES INDIRECTAS.

La mayoría de las cantidades físicas no pueden ser medidas directamente. En nuestro problema, el objetivo final es medir la constante de gravedad g con ayuda del péndulo; sin embargo, esta constante no puede ser medida directamente, es decir, se necesita de la ecuación del péndulo (función) que relaciona las mediciones directas (medidas a través de instrumentos) de T y L con la g. En este caso la constante de gravedad es denominada *medición indirecta* y su incertidumbre se obtiene de las mediciones directas (T, L) y sus correspondientes incertidumbres mediante la fórmula de *Propagación de Incertidumbres*.

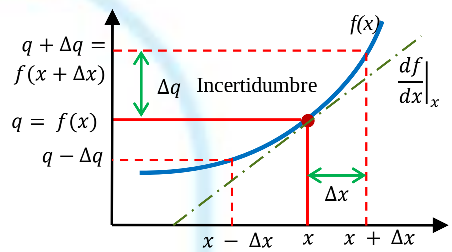


Figura 7. Aproximación de 1° orden.

Para esto, supongamos que tenemos una cierta cantidad q medida indirectamente a partir de una medición x (con incertidumbre Δx) utilizando la formula $f(x) = q$. La cantidad q tendrá una incertidumbre Δq que se puede calcular utilizando una expansión en series de Taylor sobre f alrededor de x (Figura 7) [4,5,6]

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df}{dx} + (\Delta x)^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \cdots + (\Delta x)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + \cdots$$

Cuando Δx es pequeño (lo que generalmente se espera en mediciones experimentales realizadas cuidadosamente), los términos de 2° orden o mayores se pueden despreciar, por lo que:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta q = \frac{df}{dx} \Delta x$$

Resultando una recta que aproxima *f(x)* alrededor del punto (*x*, *q*) con pendiente $\frac{df}{dx}$. Así, la incertidumbre (la cual debe ser una cantidad positiva) de la función *f(x)* es:

$$\Delta q = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta x \qquad (5)$$

La cual constituye la *regla de derivación para la propagación de incertidumbres* en una variable. Para funciones de varias mediciones *w*, *x*,..., se tiene la expansión:

$$f(w + \Delta w, x + \Delta x, \dots) = f(w, x, \dots) + \left\{ \Delta w \frac{\partial f}{\partial w} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots \right\} +$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta w^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + 2\Delta w \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} + \cdots\right\} + \cdots$$

Por lo que la aproximación de primer orden resulta en:

$$f(w+\Delta w, x+\Delta x, \dots) - f(w, x, \dots) = \Delta q = \Delta w \left|\frac{\partial f}{\partial w}\right| + \Delta x \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \cdots \tag{6}$$

Sin embargo, esta fórmula sobrestima la incertidumbre Δq. Por ejemplo, en el caso de una suma de dos variables ($q = x + w$), el valor más grande que puede tomar Δq (según la ecuación 6) ocurre cuando x se desvía por toda la cantidad Δx y w por Δw, lo cual es una situación muy improbable si ambas tienen una distribución normal [4, 5]. Si x y w son independientes y sus incertidumbres son aleatorias, se tiene un 50% de probabilidad de que se subestime x y de que se sobrestime w, o viceversa, por lo que la probabilidad de que ambas mediciones se sobrestimen es pequeña. De la teoría estadística [1,4,5,7], una estimación más realista de la incertidumbre estará dada por la *adición en cuadratura*:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial w}\right| \Delta w\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x\right)^2 + \cdots} \tag{7}$$

Si llegará a existir una correlación entre variables, se necesitan tomar los términos cruzados en la expansión de Taylor[1,8]. Por otro lado, debido a la desigualdad del triángulo, la ecuación 6 es una cota superior de la ecuación 7; en un laboratorio de enseñanza esto puede ser ventajoso ya que, si no se cuenta con el tiempo para hacer el cálculo de 7, 6 puede ser utilizada como una estimación preliminar y límite de la incertidumbre.

En nuestro problema del péndulo, sabemos que:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \tag{8}$$

Donde L y T tienen incertidumbres absolutas (este término se definirá en la siguiente sección) ΔL y ΔT respectivamente. Así, la incertidumbre de la constante de gravedad será:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial g}{\partial L}\right| \Delta L\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right| \Delta T\right)^2} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{2L\Delta T}{T^3}\right)^2} \tag{9}$$

7 ¿CÓMO REPORTAR UNA INCERTIDUMBRE?

