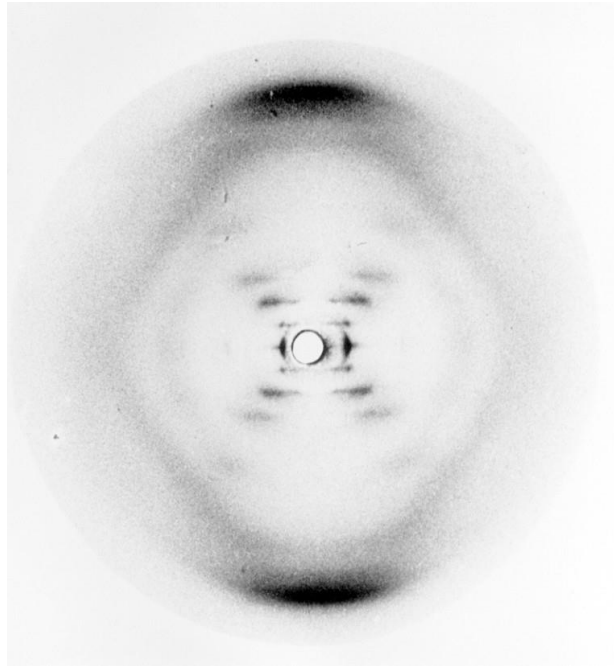


# Estudio de Estructuras por Difracción



Erick Barrios Barocio; Arnaldo Hernández Cardona; Roxette Ramírez Arvidez.  
Laboratorio de Óptica, v.2023

La Interferencia y Difracción producidas por la interacción de la luz con objetos de tamaño micrométrico y/o del orden de la longitud de onda de la luz utilizada ha permitido el desarrollo de métodos de medición y caracterización geométrica de dichos objetos. Estos métodos han permitido descubrimientos como la caracterización de la estructura del ADN y fomentado el surgimiento de áreas de estudio como la cristalografía.

## Contenido

1	Difracción en una Rendija.....	2
2	Interferencia de Dos Rendijas.....	3
3	Superposición de Patrones.....	4
4	Difracción en Dos Dimensiones.....	4
5	El Principio de Babinet.....	5
6	Aplicación.....	5
7	Practica.....	6
7.1	OBJETIVO.....	6
7.2	MATERIAL.....	6
8	Referencias.....	6

## 1 DIFRACCIÓN DE UNA RENDIJA

La difracción ocurre no solo cuando las ondas pasan por pequeñas aberturas, también ocurre cuando pasan alrededor de obstáculos o bordes afilados.

Cuando la pantalla de observación se encuentra muy lejos de la apertura, los rayos que llegan paralelos entre sí y los frentes de onda son planos, lo cual se denomina difracción de Fraunhofer <sup>[1,2]</sup> (Figura 1).

El desarrollo teórico visto en textos anteriores nos dice que para una apertura de tamaño  $b$  del orden de la longitud de onda  $\lambda$ , y a una distancia  $L$  de la pantalla, la *condición para la interferencia destructiva en difracción* es:

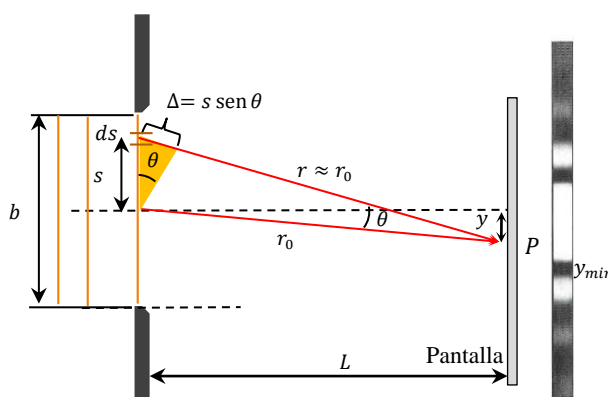


Figura 1. Geometría de difracción.

