



Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

Ακτινοβολία Σύγχροτρον από Ηλεκτρόνια και  
Πρωτόνια ως εξήγηση της ραδιοεκπομπής από  
το μεγάλης κλίμακας πίδακα του M84

Χαράλαμπος Τσιουτής

A.M.: 1110 2014 00230

Επιβλέπουσα καθηγήτρια

Μαρία Πετροπούλου



## Περίληψη

Η εργασία μας επικεντρώνεται στην επεξήγηση της ραδιοεκπομπής από το μεγάλης κλίμακας πίδακα στον γαλαξία M84 μέσω της ακτινοβολίας σύγχροτρον από ηλεκτρόνια και πρωτόνια. Στα πλαίσια της μελέτης μας γίνεται παρουσίαση της θεωρίας του μηχανισμού σύγχροτρον και στην συνέχεια παρουσίαση της εφαρμογής στα δεδομένα του M84. Λόγω της έλλειψης αναλυτικής περιγραφής του κώδικα για την προσομοίωση του φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον γίνεται εκτενής περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας και των τεχνικών που χρησιμοποιήσαμε για την μοντελοποίηση μας. Εν τέλη έχουμε κατασκευάσει το θεωρητικό φάσμα ακτινοβολίας με ικανοποιητική προσαρμογή στα παρατηρησιακά δεδομένα για δύο διαφορετικούς πληθυσμούς σωματιδίων. Οι μη μονοσήμαντα ορισμένοι παραμέτροι της μοντελοποίησης μας υποδυκνύουν την ανάγκη επιπλέον θεωρητικού υποβάθρου για την επιβολή περιορισμών και την ακριβέστερη επεξήγηση των παρατηρησιακών δεδομένων.

In this report we examine synchrotron radiation from electrons and protons as explanation of the non-thermal high energy emission from kiloparsec-scale relativistic jet in M84. At first we provide an overview of the theoretical background of synchrotron radiation and then we present the computational process and its application to observational data from M84. We find that there is a relative lack of analytical report in the bibliography regarding the coding of synchrotron spectrum therefore we give an extensive description of the techniques and computational process we used for our model. The observational data reveal that the radiation spectrum requires more than two spectral components due to turn over at approximately 100GHz. In order to explain the spectral components we investigate two scenarios that require a population of electrons and protons. Although our models can fit the observed spectral energy distribution, we need more theoretical work to explain the origin and properties of the particle population.



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου Μαρία Πετροπούλου για την στήριξη της, καθόλη την διάρκεια εκπόνησης της πτυχιακής μου εργασίας.



# Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Ευχαριστίες	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Ιστορικό και η σημασία	1
1.2 Ενεργοί Γαλαξιακοί Πυρήνες	2
2 Ακτινοβολία Σύγχροτρον	5
2.1 Συνολική ισχύ εκπομπής	5
2.2 Το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον	8
2.2.1 Μετάβαση από κύκλοτρον σε ακτινοβολία σύγχροτρον	12
2.3 Φάσμα ακτινοβολίας για κατανομή νόμου δύναμης	12
2.4 Αυτοαπορρόφηση Σύγχροτρον	15
3 Αριθμητικός υπολογισμός φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον	21
3.1 Τεχνικές υπολογισμού της συνάρτησης σύγχροτρον $F(x)$	21
3.2 Απεικόνιση φάσματος ακτινοβολίας νόμου δύναμης	23

3.3	Απεικόνιση φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον, συναρτήση του μαγνητικού πεδίου, αριθμού σωματιδίων . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Λεπτοαδρονικό Μοντέλο για τον πίδακα στον M84</b>	<b>29</b>
4.1	Χαρακτηριστικά M84 . . . . .	31
4.2	Εφαρμογή στον M84 . . . . .	33
4.2.1	Ενεργειακοί υπολογισμοί μοντέλων . . . . .	38
4.3	Συμπεράσματα . . . . .	43
	<b>Παράρτηματα</b>	<b>45</b>
	<b>A' Μαθηματικό υπόβαθρο</b>	<b>46</b>
A'.1	Φυσικές σταθερές στο <i>CGS</i> . . . . .	46
A'.2	Σχετικιστική εστίαση φωτός . . . . .	47
A'.3	Ανάλυση Fourier: Φάσμα Ακτινοβολίας . . . . .	48
A'.4	Συντελεστές Einstein . . . . .	50
A'.5	Λαμπρότητα Eddington . . . . .	53
A'.6	Υπολογισμός σταθεράς νόμου δύναμης . . . . .	54
	<b>B' Κώδικας</b>	<b>56</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>62</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορικό και η σημασία

Από την πρώτη επιβεβαίωση ύπαρξης ακτινοβολίας σύγχροτρον το 1956 [1] μέχρι και τις σημερινές αστροφυσικές παρατηρήσεις ο μηχανισμός σύγχροτρον παραμένει σημαντικό κομμάτι έρευνας στον τομέα της Αστροφυσικής Υψηλών Ενεργειών. Ο σχετικιστικός χαρακτήρας του μηχανισμού αυτού προσδίδει τόσο θεωρητικό όσο και παρατηρησιακό ενδιαφέρον και έχει αποτελέσει ακριβής επεξήγηση σε πληθώρα παρατηρήσεων μη θερμικής ακτινοβολίας σε υπολείμματα υπερκαινοφανών [2], pulsars [3], δίσκους, πυρήνες και πίδακες γαλαξιών [4], καθώς και ραδιοlobes ενεργών γαλαξιών.

Η σημασία της ακτινοβολίας σύγχροτρον επεκτείνεται και σε άλλους τομείς των φυσικών επιστημών. Συγκρίσεις με τις ροές σχετικιστικών ηλεκτρονίων σε πλανητικές ατμόσφαιρες δείχνουν συμφωνία με το θεωρητικό μοντέλο της ακτινοβολίας σύγχροτρον [5]. Ο μηχανισμός αυτός έχει χρησιμοποιηθεί επίσης σε επιταχυντές σωματιδίων<sup>1</sup>, συνεισφέροντας σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη της σύγχρονης φυσικής. Στην τρέχουσα εργασία θα επικεντρωθούμε στην εφαρμογή της θεωρίας που θα αναλύσουμε για την μελέτη ακτινοβολίας από πίδακες ενεργών γαλαξιών (Active Galactic Nuclei, AGN).

---

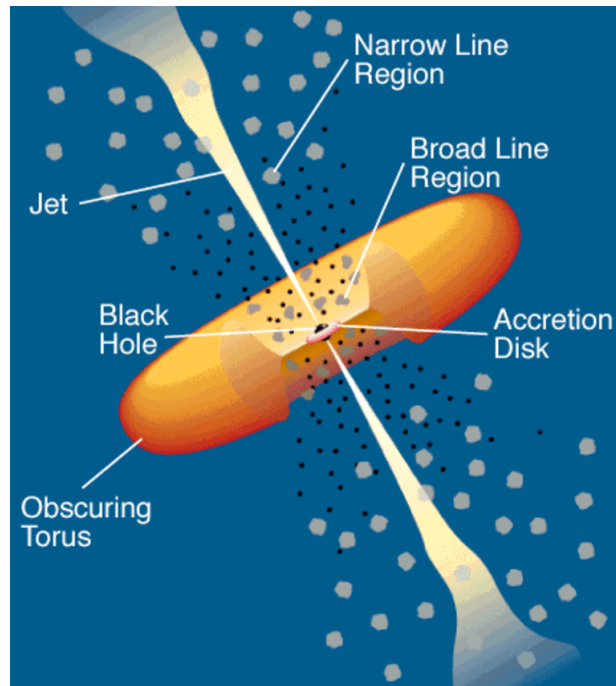
<sup>1</sup>ex: Tevatron synchrotron collider at Fermilab

## 1.2 Ενεργοί Γαλαξιακοί Πυρήνες

Οι Ενεργοί Γαλαξιακοί Πυρήνες, AGN θα αποτελέσουν το αστροφυσικό αντικείμενο στο οποίο θα επικεντρωθεί η έρευνα μας, αφού προηγηθεί η απαραίτητη θεωρητική ανάλυση. Οι AGN αποτελούν γαλαξίες με μια υπερμεγέθη μαύρη τρύπα στο κέντρο τους ( $10^6$  με  $10^{10}$  ηλιακές μάζες) και λαμπρότητες της τάξης των  $10^{42} - 10^{48}$  erg/s [6]. Αποτέλεσμα της υπερμεγέθους μελανής οπής στο κέντρο του γαλαξία, λόγω της βαρυτικής έλξης, είναι η πρόσπτωση ύλης με μεγάλο ρυθμό προς το κέντρο. Η ισχύς της ακτινοβολίας του AGN μπορεί να ξεπεράσει την λαμπρότητα ολόκληρου του γαλαξία αρκετές τάξεις μεγέθους. Οι διαστάσεις της πηγής εκπομπής ακτινοβολίας ενός AGN είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του γαλαξία και εκπέμπουν μη θερμικό συνεχές φάσμα ακτινοβολίας το οποίο εκτείνεται από τα ραδιοκύματα μέχρι τις ακτίνες γ.

Η διαδικασία της πρόσπτωσης ύλης προς την μαύρη τρύπα δημιουργεί δίσκο προσαύξεσης στο κέντρο του ενεργού γαλαξία με άμεσο αποτέλεσμα την μετατροπή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας σε ακτινοβολία με ιδιαίτερα αποτελεσματικό ρυθμό (αρκετές τάξεις μεγέθους αποτελεσματικότερο από την πυρηνική σύντηξη[7]). Οι ενεργοί γαλαξίες παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές μεταξύ τους κυρίως λόγω του ότι η διαδικασία πρόσπτωσης ύλης και μετατροπής βαρυτικής ενέργειας σε ακτινοβολία μπορεί να διαφέρει σε ένταση ανά γαλαξία 6 με 7 τάξεις μεγέθους. Για την ταξινόμηση των ενεργών γαλαξιών έχουμε 2 κύρια μοντέλα τα οποία διαχωρίζουμε ανάλογα με το ρυθμό προσαύξεσης μάζας (accretion process) και την γεωμετρία του δίσκου προσαύξεσης που παράγεται. Αρχικά, έχουμε το μοντέλο Sakura-Sunyaev στο οποίο έχουμε την δημιουργία γεωμετρικού λεπτού δίσκου προσαύξεσης ο οποίος είναι οπτικά πυκνός [8]. Το φάσμα που αναμένουμε από το μοντέλο αυτό είναι τύπου τροποποιημένου μελανού σώματος με τις κορυφές του στο οπτικό/υπεριώδες. Για χαμηλότερους ρυθμούς έχουμε το μοντέλο των Advection-Dominated Accretion Flows (ADAF)[9]. Στο μοντέλο ADAF ο δίσκος προσαύξεσης δεν έχει σχήμα κλασσικού λεπτού γεωμετρικού δίσκου και η προσπίπτουσα ύλη ακτινοβολεί μικρό μέρος της ενέργειας της. Η ακτινοβολία που προκύπτει από το μοντέλο αυτό έχει διαφορετικό φάσμα από αυτό ενός μελανού σώματος.

Το σύνολο των ενεργών γαλαξιών μπορεί να περιγραφεί σε γενικό πλαίσιο μέσω του καθιερωμένου μοντέλου [11]. Το καθιερωμένο μοντέλο πέρα από την ύπαρξη του δίσκου προσαύξεσης



Σχήμα 1.1: Ποιοτική απεικόνιση Ενεργειακού Γαλαξιακού Πυρήνα [10]

και της υπερμεγέθους μαύρης τρύπας στο κέντρο προτείνει την ύπαρξη επιπλέον συνιστώσεων σε ένα ενεργό γαλαξία (σχήμα 1.1). Στο μοντέλο αυτό προτείνεται η ύπαρξη μοριακού τόρου σκόνης [12] με κέντρο του τον πυρήνα του γαλαξία, πρόταση η οποία προέρχεται από το γεγονός ότι σε συγκεκριμένες γωνίες παρατήρησης δεν διαφαίνεται ο πυρήνας του AGN. Στο εσωτερικό του τόρου, σε αποστάσεις κοντά στην μαύρη τρύπα  $10^{16}$  cm, αποτελείται από περιοχές πυκνών αερίων μαζών οι οποίες εκπέμπουν διευρυμμένες γραμμές εκπομπής (BLR-Broad Line Region)[13], λόγω της μεγάλης ταχύτητας των αερίων. Απομακρυνόμενοι από την BLR βρίσκεται περιοχή αερίων μαζών μικρότερης πυκνότητας με λεπτές γραμμές εκπομπής (NLR-Narrow Line Region)[14]. Οι λεπτές γραμμές εκπομπής είναι αποτέλεσμα των χαμηλότερων ταχυτήτων των αερίων λόγω της ασθενούς επίδρασης του βαρυτικού δυναμικού σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

Από τον πυρήνα του ενεργού γαλαξία έχουμε εκροές σχετικιστικών σωματιδίων και τον σχηματισμό των σχετικιστικών πιδάκων, jets. Οι εκροές αυτές αποτελούν σχετικιστικό πλάσμα το οποίο κινείται με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός και εκπέμπουν ακτινοβολία σύγχροτρον σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Η κινητική ενέργεια που παράγεται από την διαδικασία αυτή μπορεί να φτάσει μέχρι και  $10^{46}$  erg/s και χρόνο ζωής  $10^7$  χρόνια. Οι διαστάσεις του jet μπορεί να φτάσουν τα  $10^{25}$  cm, διαστάσεις που ξεπερνούν πολλές τάξεις μεγέθους την μαύρη τρύπα του

γαλαξία που είναι ουσιαστικά η κύρια αιτία παραγωγής ενέργειας του ενεργού γαλαξία [15]. Η πιο πάνω περιγραφή αποτελεί ένα μοντέλο ενοποίησης των ενεργών γαλαξιών με τις ιδιότητες που περιγράψαμε να διαφέρουν ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του γαλαξία.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η ακτινοβολία που παράγεται από ένα ενεργό γαλαξία στα ραδιοκύματα είναι κυρίως αποτέλεσμα του μηχανισμού σύγχροτρον. Σε υψηλότερες συχνότητες, κυρίως για ακτίνες  $\gamma$ , δεν συναντούμε συχνά τον μηχανισμό σύγχροτρον. Λόγω της εκπομπής σύγχροτρον ακτινοβολίας η πρώτη παρατήρηση ενεργών γαλαξιών έγινε στην περιοχή των ραδιοκυμάτων. Οι παρατηρήσεις αυτές καταδεικνύουν ενεργούς γαλαξίες με ισχυρή εκπομπή στα ραδιοκύματα και μέρος των ενεργών γαλαξιών με χαμηλότερες ενδείξεις στα ραδιοκύματα. Οι παρατηρήσεις αυτές οδήγησαν στον διαχωρισμό των γαλαξιών σε ραδιο-ήσυχους και ραδιο-ισχυρούς γαλαξίες αντίστοιχα [16]. Η έρευνα μας θα επικεντρωθεί στους ραδιο-ισχυρούς γαλαξίες και συγκεκριμένα στα jet των γαλαξιών που εκτοξεύονται από την πηγή.

## Κεφάλαιο 2

# Ακτινοβολία Σύγχροτρον

Ο μηχανισμός σύγχροτρον αποτελεί μηχανισμό εκπομπής φωτονίων μέσω της κίνησης φορτισμένων σχετικιστικών σωματιδίων μέσα στο μαγνητικό πεδίο της πηγής. Τα σωματίδια επιταχύνονται καθώς διαγράφουν ελικοειδείς τροχιές και αποτέλεσμα αυτής της επιτάχυνσης είναι η ακτινοβολία σύγχροτρον. Θα αφιερώσουμε το επόμενο κεφάλαιο στην ανάλυση του μηχανισμού αυτού και των χαρακτηριστικών του φάσματος εκπομπής και απορρόφησης της ακτινοβολίας του.

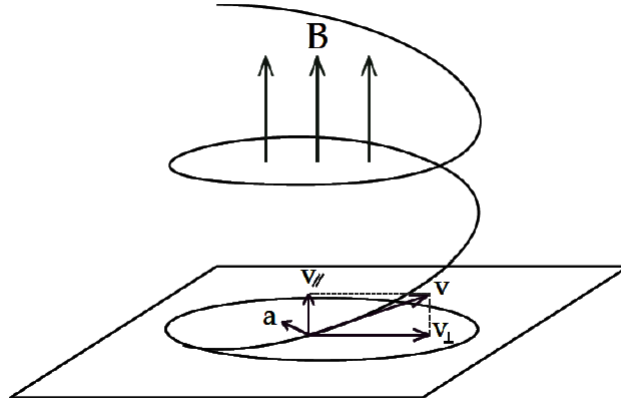
### 2.1 Συνολική ισχύ εκπομπής

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε τις σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης για σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = q \vec{v} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.2)$$

όπου  $\vec{E}$  το ηλεκτρικό πεδίο,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  ο παράγοντας *Lorentz* και  $\vec{v}$  η ταχύτητα του σωματιδίου.



