

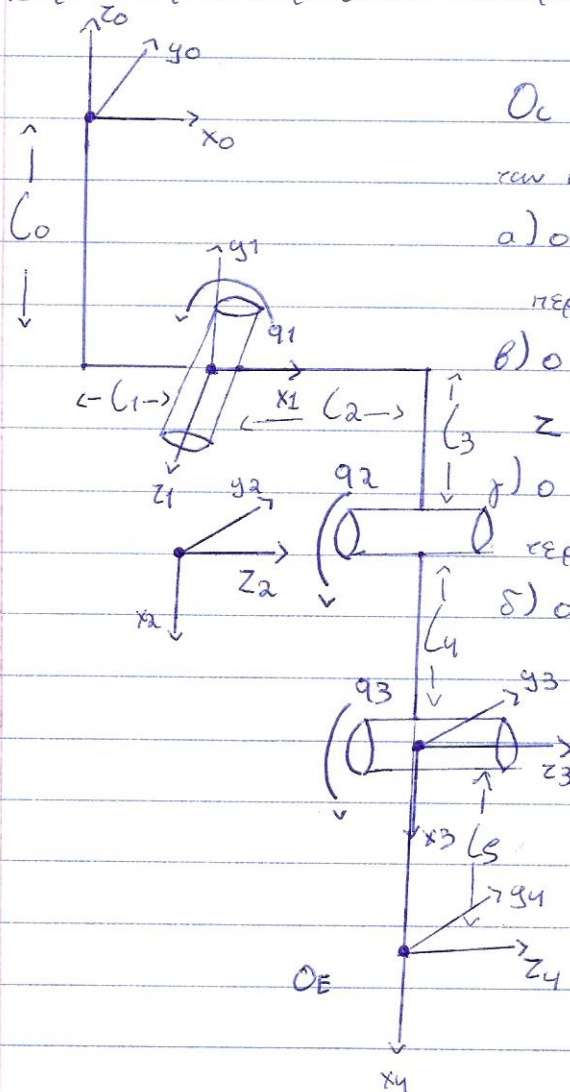
Εξαρνησιακή Εργασία στην «Ρομποτική Ι»

Κωνσταντίνος Τσιγγέλης, 03117149, 7^ο εξαμήνο

Ιδιωτικό email: c117149@mail.ntua.gr

Α. Θεωρητική Ανάλυση

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται η κινηματική δομή ενός ρομποτικού χειριστή τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας $\{q_1, q_2, q_3\}$.



Οι κανόνες που ακολουθούνται για την τοποθέτηση των πλαισίων είναι:

- ο άξονας z πρέπει να είναι ο άξονας περιστροφής των περιστροφικών αρθρώσεων
- ο x άξονας πρέπει να είναι κάθετος στον z άξονα του προηγούμενου πλαισίου
- ο x , όταν είναι από δυνατόν, πρέπει να τέμνει τον z άξονα του προηγούμενου πλαισίου
- ο y άξονας σχεδιάζεται ώστε το σύστημα να ακολουθεί την δεξιόστροφη φορά.

Στην συνέχεια συμπληρώσαμε τον πίνακα παραμέτρων Denavit-Hartenberg: (με την μεταβλητή r συμβολίζω την απόσταση των πέντερων κατά την x η διεύθυνση)

- οι μεταβλητές θ και a αναφέρονται στις περιστροφικές μετατοπίσεις ενώ οι r και d στις γραμμικές



2

αλφαιδιω	θ	a	r	d
1	0	90°	l_1	$-l_0$
2	$q_1 - 90^\circ$	-90°	l_3	0
3	q_2	0	l_4	l_2
4	q_3	0	l_5	0

Προδιορισμός ενδοίας ανεπαρκούς εξίσωσης ($l_3 = 0$):

$$A_1^0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_2^1 = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_2^0 = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A_3^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3

$$A_3^0 = \begin{pmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & | & s_1 l_2 c_2 + l_1 + l_2 c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & | & l_2 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & | & -l_2 c_1 c_2 - l_0 + s_1 l_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & | & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & | & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^0 = \begin{pmatrix} s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 & | & p_x \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & | & p_y \\ -c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 & s_1 & | & p_z \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \text{ με}$$

$$p_x = s_1 c_2 c_3 l_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 + s_1 l_2 c_2 + l_1 + c_1 l_2$$

$$p_y = s_2 l_3 c_3 + c_2 l_3 s_3 + l_2 s_2$$

$$p_z = -l_3 c_1 c_2 c_3 + l_3 c_1 s_2 s_3 - l_2 c_1 c_2 - l_0 + s_1 l_2$$

} με θέσεις και
δράσεις.