Al reportar un resultado y su incertidumbre también se deben tomar en cuenta las posibles aplicaciones de éste y su reproducibilidad, pudiendo identificarse tres casos:

A) RESULTADOS DE USO GENERAL.

Sí el resultado y su incertidumbre no están enfocados a ser utilizados para algún propósito específico, la medición final debe mencionar su incertidumbre total estimada, la cual es un valor único denominado *incertidumbre absoluta*, que es una combinación de todas las incertidumbres encontradas (apreciación, estadística, definición, etc.).

La teoría estadística establece que cuando se tienen varias distribuciones ($\sigma_1, \sigma_2, ...$) asociadas a una misma variable experimental, independientes entre ellas (no hay correlación y se originan por distintos fenómenos), éstas se pueden integrar en una sola incertidumbre [5,7,8]:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots},$$

la cual se denomina *adición en cuadratura*. De esta forma la *incertidumbre absoluta* (Δx) es [7]:

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{def}^2 + \cdots + \sigma_{est}{}^2}, \tag{10}$$

y tiene las mismas unidades que la medición. Con esto, la convención de notación para mediciones y su incertidumbre más general es [4,5,6]:

$$(Valor\ representativo\ de\ x \pm incert. absolta) \equiv\ x \pm \Delta x, \tag{11}$$

con x el *valor representativo de la medición* (lectura directa o promedio). En algunos casos es recomendable separar la incertidumbre absoluta en su componente clase B (considerando la adición en cuadratura en el caso de que sean varias en el experimento), denominada *incertidumbre nominal* (σ_{nom}), y su componente clase A [4]:

$$x \pm \sqrt{\sigma_{nom}^2 + \sigma_{est}^2} \tag{12}$$

Para el problema de nuestro péndulo, L solo cuenta con incertidumbres de apreciación ($\sigma_{ap} = 0.05cm$) y de definición ($\sigma_{def} = 0.5cm$), no cuenta con incertidumbre estadística debido a la forma en que se realizó la medición. Por lo que el resultado de la longitud se reportaría como: $L = (40.0 \pm 0.5)cm$. Por el lado del tiempo del periodo, T cuenta solamente con incertidumbre de apreciación ($\sigma_{ap} = 0.0005s$) y estadística ($\sigma_{est} = 0.003s$), por lo que el resultado reportado para el periodo es $T = (1.258 \pm 0.003)s$.

B) RESULTADOS PARA USO EN MEDICIONES ÚNICAS.

Tomemos el caso de nuestra medición del periodo de una oscilación y su incertidumbre, para tomar las 30 mediciones fueron necesarios 15min de experimento. ¿Qué pasaría si alguien, que no dispone del tiempo suficiente y de las mismas condiciones que nosotros, quiere hacer una comprobación rápida del resultado? Es claro que la probabilidad de que obtenga un resultado con un error dentro de nuestra incertidumbre estadística es en extremo baja, por lo que concluiría que su resultado no es útil, sin que esto necesariamente sea cierto.

Debido a esta situación, si nuestro resultado está pensado para ser utilizado como referencia en mediciones posteriores únicas, lo más recomendable es indicar una incertidumbre más amplia. En el caso del periodo del péndulo, una incertidumbre más amplia para aplicaciones a mediciones únicas sería la desviación estándar ($S_x = 0.019s$), por lo que el resultado reportado para mediciones únicas del periodo sería: $T_{unic} = (1.258 \pm 0.019)s$.

C) RESULTADOS PARA USO EN EXPERIMENTOS DE MEDICIONES REPETIDAS.

Al contrario del caso anterior, en situaciones donde nuestro resultado y el método por el que se encontró necesitan ser comprobados con gran precisión, lo mejor es tomar como referencia solamente la incertidumbre estadística. Ya que proporcionará un rango de confianza más preciso.

7.1 COMPARACIÓN DE MEDICIONES Y VALORES ACEPTADOS.

Una conclusión experimental compara dos o más números (la medición y un valor aceptado, la medición y una predicción teórica, o dos mediciones), con el objetivo de mostrar que son congruentes. Aquí es cuando el análisis de incertidumbres toma importancia y donde se utiliza el concepto de *error* (también denominado *discrepancia*), que es la diferencia entre dos cantidades a comparar.