Σχήμα 2.1: Ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο [17]

Η απουσία ηλεκτρικού πεδίου στην 2.2 μας δίνει ότι  $\gamma = \text{constant}$  ή  $|\vec{v}| = \text{constant}$  και μπορούμε να γράψουμε

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.3)$$

Αναλύοντας την ταχύτητα σε 2 συνιστώσες, μια κάθετη  $\vec{v}_\perp$  και μια παράλληλη  $\vec{v}_\parallel$  ως προς την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου (βλέπε Σχήμα 2.1) έχουμε:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_\parallel) = 0, \quad \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (2.4)$$

Επομένως,  $|\vec{v}_\parallel| = \text{constant}$  και εφόσον  $|\vec{v}| = \text{constant}$  τότε και  $|\vec{v}_\perp| = \text{constant}$ . Η λύση της εξίσωσης μας δίνει ομοιόμορφη κυκλική κίνηση σε επίπεδο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο και κίνηση με σταθερή ταχύτητα στον παράλληλο άξονα και σε συνδυασμό παίρνουμε την ελικοειδή τροχιά του σωματιδίου με συχνότητα περιστροφής (Σχήμα 2.1)

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc} \quad (2.5)$$

Βλέπουμε επίσης ότι η επιτάχυνση είναι κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητας με μέτρο  $\vec{a}_\perp = \omega_B \vec{v}_\perp$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση *Larmor* για σχετικιστικά σωματίδια [17] παίρνουμε την ισχύ ακτινοβολίας που εκπέμπεται από σωματίο φορτίου  $q$  και μάζας  $m$ :

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_\perp^2 \quad (2.6)$$

Θεωρώντας τις σχέσεις  $r_o^1 \equiv \frac{e^2}{mc^2}$ ,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$  έχουμε ισοδύναμα

$$P = \frac{2}{3} r_o^2 c \gamma^2 \beta_{\perp}^2 B^2 \quad (2.7)$$

Για ισοτροπική κατανομή ταχυτήτων μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της  $\beta_{\perp}$  λαμβάνοντας υπόψη όλες τις δυνατές γωνίες. Θεωρώντας  $a$  την γωνία μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας παίρνουμε

$$\langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 a d\Omega = \frac{2\beta^2}{3} \quad (2.8)$$

με αντικατάσταση στην 2.7 λαμβάνουμε την τελική σχέση

$$P = \frac{4}{9} r_o^2 c \gamma^2 \beta^2 B^2 \quad (2.9)$$

και ισοδύναμα

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_B \quad (2.10)$$

όπου  $\sigma_T = \frac{8\pi r_o^2}{3}$  η ενεργός διατομή *Thomson* και  $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$  η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας. Η σχέση αυτή μας δίνει την συνολική ισχύ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας επομένως τις ενεργειακές απώλειες των σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων.

Η σχέση αυτή μας παρέχει διαφορετικά αποτελέσματα για ηλεκτρόνια και πρωτόνια λόγω της εξάρτησης της από την μάζα. Παρακάτω παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα από την διαφοροποίηση αυτή.

Χρησιμοποιώντας την σχέση για την ισχύ μπορούμε να βρούμε τον χρόνο ζωής σύγχροτρον των εκάστοτε φορτισμένων σωματιδίων. Ξεκινώντας για ηλεκτρόνια έχουμε

$$\tau_{syn,e} = \frac{E_e}{P_e} = \frac{\gamma m_e c^2}{\frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_B} \simeq 7.75 \times 10^8 B^{-2} \gamma^{-1} s \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>Ορισμός της κλασσικής ακτίνας του ηλεκτρονίου.

Για το υπολογισμό του χρόνου ζωής πρωτονίου θα πρέπει να προσέξουμε την εξάρτηση από την μάζα που κρύβεται στον ορισμό της κλασσικής ακτίνας του ηλεκτρονίου  $r_o$ , στην σχέση **2.10** και να την αντικαταστήσουμε κατάλληλα. Βρίσκουμε αντίστοιχα για πρωτόνια

$$\tau_{syn,p} = \frac{E_p}{P_p} \simeq 4.8 \times 10^{18} B^{-2} \gamma^{-1} s \quad (2.12)$$

Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι για ηλεκτρόνια και πρωτόνια ίδιας ενέργειας θα ισχύει για τους χρόνους ζωής τους ότι

$$\tau_{syn,p} = \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^4 \tau_{syn,e} \quad (2.13)$$

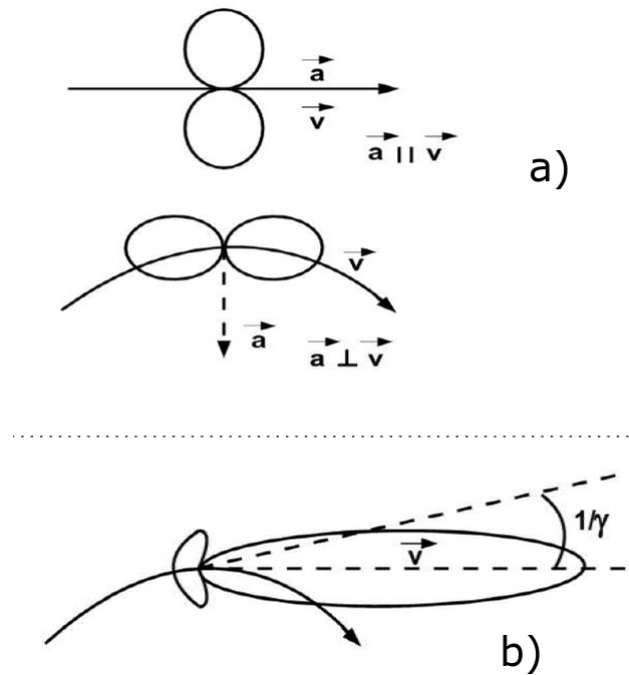
Βλέπουμε λοιπόν ότι η σημαντικά μεγαλύτερη μάζα των πρωτονίων έναντι των ηλεκτρονίων ( $m_p \approx 1836 m_e$ ) είναι υπεύθυνη για την μεγάλη διαφορά στους χρόνους ζωής των σωματιδίων. Ο μεγαλύτερος χρόνος ζωής των πρωτονίων μας υποδηλώνει ότι τα πρωτόνια θα μπορούν να διαφύγουν από την πηγή ή να χάσουν την ενέργεια τους από άλλες διεργασίες χωρίς να υποστούν σημαντικές απώλειες ενέργειας λόγω εκπομπής ακτινοβολίας σύγχροτρον.

Αντίστοιχα συγκρίνοντας την ισχύ των 2 σωματιδίων με κοινό παράγοντα *Lorentz* βρίσκουμε ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς των ηλεκτρονίων είναι  $\left( \frac{m_p}{m_e} \right)^2$  φορές μεγαλύτερη από την ισχύ των πρωτονίων. Επομένως ακτινοβολία που προέρχεται από πρωτόνια με τον ίδιο παράγοντα *Lorentz* με αυτό των ηλεκτρονίων θα είναι αμελητέα. Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις περιπτώσεις για τις οποίες η ακτινοβολία σύγχροτρον πρωτονίων γίνεται σημαντική.

## 2.2 Το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον

Για το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και τα σχετικιστικά φαινόμενα, τα οποία περιγράφονται παράρτημα **A'2**, στον τρόπο που λαμβάνει την ακτινοβολία ο παρατηρητής. Λόγω του φαινομένου της σχετικιστικής εστίασης του φωτός (relativistic beaming) η ακτινοβολία φαίνεται να συγκεντρώνεται σε κατευθύνσεις κοντινές με την κατεύθυνση της ταχύτητας του επιταχυνόμενου σωματιδίου. Στον μηχανισμό σύγχροτρον η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη ως προς την επιτάχυνση του (Σχήμα **2.1**) επομένως αναμένουμε εκπομπή





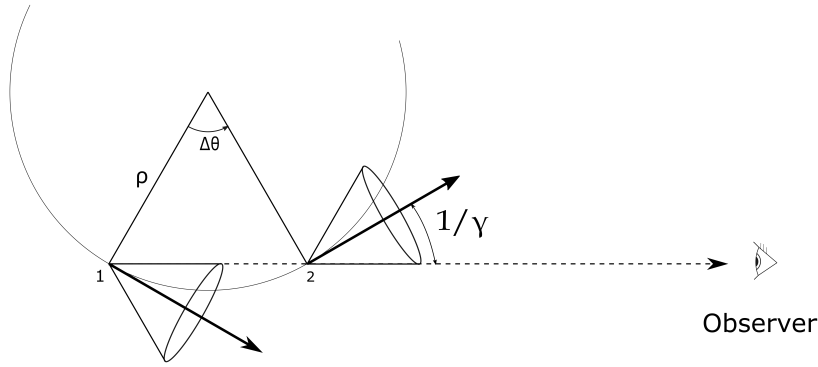
Σχήμα 2.2: Κατανομή εκπεμπόμενης ακτινοβολίας στις περιπτώσεις όπου η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι κάθετες και παράλληλες μεταξύ τους. Το διάγραμμα (a) αναφέρεται στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου και το (b) στο σύστημα του παρατηρητή. (Σχήμα από [18])

όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.

Τα φωτόνια εκπέμπονται υπο γωνίες  $\sim 1/\gamma$  ως προς την κατεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου, με τον παρατηρητή να λαμβάνει ακτινοβολία μόνο για το τμήμα της τροχιάς το οποίο περνάει από τα σημεία 1 και 2 όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3. Την απόσταση αυτή, έστω  $\Delta s$  μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω της ακτίνας καμπυλότητας της τροχιάς<sup>2</sup>,  $\rho = \Delta s/\Delta\theta$ . Μπορούμε να δούμε ότι  $\Delta\theta = 2/\gamma$  επομένως  $\Delta s = 2\rho/\gamma$ . Τώρα μπορούμε να συνδέσουμε την ακτίνα καμπυλότητας  $\rho$  με την εξίσωση κίνησης.

$$\gamma m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

<sup>2</sup>ακτίνα της τροχιάς του σωματιδίου και όχι η γωνία  $a$  μεταξύ της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου



Σχήμα 2.3: Κώνος εκπομπής ακτινοβολίας επιταχυνόμενου σωματιδίου σε σχέση με τον παρατηρητή.

Θεωρώντας ότι  $|\Delta \vec{v}| = u\Delta\theta$  και  $\Delta s = u\Delta t$  έχουμε

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{qB\sin\alpha}{\gamma m c u}, \quad (2.14\alpha')$$

$$\rho = \frac{u}{\omega_B \sin\alpha}, \quad (2.14\beta')$$

$$\Delta\theta \approx \frac{2u}{\gamma \omega_B \sin\alpha} \quad (2.14\gamma')$$

όπου  $\omega_B$  η συχνότητα περιστροφής του σωματιδίου (βλ. εξίσωση 2.5).

Στην συνέχεια αν θεωρήσουμε τα  $t_1$  και  $t_2$  ως τις χρονικές στιγμές που το σωματίδιο περνάει τα σημεία 1 και 2, τότε θα ισχύει ότι  $\Delta s = u(t_2 - t_1)$  και επομένως

$$t_2 - t_1 \approx \frac{2}{\gamma \omega_B \sin\alpha} \quad (2.15)$$

Θεωρούμε επίσης τα  $t_1^A$  και  $t_2^A$  ως τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ακτινοβολία, που εκπέμφθηκε τις χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$  αντίστοιχα, φτάνει στον παρατηρητή. Στην προσπάθεια να συνδέσουμε την διαφορά των δύο χρονικών συμβάντων με τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται η ακτινοβολία για να διασχίσει απόσταση  $\Delta s$  θα είναι  $\Delta s/c$  και επομένως αποτελεί και την διαφορά μεταξύ  $t_2^A - t_1^A$  και  $t_2 - t_1$ . Συνεπώς έχουμε

$$\Delta t^A = t_2^A - t_1^A = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin\alpha} \left(1 - \frac{u}{c}\right) \quad (2.16)$$

Για σχετικιστικό σωματίδιο θα έχουμε  $\gamma \gg 1$  και μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση  $\left(1 - \frac{u}{c}\right) \approx \frac{1}{\gamma^2}$  η οποία μας δίνει

$$\Delta t^A \approx \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \sin \alpha} \quad (2.17)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πλάτος των παρατηρούμενων παλμών είναι μικρότερο από την περίοδο της περιστροφής ( $\sim \omega_B^{-1}$ ) κατά ένα παράγοντα  $\gamma^3$ . Χρησιμοποιώντας την ανάλυση που κάναμε για το φάσμα της ακτινοβολίας (παράρτημα A'3), αναμένουμε η εκπομπή να φτάνει εώς συχνότητες της τάξης  $1/\Delta t^A$ . Ορίζουμε λοιπόν κρίσιμη συχνότητα την μέγιστη συχνότητα εκπομπής<sup>3</sup>  $\nu_c$ ,

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha = \frac{qB}{2\pi mc} \gamma^2 \sin \alpha \quad (2.18)$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να μπούμε σε μια επίπονη από τεχνικής άποψης διαδικασία υπολογισμού του φάσματος εκπομπής, όμως κρίναμε ότι μια εκτενής περιγραφή θα απέκλινε από το τρέχον θέμα. Αντί αυτού παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα [17]. Η ισχύς ανά μονάδα συχνότητας που ακτινοβολείται από ένα σωματίδιο για δεδομένο παράγοντα *Lorentz* και *pitch angle* γράφεται ως:

$$P_s(\nu, \gamma, \theta) = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin \alpha}{mc^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \quad (2.19)$$

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \equiv \frac{\nu}{\nu_c} \int_{\frac{\nu}{\nu_c}}^{\infty} K_{5/3}(y) dy \quad (2.20)$$

όπου  $K_{5/3}$  είναι η τροποποιημένη συνάρτηση *Bessel* τάξης 5/3. Η εξάρτηση από την συχνότητα βρίσκεται στην συνάρτηση  $F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)$ . Η γραφική παράσταση της  $F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $\nu \approx 0.29\nu_c$ , δηλαδή σχετικά κοντά στην τιμή που υπολογίσαμε στην (2.18). Μελετώντας τις ασυμπτωτικές μορφές της συνάρτησης βλέπουμε ότι για χαμηλές συχνότητες έχουμε προσεγγιστικά:

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \sim \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}\right) \left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)^{1/3} \quad (\nu \ll \nu_c) \quad (2.21)$$

Για μεγαλύτερες συχνότητες η συνάρτηση πέφτει εκθετικά και προσεγγίζεται ως

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/2} e^{-\nu/\nu_c} \quad (\nu \gg \nu_c) \quad (2.22)$$

---

<sup>3</sup>Χρησιμοποιούμε τον ορισμό  $\omega = 2\pi\nu$

### 2.2.1 Μετάβαση από κύκλοτρον σε ακτινοβολία σύγχροτρον

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαφοροποίηση του φάσματος της ακτινοβολίας από μη σχετικιστικά σε σχετικιστικά σωματίδια. Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο παρατήρησης για σωματίδιο που κινείται σε μαγνητικό πεδίο  $B$  θα έχει ημιτονοειδής μορφή στον χρόνο [19] με συχνότητα ίδια με την γυροσυχνότητα του μαγνητικού πεδίου [17]. Το φάσμα της ακτινοβολίας αποτελείται από μια μόνο κάθετη γραμμή σε συγκεκριμένη συχνότητα, αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Φουριέρ που δίνει μόνο μια συχνότητα, την πρώτη αρμονική.

Καθώς η ταχύτητα αυξάνεται η εκπομπή γίνεται ασυμμετρική (σχήμα 2.2) με αποτέλεσμα το ηλεκτρικό πεδίο να περιγράφεται από περισσότερες ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Με την σειρά τους οι ημιτονοειδείς μέσω του μετασχηματισμού Φουριέρ παρουσιάζουν αρμονικές μεγαλύτερης τάξης (σχήμα 2.4).

Όταν φτάσουμε σε σχετικιστικές ταχύτητες ( $\gamma \gg 1$ ) το ηλεκτρικό πεδίο μας δίνει μεγάλο αριθμό αρμονικών τέτοιο ώστε το φάσμα να γίνεται συνεχές. Οι συχνότητες φτάνουν μέχρι  $1/t_A$  με την ισχύ να συγκεντρώνεται σε μεγάλες συχνότητες.

## 2.3 Φάσμα ακτινοβολίας για κατανομή νόμου δύναμης

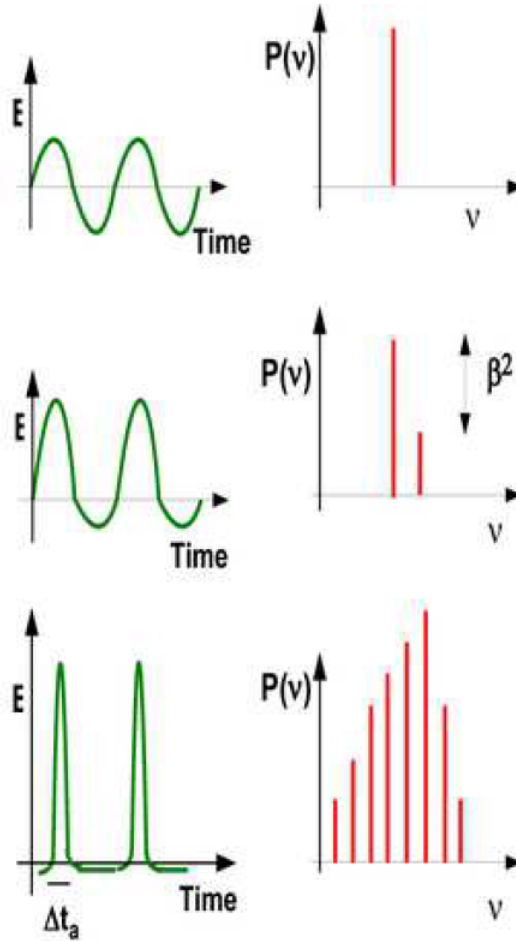
Στην πλειοψηφία των αστροφυσικών πηγών τα σχετικιστικά σωματίδια ακολουθούν ενεργειακές κατανομές νόμου δύναμης [20, 21, 22]. Για αυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων με ενέργειες<sup>4</sup> μεταξύ  $E$  και  $E + dE$  ή αντίστοιχα  $\gamma$  και  $\gamma + d\gamma$  προσεγγίζεται με την μορφή:

$$N(E)dE = CE^{-p}dE, \quad E_1 < E < E_2 \quad (2.23\alpha')$$

$$N(\gamma)d\gamma = \tilde{C}\gamma^{-p}d\gamma, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \quad (2.23\beta')$$

όπου  $C$  και  $\tilde{C}$  οι σταθερές κανονικοποίησης των αντίστοιχων κατανομών. Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις περιγράφουν ότι σε μια περιοχή ενεργειών πλάτους  $dE$  γύρω από μια ενέργεια  $E$

<sup>4</sup>Σημειώνεται ότι η ενέργεια συνδέεται με τον παράγοντα Lorentz ως  $E = \gamma mc^2$



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου όπως φαίνεται στον παρατηρητή καθώς μεταβάλλεται η ταχύτητα του σωματιδίου από μη-σχετικιστικές σε σχετικιστικές τιμές. Το πρώτο σχήμα αφορά χαμηλότερες ταχύτητες και τα πιά κάτω σχήματα αφορούν μεγαλύτερες ταχύτητες και υψηλότερης τάξης αρμονικές. (Σχήμα από [18])

υπάρχουν συνολικά  $N$  ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου.