λειτουργική μήτρα για το εθνό διαφορικό κινηματικό μοντέλο

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{v}_E \\ \dot{\omega}_E \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q} \text{ , όπου } J \text{ η λειτουργική μήτρα}$$

v_E : η γραμμική ταχύτητα του end-effector

ω_E : η γωνιακή ταχύτητα του end-effector

$$J = \begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} \text{ με } J_{Li} \text{ τους συντελεστές για την γραμμική ταχύτητα} \\ \text{και } J_{Ai} \text{ τους συντελεστές για την γωνιακή ταχύτητα.}$$

4

$$J_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \frac{\partial p_x}{\partial q_2} & \frac{\partial p_x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \frac{\partial p_y}{\partial q_2} & \frac{\partial p_y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_1} & \frac{\partial p_z}{\partial q_2} & \frac{\partial p_z}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial q_1} = c_1 c_2 c_3 l_s - l_s c_1 s_2 s_3 + c_1 l_4 c_2 - s_1 l_2 = \underline{l_s c_1 c_2 c_3 + l_4 c_1 c_2 - s_1 l_2}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial q_2} = -s_1 s_2 c_3 l_s - l_s s_1 c_2 s_3 - s_1 l_4 s_2 = \underline{-l_s s_1 \cdot s_2 c_3 - s_1 l_4 s_2}$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial q_3} = -s_1 c_2 s_3 l_s - l_s s_1 s_2 c_3 = \underline{-l_s s_1 s_2 c_3}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial q_2} = c_2 l_s c_3 - s_2 s_3 l_s + l_4 c_2 = \underline{l_s c_2 c_3 + l_4 c_2}$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial q_3} = -s_2 s_3 l_s + c_2 c_3 l_s = \underline{l_s c_2 c_3}$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial q_1} = l_s s_1 c_2 c_3 - l_s s_1 s_2 s_3 + l_4 s_1 c_2 + c_1 l_2 = \underline{l_s s_1 c_2 c_3 + l_4 s_1 c_2 + c_1 l_2}$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial q_2} = l_s c_1 s_2 c_3 + l_s c_1 s_2 s_3 + l_4 c_1 s_2 = \underline{l_s c_1 s_2 c_3 + l_4 c_1 s_2}$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial q_3} = l_s c_1 c_2 s_3 + l_s c_1 s_2 c_3 = \underline{l_s c_1 s_2 c_3}$$

$$J_1 = b \quad \mu \varepsilon \quad b_{i-1} = R_{i-1}^0(q_1, q_2, q_{i-1}) \cdot \underline{b} \quad \text{οπιν} \quad \underline{b} = [0, 0, 1]^T$$

$$b_0 = [0, 0, 1]^T$$

$$b_1 = [c_1, 0, s_1]^T$$

$$b_2 = [c_1, 0, s_1]^T$$

5

Αρα η Ιακωβιανή μήτρα είναι η εξής:

$$J = \begin{pmatrix} l_{sc1c23} + l_{c1c2} - s_1 l_2 & -l_{s1s23} - s_1 l_{c23} & -l_{s1s23} \\ 0 & l_{sc23} + l_{c2} & l_{sc23} \\ l_{s1c23} + l_{c1c2} + c_1 l_2 & l_{sc1s23} + l_{c1s2} & l_{sc1s23} \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & s_1 & s_1 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφο Διαφορικό πεπιλεγμένο μοντέλο

Μελετάω το αντίστροφο διαφορικό πεπιλεγμένο μοντέλο του ροβότ ως προς την γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης.