En nuestro problema del péndulo, con la información recabada hasta este punto, el resultado de g es: $g = (9.98 \pm 0.14)m/s^2$ (este resultado no contiene incertidumbre estadística de g, es decir, la incertidumbre solo es nominal, en la sección 7.5 se detallará como completarla). Si comparamos este resultado con el valor oficial reportado en la Ciudad de México de $9.78m/s^2$, encontramos que la *discrepancia* de $0.2m/s^2$ (Figura 8), es decir, está ligeramente fuera de los márgenes de incertidumbre. Podemos decir que nuestro resultado es adecuado ya que, por convención se establece que [7]:

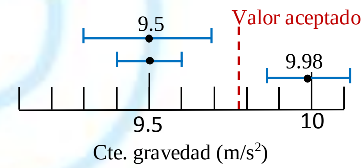


Figura 8. Comparación de mediciones experimentales con una referencia.

En una MEDICIÓN SATISFACTORIA, la discrepancia es menor que dos veces la incertidumbre.

En nuestro caso, $0.2m/s^2 < 2(0.14m/s^2)$. Aun así, es recomendable que la diferencia siempre sea menor que la incertidumbre por lo que hay que mejorar el método de medición y análisis de incertidumbre (lo cual se mostrara en la sección 7.5). Por otro lado, si en otra medición obtuviéramos un resultado de $g = (9.5 \pm 0.2)m/s^2$, el resultado seguiría siendo satisfactorio, sin embargo, un resultado de $g = (9.5 \pm 0.1)m/s^2$, ya no sería aceptable y habría que analizar posibles problemas con el método de medición y/o cálculo de incertidumbres.

7.2 INCERTIDUMBRE FRACCIONAL.

La incertidumbre absoluta Δx también puede proporcionar información sobre la calidad de una medición a través de la *incertidumbre relativa* ($\Delta_{\mathcal{R}}$), la cual es una fracción positiva sin unidades y es definida por:

$$\Delta_{\mathcal{R}} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \tag{13}$$

o como un porcentaje (*incertidumbre porcentual*):

$$\Delta_{\%} = \left(\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \cdot 100\right)\% \tag{14}$$

Por ejemplo: una incertidumbre de $1cm$ en una medición de $1km$, implica una medición precisa y de calidad, pero una de $1cm$ en $3cm$ implicará una medición bastante mala. Es común considerar errores mayores a 10% característicos de mediciones burdas; errores menores a 10% es lo esperado en laboratorios de enseñanza. En nuestro problema del péndulo se tiene $\Delta_{\%} = 1.4\%$, lo cual es muy buen resultado.

Las incertidumbres relativa y porcentual solo son indicadores de la calidad de la medición, y no deben ser utilizadas en sustitución de la incertidumbre absoluta, no proporcionan información directa del intervalo de confianza de la medición.

7.3 REDONDEO DE RESULTADOS Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Al realizar cálculos con computadoras, el número de dígitos siempre se incrementa de forma considerable. Muchos de estos dígitos no son relevantes debido a que no es posible comprobarlos mediante mediciones, por lo que se puede prescindir de ellos. Los dígitos que si son relevantes se denominan *cifras significativas*.

1. Las cifras significativas son los dígitos que se conocen con precisión.

Esta precisión también limita la incertidumbre, y define el número de cifras significativas en la medición.

2. La incertidumbre generalmente contiene solamente una cifra significativa.

Una excepción se da cuando la incertidumbre es un numeral menor a 25; en este caso, es permitido mencionar dos cifras significativas. Esto se debe a la proporción porcentual que se eliminaría al hacer el redondeo. Por ejemplo, sí un cálculo dio una incertidumbre de $\Delta x = 0.14$; al redondear, se obtendría $\Delta x = 0.1$; sin embargo, quitar 0.04 implica ignorar el 28% de la incertidumbre. En cambio, si la incertidumbre es de $\Delta x = 0.74$, redondearla a $\Delta x = 0.7$, ignora un 5.4%.

3. La última cifra significativa de cualquier medición debe ser del mismo orden de magnitud que la última cifra significativa de la incertidumbre.