$$m\lambda = b \sin \theta ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Donde  $m$  es el orden de interferencia. Es importante notar que se excluye el valor  $m = 0$  debido a que en el centro de la distribución, la irradiancia es máxima. La posición transversal de estos mínimos ( $y_{min}$ ), respecto de la irradiancia máxima en el centro del patrón ( $\theta = 0, y = 0$ ), en la pantalla se puede encontrar utilizando la aproximación de ángulo pequeño ( $L \gg b$ ), por lo que:

$$y_{min} = \frac{m\lambda L}{b} ; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Así, la ecuación 2 permite caracterizar tamaños de aperturas midiendo los patrones de difracción que generan ( $y_{min}$ ), siempre y cuando se conozcan  $m, \lambda$  y  $L$ .

## 2 INTERFERENCIA DE DOS RENDIJAS.

En textos anteriores también se abordó la situación cuando se tienen dos rendijas muy cercanas (Interferencia de Young). En dicha situación la separación entre las rendijas ( $S_1$  y  $S_2$ ) es  $a$  y se iluminan con una fuente monocromática y coherente, además se pueden aproximar como puntuales y que emiten en fase. Las ondas que salen de las rendijas llegan a la pantalla a una distancia  $L \gg a$ , manteniendo una relación de fase que depende de la distancia recorrida por cada una, produciendo interferencia en la pantalla (Figura 2).

Así, la condición de *interferencia constructiva* es:

$$a \sin\theta = m \lambda, \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

donde  $m$  es el *número de orden de interferencia*, y se relaciona con el número de franja brillante a partir de la franja central. Por otro lado, la condición de *interferencia destructiva* es:

$$a \sin\theta = \left(m \pm \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Para esta ecuación es necesario tomar en cuenta la simetría y posición (respecto del centro del arreglo), es decir, sí se mide en una dirección positiva o negativa. Por ejemplo, para  $m = 0$  (el orden cero de interferencia destructiva), se tienen dos soluciones (correspondientes a las franjas oscuras contiguas a la franja de interferencia constructiva de orden cero), es decir, el orden cero de interferencia está duplicado. De forma similar, para los órdenes positivos de interferencia destructiva se utiliza el signo positivo, mientras que para los órdenes negativos se utiliza el signo negativo de la ecuación.

Aplicando la aproximación de ángulo pequeño para encontrar la posición de alguna franja de interferencia en la pantalla, se encontrará que la posición de las franjas de interferencia constructiva ( $y_{max}$ ) ocurrirá cuando:

$$y_{max} = \frac{m\lambda L}{a}, \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

De forma similar, para las franjas de interferencia destructiva:

$$y_{min} = \frac{\lambda L}{a} \left(m \pm \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para caracterizar la separación entre las rendijas simplemente midiendo el patrón de interferencia y la separación de las franjas de interferencia de un cierto orden ( $m$ ), siempre y cuando se conozca la longitud de onda de la fuente de luz ( $\lambda$ ) y la distancia a la pantalla ( $L$ ).