Ελέγχουμε που μηδενίζεται η διακρίνουσα $\det(JL) = 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{x1} & \dot{p}_{x2} & \dot{p}_{x3} \\ \dot{p}_{y1} & \dot{p}_{y2} & \dot{p}_{y3} \\ \dot{p}_{z1} & \dot{p}_{z2} & \dot{p}_{z3} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} & \dot{p}_{x1}(\dot{p}_{y2} \cdot \dot{p}_{z3} - \dot{p}_{y3} \cdot \dot{p}_{z2}) - \dot{p}_{x2}(\dot{p}_{y1} \cdot \dot{p}_{z3} - \dot{p}_{y3} \cdot \dot{p}_{z1}) \\ & + \dot{p}_{x3}(\dot{p}_{y1} \cdot \dot{p}_{z2} - \dot{p}_{y2} \cdot \dot{p}_{z1}) = 0 \end{aligned} \quad (\dot{p}_{y1} = 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dot{p}_{x1}(\dot{p}_{y2} \cdot \dot{p}_{z3} - \dot{p}_{y3} \cdot \dot{p}_{z2})}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\dot{p}_{z1}(\dot{p}_{x2} \cdot \dot{p}_{y3} - \dot{p}_{x3} \cdot \dot{p}_{y2})}_{\textcircled{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & (l_{sc1c23} + l_{c1c2} - s_1 l_2) (l_{sc23} + l_{c2}) \cdot l_{sc1s23} - l_{sc23} (l_{sc1s23} + l_{c1s2}) \\ & = (l_{sc1c23} + l_{c1c2} - s_1 l_2) (l_{sc1s23} c_2 + l_{sc1s23} c_2 + l_{c1s2} s_2 - l_{c1s2} s_2) \\ & = (l_{sc1c23} + l_{c1c2} - s_1 l_2) \cdot (l_{sc1s23} c_2 + l_{c1s2} s_2 - l_{c1s2} s_2) \\ & = l_{sc1c23}^2 c_2 + l_{c1c2}^2 c_2 + l_{sc1c23} c_2 + l_{c1c2} c_2 = l_{sc1c23}^2 c_2 + l_{c1c2}^2 c_2 + l_{sc1c23} c_2 + l_{c1c2} c_2 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
 & - (s^2 \cdot L_4 (c_{23})^2 \cdot c_1^2 \cdot s_2 - (s L_4^2 \cdot c_{23} \cdot c_1^2 \cdot c_{23} + L_4 L_4 c_{23} c_1 s_2 s_1) = \\
 & = \underline{s^2 \cdot L_4 c_1^2 \cdot c_{23} \cdot s_3 + L_4^2 \cdot (c_1)^2 \cdot c_{23} - L_4 L_4 c_1 s_1 s_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{2} (L_{s1} c_{23} + L_{s1} c_2 + c_1 l_2) \cdot (-L_{s1} s_{23} - s_1 L_{s2}) \cdot L_{s2} c_3 + L_{s1} s_{23} \cdot (L_{s2} c_3 + L_{s2} c_2) = \\
 & = (L_{s1} c_{23} + L_{s1} c_2 + c_1 l_2) (-L_{s1} L_{s1} s_{23} c_3 + L_{s1} L_{s2} s_{23} c_3) = \\
 & = \underline{s^2 \cdot L_4 s_1^2 \cdot c_{23} s_3 + L_4^2 s_1^2 \cdot s_3 \cdot c_2 + L_4 L_4 c_1 s_1 s_3}
 \end{aligned}$$

Από ①, ② καταλήγουμε στο :

$$\det(J_L) = L_4 L_4 s_3 (L_{s2} + L_{s2} c_3)$$

Οι ιδιότητες κυματικές διατάξεις προκύπτουν από τον μηδενισμό της $\det(J_L)$

$$a) s_3 = 0 \Leftrightarrow q_3 = 0 \text{ ή } \pi.$$

Αυτό είναι ένα workspace singularity γιατί ο βραχίονας θα μπορεί να κινηθεί σε μία διεύθυνση κίνησης σε αυτούς με αποτέλεσμα να χάνεται μία κίνηση διεύθυνση κίνησης, δηλαδή σαν να χάνεται η q_3 .