4. Los cálculos con mediciones siempre deben realizarse con todas las cifras producidas. Solo se redondea el resultado final.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la operación $((503 \pm 1)m + (39.83 \pm 0.03)m)) \div (2.2 \pm 0.1\,)s^2$ y queremos reportar el resultado con las cifras significativas adecuadas, para esto:

1. El primer paso es visualizar la operación como función: $f(a,b,c) = (a+b) \div c$.
2. Se obtiene la ecuación de propagación de la incertidumbre (ecuación 7): $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{c}\right)^2 + \left(\frac{(a+b)\Delta c}{c^2}\right)^2}$, y se calcula: $\Delta f = \pm 11.2247 m/s^2$.
3. Se redondea la incertidumbre con la excepción de la regla 2: $\pm 11 m/s^2$
4. Se realiza la operación de evaluación de la función con todos los dígitos: $f = 246.741 m/s^2$
5. Se aplica la regla 3 a la operación de mediciones: $f = 247 m/s^2$
6. Se reporta el resultado como: $f = (247 \pm 11) m/s^2$

Cuando se encuentran cantidades con ceros a la derecha de la última cifra significativa como por ejemplo 3500, hay que notar que los ceros pueden aparecer debido a algún redondeo (no necesariamente son significativos), y se incluyen solamente para aclarar que el orden de magnitud es centenas. Esto es análogo a cuando se tiene una medida como 0.004, los ceros son para denotar el orden de magnitud. Para evitar esta posible confusión, se recomienda utilizar notación científica.

Finalmente, en caso de que el dígito que se quiere *redondear* sea 5, es necesario fijarse en la cifra a la izquierda: si es par, el redondeo “incrementará” el resultado; si es impar, el redondeo “disminuye” la cantidad. Por ejemplo, en $(3.25 \pm 0.5)m$ se quieren sólo dos cifras significativas, resultando en $(3.3 \pm 0.5)m$; mientras que $(3.35 \pm 0.5)m$ quedará como $(3.3 \pm 0.5)m$.

Las constantes matemáticas o físicas son exactas y su número de cifras significativas se debe tomar de acuerdo a la cantidad de cifras significativas manejadas en las mediciones.

7.4 NÚMERO ÓPTIMO DE MEDICIONES.

Un error común en laboratorios de enseñanza es creer que la incertidumbre absoluta únicamente está dada o por la incertidumbre de apreciación o por la incertidumbre estadística (tendiendo a escoger la última debido al atractivo de la ecuación 4), la cual se puede reducir incrementando el número de observaciones. Sin embargo, deja de lado tomar en cuenta las características del equipo de medición, el método usado y la precisión requerida, además de que lleva a incongruencias prácticas como tener incertidumbres pequeñas imposibles de reproducir (sub-estimadas).

Para evitar dichas incongruencias, siempre se debe utilizar la ecuación 10, que impone un límite inferior a la incertidumbre ya que los componentes de clase B (nominales σ_{nom}) no pueden reducirse. Este límite proporciona una herramienta para la planeación de un procedimiento experimental.

Cuando se realizan estimaciones estadísticas con recursos limitados surge la pregunta, ¿Cuántas mediciones son suficientes? En general, no existe una regla para esto ya que depende de las condiciones y/o requerimientos, pero se recomienda un mínimo de 10 mediciones como punto de partida [8]. Sin embargo, las ecuaciones 4 y 10 pueden proporcionar una idea del número óptimo de mediciones necesarias para minimizar la incertidumbre absoluta. De la ecuación 10, la incertidumbre absoluta es[6]

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{nom}^2 + {\sigma_{est}}^2} = \sqrt{\sigma_{nom}^2 + \left(\frac{S_x}{\sqrt{N}}\right)^2} \tag{15}$$

De tal expresión se puede observar que la reducción de la componente estadística solo tiene sentido hasta ser comparable con la nominal; más allá de eso, aparte de implicar mayor tiempo y recursos, no resultará en una disminución significativa de la incertidumbre absoluta, es decir, se toma como límite $\sigma_{est} \approx \sigma_{nom}$, lo cual proporciona un criterio para saber cuál es el número óptimo (N_{op}) de mediciones a realizar:

$$N_{op} \approx 1 + \left(\frac{S_x}{\sigma_{nom}}\right)^2 \tag{16}$$

El valor 1 es consecuencia de que se tiene que hacer al menos una medición.