Τώρα εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την συνολική ισχύ που ακτινοβολείται ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα συχνότητας για τέτοια κατανομή θα πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της ακτινοβολίας για ένα σωματίδιο επί την κατανομή που περιγράψαμε σε όλες τις ενέργειες ή σε όλους τους παράγοντες *Lorentz*

$$P_{tot}(\nu) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\nu) \gamma^{-p} d\gamma \propto \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \gamma^{-p} d\gamma \quad (2.24)$$

Αλλάζουμε της μεταβλητές ολοκλήρωσης σε  $x \equiv \nu/\nu_c$  και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $\nu_c \propto \gamma^2$

$$P_{tot}(\nu) \propto \nu^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(p-3)/2} dx \quad (2.25)$$

Παρατηρούμε ότι αν τα όρια του ολοκληρώματος αντιστοιχούν σε αρκετά μεγάλο εύρος τιμών ώστε να μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση  $x_1 \approx 0$ ,  $x_2 \approx \infty$ , τότε το ολοκλήρωμα θα δίνει σταθερά. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$P_{tot}(\nu) \propto \nu^{-(p-1)/2} \quad (2.26)$$

Βλέπουμε ότι φασματικός δείκτης  $s$  συνδέεται με την σταθερά της κατανομής των σωματιδίων  $p$  μέσω της σχέσης

$$s = \frac{p-1}{2} \quad (2.27)$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την παρακάτω έκφραση του ολοκληρώματος από [23] για να καταλήξουμε σε μια σχέση για την συνολική ισχύ ανά μονάδα όγκου ανά μονάδα συχνότητας για κατανομή νόμου δύναμης

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right) \quad (2.28)$$

όπου  $F(x)$  η συνάρτηση που ορίστηκε στην εξίσωση (2.20) για  $x \equiv \nu/\nu_c$ . Για τον υπολογισμό μας παρατηρούμε από την σχέση (2.5) ότι θα έχουμε  $\mu = (p-3)/2$  και μπορούμε να καταλήξουμε τελικά:

$$P_{tot}(\nu) = \frac{\sqrt{3}q^3CB\sin\alpha}{2\pi mc^2(p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{2\pi mc\nu}{3qB\sin\alpha}\right)^{-(p-1)/2} \quad (2.29)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για την εύρεση της (2.29) έχουμε ακολουθήσει την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε για την εύρεση του φασματικού δείκτη. Μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα για εύρεση της συνολικής ισχύς για διαφορετικούς νόμους δύναμης είτε ξεκινώντας από την ενέργεια είτε από τον παράγοντα Lorentz.

## 2.4 Αυτοαπορρόφηση Σύγχροτρον

Η ακτινοβολία σύγχροτρον, όπως κάθε μηχανισμός εκπομπής, συνοδεύεται με μηχανισμό απορρόφησης ο οποίος ονομάζεται αυτοαπορρόφηση σύγχροτρον. Κατά τον μηχανισμό αυτό ένα φωτόνιο αλληλεπιδρά και απορροφάται από ένα φορτίο σε μαγνητικό πεδίο δίνοντας την ενέργεια του στο φορτίο. Εναλλακτικά μπορεί να έχουμε αυθόρμητη εκπομπή κατά την οποία το σωματίδιο τείνει να εκπέμπει ισχυρότερα σε κατευθύνσεις και συχνότητες όπου υπάρχει πεδίο φωτονίων. Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να περιγραφούν μέσω της ανάλυσης των συντελεστών Einstein (παράρτημα Α'.4). Στην ανάλυση αυτή έχουμε αναφερθεί μόνο σε μεταβάσεις μεταξύ διακριτών ενεργειακών καταστάσεων. Για την περιγραφή της αυτοαπορρόφησης σύγχροτρον θα πρέπει να επεκταθούμε σε συνεχείς καταστάσεις θεωρώντας αρχικά ότι οι καταστάσεις αυτές είναι οι καταστάσεις ενός ελεύθερου σωματιδίου οι οποίες καθορίζονται από την ορμή και θέση. Αναφερόμενοι σε όρους στατιστικής μηχανικής, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια κβαντική κατάσταση η οποία αντιστοιχεί στους βαθμούς ελευθερίας του σωματιδίου σε όγκο τάξης  $h^3$  του χώρου των φάσεων. Στην συνέχεια διακριτοποιούμε τον συνεχές κλασσικό χώρο των φάσεων σε στοιχεία μεγέθους  $h^3$  και θεωρώντας ότι οι μεταβάσεις γίνονται μεταξύ των διακριτών στοιχείων που ορίσαμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη ανάλυση για τις διακριτές καταστάσεις.

Επιπλέον θα πρέπει να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα μας σε περισσότερα από 2 καταστάσεις εφόσον για ένα φωτόνιο ενέργειας  $h\nu$  αναμένουμε να υπάρχουν πολλές πιθανές μεταβάσεις τόσο υψηλότερης όσο και χαμηλότερης ενέργειας. Επομένως στην σχέση που βρήκαμε για τον συντελεστή απορρόφησης (σχέση Α'.25) θα πρέπει να αθροίσουμε τις επιπλέον ενεργειακές καταστάσεις ως:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} [n(E_1) B_{12} - n(E_2) B_{21}] \phi_{21}(\nu) \quad (2.30)$$

Η συνάρτηση  $\phi_{21}(\nu)$  λειτουργεί ως συνάρτηση  $\delta$  Dirac επομένως τα αθροίσματα υπολογίζονται μόνο για καταστάσεις με διαφορά ενέργειας  $E_2 - E_1 = h\nu$ . Υποθέτουμε ότι η εκπομπή και απορρόφηση και η κατανομή των σωματιδίων είναι επίσης ισοτροπική. Στην συνέχεια θέλουμε να βρούμε μια σχέση στην μορφή της σχέσης (2.19) για την εκπομπή σύγχροτρον θεωρώντας ότι η ενέργεια  $E_2$  είναι η ενέργεια του ηλεκτρονίου όπου ακτινοβολεί. Χρησιμοποιώντας τους ορισμο-

ύς από το παράρτημα A'.4 έχουμε  $A_{21}$  ως συντελεστή αυθόρμητης εκπομπής,  $B_{12}$  συντελεστή πραγματικής απορρόφησης και  $B_{21}$  συντελεστή εξαναγκασμένης εκπομπής έχουμε:

$$P(\nu, E_2) = h\nu \sum_{E_1} A_{21} \phi_{21}(\nu) = (2h\nu^3/c^2) h\nu \sum_{E_1} B_{21} \phi_{21}(\nu) \quad (2.31)$$

Μπορούμε να γράψουμε επίσης την σχέση (2.30) για τον συντελεστή απορρόφησης για εξαναγκασμένη εκπομπή ως:

$$-\frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} n(E_2) B_{21} \phi_{21} = \frac{-c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} n(E_2) P(\nu, E_2) \quad (2.32)$$

αντίστοιχα για το κομμάτι της πραγματικής απορρόφησης:

$$\frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} n(E_1) B_{12} \phi_{21} = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} n(E_2 - h\nu) P(\nu, E_2) \quad (2.33)$$

Για την εξαγωγή των σχέσεων έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση  $B_{12} = B_{21}$ . Επιπρόσθετα εκμεταλλευόμενοι την συνεχή φύση του συστήματος έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα της συνάρτησης  $\delta$ :

$$\sum_{E_1} n(E_1) \phi_{21} \rightarrow \int n(E_1) \delta(E_1 - (E_2 - h\nu)) dE_1 \rightarrow n(E_2 - h\nu)$$

Επομένως καταλήγουμε στην σχέση:

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \sum_{E_2} [n(E_2 - h\nu) - n(E_2)] P(\nu, E_2) \quad (2.34)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε την συνάρτηση ισοτροπικής κατανομής ηλεκτρονίων  $f(p)$  και την  $f(p)d^3p$  ως τον αριθμό των ηλεκτρονίων ανά όγκο με ορμή σε  $d^3p$ . Ο αριθμός των κβαντικών καταστάσεων ανά όγκο  $d^3p$  είναι  $g_s h^{-3} d^3p$  [24], όπου  $g_s$  το στατιστικό βάρος των ηλεκτρονίων.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>για σπιν σωματιδίων 1/2 έχουμε  $g_s = 2$



Η πυκνότητα των ηλεκτρονίων ανά χβαντική κατάσταση είναι επομένως  $(h^3/g_s)f(p)$ . Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε στις αντικαταστάσεις:

$$\sum_2 \rightarrow \frac{g_s}{h^3} \int d^3 p_2, \quad n(E_2) \rightarrow \frac{h^3}{g_s} f(p_2) \quad (2.35)$$

Επομένως στην σχέση για τον συντελεστή απορρόφησης (2.34) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα αθροίσματα ως:

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int d^3 p_2 [f(p_2^*) - f(p_2)] P(\nu, E_2) \quad (2.36)$$

όπου  $p_2^*$  είναι η ορμή που αντιστοιχεί σε ενέργεια  $E_2 - h\nu$ .

Για κατανομή νόμου δύναμης της ενέργειας θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον συντελεστή απορρόφησης συναρτήση της ενέργειας αντί της ορμής. Εφόσον η κατανομή των ηλεκτρονίων είναι ισοτροπική και θεωρώντας ότι βρισκόμαστε σε υπερσχετικιστικές ταχύτητες μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό  $E = pc$ . Έχουμε επομένως ότι:

$$N(E)dE = f(p)4\pi p^2 dp \quad (2.37)$$

και έχουμε την σχέση:

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[ \frac{N(E - h\nu)}{(E - h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (2.38)$$

όπου θεωρήσαμε την  $E_2 = E$ .

Θέλουμε να περιορίσουμε την περιγραφή μας στα όρια της κλασσικής ηλεκτροδυναμικής, όπως κάναμε και στην σχέση για  $P(\nu, E)$ , επομένως απαιτούμε ότι  $h\nu \ll E$ . Τώρα μπορούμε να αναπτύξουμε τον συντελεστή μέχρι την πρώτη τάξη του  $h\nu$ .

$$\frac{N(E - h\nu)}{(E - h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2} \simeq \frac{N(E)}{E^2} + (-h\nu) \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{N(E)}{E^2} \right) - \frac{N(E)}{E^2} = -h\nu \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{N(E)}{E^2} \right)$$

Καταλήγουμε επομένως στην σχέση:

$$\alpha_\nu = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2} \int dE P(\nu, E) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (2.39)$$

Για κατανομή νόμου δύναμης της μορφής  $N(E)dE = CE^{-p}dE$  θα έχουμε:

$$-E^2 \frac{d}{dE} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] = (p+2)CE^{-(p+1)} = \frac{(p+2)N(E)}{E}$$

επομένως,

$$\alpha_\nu = \frac{(p+2)c^2}{8\pi\nu^2} \int dE P(\nu, E) \frac{N(E)}{E} \quad (2.40)$$

Σε αυτό το σημείο θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία με αυτήν του κεφαλαίου 2.3 για να καταλήξουμε σε μια προσεγγιστική σχέση για τον συντελεστή απορρόφησης. Χρησιμοποιούμε την σχέση (2.19) για την ισχύ και θεωρούμε αρκετά μεγάλο εύρος ενεργειών τέτοιο ώστε να μπορούμε να γράψουμε τα όρια του ολοκληρώματος ως 0 και  $\infty$  αντίστοιχα. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα σταθερό και γράφουμε:

$$\alpha_\nu = \frac{(p+2)c^2}{8\pi\nu^2} \frac{\sqrt{3}q^3B}{mc^2} C \int_0^\infty dE F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) E^{-(p+1)}$$

Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό:

$$y \equiv \frac{\nu}{\nu_c} = \frac{4\pi m^3 c^5 \nu}{3qBE^2}$$

Επομένως έχουμε,

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{3}(p+2)q^3B}{16\pi m\nu^2} \left( \frac{4\pi m^3 c^5 \nu}{3qBE^2} \right)^{-p/2} C \int_0^\infty dy F(y) y^{(p-2)/2}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση 2.28 το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_0^\infty dy F(y) y^{(p-2)/2} = \frac{2^{\frac{p+2}{2}}}{p+2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{6}\right)$$

επομένως καταλήγουμε στην μορφή:

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{3}q^3}{8\pi m} \left(\frac{3q}{2\pi m^3 c^5}\right)^{p/2} C B^{(p+2)/2} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{1}{6}\right) \nu^{-(p+4)/2} \quad (2.41)$$

Για την εύρεση της συνάρτησης πηγής μπορούμε να πούμε ότι

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{a_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi a_\nu} \propto \nu^{5/2} \quad (2.42)$$

όπου  $j_\nu$  ο συντελεστής εκπομπής της ακτινοβολίας και  $a_\nu$  ο συντελεστής απορρόφησης.

Η παρατηρούμενη ένταση ακτινοβολίας για περιοχές συχνοτήτων όπου η εκπομπή σύγχροτρον είναι οπτικά αραιή είναι ανάλογη της συνάρτησης εκπομπής (2.29) ενώ για οπτικά πυκνές περιοχές είναι ανάλογη της συνάρτησης πηγής. Μέσω του αποτελέσματος αυτού, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του οπτικού βάθους, μπορούμε να υπολογίσουμε την συχνότητα στην οποία παρουσιάζεται η αυτοαπορρόφηση. Ορίζουμε επομένως το οπτικό βάθος για συγκεκριμένη συχνότητα ως:

$$\tau_\nu = \int \alpha_\nu dr \quad (2.43)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς την απόσταση την οποία διανύει η ακτινοβολία για να διαφύγει από τον πληθυσμό των φορτισμένων σωματιδίων ή ομοίως ως προς τις διαστάσεις της παρατηρούμενης πηγής. Για οπτικό βάθος μεγαλύτερο της μονάδας βρισκόμαστε σε περιοχές οπτικής αδιαφάνειας όπου η ακτινοβολία δέχεται σημαντική απορρόφηση. Αντίστοιχα για οπτικό βάθος μικρότερο της μονάδας βρισκόμαστε σε περιοχές οπτικής διαφάνειας και η ακτινοβολία διαφεύγει ελεύθερα από την πηγή. Η συχνότητα για την οποία το οπτικό βάθος γίνεται μονάδα, είναι η συχνότητα στην οποία ξεκινάει η αυτοαπορρόφηση σύγχροτρον.

Στην συνέχεια προχωρούμε στον υπολογισμό του συντελεστή απορρόφησης από την σχέση

(2.41). Ομοίως με την ανάλυση που κάναμε για το φάσμα ενός σωματιδίου θα πρέπει να δώσουμε προσοχή στις μονάδες μέτρησης της σταθεράς  $\tilde{C}$ . Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής απορρόφησης  $a_\nu$  έχει μονάδες μέτρησης  $1/cm$  επομένως η σταθερά  $C$ , σε αντίθεση με την σχέση για την ισχύ, έχει εξάρτηση από τον όγκο της πηγής.

Σε αυτό το σημείο είμαστε στην θέση να μοντελοποιήσουμε το πλήρες φάσμα ακτινοβολίας σύγχροτρον που εκπέμπεται από πληθυσμό σωματιδίων με κατανομή νόμου δύναμης. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση συνέχειας (σε μία διάσταση) της ακτινοβολίας για εκπομπή και απορρόφηση:

$$I_\nu = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (2.44)$$

όπου  $I_\nu$  η ένταση ακτινοβολίας,  $\tau_\nu = a_\nu R$  το οπτικό βάθος για πηγή ακτίνας  $R$  και  $S_\nu = \frac{P(\nu)}{4\pi a_\nu}$  η συνάρτηση πηγής [17]. Έπειτα εφόσον έχουμε υπολογίσει την ένταση ακτινοβολίας προχωρούμε στον υπολογισμό της ροής ακτινοβολίας  $F_\nu$  που λαμβάνει ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε απόσταση  $D$  από την πηγή.

## Κεφάλαιο 3

# Αριθμητικός υπολογισμός φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον

Σε σε αυτό το κομμάτι της εργασίας μας θα γίνει η υπολογιστική αναπαράσταση του θεωρητικού φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον και θα αναφερθούμε σε τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε για την μοντελοποίηση του φάσματος.