$$b) L_{s2} + L_{s2} c_3 = 0$$

Αυτή η απόσταση από το σχήμα φαίνεται ότι είναι η απόσταση του εδινού εργαλείου δράσης από τον άξονα περιστροφής του q_1 . Όταν αυτή η απόσταση μηδενιστεί αντιστοιχεί σε διατάξεις όπου το εδινό εργαλείο είναι πάνω στον άξονα της 1^{ης} αρθρώσεως. (internal singularity)

Για $\det(J) \neq 0$ υπολογίζω την σιμοτροπία της J :

$$J_L^{-1} = \frac{1}{\det(J_L)} \cdot \text{adj}(J_L)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει το $\det(\vec{J}_L)$, ορα πρέπει να υπολογίσουμε τον $\text{adj}(\vec{J}_L)$.

$$\text{Έστω } \vec{J}_L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{τότε } \text{adj}(\vec{J}_L) = \begin{bmatrix} +[a_{22} \ a_{23}] - [a_{21} \ a_{23}] + [a_{31} \ a_{32}] \\ -[a_{12} \ a_{13}] + [a_{11} \ a_{13}] - [a_{31} \ a_{32}] \\ +[a_{12} \ a_{13}] - [a_{11} \ a_{13}] + [a_{21} \ a_{22}] \end{bmatrix}$$

Χαράζουμε λοιπόν στον ανόδοιο πίνακα:

$$\text{adj}(\vec{J}_L) = \begin{bmatrix} lscs3 & lscs3(lca+ds1) & lscs3(lsa+scs3) \\ lscs3(lca+ds1) & lscs3(lsa+scs3) & lscs3(lca+ds1) \\ -d1(lca+ds1) & -d1da & d1(ds1-lca) \end{bmatrix}$$

με $d1 = lca + lscs3$, $da = lca + lscs3$

$$\vec{q} = \vec{J}_L^{-1} \cdot \vec{UE} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\vec{J}_L)} \cdot \text{adj}(\vec{J}_L) \cdot \begin{bmatrix} UE_x \\ UE_y \\ UE_z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{lscs3(lca+scs3)} \cdot \text{adj}(\vec{J}_L) \cdot \begin{bmatrix} UE_x \\ UE_y \\ UE_z \end{bmatrix}$$

Αντίστροφο αριθμητικό μοντέλο

Υπολογίζω τον αντίστροφο του πίνακα A_2^0

$$(A_2^0)^{-1} = \begin{bmatrix} s1 & 0 & c1 & l1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c1 & 0 & s1 & -l0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s1 & 0 & -c1 & -l1s1-l0c1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c1 & 0 & s1 & s1l0-c1l1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^2 = (A_2^0)^{-1} \cdot A_4^0 =$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & | & s_1 p_x - c_1 p_z - l_1 s_1 - l_0 c_1 \\ \dots & \dots & \dots & | & p_y \\ \dots & \dots & \dots & | & c_1 p_x + s_1 p_z + s_1 l_0 - c_1 l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Οπώς } A_4^2 = A_3^2 \cdot A_4^3 = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & | & c_1 s_1 c_3 - s_1 s_1 c_3 + l_1 c_3 \\ \dots & \dots & \dots & | & s_1 s_1 c_3 + c_1 s_1 s_3 + l_1 s_3 \\ \dots & \dots & \dots & | & l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Από τους δύο πίνακες παρατηρούμε ότι:

$$> l_2 = c_1 p_x + s_1 p_z + s_1 l_0 - c_1 l_1 \Leftrightarrow$$

$$l_2 = c_1(p_x - l_1) + s_1(p_z + l_0) \Leftrightarrow \text{(συνεχίζουμε με την θεωρία των διαφανεών)}$$

$$\Leftrightarrow q_1 = 2 \arctan \left(\frac{(p_z + l_0) \pm \sqrt{(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2}}{l_2 + p_x - l_1} \right)$$