7.5 PROCEDIMIENTO PRÁCTICO PARA REALIZAR MEDICIONES.

Con toda la información presentada hasta este punto, es posible construir un procedimiento general para llevar a cabo mediciones y estimar incertidumbres [7,8] en un laboratorio de enseñanza, a saber:

I. Se identifican los componentes de incertidumbre tipo A o B y se minimizan en lo posible.
II. Para las tipo A, se realizan de 5 a 10 mediciones preliminares y se calcula S_x.
III. Con las tipo B, se calcula σ_{nom} usando adición en cuadratura y, de ser necesario, propagación de incertidumbre con un dato representativo tomado de forma arbitraria de las mediciones preliminares.
IV. Se determina N_{op}; si es menor al número de mediciones preliminares, se procede con las mediciones preliminares; si es mayor, se evalúa realizar las mediciones necesarias.
V. Se calcula el promedio $\bar{x}$ y la incertidumbre estadística σ_{est}.
VI. Se calcula la incertidumbre absoluta de la medición Δx (o la incertidumbre apropiada para la aplicación).
VII. Se expresa el resultado de la medición como $\bar{x} \pm \Delta x$.

Este procedimiento lo podemos aplicar para obtener un valor de g con una menor discrepancia a la obtenida anteriormente. El resultado obtenido en la sección 7.1 se puede mejorar recabando más datos (obteniendo más valores de g), ya que hasta el momento solo tenemos uno; además, en la sección 6 (ecuación 9) se dedujo la incertidumbre nominal de la gravedad por propagación de incertidumbres, sin embargo, esta solo es una incertidumbre tipo B, faltaría analizar si hay una incertidumbre tipo A (estadística) para g que sea relevante.

Para comenzar observamos que g es función de (L, T) y debe contar con incertidumbres $\sigma_{nom,g}$ y $\sigma_{est,g}$, la segunda implica tomar varias $g´s$. De acuerdo con el punto II, lo más recomendable es recabar 10 mediciones de una muestra variada de la población (mediciones de g); es decir, tomar varios casos distintos de L y sus correspondientes periodos T, esto ya que nuestro objetivo es analizar g. Así, realizamos el experimento de la misma forma que antes pero con distintas longitudes:

Longitud (cm)	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Periodo (s)	1.273	1.429	1.552	1.688	1.808	1.915	2.000	2.104	2.206	2.305
Valor de g (cm/s^2)	974.15	966.91	983.14	969.87	965.74	968.67	987.36	980.80	973.66	966.30

Es de señalar que las incertidumbres ΔT y ΔL permanecieron iguales que las obtenidas anteriormente ya que la forma en que se midieron estas variables fue la misma, el hecho de probar otras longitudes y periodos no afecta estas incertidumbres. Así, este conjunto de $g´s$ tiene una $S_{x,g} = 7.68\ cm/s^2$.

Ahora pasamos al punto III tomando un dato representativo $\{L = 120cm; T = 2.206s; \Delta L = 0.5cm; \Delta T = 0.003s\}$, en la ecuación general de propagación encontramos: $\sigma_{nom,g} = 5\ cm/s^2$. En caso de ser útil se calculo $N_{op,g} = 3$, es decir, tres mediciones deberían ser más que suficiente para tener un buen valor de g, pero ya que tenemos 10 continuamos con estos para tener mayor precisión. Para el punto V, tenemos que el promedio es $\bar{g} = 973.66\ cm/s^2$ y $\sigma_{est,g} = 2.43\ cm/s^2$. Con esto la incertidumbre absoluta es $\Delta g = 5.452\ cm/s^2$. Finalmente, después de ajustar cifras significativas se reporta el resultado: $g = (974 \pm 5) cm/s^2$, el cual tiene una discrepancia con el valor oficial de $4.3\ cm/s^2$, por debajo del límite de $2\Delta g$. Por lo que nuestro resultado es satisfactorio.

8 GRÁFICAS DE DATOS EXPERIMENTALES.

Para visualizar y analizar si los datos experimentales siguen una predicción teórica es muy útil graficarlos. El análisis de los datos en una gráfica, junto con el método de regresión lineal, constituye una forma alternativa para la obtención de información estadística como el promedio y para la incertidumbre estadística (σ_{est}).

8.1 CARACTERÍSTICAS Y UTILIDAD DE UNA GRÁFICA.

En un experimento, la variación de un parámetro (*variable independiente*) repercute en el cambio de otro (*variable(s) dependiente(s)*); en una gráfica, por lo general, la variable independiente se coloca en el eje horizontal y la dependiente en el vertical.