### 3.1 Τεχνικές υπολογισμού της συνάρτησης σύγχροτρον $F(x)$

Αρχικά θα γίνει η αναπαράσταση της συνάρτησης  $F(x)$  (σχέση 2.20) η οποία περιγράφει την ισχύ ακτινοβολίας που εκπέμπεται ανά συχνότητα από ένα σωματίο (σχέση 2.19). Η  $F(x)$  αφού αντικαταστήσουμε την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel γράφεται:

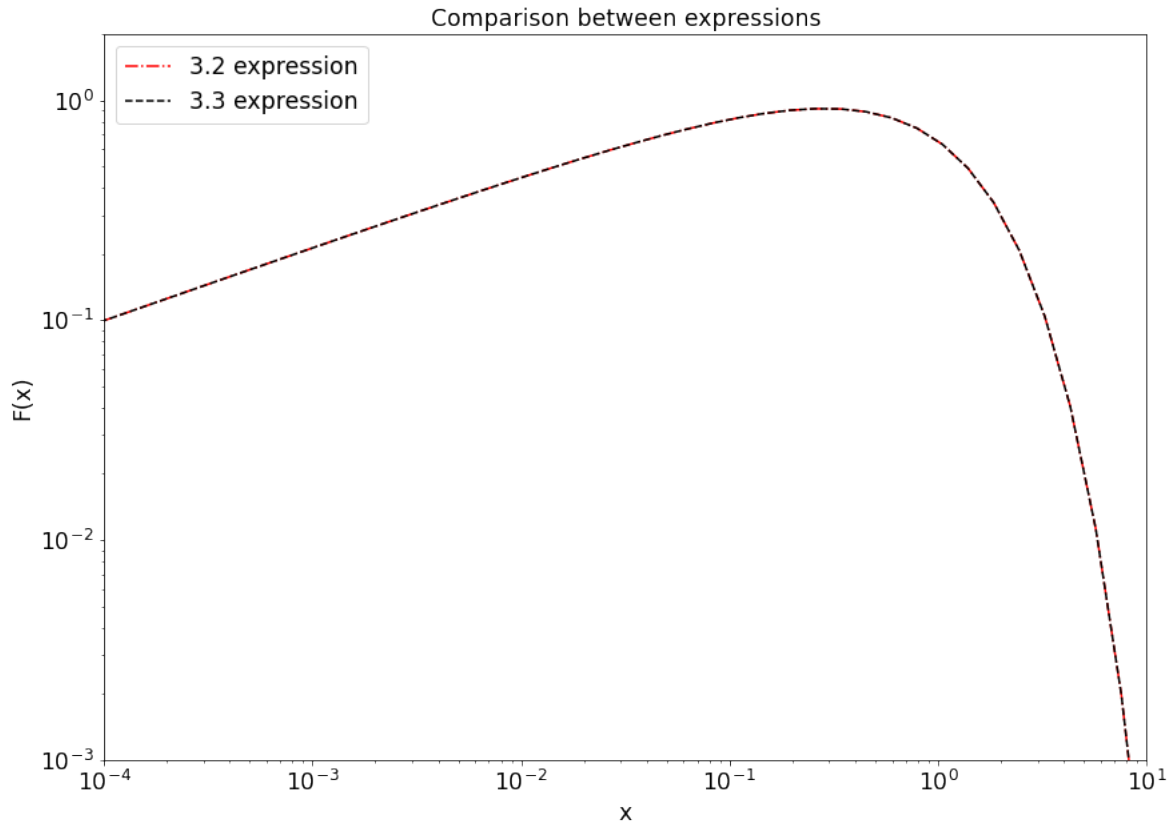
$$F(x) = x \int_x^\infty \frac{\pi^{1/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{13}{6}\right)} \int_1^\infty e^{-xt} (t^2 - 1)^{7/6} dt dx \quad (3.1)$$

Η συνάρτηση  $F(x)$  σε αυτή την μορφή παρουσιάζει προβλήματα όσο αφορά τον χρόνο υπολογισμού, λόγω της αργής σύγκλισης του ολοκληρώματος ως προς  $t$ . Για την επίλυση του

προβλήματος και την αποφυγή περαιτέρω προβλημάτων στην συνέχεια του κώδικα έχουμε χρησιμοποιήσει την εναλλακτική προσεγγιστική σχέση [25]:

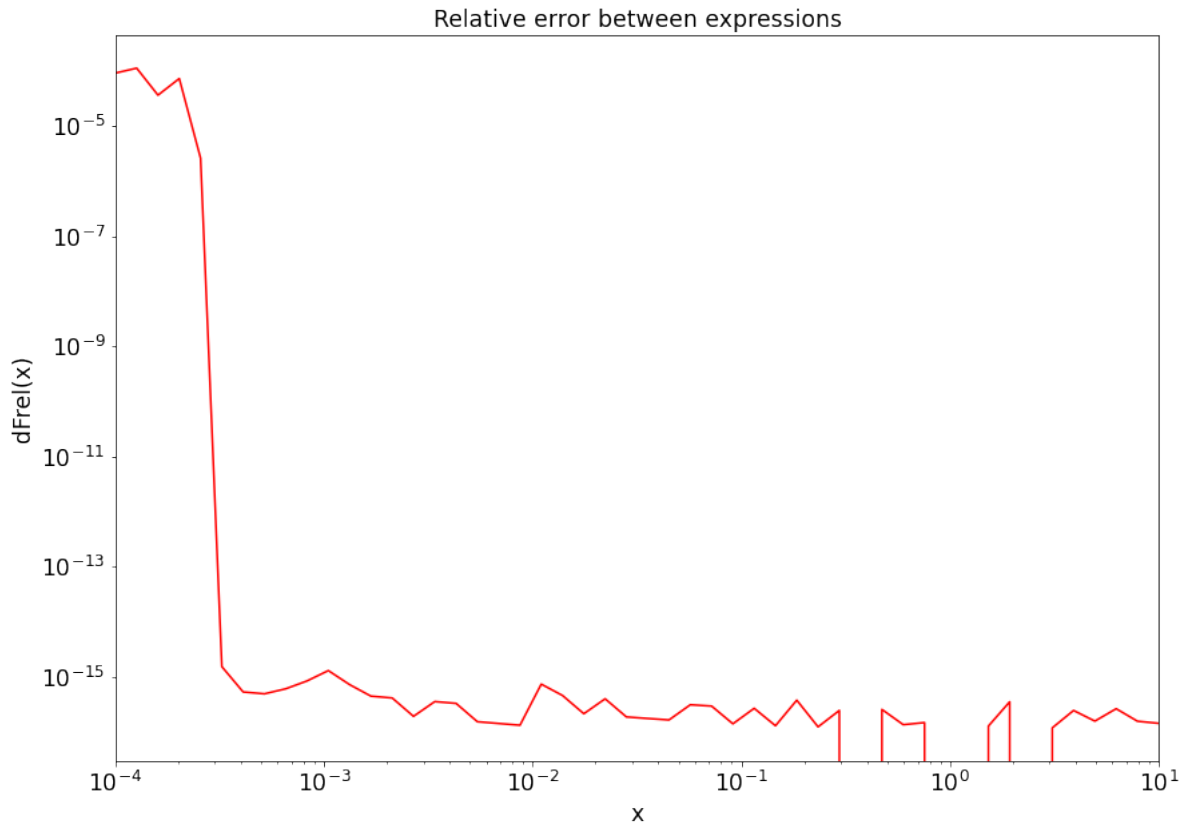
$$\int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{9 + 36x^2 + 16x^4}{(3 + 4x^2) \sqrt{1 + x^2/3}} \exp \left[ -\xi \left( 1 + \frac{4x^2}{3} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}} \right] dx \quad (3.2)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων έχουμε χρησιμοποιήσει μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss μέσω του πακέτου SciPy [26]. Η αναπαράσταση της  $F(x)$  έγινε σε λογαριθμική κλίμακα λόγω του μεγάλου εύρους των τιμών. Για την παρουσίαση των τιμών του οριζόντιου άξονα έχουμε διαχωρίσει το εύρος των τιμών σε λογαριθμικά ίσα κομμάτια. Στην περίπτωση που ο διαχωρισμός του εύρους δεν ήταν λογαριθμικός θα είχαμε ελάχιστα σημεία στις μικρές τιμές του  $x$  και επομένως θα χάναμε σε ανάλυση.



Σχήμα 3.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων της συνάρτησης  $F(x)$

Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης  $F(x)$  με τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις καθώς και το γράφημα του σχετικού σφάλματος μεταξύ των δύο σχέσεων (σχήμα 3.2). Ο υπολογισμός του σχετικού σφάλματος έγινε μέσω της σχέσης:  $dF_{rel} = \frac{|F_a(x) - F_b(x)|}{F_b(x)}$ ,



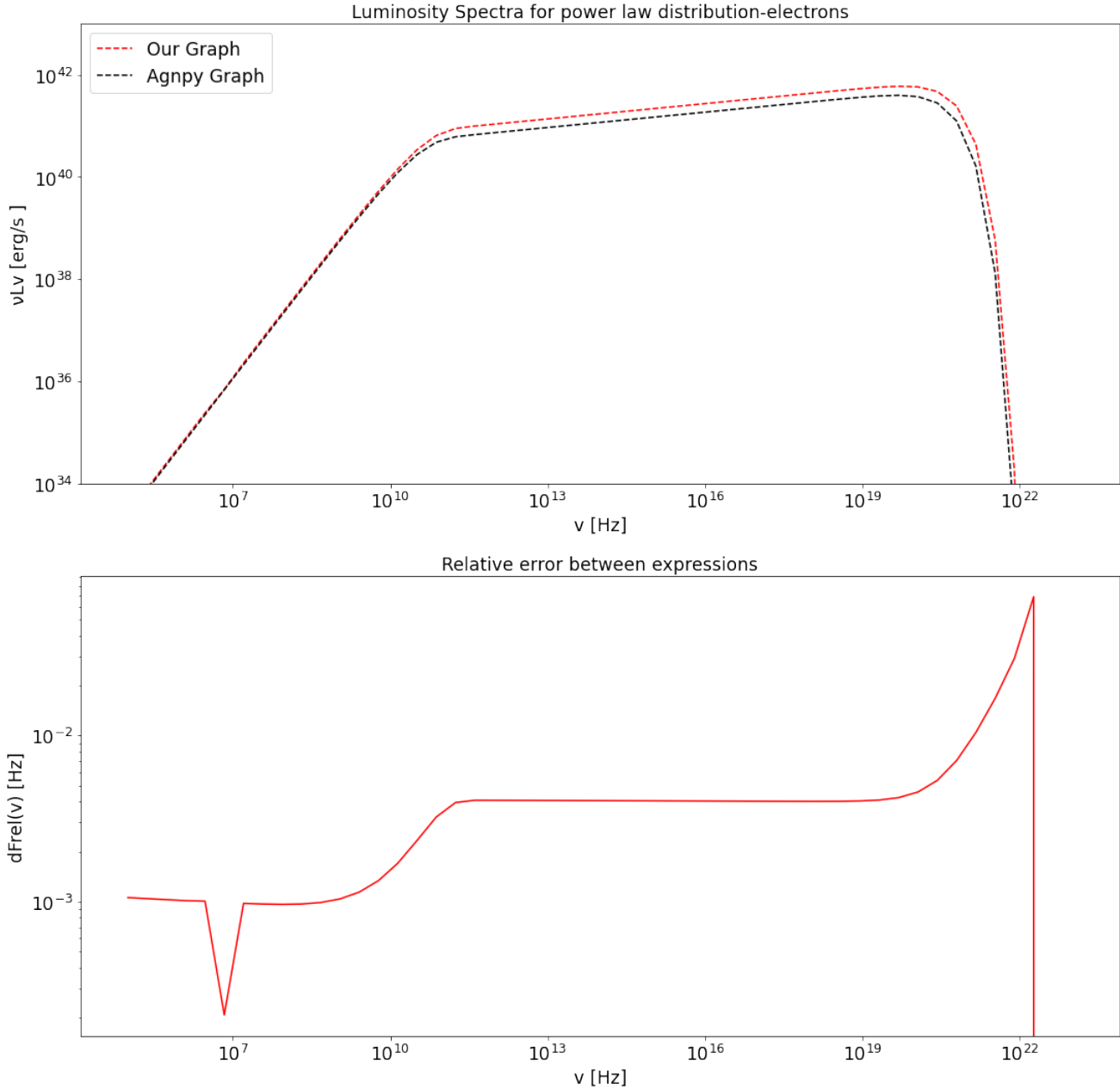
Σχήμα 3.2: Σχετικό σφάλμα των αριθμητικών λύσεων της  $F(x)$  με χρήση διαφορετικών τεχνικών υπολογισμού

όπου  $F_a(x)$  και  $F_b(x)$  τα αποτελέσματα από τις δύο διαφορετικές εκφράσεις. Η σχετική διαφορά των δύο αποτελεσμάτων κυμαίνεται από  $10^{-4}$  για  $x \sim 10^{-4}$  έως  $10^{-16}$  για  $x \geq 10^{-3}$ . Επομένως, οι δύο εκφράσεις δίνουν πρακτικά ίδια αποτελέσματα. Ωστόσο, διαφέρουν σημαντικά ως προς το χρόνο εκτέλεσης: ο χρόνος υπολογισμού για την πρώτη σχέση είναι 34.86 s ενώ για την δεύτερη σχέση μόλις 0.14 s. Λαμβάνοντας υπόψη την μεγάλη διαφορά στο χρόνο εκτέλεσης χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.2) για τα επόμενα βήματα. Στην συνέχεια με βάση τον κώδικα για την  $F(x)$  μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ ακτινοβολίας για ένα σωματίο με βάση την σχέση (2.19).

## 3.2 Απεικόνιση φάσματος ακτινοβολίας νόμου δύναμης

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση και τα εδάφια 2.3-2.4, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αναπαράσταση φάσματος ακτινοβολίας για νόμο δύναμης σωματιδίων. Για τον έλεγχο του

κώδικα μας έχουμε επίσης συγκρίνει την αριθμητική μας λύση με εκείνη που προκύπτει από το πακέτο της Python, `agnpy` [27]. Για την αναπαράσταση των φασμάτων έχουμε θεωρήσει ότι τα σωματίδια είναι ηλεκτρόνια με παραμέτρους:  $B = 1 \text{ G}$ ,  $\gamma_{min} = 10^2$ ,  $\gamma_{max} = 10^7$ ,  $p = 2.8$ ,  $R_o = 10^{16} \text{ cm}$ ,  $N_o = 5.44 \times 10^{51}$ . Στα σχήματα 3.3 και 3.4 παρουσιάζουμε τις διαφορές στις αναπαραστάσεις και βρίσκουμε σχετικά μικρό σφάλμα μεταξύ των σχέσεων.

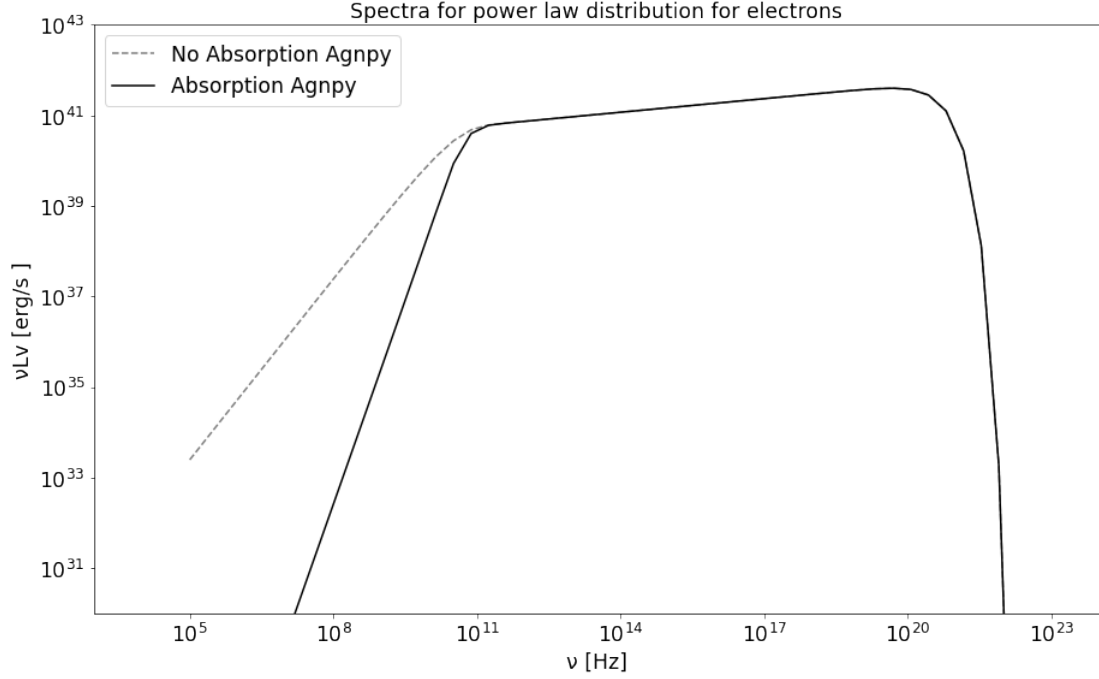


Σχήμα 3.3: Σύγκριση αποτελεσμάτων για το φάσμα ακτινοβολίας σύγχροτρον όπως αυτό έχει υπολογιστεί με το πακέτο `agnpy` και με το δικό μας κώδικα.

Με την επιβεβαίωση αυτή μπορούμε να προχωρήσουμε στην αναπαράσταση του φάσμα-



τος ακτινοβολίας αυτοαπορρόφησης σύγχροτρον το οποίο παρουσιάζουμε στο σχήμα 3.4. Στην παρουσίαση υπολογίζουμε την μορφή με απορρόφηση και χωρίς απορρόφηση ώστε να μπορούμε να διακρίνουμε καλύτερα τη συχνότητα αυτοαπορρόφησης. Σημειώνουμε ότι στην παρουσίαση χρησιμοποιούμε τα δεδομένα:  $B = 1 \text{ G}$  ,  $\gamma_{min} = 10^2$  ,  $\gamma_{max} = 10^7$  ,  $p = 2.8$ ,  $R_o = 10^{16} \text{ cm}$  ,  $N_o = 5.44 \times 10^{51}$ .



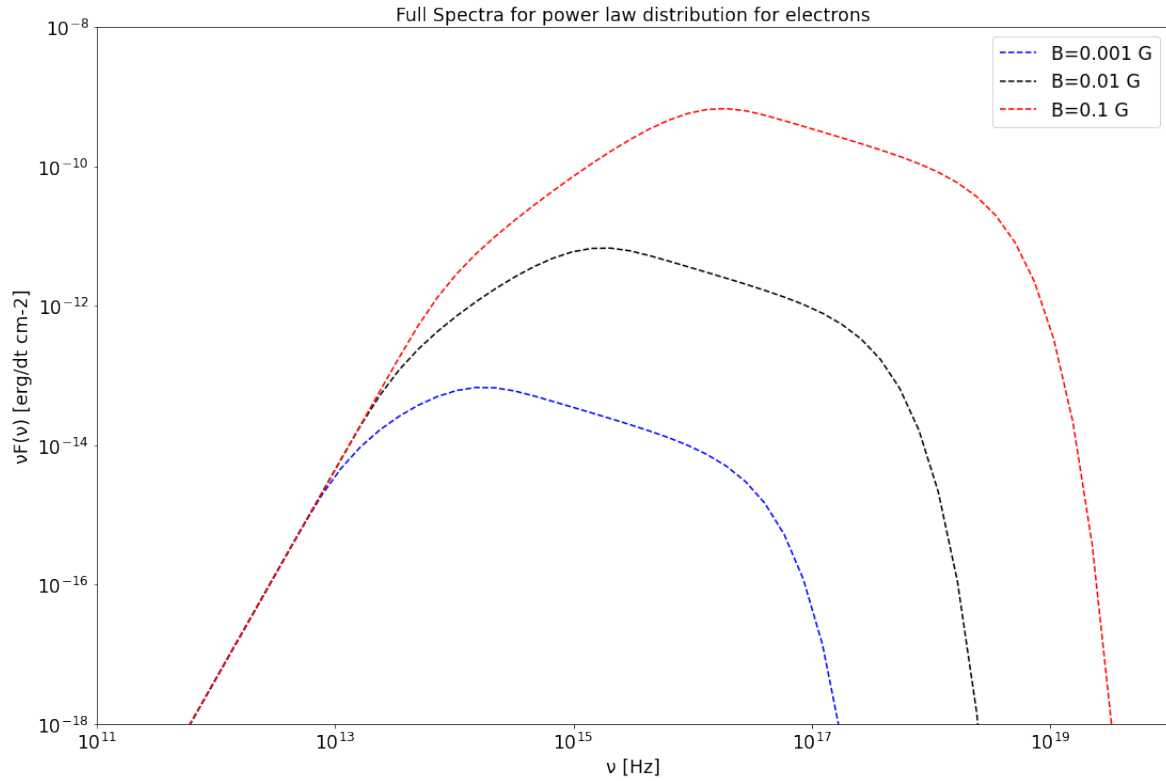
Σχήμα 3.4: Φάσμα ακτινοβολίας με και χωρίς αυτοαπορρόφηση σύγχροτρον.