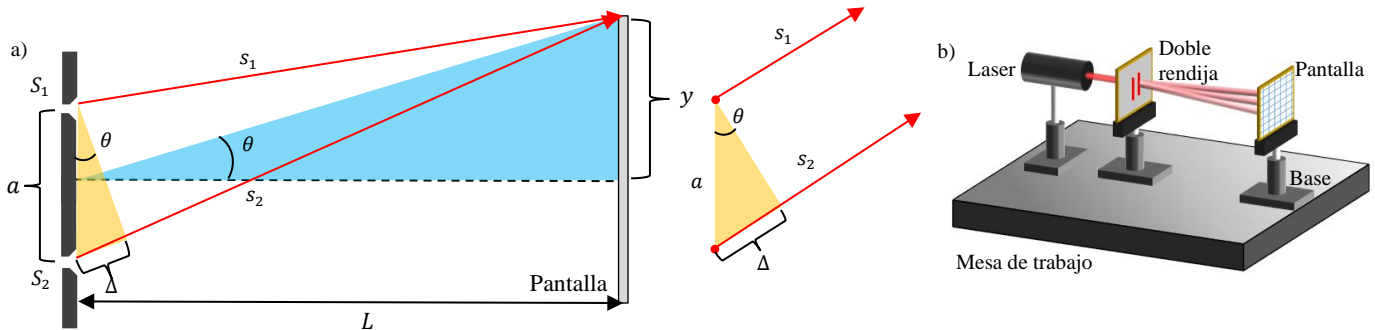


Figura 2.a) Geometría del experimento de dos rendijas. b) Arreglo experimental.

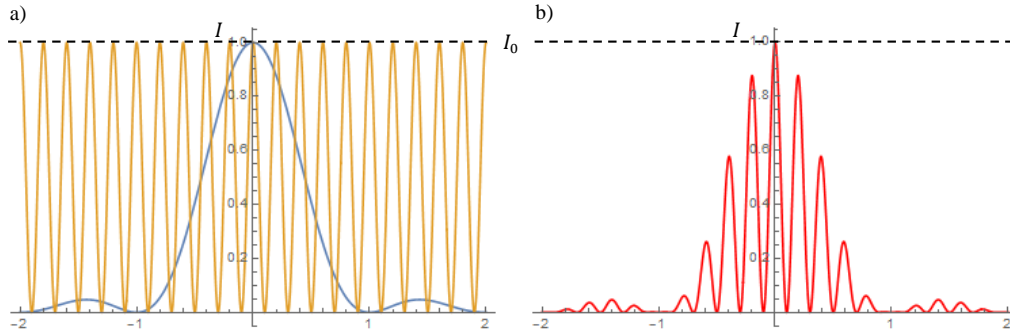


Figura 3. a) Irradiancia en la pantalla de los patrones de difracción e interferencia de doble rendija separados. b) Irradiancia de los dos patrones superpuestos.

### 3 SUPERPOSICIÓN DE PATRONES

En la práctica, toda abertura presenta difracción, y al tratarse de un fenómeno ondulatorio, sigue el principio de superposición de los campos. Esto permite concluir que, en el experimento de la doble rendija, se tendrá una superposición del fenómeno de difracción de cada rendija con el de interferencia por doble rendija; es decir, el patrón de interferencia de doble rendija será *modulado* por el patrón de difracción (el cual por lo general es más grande). Así, la irradiancia en la pantalla se puede escribir como:

$$I = 4I_0 \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b y}{\lambda L} \right)}{\left( \frac{\pi b y}{\lambda L} \right)^2} \right) \cos^2 \left( \frac{\pi a y}{\lambda L} \right) \quad (7)$$

Como se puede ver en la Figura 3, el patrón de interferencia de doble rendija es modulado por el de difracción. En consecuencia, midiendo un patrón de interferencia como el de la Figura 3b, es posible conocer tanto el ancho de las dos rendijas como la separación entre estas, es decir, la geometría de las rendijas.

### 4 DIFRACCIÓN EN DOS DIMENSIONES.

El desarrollo mostrado en las secciones anteriores asumió que la rendija era delgada solo en solo una dimensión, y muy larga en la otra (Figura 4a). Esto produce que la difracción solo se de en la dirección en la dirección transversal a la rendija, es decir, el patrón de interferencia es unidimensional. Si se redujera el tamaño de la rendija en la dirección previamente larga, creando una abertura cuadrada en lugar de una rendija, se generaría un patrón de difracción en la dirección perpendicular a esta nueva restricción (Figura 4b). Estos patrones de difracción son totalmente independientes el uno del otro por lo que las condiciones que describen la interferencia destructiva por difracción son independientes:

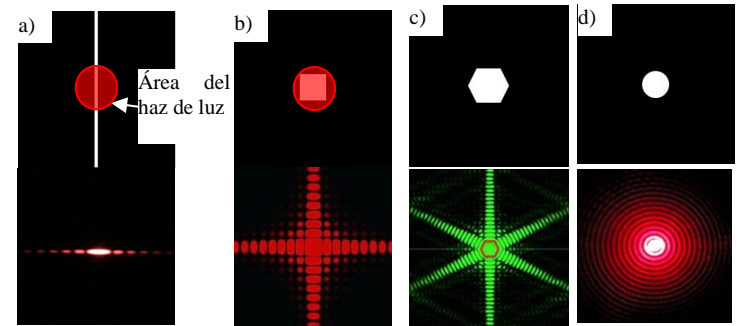


Figura 4. a) Rejilla que produce un patrón en la dirección horizontal, b) Rejilla que produce un patrón en dos direcciones perpendiculares. c) Apertura hexagonal y su patrón de difracción. d) Apertura circular y su patrón de difracción.

$$\begin{cases} d_x \sin \theta_x = m_x \lambda & \text{para } m_x = 1, 2, \dots \\ d_y \sin \theta_y = m_y \lambda & \text{para } m_y = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Lo cual genera un patrón de interferencia en forma de cruz (Figura 4b). Por otra parte, si de forma consecutiva se va construyendo un patrón geométrico (hexágono, octágono, ...) el patrón de difracción irá presentando patrones de difracción extra por cada par de lados del polígono. En el límite donde la abertura es circular, su patrón de difracción será una serie de anillos concéntricos, cuyo patrón de difracción será descrito por la ecuación:

$$(2r) \sin \theta = m\lambda \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Donde  $2r$  es el diámetro de la abertura.

Así, con todo lo visto anteriormente, los patrones de interferencia y/o difracción pueden ser usados para obtener información sobre los tamaños de aberturas, separación entre rendijas o número de rendijas, también contiene información sobre la forma (o estructura de la abertura). Y, como es de suponer, esto puede ser muy útil para estudiar la estructura de objetos a través de dichos patrones de difracción o interferencia.

## 5 EL PRINCIPIO DE BABINET.

Un principio muy útil para analizar la geometría de estructuras solidas en lugar de aberturas, es el *Principio de Babinet* <sup>[1]</sup>.

Los fenómenos vistos anteriormente se pueden explicar cómo interferencia debido a una serie de fuentes puntuales que son coherentes entre sí. Sin embargo, se puede observar que la luz que ilumina pequeños objetos (como un cabello) también crea un patrón de interferencia como si el objeto solido fuera reemplazado por una abertura de las mismas dimensiones. Ésta es la idea detrás del principio de Babinet.



Figura 5. Principio de Babinet.

“Si se superponen una abertura y un objeto de la misma geometría y tamaño, se tendrá una abertura bloqueada por la que no pasa luz y por tanto no hay patrones de difracción e interferencia proyectados (Figura 5). Así, los patrones de difracción y/o interferencia producidos por cada elemento de forma individual deben ser complementarios de forma que se cancelen uno con otro.”

Debido a lo anterior, los patrones de difracción (o interferencia) de objetos sólidos, también nos darán información acerca de su geometría.

## 6 APLICACIÓN.

Una de las aplicaciones históricas de estas ideas fue en la observación de la estructura del ADN a partir del patrón de difracción producido al iluminar dicha estructura con rayos X (Figura 6).