Supongamos que ciertos datos experimentales siguen una relación lineal con una cierta pendiente, una cierta ordenada al origen y una cierta dispersión, de lo cual podremos deducir información estadística. Por ejemplo, queremos comprobar experimentalmente la ecuación de un resorte colgado verticalmente: $mg = kx$, donde *x* es su extensión, *m* la masa de prueba (variable), g la aceleración de la gravedad y k es la constante del resorte; *x* deberá ser proporcional a *m* generando una línea recta que pasa por el origen.

Al realizar el experimento y graficar los datos, estos no necesariamente caerán perfectamente en una línea recta (Figura 9). Sin embargo, si el experimento y modelo son correctos, las incertidumbres de cada dato contemplarán dichas desviaciones de la línea recta, de lo contrario sugerirán la presencia de errores experimentales o un modelo físico erróneo.

Estas incertidumbres se visualizan dibujando barras de tamaño $2\Delta x$ y $2\Delta m$ con centro en el dato correspondiente ya que tanto x como m son variables experimentales. En caso de que las barras de error para alguna de las variables sean muy pequeñas, comparadas con la escala, debe ser anotado en la descripción de la gráfica; además, *las gráficas siempre deben estar apropiadamente etiquetadas con el nombre de las variables, las unidades de la medición, la ecuación de ajuste lineal, su coeficiente de correlación y una descripción de la gráfica*.

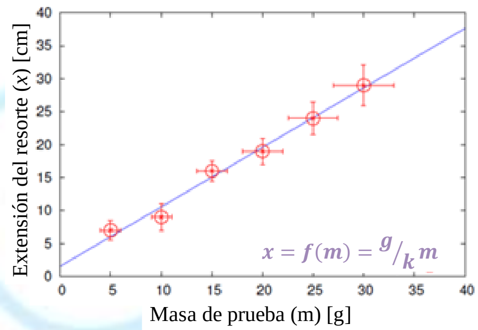


Figura 9. Gráfica experimental de la longitud de un resorte cargando diferentes masas.

Así, es de esperar que la recta que mejor ajusta los datos pase a través o cerca de las barras de error. La pendiente de la gráfica deberá ser g/k, y mediante ésta se podrá encontrar k (si se toma como valor conocido a g).

Por otro lado, graficar tiene otras ventajas como: identificar si la tendencia (relación funcional) que siguen los datos es la correcta (Figura 10), es decir, las dos variables están fuertemente *correlacionadas*; apreciar regiones con comportamientos anómalos, es decir si se necesita corregir el método de medición en la toma de datos ya que no toma en cuenta todas las condiciones; ayuda a deducir si en alguna región son necesarios más datos o si hay una subestimación de errores, es decir, el verdadero error es mayor y hay que replantear su análisis.

Nunca se deben despreciar o ignorar puntos que se vean como erróneos, todas estas anomalías pueden ser pistas de propiedades ocultas en el experimento.

8.2 LINEALIZACIÓN DE DATOS.

En muchas ocasiones, la ecuación teórica que siguen los datos es una curva en lugar de una recta. En este caso el problema radicará en aproximar los datos mediante una curva, lo cual puede tener varias soluciones. Debido a esto, y a que las tendencias de líneas rectas son más fáciles de identificar y analizar, lo que se hace es una *linealización*, lo cual consiste en graficar los datos de forma tal que se produzca una tendencia lineal. Esto se puede conseguir mediante un cambio de variables apropiado.

Linealizar también da una idea del grado de relación o ajuste de los datos a la teoría. Si los datos se linealizan y producen una línea recta, los datos ajustarán fuertemente la predicción teórica; sin embargo, si los datos originales tienen una correlación baja, se producirán anomalías o distorsiones en la transformación que alejarán a los datos de una tendencia lineal. Por esto es conveniente *hacer una interpretación cuidadosa de las gráficas al momento de linealizar*. El proceso de linealización busca reescribir la ecuación del modelo teórico a la forma:

$$y = mx + b\,, \tag{17}$$

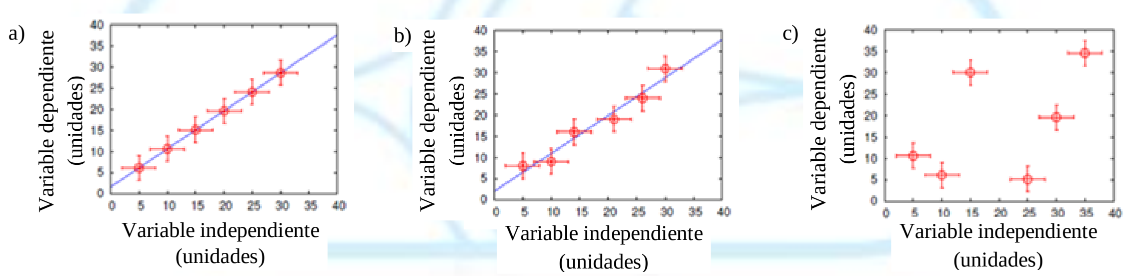


Figura 10. Ejemplo de tendencia y dispersión en una gráfica. a) Gran tendencia, Sin dispersión. b) Buena tendencia. Poca dispersión. c) Sin tendencia. Gran dispersión.