### 3.3 Απεικόνιση φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον, συναρτήση του μαγνητικού πεδίου, αριθμού σωματιδίων

Μέχρι στιγμής έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε το φάσμα ακτινοβολίας σύγχροτρον συμπεριλαμβανομένου και της αυτοαπορρόφησης. Παρατηρούμε ότι για την μοντελοποίηση μας έχουμε τις ελεύθερες παραμέτρους του μαγνητικού πεδίου, το εύρος των παραγόντων Lorentz ( $\gamma_{min}, \gamma_{max}$ ) , φασματικού δείκτη και αριθμού σωματιδίων.

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε το ρόλο που παίζει το μαγνητικό πεδίο στο φάσμα της

ακτινοβολίας παρουσιάζοντας διαφορετικά φάσματα σε συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5 με δεδομένα :  $g_{min} = 10^5$  ,  $g_{max} = 10^6$  ,  $p = 4$ ,  $R_o = 10^{10}cm$  ,  $N_o = 5.44 \times 10^{51}$ .



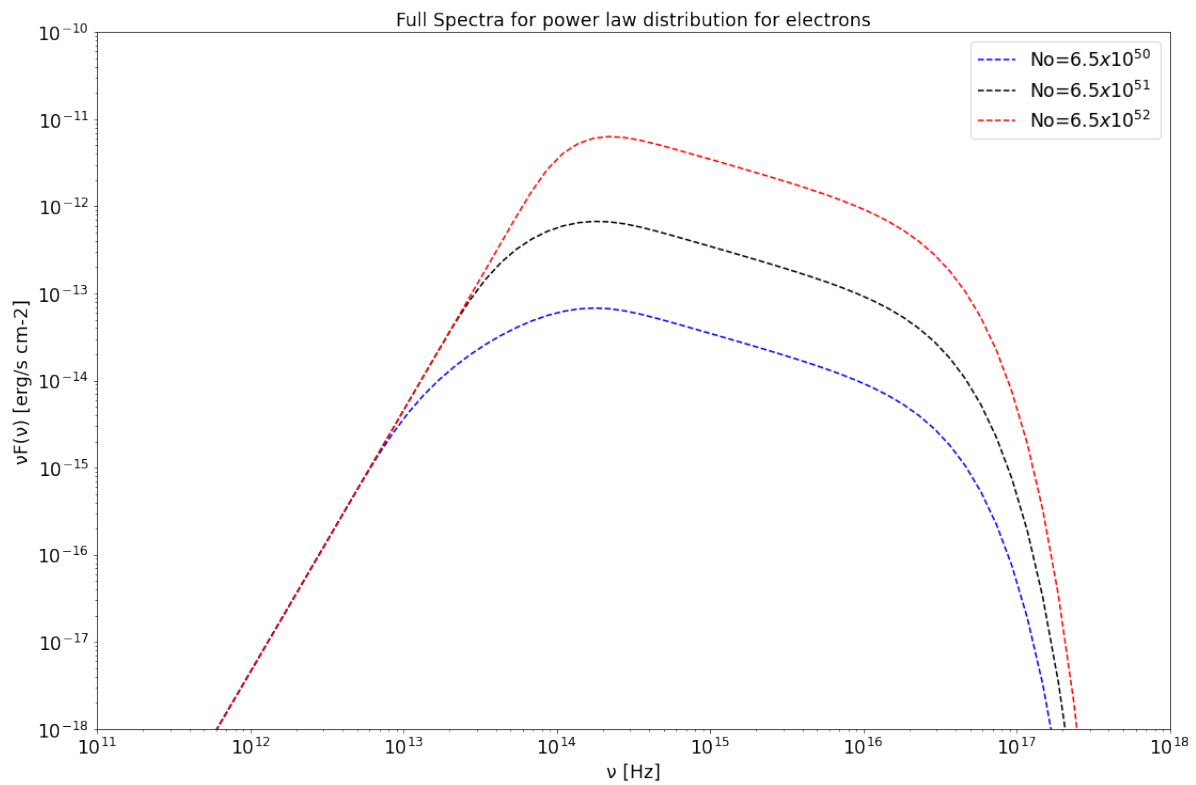
Σχήμα 3.5: Μεταβολή φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον από ηλεκτρόνια με κατανομή νόμου δύναμης στην ενέργεια για διαφορετικές τιμές του μαγνητικού πεδίου.

Η ίδια διαδικασία, όπως για το μαγνητικό πεδίο, ακολουθείται για τον αριθμό σωματιδίων (σχήμα 3.6). Για τον αριθμητικό υπολογισμό του γραφήματος έχουμε χρησιμοποιήσει τα δεδομένα:  $B = 0.001 \text{ G}$  ,  $g_{min} = 10^5$  ,  $g_{max} = 10^6$  ,  $p = 4$ ,  $R_o = 10^{10}cm$ .

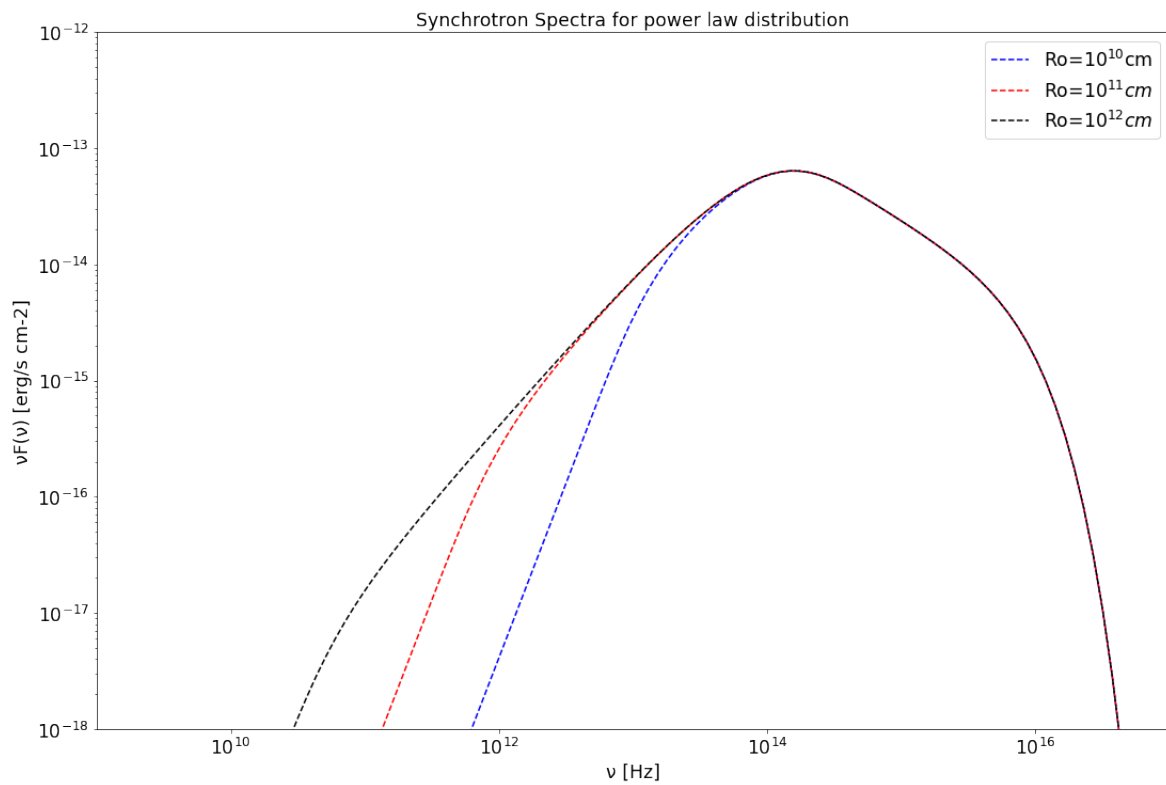
Οι δύο παράμετροι καθορίζουν την ένταση της ακτινοβολίας με διαφορετικό τρόπο γεγονός το οποίο θα βοηθήσει στην μοντελοποίηση των παρατηρησιακών δεδομένων που θα παρουσιαστεί στο επόμενο εδάφιο. Το μαγνητικό πεδίο φαίνεται να επηρεάζει εκτός από την ένταση αλλά και την συχνότητα εκπομπής της ακτινοβολίας, σε αντίθεση με τον αριθμό των σωματιδίων. Ο αριθμός των σωματιδίων παρουσιάζει γραμμική εξάρτηση με την ένταση της ακτινοβολίας και είναι εμφανές ότι παίζει μικρότερο ρόλο στην αύξηση της έντασης.

Αντίστοιχα παρουσιάζουμε γράφημα του φάσματος για διαφορετικές διαστάσεις της πηγής (σχήμα 3.7).

### 3.3. Απεικόνιση φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον, συναρτήση του μαγνητικού πεδίου, αριθμού σωματιδίων



Σχήμα 3.6: Μεταβολή φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον από ηλεκτρόνια με κατανομή νόμου δύναμης στην ενέργεια για διαφορετικές τιμές του συνολικού αριθμού σωματιδίων.



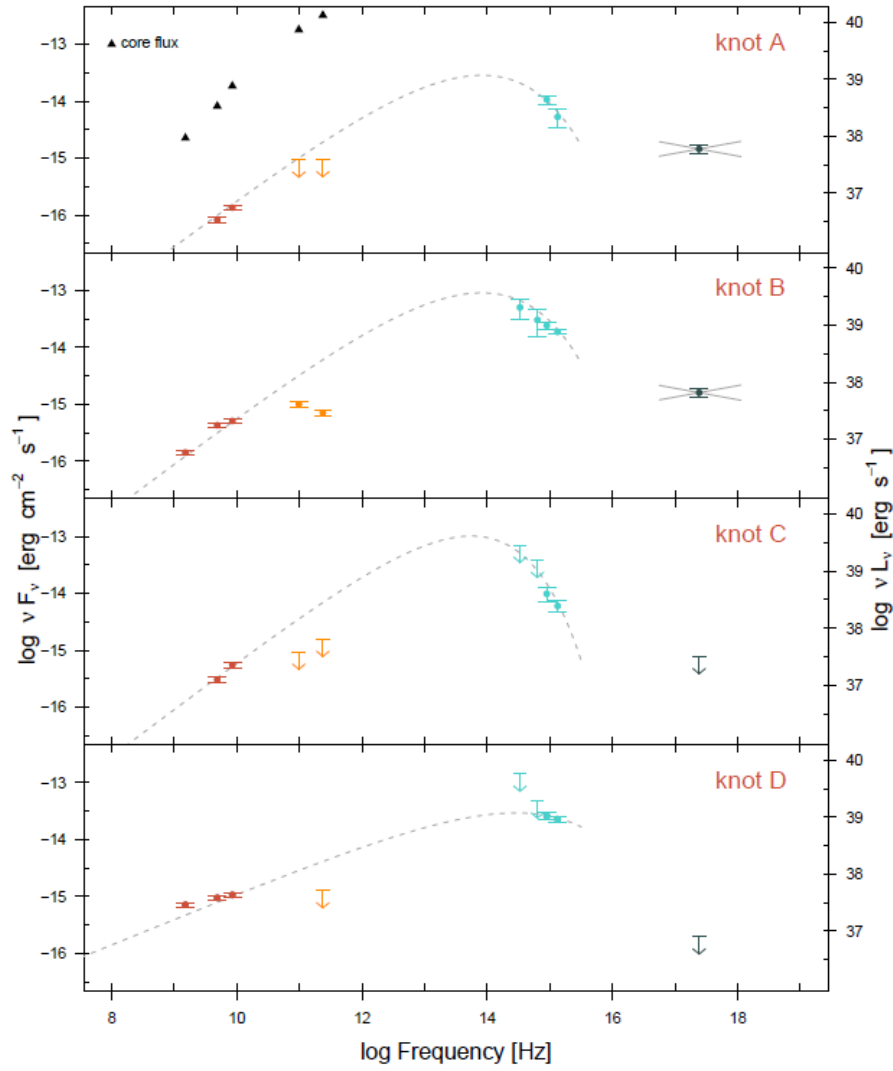
Σχήμα 3.7: Μεταβολή φάσματος ακτινοβολίας σύγχροτρον για διαφορετικές τιμές της ακτίνας της πηγής.

Για τον αριθμητικό υπολογισμό των φασμάτων έχουμε επιλέξει ακτίνα για την πηγή αρκετά μικρή ώστε να φαίνεται η επίδραση της αυτοαπορρόφησης στο φάσμα. Τα φάσματα όσο αφορά τις μεταβολές του μαγνητικού πεδίου, αριθμού σωματιδίων και ακτίνας της πηγής παρουσιάζουν εξάρτηση όσο αφορά την συχνότητα αυτοαπορρόφησης. Ο αριθμός σωματιδίων επηρεάζει σε μικρότερο βαθμό την συχνότητα αυτοαπορρόφησης σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο και την ακτίνα της πηγής. Η ακτίνα της πηγής είναι το μέγεθος ουσιαστικά που επηρεάζει την συχνότητα απορρόφησης περισσότερο. Για αρκετά μεγάλες διαστάσεις της πηγής παρατηρούμε ότι η συχνότητα αυτοαπορρόφησης μειώνεται σε βαθμό που δεν επηρεάζει σημαντικά το φάσμα ακτινοβολίας στο εύρος των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει.

## Κεφάλαιο 4

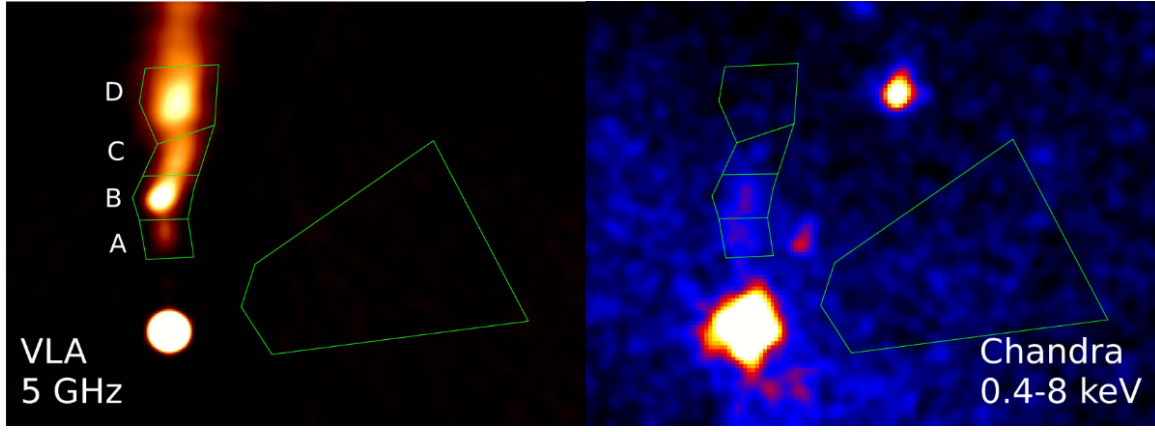
# Λεπτοαδρονικό Μοντέλο για τον πίδακα στον M84

Αφού ολοκληρώσαμε τη βασική θεωρία για τον μηχανισμό σύγχροτρον θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή της για την επεξήγηση των φασματικών δεδομένων του ενεργού γαλαξία M84 που προέρχονται από τα τηλεσκόπια VLA, ALMA και Chandra [15]. Το ενδιαφέρον πρόβλημα που αναδεικνύεται με τα δεδομένα αυτά, σε σχέση με άλλους ενεργούς γαλαξίες, είναι η ύπαρξη περισσότερων από 2 φασματικών συνιστωσών στο πολυκυματικό φάσμα ακτινοβολίας.



Σχήμα 4.1: Αναπαράσταση παρατηρησιακών δεδομένων για 4 διαφορετικές περιοχές στον πίδακα [15]. Η ύπαρξη των παρατηρήσεων στα 100 GHz από το ALMA υποδυκνύει την αδυναμία επεξήγησής τους με ένα πληθυσμό σωματιδίων (βλ. στικτές γραμμές).

Συγκεκριμένα τα δεδομένα μέσω ALMA στις συχνότητες  $\sim 10^{11}$  Hz παρουσιάζουν αρνητική κλίση στον λογαριθμικό άξονα (σε μονάδες  $\nu F_\nu$ ) υποδεικνύοντας την ύπαρξη δύο φασματικών στοιχείων (Σχήμα 4.1). Έχουν γίνει δοκιμές επεξήγησης της μορφής αυτής μέσω μοντέλων αντίστροφου σχεδιασμού Compton λεπτονικού χαρακτήρα [15] και επεξήγηση μέσω ενός πληθυσμού ηλεκτρονίων όμως έχουν απορριφθεί λόγω της μη ρεαλιστικής ισχύς του πίδακα που απαιτείται και της αδυναμίας επεξήγησης της συνιστώσας στις συχνότητες  $\sim 10^{11}$  Hz. Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε την μορφή αυτή αρχικά μέσω δύο πληθυσμών σωματιδίων: ηλεκτρονίων για την συνιστώσα στις υψηλές συχνότητες και πρωτονίων για τις χαμηλές συχνότητες



Σχήμα 4.2: Αριστερά: Εικόνα του M84 στα 5 GHz από το VLA με τις περιοχές (κνอตς) του πίδακα A, B, C, D. Δεξιά: Εικόνα στα 0.4-8 keV από το Chandra στην ίδια κλίμακα. Η μεγάλη περιοχή στα δεξιά των γραφημάτων χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της συνεισφοράς του υποβάθρου για την αποφυγή των πηγών εκτός του πίδακα. [15]

(Μοντέλο A). Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε επιπλέον μοντέλο όπου ερμηνεύουμε τις χαμηλές συχνότητες μέσω ενός πληθυσμού ηλεκτρονίων και τις υψηλές μέσω πληθυσμού πρωτονίων (Μοντέλο B).