Supongamos que tenemos una estructura helicoidal cuya proyección en dos dimensiones se ve como en la Figura 7a. Esta estructura producirá un patrón de difracción como el mostrado en la Figura 7b. El grosor de la estructura generará un patrón de difracción con una serie de mínimos más espaciados que el resto (envolvente), de la distancia entre estos mínimos se puede obtener el grosor del alambre ( $b$ ) mediante la fórmula de difracción (se asume que la pantalla de proyección está muy lejos del alambre):

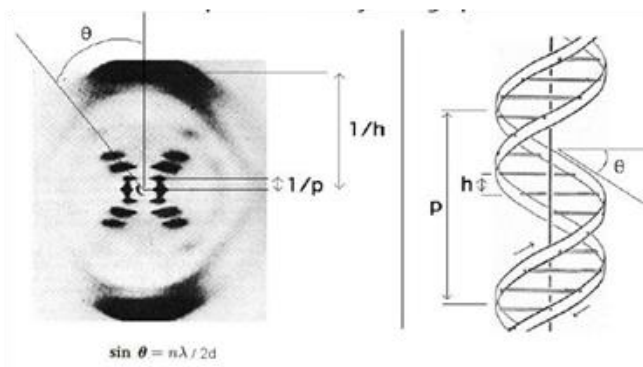


Figura 6. Patrón de difracción del ADN.

$$b = \frac{m\lambda L}{D} ; m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Donde  $m$  es el orden de difracción,  $L$  es la distancia entre el filamento helicoidal y la pantalla, y  $D$  es la distancia entre el mínimo de orden  $m$  (en uno de los mínimos de difracción) y el centro del patrón.

Al iluminar varios ciclos de la hélice, se obtiene un patrón de interferencia de varios alambres paralelos. Este patrón de interferencia genera un segundo patrón con un periodo más corto (patrón interno). Por trigonometría, el ciclo  $P$  se define como:

$$P = \frac{d}{\cos \alpha}$$

Donde  $d$  es la separación entre alambres de ciclos contiguos (separación de las "rendijas de difracción"). También se observa que el ángulo entre los patrones de difracción será  $2\alpha$ , debido a que cada "lado" de la hélice apunta a ángulos  $\alpha$  y  $-\alpha$ . Para calcular  $d$  experimentalmente, se utiliza la fórmula:

$$d = \frac{m\lambda L}{D'} ; m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Donde  $D'$  es la distancia del centro del patrón a un máximo interno de orden  $m$  (Figura 8b). El radio de la hélice ( $R$ ) se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$\tan(90^\circ - \alpha) \approx \frac{2R}{\left(\frac{P}{2}\right)} \quad (12)$$

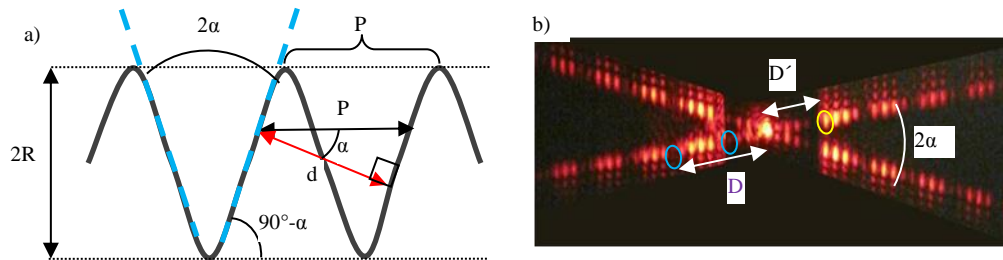


Figura 7. a) Estructura helicoidal. b) Patrón proyectado por la estructura helicoidal.

## 7 PRACTICA.

### 7.1 OBJETIVO.

Utilizar el conocimiento de difracción e interferencia adquirido en las prácticas anteriores para estudiar cómo es la geometría de estructuras muy pequeñas.

### 7.2 MATERIAL.

Rendija de difracción. 1 Láser rojo o verde. Bases. Pantalla. Flexómetro. Alambre delgado o cabello. CD o DVD.

## 8 REFERENCIAS.

- [1] E. Hecht. *Óptica*. 3ª edición, Addison Wesley. 2000.
- [2] Frank L. Pedrotti, Leno M. Pedrotti, Leno S. Pedrotti. *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 2018, 3ª ed.