donde y es la variable dependiente, m la pendiente, x la variable independiente y b la ordenada al origen. Como ejemplo, tomemos nuestro problema de la constante de gravedad a partir de un péndulo:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \text{ ó } L = \frac{g}{4\pi^2} T^2 \tag{18}$$

Donde la segunda expresión es para poner de forma explícita la relación entre las variables L y T, es decir: $L(T)$, la cual es cuadrática. La ecuación 18 puede ser linealizada re-escribiéndola (agrupando términos) como:

$$L = \left(\frac{g}{4\pi^2}\right)(T^2) + 0 \tag{19}$$

Así, la pendiente de la recta será $m = \frac{g}{4\pi^2}$, la variable independiente será $x = T^2$ y la ordenada al origen es $b = 0$. Por lo tanto, si se grafica L contra T^2 se obtendrá una línea recta (Figura 11).

Una vez realizada la linealización, es posible obtener la información necesaria de la pendiente de la recta o de la ordenada al origen haciendo un *ajuste lineal a los datos*. En nuestro problema del péndulo, la tabla de datos recabados en la sección 7.5, se grafican (Figura 11) y se aplica un ajuste lineal, obteniendo una pendiente de $m = 24.644 cm/s^2$. Multiplicando por $4\pi^2$ se llega a qué $\bar{g} = 972.8 cm/s^2$.

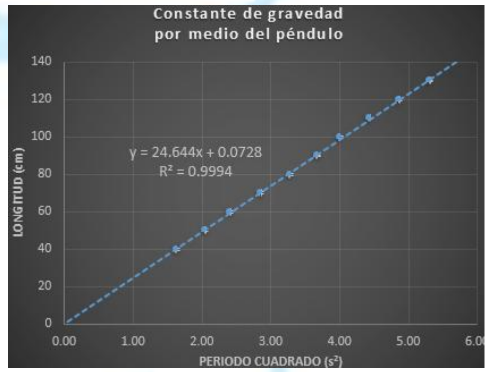


Figura 11. Linealización de la ecuación del péndulo (datos experimentales y ajuste lineal). Las barras de error son muy pequeñas y se pierden debido a la escala.

8.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS: REGRESIÓN LINEAL.

Para encontrar los parámetros m y b de la recta que mejor ajustan a un conjunto de datos, el *método de mínimos cuadrados* o *método de regresión lineal* es el más adecuado. Lo primero que se hace es definir la función:

$$\chi^2(m, b) = \sum_i [y_i - (mx_i + b)]^2, \tag{20}$$

donde y_i y x_i son los datos experimentales. Esta función es una medida de la desviación al cuadrado de los valores observados (y_i) respecto de los predichos por el modelo lineal ($mx_i + b$), que depende de los valores de m y b. Los valores de m y b que mejor ajustan los datos son aquellos que minimizan la desviación, es decir:

$$\frac{d\chi^2}{dm} = 0 \quad y \quad \frac{d\chi^2}{db} = 0 \tag{21}$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene [4,5]:

$$m = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \; ; \; b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{22}$$

donde la suma va desde $i = 1 \rightarrow N$, con N los datos medidos. Actualmente la mayoría de los programas de análisis de datos y plantillas de cálculo (Excel ® Microsoft, Origin ® Originlab, etc.), tiene incorporados estos algoritmos denominados comúnmente como *estimación lineal* o *ajuste de tendencia lineal*.