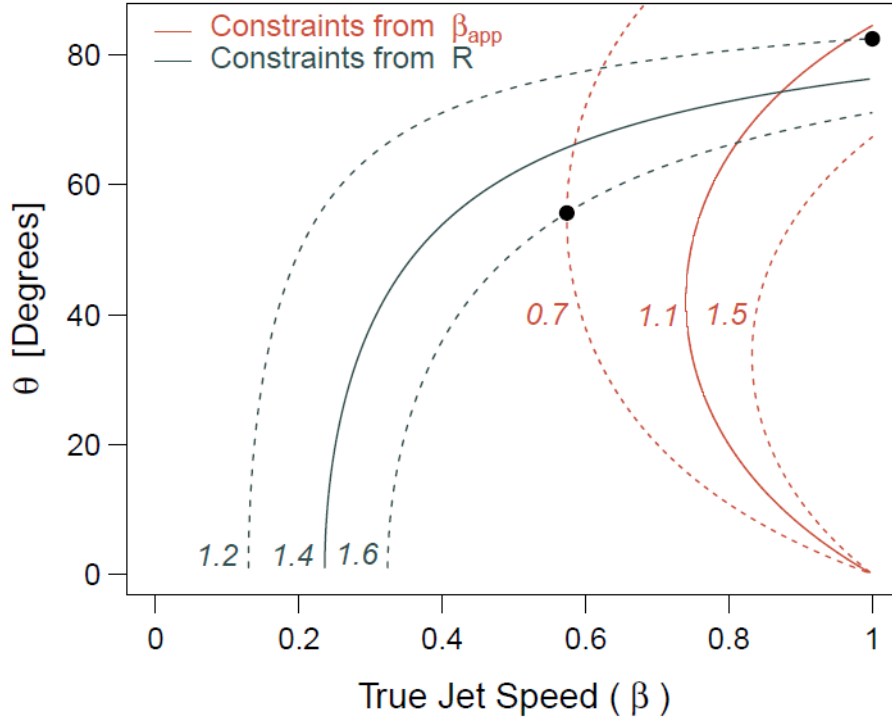
## 4.1 Χαρακτηριστικά M84

Ο M84 αποτελεί ελλειπτικό γαλαξία ο οποίος βρίσκεται στο σμήνος Παρθένου σε απόσταση 18.5 Mpc με ερυθρομετατόπιση  $z = 0.00339$  [15]. Στον γαλαξία M84 βρίσκεται πίδακας(jet) τύπου FRI με ασθενή ραδιοεκπομπή και αντιδιαμετρικό πίδακα (counterjet) με σχεδόν όμοιο μήκος και φωτεινότητα. Η μαύρη τρύπα στο κέντρο του γαλαξία έχει μάζα  $M_{BH} = 8.5^{+0.9}_{-0.8} \times 10^8 M_{\odot}$  [28].

Για τον προσδιορισμό της γωνίας παρατήρησης και της ταχύτητας του πίδακα [28] έχουν χρησιμοποιηθεί δεδομένα από το VLA (Very Large Array) με στόχο την εύρεση του λόγου jet-counterjet. Ο λόγος αυτός υποθέτοντας διαφορά  $180^\circ$  στην κατεύθυνση των jet και συνεχή ροή εκπομπής παρέχει πληροφορίες για την γωνία παρατήρησης και την ταχύτητα του jet. Συγκεκριμένα ο λόγος jet-counterjet μπορεί να εκφραστεί ως:

$$R = (1 + \beta \cos \theta)^{m+a} / (1 - \beta \cos \theta)^{m+a}, \quad (4.1)$$

όπου  $\beta$  η ταχύτητα του jet σε μονάδες ταχύτητας φωτός,  $\theta$  η γωνία του jet ως προς τη διεύθυνση παρατήρησης,  $a$  είναι ο φασματικός δείκτης ( $F_\nu \propto \nu^a$ ) στα ραδιοκύματα και  $m$  αφορά την ροή του jet. Για κινούμενη πηγή έχουμε  $m = 3$  και για συνεχής ροή  $m = 2$ . Για τον γαλαξία M84 έχουμε  $a = 0.7$  και  $m = 3$  [15].



Σχήμα 4.3: Γράφημα αναπαράστασης της γωνίας του jet ως προς τη διεύθυνση παρατήρησης και της ταχύτητας  $\beta$  του jet (σε μονάδες ταχύτητας φωτός).

Έπειτα χρησιμοποιούμε τα δεδομένα από WISE data για την ταχύτητα του πίδακα και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα για τον λόγο jet-counterjet καταλήγουμε σε ζευγάρια τιμών για την τιμή της γωνίας και της ταχύτητας του jet (σχήμα 4.3). Στην εφαρμογή μας έχουμε επιλέξει γωνία  $74_{-18}^{+9}$  μοίρες και ταχύτητα σε μονάδες ταχύτητας φωτός  $\beta = 0.87$ .

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον παράγοντα Doppler για την πηγή:

$$\delta = \Gamma^{-1}(1 - \beta \cos \theta)^{-1} \simeq 1.5 \quad (4.2)$$

Η τιμή του παράγοντα Doppler βρίσκεται πολύ κοντά στην μονάδα, επομένως η ενίσχυση Doppler δεν φαίνεται να επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα.



Συνολικά έχουμε για τον M84 τα παρακάτω δεδομένα:

Δεδομένα M84		
Ποσότητα	Σύμβολο	Τιμή
γωνία παρατήρησης	$\theta_{\text{obs}}$ (deg)	$74_{-18}^{+9}$
ταχύτητα jet	$\beta$	0.87
ερυθρομετατόπιση	$z$	0.00339
μάζα μαύρης τρύπας	$M_{BH}$ ( $M_{\odot}$ )	$8.5_{-0.8}^{+0.9} \times 10^8$
ακτίνα πηγής	$R$ (pc)	50
παράγοντας Doppler	$\delta$	$\simeq 1.5$

## 4.2 Εφαρμογή στον M84

Σε αυτό το κομμάτι θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 4.1 για την μοντελοποίηση σφαιρικής πηγής ακτίνας  $R = 50$  pc και μαγνητικού πεδίου  $B$ . Θεωρούμε ότι τα πρωτόνια και ηλεκτρόνια επιταχύνονται με σχετικιστικές ενέργειες και εγχύονται ισοτροπικά και με συνεχή ρυθμό στην περιοχή της πηγής. Υποθέτουμε ότι τα σωματίδια διαφεύγουν από την πηγή σε χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου  $R/c \simeq 50 \times 10^8 \text{ s} \simeq 150 \text{ yr}$ .

Τα παρατηρησιακά δεδομένα (σχήμα 4.1) για την ροή της πηγής υποδυκνύουν την ύπαρξη δύο διαφορετικών συνιστωσών στο ενεργειακό φάσμα με κορυφές στις συχνότητες  $\nu_1 = 10^{11} \text{ Hz}$  και  $\nu_2 = 10^{14} \text{ Hz}$  αντίστοιχα. Για την ερμηνεία των παρατηρησιακών δεδομένων υποθέτουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών πληθυσμών σωματιδίων, ηλεκτρονίων και πρωτονίων αντίστοιχα. Αρχικά θεωρούμε ότι η συνιστώσα στις χαμηλότερες συχνότητες προκύπτει από τον πληθυσμό των πρωτονίων και η συνιστώσα στις υψηλότερες συχνότητες προκύπτει από τον πληθυσμό των ηλεκτρονίων. Βασισμένοι στην ανάλυση που κάναμε για την εξάρτηση του φάσματος από τον αριθμό

σωματιδίων αλλά και του παράγοντα Lorentz των πληθυσμών μπορούμε να προσαρμόσουμε τα δεδομένα έτσι ώστε να ικανοποιήσουμε την υπόθεση για την συχνότητα των συνιστωσών των πρωτονίων και ηλεκτρονίων αντίστοιχα. Αναφορικά με την συχνότητα της κορυφής της κάθε καμπύλης αναμένουμε εξάρτηση της μορφής  $\nu \sim B\gamma_{min}^2$  που προκύπτει από την σχέση (2.18).

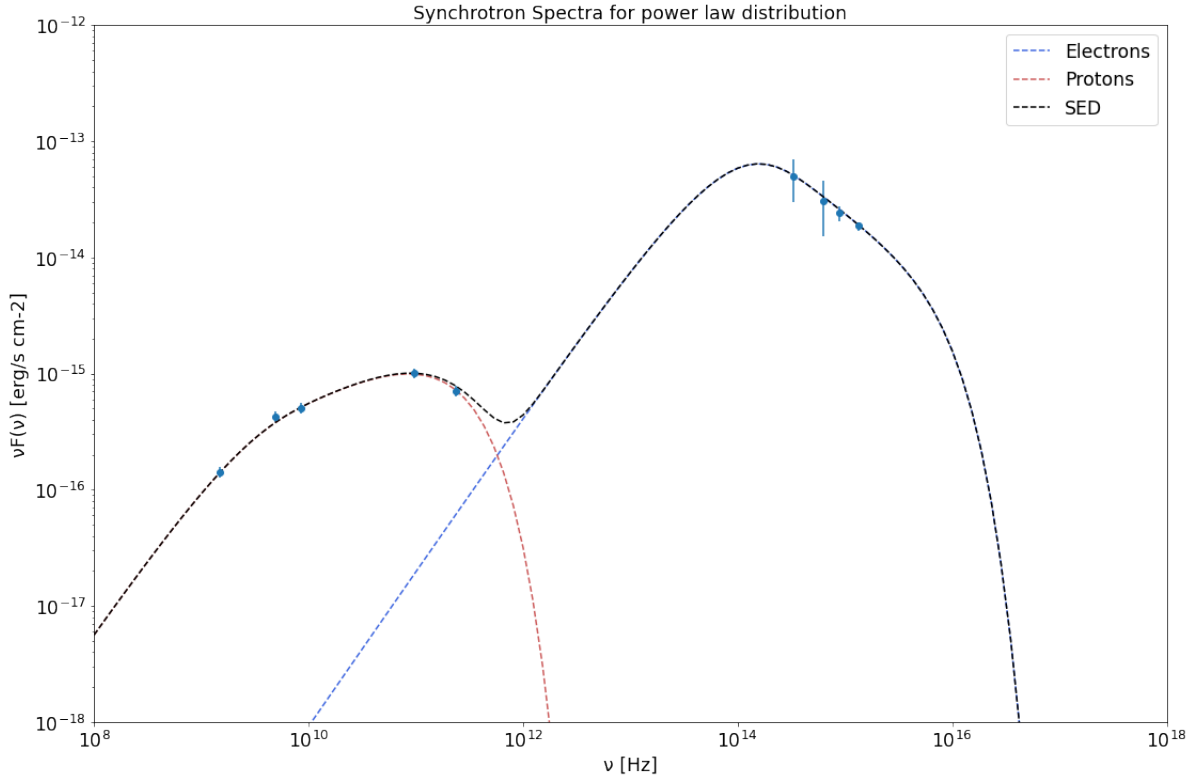
Συγκεκριμένα για την προσαρμογή των δεδομένων στο σχήμα 4.4 παρουσιάζουμε τον πίνακα των παραμέτρων. Η προσαρμογή δεδομένων έγινε μέσω του πακέτου `lmfit` [29] .

Συμβολισμός	Παράμετρος	Τιμή
$B$ (G)	μαγνητικό πεδίο	0.001
$R$ (pc)	ακτίνα της πηγής	50
$\delta$	παράγοντας Doppler	1
$N_{oe}$	συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων	$6.5 \times 10^{50}$
$\gamma_{e,min}$	ελάχιστη τιμή παράγοντα Lorentz ηλεκτρονίων	$1.2 \times 10^5$
$\gamma_{e,max}$	μέγιστη τιμή παράγοντα Lorentz ηλεκτρονίων	$1 \times 10^6$
$p_e$	δείκτης νόμου δύναμης	4.4
$N_{op}$	συνολικός αριθμός πρωτονίων	$1.5 \times 10^{56}$
$\gamma_{p,min}$	ελάχιστη τιμή παράγοντα Lorentz πρωτονίων	$3 \times 10^4$
$\gamma_{p,max}$	μέγιστη τιμή παράγοντα Lorentz πρωτονίων	$3 \times 10^5$
$p_p$	δείκτης νόμου δύναμης	2

Πίνακας 4.1: Παράμετροι λεπτοανδρονικού μοντέλου A.

Ο πίνακας 4.1 πέραν από την ακτίνα της πηγής και τον παράγοντα Doppler αποτελείται από ελεύθερες παραμέτρους στις οποίες μέσω υποθέσεων επιβάλαμε περιορισμούς. Συγκεκριμένα έχουμε επιλέξει μαγνητικό πεδίο με τιμή  $B = 0.001 \text{ G}$  και βασισμένοι στην υπόθεση αυτή ολοκληρώσαμε την προσαρμογή των δεδομένων επιλέγοντας τις κατάλληλες τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους. Είναι εμφανές ότι θα μπορούσαν να υπάρξουν διαφορετικοί συνδιασμοί στις τιμές αυτές όμως στα πλαίσια της εργασίας μας θα επικεντρωθούμε στα μοντέλα τα οποία παρουσιάζουμε.

Το φάσμα που προκύπτει από την προσαρμογή μας παρουσιάζει κορυφές στις συχνότητες



Σχήμα 4.4: Προσαρμογή λεπτοαδρονικού μοντέλου A στα δεδομένα της περιοχής knot B

$\nu_1 = 8.1 \times 10^{10} \text{ Hz}$  και  $\nu_2 = 1.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$  με λαμπρότητες  $\nu_1 L_{syn,1}^p \simeq 4.1 \times 10^{37} \text{ erg/s}$  και  $\nu_2 L_{syn,2}^e \simeq 2.6 \times 10^{39} \text{ erg/s}$  αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό της λαμπρότητας έχουμε ξεκινήσει από την προσέγγιση της ροής ακτινοβολίας:

$$F = \int_0^\infty F(\nu) d\nu \simeq (\nu F_\nu)_{max} + \mathcal{O}(10^{-1} \nu F_\nu) \quad (4.3)$$

Υποθέτοντας ισοτροπική εκπομπή και παράγοντα Doppler 1, χρησιμοποιώντας την απόσταση της πηγής καταλήγουμε στην παρατηρούμενη λαμπρότητα μέσω της σχέσης:

$$L_{obs} = 4\pi D^2 F \quad (4.4)$$

Στην προσαρμογή έχουμε για την πρώτη καμπύλη του φάσματος που προέρχεται από τα πρωτόνια μικρό εύρος παραγόντων Lorentz λόγω της μικρής διασποράς των παρατηρούμενων σημείων. Η δεύτερη καμπύλη των ηλεκτρονίων παρουσιάζει σχετική ελευθερία ως προς την επιλογή του μέγιστου παράγοντα Lorentz του νόμου δύναμης  $\gamma_{e,max}$  λόγω του περιορισμένου αριθμού

παρατηρήσεων.

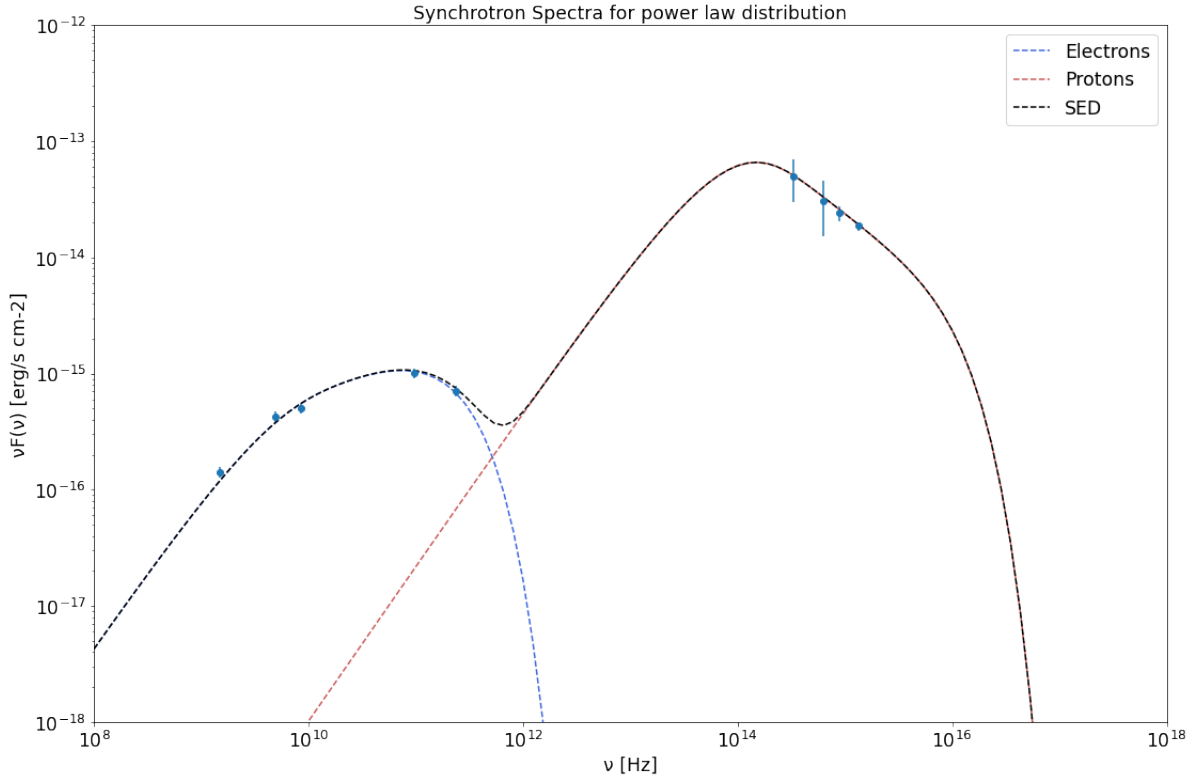
Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο κατασκευάζουμε το φάσμα ακτινοβολίας για ηλεκτρόνια με εκπομπή στις χαμηλές συχνότητες και πρωτόνια με εκπομπή στις υψηλότερες συχνότητες. Στον πίνακα παρουσιάζουμε τις αντίστοιχες παράμετρους για το μοντέλο στο σχήμα 4.5.