$$> p_y = s_1 s_1 c_3 + c_1 s_1 s_3 + l_1 s_3 = l_1 s_3 + l_1 s_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_y = l_1 s_3 + l_1 s_3 \Leftrightarrow s_3 = \frac{p_y - l_1 s_3}{l_1} \quad (i)$$

$$> \text{Θεωρώ } k = s_1 p_x - c_1 p_z - l_1 s_1 - l_0 c_1 \text{ γνωστό καθώς γνωρίζουμε πλάτος } \Rightarrow q_1 \quad c_1 s_1 c_3 - s_1 s_1 c_3 + l_1 c_3 = k \Leftrightarrow l_1 c_3 + l_1 c_3 = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_3 = \frac{k - l_1 c_3}{l_1}$$

$$\text{Εφαρμόζω την γνωστή ταυτότητα } (s_3)^2 + (c_3)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p_y - l_1 s_3)^2}{l_1^2} + \frac{(k - l_1 c_3)^2}{l_1^2} = 1 \Leftrightarrow p_y^2 - 2 p_y \cdot l_1 s_3 + l_1^2 s_3^2 + k^2 - 2 k \cdot l_1 c_3 + l_1^2 c_3^2 = l_1^2$$

$$- 2 k \cdot l_1 c_3 + l_1^2 c_3^2 = l_1^2 \Leftrightarrow p_y^2 - 2 p_y l_1 s_3 + l_1^2 s_3^2 + k^2 - 2 k l_1 c_3 = l_1^2$$

$$\Leftrightarrow p_y s_3 + k \cdot c_3 = \frac{-(l_1^2 - p_y^2 - l_1^2 s_3^2 - k^2)}{2 l_1} = \frac{k^2 + l_1^2 + p_y^2 - l_1^2}{2 l_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_y s_3 + k \cdot c_3 = \frac{k^2 + l_1^2 + p_y^2 - l_1^2}{2 l_1} \Leftrightarrow \left(\text{Εφαρμόζω την ίδια ταυτότητα με πριν} \right)$$

9

$$\Rightarrow q_2 = 2 \arctan \left(\frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 + n^2 - \frac{(n^2 + l_4^2 + p_2^2 - l_3^2)^2}{4l_4}}}{n + \frac{n^2 + l_4^2 + p_2^2 - l_3^2}{2l_4}} \right)$$

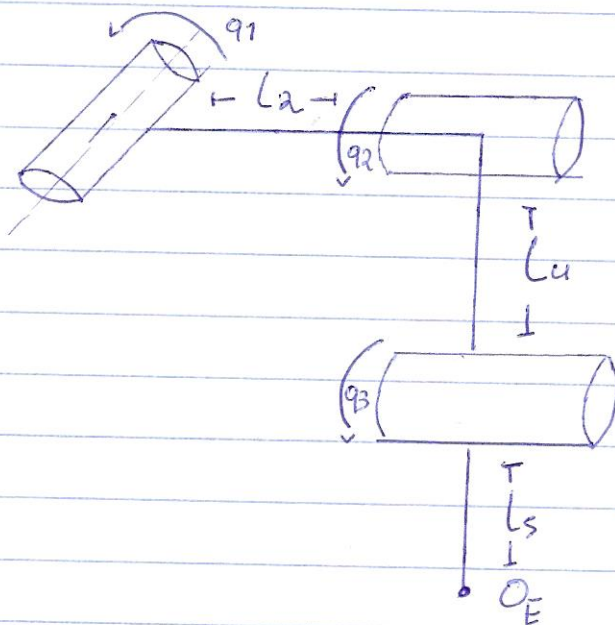
$$\gamma_{523} = \frac{p_2 - l_4 s_2}{l_3} \Leftrightarrow q_2 + q_3 = \arcsin \left(\frac{p_2 - l_4 s_2}{l_3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow q_3 = \arcsin \left(\frac{p_2 - l_4 s_2}{l_3} \right) - q_2$$

Επομένως, εφόσον γνωρίζουμε την τελική θέση του end-effector μπορούμε μέσω των προηγουμένων παραμετρικών τύπων να προσδιορίσουμε τις τιμές των αρθρώσεων $\{q_1, q_2, q_3\}$ που χρησιμοποιήθηκαν για την μετακίνηση του ρομπότ.