Las incertidumbres asociadas a los parámetros m y b, se denotaran como Δm y Δb respectivamente, y estarán dadas por [3-5] :

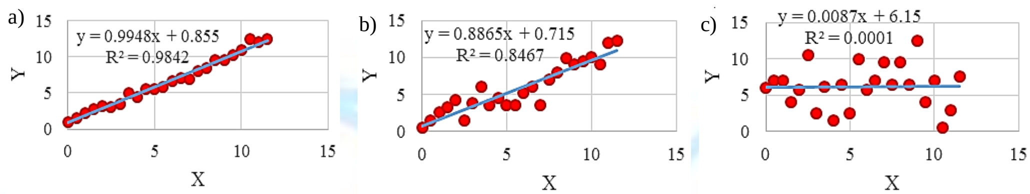


Figura 12. Ajuste de datos experimentales por un modelo lineal, incluyendo los coeficientes de correlación respectivos.

$$\Delta m = \chi_N \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad ; \quad \Delta b = \chi_N \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta}}, \tag{23}$$

donde: $\chi_N = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \chi^2}$; $\Delta = N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$.

Por otro lado, una medida de la calidad del ajuste está dada por el *coeficiente de correlación* (R^2) [4,5]:

$$R^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2 - \sum[y_i - (mx_i + b)]^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}, \tag{24}$$

donde $\bar{y}$ es el promedio de los valores y_i; este parámetro cuantifica la dispersión de los datos alrededor de la regresión lineal. Adopta valores entre 0 y 1: si los datos caen exactamente sobre la aproximación, hay una correlación perfecta ($R^2 = 1$); a partir de este valor, entre más se dispersen los datos de la línea de aproximación, el coeficiente de correlación irá disminuyendo (Figura 12).

Finalmente, al aplicar este método a los datos graficados del péndulo se obtiene una $\Delta m = 0.208$, a partir de la cual, es posible deducir $\sigma_{est,g} = 8.227 cm/s^2$, ya que $4\pi^2 m = g \Rightarrow 4\pi^2 \Delta m = \sigma_{est,g}$ por propagación de incertidumbres. A partir de este punto la obtención de la incertidumbre absoluta de g se realiza de la forma mencionada en la sección 7.1.

9 EJERCICIOS.

1. Se tiene la operación: $((50 \pm 2)kg - (7.64 \pm 0.05)kg) \times (20.5 \pm 0.5\,)m/s^2$. Calcular el resultado final con incertidumbre (con las cifras significativas adecuadas).
2. Se miden la altura H y diámetro D de un cilindro una sola vez, con incertidumbres absolutas ΔH y ΔD respectivamente. ¿Cómo se propaga la incertidumbre del área S de toda la superficie del cilindro?
3. Cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro, cambia de dirección de acuerdo a la Ley de Snell: $n_i sen(i) = n_r sen(r)$, donde i y r son los ángulos de incidencia y refracción respectivamente, y donde n es el índice de refracción del material. Si se hacen mediciones experimentales de ambos ángulos y se asume $n_i = 1$, ¿Cuál es la expresión para la incertidumbre absoluta de n_r, asumiendo que los ángulos tienen incertidumbres absolutas Δi y Δr?
4. La ecuación que describe cómo cambia el voltaje respecto del tiempo en un circuito RC a partir de un voltaje inicial V_0 es:

   $$V = V_0 e^{-t/RC}$$

   Linealizar la ecuación de forma que se pueda conocer la constante RC del circuito y el voltaje inicial a partir de la pendiente y la ordenada al origen.

5. La relación entre dos resistencias en paralelo es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Donde R_{eq} es la resistencia equivalente del par. Si queremos encontrar una cierta resistencia equivalente de valor fijo variando las resistencias R_1 y R_2 (son variables). ¿Cómo se linealiza esta ecuación?

6. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la función $f = x/y$ en el caso de una sola medición, si tanto x como y tienen incertidumbres absolutas Δx y Δy?

10 REFERENCIAS.

[1] *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurements*, JCGM 100:2008, 1ª edición, Septiembre 2008.

[2] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. *Fundamentals of Physics.* Wiley. 12° Ed. 2021.

[3] *Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM)*, JCGM 200:2008, 3ª traducción, Marzo 2009.

[4] J. R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis.* University Science Books. 2° Ed. 1997.

[5] P. Fornasini. *The Uncertainty in Physical Measurements*, Springer 2008.

[6] P. R. Bevington, D. K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.* 3rd ed. McGraw-Hill. 2003.

[7] Salvador Gil. *Experimentos de Física*. Editorial Alfaomega. 2014.

[8] W.Schmid, R. Lazos, *Guía para estimar la incertidumbre de la medición*, Centro Nacional de Metrología (CENAM), http://www.cenam.mx, México, mayo 2000.