Το φάσμα στο σχήμα 4.5 παρουσιάζει κορυφές στις συχνότητες  $\nu_1 = 8.1 \times 10^{10} Hz$  και  $\nu_2 = 1.5 \times 10^{14} Hz$  με λαμπρότητες  $\nu_1 L_{syn,1}^e \simeq 4.3 \times 10^{37} erg/s$  και  $\nu_2 L_{syn,2}^p \simeq 2.7 \times 10^{39} erg/s$  αντίστοιχα (σχέση A'.33).

Συμβολισμός	Παράμετρος	Τιμή
$B(G)$	μαγνητικό πεδίο	0.001
$R(pc)$	ακτίνα της πηγής	50
$\delta$	παράγοντας Doppler	1
$N_{oe}$	συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων	$0.7 \times 10^{53}$
$\gamma_{e,min}$	ελάχιστη τιμή παράγοντα Lorentz ηλεκτρονίων	$0.9 \times 10^3$
$\gamma_{e,max}$	μέγιστη τιμή παράγοντα Lorentz ηλεκτρονίων	$6.5 \times 10^3$
$p_e$	δείκτης νόμου δύναμης	2
$N_{op}$	συνολικός αριθμός πρωτονίων	$1.3 \times 10^{54}$
$\gamma_{p,min}$	ελάχιστη τιμή παράγοντα Lorentz πρωτονίων	$5 \times 10^6$
$\gamma_{p,max}$	μέγιστη τιμή παράγοντα Lorentz πρωτονίων	$5 \times 10^7$
$p_p$	δείκτης νόμου δύναμης	4.4

Πίνακας 4.2: Παράμετροι λεπτοαδρονικού μοντέλου B.

Αναφορικά με τον χρόνο ζωής των δύο σωματιδίων έχουμε πεί ότι αναμένουμε ο χρόνος ζωής των πρωτονίων να είναι μικρότερος από τον χρόνο ζωής των ηλεκτρονίων (2.13). Μπορούμε να κάνουμε μια πρώτη σύγκριση μεταξύ του χρόνου που απαιτείται για να διαφύγει η ακτινοβολία από την πηγή και του χρόνου ζωής των πρωτονίων. Συγκεκριμένα έχουμε θεωρήσει τον χρόνο διαφυγής των σωματιδίων από την πηγή ως  $R/c \simeq 50 \times 10^8 s$ . Τα πρωτόνια που εκπέμπουν σε συχνότητα  $\nu_1$  (ή  $\nu_2$ ) της ακτινοβολίας θα έχουν χρόνο ζωής  $\tau_{p,cool} = \frac{E_{p,peak}}{P_{p,peak}} = \frac{dE}{dE/dt}$  όπου



Σχήμα 4.5: Προσαρμογή λεπτοαδρονικού μοντέλου για πρωτόνια υψηλών συχνοτήτων και ηλεκτρόνια χαμηλών συχνοτήτων

$E_{p,peak}$  η ενέργεια και  $P_{p,peak}$  η ισχύς των πρωτονίων στην χαρακτηριστική ενέργεια εκπομπής. Μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του παράγοντα Lorentz για την κορυφή της ακτινοβολίας μέσω της σχέσης (2.18) ως:

$$\nu_{p,peak} = \frac{3qB}{4\pi m_p c} \gamma_{p,peak}^2 \iff \gamma_{p,peak} = \left( \frac{4\pi m_p c}{3qB} \nu_{p,peak} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 2.12 μπορούμε να βρούμε τον χρόνο ζωής των πρωτονίων ως:

$$\tau_{syn,p} \simeq 4.8 \times 10^{18} B^{-1} \gamma_{p,peak}^{-1} s \quad (4.6)$$

Για τα δύο μοντέλα οι τιμές για τους χρόνους ζωής των πρωτονίων είναι:

- Μοντέλο A (σχήμα 4.4):  $\tau_{p,cool} \simeq 2.55 \times 10^{19} s$
- Μοντέλο B (σχήμα 4.5):  $\tau_{p,cool} \simeq 5.89 \times 10^{17} s$

Παρατηρούμε ότι και για τα δύο μοντέλα ο χρόνος ζωής των πρωτονίων ξεπερνάει κατά πολύ τον χρόνο διαφυγής των σωματιδίων από την πηγή ( $R/c \simeq 50 \times 10^8 s$ ). Το γεγονός αυτό μας υποδυναμίζει ότι ένα μεγάλο μέρος των πρωτονίων δεν προλαβαίνει να ακτινοβολήσει πριν διαφύγει από την πηγή.

#### 4.2.1 Ενεργειακοί υπολογισμοί μοντέλων

Η ενέργεια για μια πηγή σύγχροτρον είναι το άθροισμα της ενέργειας των σχετικιστικών ηλεκτρονίων  $E_{el}$ , της ενέργειας των σχετικιστικών πρωτονίων  $E_{pr}$  και της ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο  $E_B$ .

$$E_{total} = E_{el} + E_{pr} + E_B \quad (4.7)$$

Η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο εάν θεωρήσουμε ότι το σύνολο της πηγής καταλαμβάνεται από το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$E_B = \frac{B^2}{8\pi} V, \quad (4.8)$$

όπου  $B$  το μαγνητικό πεδίο και  $V$  ο όγκος της πηγής.

Η ενέργεια των σχετικιστικών ηλεκτρονίων υπολογίζεται ως:

$$E_{el} = V \int_{E_{min}}^{E_{max}} N_{el}(E) E dE \quad (4.9)$$

αντίστοιχα για τα σχετικιστικά πρωτόνια:

$$E_{pr} = V \int_{E_{min}}^{E_{max}} N_{pr}(E) E dE, \quad (4.10)$$

όπου  $N_{el}(E)$  και  $N_{pr}(E)$  η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων και πρωτονίων για κατανομή νόμου δύναμης.

Μπορούμε να εκφράσουμε την συνολική ενέργεια των ηλεκτρονίων ως συνάρτηση της λαμπρότητας σύγχροτρον  $L_{syn}$ .

$$L_{syn} = V \int_{E_{min}}^{E_{max}} \left( -\frac{dE}{dt} \right) N_{el}(E) dE \quad (4.11)$$

Για τιμές κοντά στην κρίσιμη συχνότητα  $\nu_c$  όπου το φάσμα ακτινοβολίας παρουσιάζει μέγιστο μπορούμε να εκφράσουμε την ισχύ ενός φορτισμένου σωματιδίου  $\left( -\frac{dE}{dt} \right)$  (σχέση 2.19) ως συνάρτηση της ενέργειας μέσω:

$$\left( -\frac{dE}{dt} \right) = \frac{2q^4}{3m^4c^7} B^2 E^2 = c_1 B^2 E^2 \quad (4.12)$$

όπου με  $c_1$  συμβολίζουμε τις φυσικές σταθερές  $c_1 = \frac{3q}{4\pi m^3 c^5}$ .

Επομένως αντικαθιστώντας τον νόμο δύναμης σωματιδίων για τα ηλεκτρόνια και την σχέση (4.11) προκύπτει για την λαμπρότητα η σχέση:

$$L_{syn} = CV c_1 B^2 \int_{E_{min}}^{E_{max}} E^{-p+2} dE \quad (4.13)$$

Αντίστοιχα για την ενέργεια μέσω της σχέσης (4.9) έχουμε:

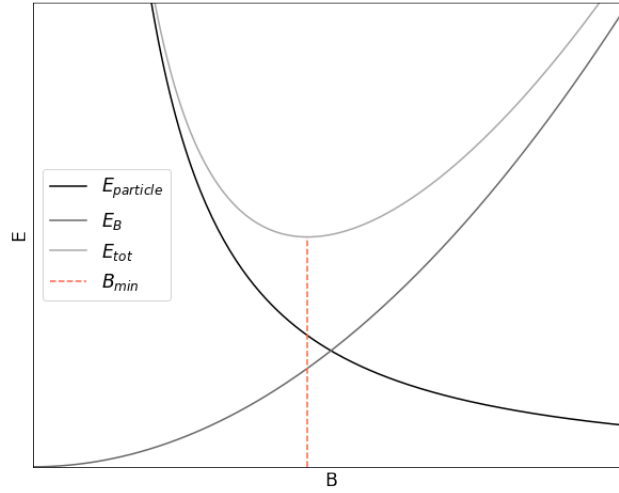
$$E_{el} = CV \int_{E_{min}}^{E_{max}} E^{-p+1} dE \quad (4.14)$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τις ενέργειες  $E_{min}, E_{max}$  σε όρους κρίσιμης συχνότητας  $\nu_{1c}$  και  $\nu_{2c}$  αντίστοιχα:

$$\nu_c = \frac{3qB}{4\pi mc} \gamma^2 \Leftrightarrow \nu_{1,2c} = \frac{3qB}{4\pi m^3 c^5} E_{min,max}^2 \Leftrightarrow \nu_{1,2c} = c_2 B E_{min,max}^2 \quad (4.15)$$

όπου με  $c_2$  συμβολίζουμε τις φυσικές σταθερές  $c_2 = \frac{2q^4}{3m^4 c^7}$ .

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην έκφραση που συνδέει την ενέργεια



Σχήμα 4.6: Ποιοτικό γράφημα ενέργειας σύγχροτρον συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου  $B$ :  $E_{particle} = E_{el} + E_{pr} \propto B^{-3/2}$ ,  $E_B \propto B^2$ ,  $E_{tot} \propto B^2 + B^{-3/2}$ . Η ενέργεια έχει ελάχιστη τιμή για  $E_{particle} \simeq E_B$ . Η κάθετη ευθεία αντιστοιχεί στην τιμή του μαγνητικού πεδίου για την οποία η ενέργεια γίνεται ελάχιστη.

$E_{el}$  με την λαμπρότητα  $L_{syn}$ :

$$E_{el} = c_1^{-1} c_2^{1/2} \check{C}(p, \nu_{1c}, \nu_{2c}) L_{syn} B^{-3/2} = c_{12}(p, \nu_{1c}, \nu_{2c}) L_{syn} B^{-3/2} \quad (4.16)$$

όπου:

$$\check{C}(p, \nu_{1c}, \nu_{2c}) = \left( \frac{p-3}{p-2} \right) \frac{\nu_{1c}^{(2-p)/2} - \nu_{2c}^{(2-p)/2}}{\nu_{1c}^{(3-p)/2} - \nu_{2c}^{(3-p)/2}} \quad (4.17)$$

Τώρα μπορούμε να συνδέσουμε την ενέργεια των σχετικιστικών ηλεκτρονίων με τη ενέργεια των σχετικιστικών πρωτονίων μέσω σταθεράς  $k$ :

$$E_{pr} = k E_{el} \quad (4.18)$$

Επομένως η ολική ενέργεια ως συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφτεί ως:

$$E_{tot} = (1+k) c_{12} L_{syn} B^{-3/2} + \frac{B^2}{8\pi} V \quad (4.19)$$



Στο σχήμα 4.6, βλέπουμε τα ποιοτικά γραφήματα των συνιστωσών της ολικής ενέργειας. Παρατηρούμε ότι συνθήκη για την ελαχιστοποίηση της ενέργειας είναι:

$$E_B = \frac{3}{4}(1+k)E_{el} \quad (4.20)$$

Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η ελάχιστη τιμή της ενέργειας δίνεται ως:

$$E_{tot,min} = \frac{7}{4}(1+k)E_{el} = \frac{7}{3}E_B \quad (4.21)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.8 , 4.16 , 4.20 μπορούμε να βρούμε μια σχέση για την τιμή του μαγνητικού πεδίου που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενέργεια:

$$B_{eq} = (6\pi(1+k)c_{12}L_{syn}V^{-1})^{2/7} \quad (4.22)$$

Η τιμή της ελάχιστης ολικής ενέργειας γίνεται:

$$E_{tot,min} = 0.921c_{12}^{4/7}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{3/7}(1+k)^{4/7}V^{3/7}L_{syn}^{4/7} \quad (4.23)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε για την σταθερά στην σχέση A'.33 μπορούμε να προχωρήσουμε στα αποτελέσματα αναφορικά με την συνολική ενέργεια των δύο μοντέλων.

Ενεργειακά αποτελέσματα		
	Μοντέλο A (σχ 4.2)	
$U_B$	ενεργειακή πυκνότητα μαγνητικού πεδίου	$3.98 \times 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$
$U_{el}$	ενεργειακή πυκνότητα σχετικιστικών ηλεκτρονίων	$1.95 \times 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$
$U_{pr}$	ενεργειακή πυκνότητα σχετικιστικών πρωτονίων	$0.38 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^3$
$U_{tot}$	συνολική ενεργειακή πυκνότητα στον πίδακα	$0.38 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^3$
$E_B$	ενέργεια μαγνητικού πεδίου	$1.84 \times 10^{54} \text{ erg}$
$E_{el}$	ενέργεια σχετικιστικών ηλεκτρονίων	$9.00 \times 10^{49} \text{ erg}$
$E_{pr}$	ενέργεια σχετικιστικών πρωτονίων	$1.73 \times 10^{58} \text{ erg}$
$E_{tot}$	συνολική ενέργεια στον πίδακα	$1.73 \times 10^{58} \text{ erg}$
	Μοντέλο B (σχ 4.3)	
$U_B$	ενεργειακή πυκνότητα μαγνητικού πεδίου	$3.98 \times 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$
$U_{el}$	ενεργειακή πυκνότητα σχετικιστικών ηλεκτρονίων	$2.56 \times 10^{-12} \text{ erg/cm}^3$
$U_{pr}$	ενεργειακή πυκνότητα σχετικιστικών πρωτονίων	$0.30 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^3$
$U_{tot}$	συνολική ενεργειακή πυκνότητα στον πίδακα	$0.30 \times 10^{-3} \text{ erg/cm}^3$
$E_B$	ενέργεια μαγνητικού πεδίου	$1.84 \times 10^{54} \text{ erg}$
$E_{el}$	ενέργεια σχετικιστικών ηλεκτρονίων	$1.18 \times 10^{50} \text{ erg}$
$E_{pr}$	ενέργεια σχετικιστικών πρωτονίων	$1.38 \times 10^{58} \text{ erg}$
$E_{tot}$	συνολική ενέργεια στον πίδακα	$1.38 \times 10^{58} \text{ erg}$

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα των ενεργειακών υπολογισμών για τα 2 λεπτοαδρονικά μοντέλα του M84.

Για την πηγή σύγχροτρον μπορούμε να δούμε πιά από τα δύο μοντέλα καταφέρνει να ελαχιστοποιήσει καλύτερα το ποσό της συνολικής ενέργειας[18].

Μοντέλο A:

- $E_B = 1.84 \times 10^{54} \text{ erg}$
- $\frac{3}{4}(E_{el} + E_{pr}) = 1.30 \times 10^{58} \text{ erg/cm}^3$

Μοντέλο B:

- $E_B = 1.84 \times 10^{54} \text{ erg}$
- $\frac{3}{4}(E_{el} + E_{pr}) = 1.03 \times 10^{58} \text{ erg/cm}^3$

### 4.3 Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της εργασίας μας έχουμε παρουσιάσει λεπτοανδρονικό μοντέλο με στόχο την επεξήγηση των παρατήρησεων του φάσματος στον πίδακα του ενεργού γαλαξία M84. Οι παρατηρήσεις υποδεικνύουν την ύπαρξη συνιστωσών στο φάσμα στις συχνότητες  $\sim 100GHz$  και σε συνδυασμό με τις παρατηρήσεις της ροής ακτινοβολίας στην περιοχή του ορατού έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα της ύπαρξης δύο διαφορετικών συνιστωσών στο φάσμα της ακτινοβολίας. Για την επεξήγηση των δύο συνιστώσεων στο φάσμα έχουμε θεωρήσει δύο διαφορετικούς πληθυσμούς σχετικιστικών σωματιδίων, ηλεκτρονίων και πρωτονίων αντίστοιχα.

Στην προσπάθεια ερμηνείας των δύο φασματικών συνιστωσών που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις έχουμε κατασκευάσει δύο διαφορετικά μοντέλα. Στο πρώτο μοντέλο έχουμε θεωρήσει ότι η συνιστώσα στις χαμηλές συχνότητες προέρχεται από πρωτόνια και η συνιστώσα στις υψηλές συχνότητες προέρχεται από ηλεκτρόνια. Στο δεύτερο μοντέλο η συνιστώσα στις χαμηλές συχνότητες προέρχεται από ηλεκτρόνια και η συνιστώσα στις υψηλές συχνότητες προέρχεται από

πρωτόνια. Για τις δύο προσομοιώσεις θεωρήσαμε πληθυσμούς, όπου και στις δύο περιπτώσεις έχουμε σωματίδια που ακολουθούν κατανομή σωματιδίων με δείκτη  $p = 2$  για την συνιστώσα A και  $p = 4.4$  για την συνιστώσα B. Εντοπίσαμε ότι, η προσομοίωση για νόμους δύναμης που αποκλίνουν από τις τιμές αυτές, παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες όσο αφορά την ακρίβεια στην προσαρμογή των δεδομένων. Συγκεκριμένα για την ροή ακτινοβολίας στις υψηλές συχνότητες τα παρατηρησιακά δεδομένα σχηματίζουν ευθύγραμμο τμήμα στην λογαριθμική κλίμακα, επομένως θα αναμένουμε κάποιο νόμο δύναμης στην συνάρτηση του φάσματος, με καλή προσαρμογή μόνο για νόμο δύναμης με δείκτη  $p = 4.4$ . Για τα παρατηρησιακά δεδομένα στις χαμηλές συχνότητες έχουμε το σχηματισμό συνιστώσας μεταξύ των συχνοτήτων  $\nu \sim 10^{10}\text{Hz}$  και  $\nu \sim 10^{11}\text{Hz}$  ο οποίος περιορίζει την προσαρμογή μας σε μικρό νόμο δύναμης  $p \sim 2$  και μικρό εύρος μεταξύ των παραγόντων Lorentz. Διαφορετικές τιμές αναφορικά με αυτές τις παραμέτρους οδηγούσαν σε χειρότερη προσαρμογή των δεδομένων. Νόμοι δύναμης με δείκτη  $p \sim 2$  μπορούν να προέλθουν από επιτάχυνση Fermi πρώτης τάξης σε ωστικά κύματα [30] όμως για νόμο δύναμης  $p = 4.4$  θα πρέπει να γίνει επιπλέον θεωρητική έρευνα για την εύρεση εναλλακτικών μηχανισμών.