B. Κυτταρική Προσομοίωση ($L_0=L_1=L_3=0$)

Η αφαίρεση (μυθελικός μήκος) κάποιων συνδέσμων μας οδηγεί στην ακόλουθη ρομποτική διάταξη:



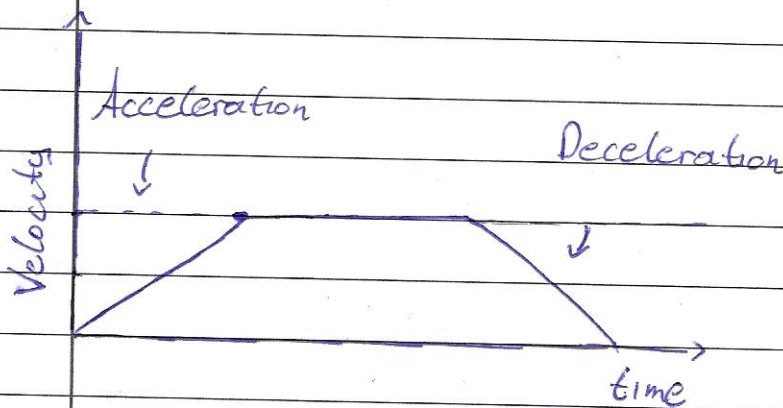
Σχεδιασμός Τροχιάς ($P_A \rightarrow P_B$)

Αρχικά ο σχεδιασμός της τροχιάς θα γίνει στον χώρο εργασίας (task-space) και όχι στον χώρο των αρθρώσεων (joint space). Το γεγονός αυτό σηματοδοτεί πως θα επιλύεται η αντίστροφη κινηματική εξίσωση για κάθε σημείο του path, ένα σιωπασμείο που συνδέει την αρχική με την επιθυμητή θέση, πράγμα που είναι και μεν απρόβλεπτο υπολογιστικά αλλά μας εγγυάται απρόβλεπτο σχεδιασμό της τροχιάς και την αποφυγή πιθανών εμποδίων. Σε αντίθετη περίπτωση δηλαδή αν σχεδιάζαμε την τροχιά στον χώρο των αρθρώσεων θα απαιτούσε να επιλύσουμε την αντίστροφη κινηματική εξίσωση μόνο για την αρχική και την εσθική θέση. Όπως εύκολα γίνεται κατανοητό στην περίπτωση αυτή το υπολογιστικό κόστος είναι σαφώς μικρότερο παρόλα αυτά η κίνηση που θα εκτελέσει το ρομπότ δεν είναι προβλέψιμη, γεγονός που πιθανόν μπορεί να οδηγήσει σε ασυμμετρίες με εμποδία.

Στόχος του σχεδιασμού τροχιάς είναι η παραγωγή χρησιμών αναρτήσεων που θα περιγράφουν την εξέλιξη των μεταβλητών θέσης του ρομπότ.

Έτσι δημιουργούμε το path, δηλαδή ένα σύνολο επιθυμητών θέσεων που συνδέουν την αρχική και την τελική θέση, και εφαρμόζουμε σε κάθε μία από αυτές την αντίστροφη κινησική εξίσωση.

Στην επιλογή της άσκησης χρησιμοποιούμε την τραπεζοειδή τροχιά με χρήση του ορόντιου αλγορίθμου. Καλείται τραπεζοειδή καθώς η ταχύτητα της ρομποτικής διάταξης αυξάνεται γραμμικά σε μία σταθερή ταχύτητα και στην συνέχεια εθύνει γραμμικά στην μηδενική τιμή διατηρώντας δηλαδή σχηματίζει ένα τραπέζιο.



Ο κύριος λόγος που επιλέξαμε την απενεργό τροχιά είναι το γεγονός πως χάρη στον σχεδιασμό της δεν υπερβαίνουμε ποτέ την επιθυμητή θέση καθώς συνεχώς επιταχύνει και επιβραδύνει από την αρχική θέση-στόχο.