Όσο αφορά την αυτοαπορρόφηση σύγχροτρον έχουμε σημαντικές ενδείξεις ότι για την κλίμακα του πίδακα στον M84, για τις συχνότητες που έχουμε παρατηρήσεις, δεν επηρεάζει το φάσμα της ακτινοβολίας. Η μεγάλη κλίμακα του πίδακα σε συνδυασμό με τον αριθμό των σωματιδίων υποδεικνύει πυκνότητα σωματιδίων αρκετά μικρή ώστε στις συχνότητες που έχουμε παρατηρήσεις να μην ενεργοποιείται η αυτοαπορρόφηση. Συγκεκριμένα για τα πρωτόνια του μοντέλου A η αυτοαπορρόφηση αναμένεται για συχνότητες μικρότερες από 1 MHz.

Το κοινό μαγνητικό πεδίο για τα δύο μοντέλα που έχουμε παρουσιάσει μας επιτρέπει να κάνουμε μια άμεση σύγκριση για τον αριθμό σωματιδίων που χρειάζονται για να φτάσουμε σε αυτές τις ενέργειες. Για το μοντέλο A παρατηρούμε ότι τα ηλεκτρόνια σε αριθμό να είναι 6 τάξεις μεγέθους λιγότερα από τα πρωτόνια. Αντίθετα το μοντέλο B παρουσιάζει διαφορές 1 τάξης μεγέθους στον αριθμό των σωματιδίων γεγονός που το καθιστά όσο αφορά αυτή την παράμετρο πιο ρεαλιστικό. Οι διαφορές στους αριθμούς αυτούς είναι αποτέλεσμα της διαφοράς της μάζας των δύο σωματιδίων ( $m_p \simeq 1836m_e$ ). Χρησιμοποιώντας της σχέση 2.18 μπορούμε να δούμε ότι, για τον μηχανισμό σύγχροτρον, πρωτόνια που ακτινοβολούν στις ίδιες συχνότητες με τα ηλεκτρόνια έχουν ενέργεια  $(m_p/m_e)^{3/2}$  φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ενέργεια των ηλεκτρονίων.

Αυτός είναι και ο λόγος που χρειαστήκαμε λιγότερα πρωτόνια στις ίδιες συχνότητες για την ίδια ροή ακτινοβολίας - ενέργεια.

Όσο αφορά την ελαχιστοποίηση της ενέργειας του συστήματος έχουμε βρεί ότι το μοντέλο A καταφέρνει να ελαχιστοποιήσει την ολική ενέργεια του συστήματος καλύτερα από το μοντέλο B (σχέση 4.21). Επομένως στην υπόθεση για ελάχιστη συνολική ενέργεια στις ραδιοπηγές [31] το δεύτερο μοντέλο φαίνεται να είναι επικρατέστερο. Η υπόθεση αυτή και σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα για τον αριθμό των σωματιδίων υποδυκνύει ότι το δεύτερο μοντέλο δίνει πιο ακριβή επεξήγηση για τον πίδακα στον M84. Αν και έχουμε εντοπίσει το πιο πιθανό μοντέλο, μεταξύ των δύο, για να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημα του πίδακα χρειαζόμαστε επιπλέον θεωρητικό υπόβαθρο ώστε να επιβάλουμε καλύτερους περιορισμούς στις προσομοιώσεις και να εξηγήσουμε την προέλευση και ιδιότητες των πληθυσμών των φορτισμένων σωματιδίων.

# Παράρτημα Α΄

## Μαθηματικό υπόβαθρο

### Α΄.1 Φυσικές σταθερές στο *CGS*

Σε αυτό το εδάφιο θα καταγράψουμε τις βασικές σταθερές τις οποίες χρησιμοποιήσαμε κατά την διάρκεια της εργασίας μας.

Φυσικές σταθερές		
Σταθερά	Συμβολισμός	Τιμή ( <i>cgs</i> )
ταχύτητα φωτός (στο κενό)	$c$	$2.99792458 \times 10^{10} cm s^{-1}$
σταθερά <i>Boltzmann</i>	$k$	$1.380649 \times 10^{-16} cm^2 g s^{-2} K^{-1}$
φορτίο ηλεκτρονίου	$e$	$4.8032 \times 10^{-10} cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$
μάζα ηλεκτρονίου	$m_e$	$9.1094 \times 10^{-28} g$
μάζα πρωτονίου	$m_p$	$1.6726 \times 10^{-24} g$

## Α'.2 Σχετικιστική εστίαση φωτός

Ξεκινώντας από τους μετασχηματισμούς *Lorentz* της ταχύτητας θα καταλήξουμε σε μια σημαντική για την συνέχεια σχέση αναφορικά με τις ιδιότητες του φωτός.

Έστω συστήματα αναφοράς  $K$  και  $K'$  τα οποία κινούνται με σχετική ταχύτητα  $\vec{v}$ . Οι μετασχηματισμοί *Lorentz* για τα συστήματα αναφοράς αυτά μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + vdt') & dt &= \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \end{aligned}$$

Μπορούμε επομένως να φτάσουμε στις σχέσεις για την ταχύτητα,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{(u'_x + v)}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \quad (A'.1\alpha')$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_y\right)} \quad (A'.1\beta')$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_z\right)} \quad (A'.1\gamma')$$

Στην συνέχεια αναλύοντας την ταχύτητα σε 2 συνιστώσες, την κάθετη  $\vec{u}_{||}$  και την παράλληλη  $\vec{u}_{\perp}$  στην σχετική ταχύτητα των συστημάτων αναφοράς  $\vec{v}$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$u_{||} = \frac{(u'_{||} + v)}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{||}\right)} \quad (A'.2\alpha')$$

$$u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_{||}\right)} \quad (A'.2\beta')$$

Για τις συνιστώσες αυτές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $u_{||} = u\cos\theta$  και  $u_{\perp} = u\sin\theta$  όπου  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ της ταχύτητας  $u$  και των συνιστωσών της βρίσκουμε,

$$\tan\theta = \frac{u_{\perp}}{u_{||}} = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + v/c)} \quad (A'.3)$$

Στην περίπτωση φωτονίων θα έχουμε  $u' = c$  και παίρνουμε τις σχέσεις εκτροπής του φωτός,

$$\tan\theta = \frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}} = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + v/c)} \quad (\text{A'.4}\alpha')$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + v/c}{1 + (v/c)\cos\theta'} \quad (\text{A'.4}\beta')$$

Για την περίπτωση όπου η γωνία  $\theta' = \pi/2$  και έχουμε μεγάλες ταχύτητες τέτοιες ώστε  $\gamma \gg 1$  τότε έχουμε ότι

$$\theta \sim \frac{1}{\gamma} \quad (\text{A'.5})$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι τα φωτόνια στο κινούμενο σύστημα  $K'$ , στο σύστημα δηλαδή όπου γίνεται η παρατήρηση, συγκεντρώνονται σε κώνο με γωνίες της τάξης  $\sim 1/\gamma$ .

### A'.3 Ανάλυση Fourier: Φάσμα Ακτινοβολίας

Σε αυτό το εδάφιο θα περιγράψουμε την διαδικασία μέσω της οποίας μεταφράζουμε την πληροφορία που λαμβάνουμε για το ηλεκτρικό πεδίο της ακτινοβολίας σε μορφή φάσματος συχνοτήτων.

Έστω ότι η ακτινοβολία παρατηρείτε στην μορφή πεπερασμένων παλμών ή ισοδύναμα το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}(t)$  μηδενίζεται για  $t \rightarrow \pm\infty$ . Θεωρούμε επίσης ότι το ηλεκτρικό πεδίο περιορίζεται σε μία διεύθυνση έστω  $E(t) \equiv \hat{a} \cdot \vec{E}(t)$ . Ο μετασχηματισμός *Fourier* για το  $E(t)$  θα είναι:

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{A'.6})$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός,

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A'.7})$$

Το ηλεκτρικό πεδίο  $E(t)$  είναι πραγματική συνάρτηση και επομένως μπορούμε να αναιρέσουμε τις



αρνητικές συχνότητες ως

$$\hat{E}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)e^{i\omega t} dt = \hat{E}^*(\omega) \quad (\text{A'.8})$$

Τώρα μπορούμε να μετατρέψουμε την πληροφορία της συχνότητας για το ηλεκτρικό πεδίο  $\hat{E}(\omega)$  σε πληροφορία για την συχνότητα της ενέργειας, εκφράζουμε την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφάνειας<sup>1</sup>:

$$\frac{dW}{dt dA} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) \quad (\text{A'.9})$$

Η συνολική ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας του παλμού θα είναι:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt \quad (\text{A'.10})$$

Από το θεώρημα *Parseval* για μετασχηματισμό *Fourier* έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A'.11})$$

Μέσω της συμμετρίας που προκύπτει από την σχέση A'.3 έχουμε ότι:

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{E}(-\omega)|^2$$

έτσι ώστε,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = 4\pi \int_0^{+\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A'.12})$$

και επομένως η σχέση για την ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{dW}{dA} = c \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A'.13})$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να πούμε ότι η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα συ-

---

<sup>1</sup>χρησιμοποιούμε ουσιαστικά την μορφή του διανύσματος *Poynting*

χρότητας για ολόκληρο τον παλμό είναι:

$$\frac{dW}{dAd\omega} = c|\hat{E}(\omega)|^2 \quad (\text{A'.14})$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι ο παλμός εμφανίζει περιοδικότητα σε χρονική κλίμακα τάξης  $T$  τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dW}{dAd\omega dt} = \frac{c}{T}|\hat{E}(\omega)|^2 \quad (\text{A'.15})$$

Έχουμε δηλαδή καταλήξει σε μια σχέση η οποία συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με την ισχύ του παλμού. Μπορούμε να δούμε ότι η χρονική διάρκεια του παλμού  $T$  καθορίζει το εύρος της περιοχής του φάσματος στην οποία θα έχουμε συγκεντρωμένη την πληροφορία της τάξης του  $\Delta\omega \sim 1/T$ . Για ημιτονοειδή μορφή ηλεκτρικού φορτίου του παλμού το φάσμα θα περιορίζεται γύρω από συχνότητες  $\omega \sim \omega_0$ , όπου  $\omega_0$  η συχνότητα του παλμού.

## A'.4 Συντελεστές Einstein

Η ανάλυση του Einstein την οποία θα περιγράψουμε πιο κάτω έχει κατεφέρει να συνδέσει, μέσω της αλληλεπίδρασης της ακτινοβολίας με ένα ατομικό σύστημα, την εκπομπή και απορρόφηση σε μικροσκοπικό επίπεδο. Στην απλή περίπτωση όπου έχουμε μόνο 2 ενεργειακές καταστάσεις, την ενέργεια  $E_1 = E$  με στατιστικό βάρος  $g_1$  και την ενέργεια  $E_2 = E + h\nu_0$  με στατιστικό βάρος  $g_2$ . Η μετάβαση από την ενέργεια  $E_1$  στην ενέργεια  $E_2$  γίνεται μέσω απορρόφησης ενός φωτονίου ενέργειας  $h\nu_0$  και η μετάβαση από την ενέργεια  $E_2$  στην ενέργεια  $E_1$  γίνεται μέσω εκπομπής φωτονίου αντίστοιχα. Ο Einstein είχε αναγνωρίσει 3 διαδικασίες:

**1-Αυθόρμητη εκπομπή:** Το σύστημα μεταβαίνει από την ενέργεια  $E_2$  στην ενέργεια  $E_1$  εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόμα και χωρίς την ύπαρξη πεδίου φωτονίων. Ορίζουμε τον συντελεστή ως:

$$A_{21} = \text{Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για αυθόρμητη εκπομπή (s}^{-1}\text{)}.$$

**2-Πραγματική απορρόφηση:** Το σύστημα μεταβαίνει από την ενέργεια  $E_1$  στην ενέργεια  $E_2$  απορροφώντας ένα φωτόνιο με την απαίτηση της ύπαρξης πεδίου φωτονίων. Η πιθανότητα

ανά μονάδα χρόνου για την διαδικασία αυτή είναι ανάλογη της πυκνότητας των φωτονίων σε μια συχνότητα  $\nu_o$ . Η διαφορά στην ενέργεια μεταξύ 2 καταστάσεων περιγράφεται από μια συνάρτηση  $\phi(\nu)$  της μορφής<sup>2</sup>  $\delta(\nu - \nu_o)$  η οποία υπονοεί ότι χρειαζόμαστε φωτόνια  $\nu_o$  για να έχουμε μετάβαση. Αν θεωρήσουμε ότι η  $\phi(\nu)$  είναι κανονικοποιημένη τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (\text{A'.16})$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον συντελεστή για την διαδικασία αυτή ως:

$B_{12}\bar{J}$  = Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για απορρόφηση, όπου:

$$\bar{J} \equiv \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (\text{A'.17})$$

όπου  $J_\nu$  η μέση ένταση ακτινοβολίας.

**3-Εξαναγκασμένη εκπομπή:** Το σύστημα μεταβαίνει από την ενέργεια  $E_2$  στην ενέργεια  $E_1$ . Κατα την διαδικασία αυτή ένα πεδίο φωτονίων περνάει από φορτία στον χώρο εξαναγκάζοντας τα να δώσουν την ενέργεια τους στην δέσμη φωτονίων. Αντίστοιχα ορίζουμε τον συντελεστή για την διαδικασία αυτή ως:

$B_{21}\bar{J}$  = Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για εξαναγκασμένη εκπομπή.

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο της συνάρτησης για την συνάρτηση  $\phi(\nu)$  μόνο για την περίπτωση όπου το  $J_\nu$  αλλάζει αργά με το πλάτος  $\Delta\nu$  της γραμμής. Εάν η συνάρτηση  $\phi(\nu)$  είναι ακριβώς η συνάρτηση  $\delta(\nu - \nu_o)$  τότε οι συντελεστές απορρόφησης και εξαναγκασμένης εκπομπής είναι οι  $B_{12}J_{\nu_o}$  και  $B_{21}J_{\nu_o}$  αντίστοιχα.

Στην συνέχεια θεωρώντας θερμοδυναμική ισορροπία μπορούμε να εκφράσουμε σχέσεις οι οποίες συνδέουν τους συντελεστές Einstein μεταξύ τους. Για θερμοδυναμική ισορροπία μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός των μεταβάσεων από μια κατάσταση ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβάσεων ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου προς αυτή τη κατάσταση. Εάν θεωρήσουμε τα  $n_1, n_2$  ως τις αριθμητικές πυκνότητες των σωματιδίων που

<sup>2</sup>όπου  $\delta$  είναι η συνάρτηση δέλτα του Ντιράκ, οπότε από τον ορισμό η  $\phi(\nu)$  μεγιστοποιείται για  $\nu = \nu_o$

βρίσκονται στις καταστάσεις 1 και 2 αντίστοιχα τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J} \quad (\text{A'.18})$$

λύνοντας ως προς την μέση ένταση ακτινοβολίας έχουμε,

$$\bar{J} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{n_1}{n_2} \frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} \quad (\text{A'.19})$$

Επιπρόσθετα στην θερμοδυναμική ισοροπία θα ισχύει:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp(-(E + h\nu_o)/kT)} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_o/kT) \quad (\text{A'.20})$$

επομένως θα έχουμε:

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_o/kT) - 1} \quad (\text{A'.21})$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι στην θερμοδυναμική ισορροπία θα πρέπει να ισχύει  $\bar{J} = B_\nu$  όπου  $B_\nu$  η συνάρτηση Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (\text{A'.22})$$

Από την απαίτηση της ισότητας των δύο σχέσεων καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τους συντελεστές Einstein:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (\text{A'.23}\alpha')$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^3} B_{21} \quad (\text{A'.23}\beta')$$

Η ανεξαρτησία των εκφράσεων από την θερμοκρασία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ισχύουν ακόμα και σε περιπτώσεις μη θερμοδυναμικής ισορροπίας.

Σημαντικό επίσης είναι να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των συντελεστών Einstein και των συντελεστών εκπομπής, απορρόφησης. Υποθέτουμε ότι η κατανομή συχνοτήτων της εκπομπής της ακτινοβολίας για αυθόρμητη μετάβαση από μια κατάσταση σε μια άλλη ακολουθεί την ίδια

συνάρτηση  $\phi_\nu$  που περιγράφει την απορρόφηση. Εφόσον κάθε άτομο συνισφέρει ένα ποσό ενέργειας της τάξης  $h\nu_o$  υπό στερεά γωνία  $4\pi$  για κάθε μετάβαση μπορούμε να γράψουμε τον συντελεστή εκπομπής ως:

$$j_\nu = \frac{h\nu_o}{4\pi} n_2 A_{21} \phi_\nu \quad (A'.24)$$

Για τον συντελεστή απορρόφησης θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και το κομμάτι της εξαναγκασμένης εκπομπής στα αποτελέσματα μας. Αυτό γιατί η εξαναγκασμένη εκπομπή είναι ανάλογη της έντασης και επηρεάζει φωτόνια μόνο για την δέσμη που περνάει από τα φορτία στο χώρο. Οι διαδικασίες αυτές δρουν στον ίδιο συντελεστή και περιγράφονται με την σχέση:

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \quad (A'.25)$$

## A'.5 Λαμπρότητα Eddington

Για την λαμπρότητα πηγής ενός αστροφυσικού αντικειμένου, που αυξάνεται εξαιτίας της πρόσπτωσης ύλης στην επιφάνεια της, υπάρχει ανώτερο όριο της τιμής της το οποίο ονομάζουμε λαμπρότητα Eddington. Για την εύρεση του ορίου αυτού θεωρούμε σφαιρική κατανομή ρευστού σε θερμοδυναμική ισορροπία στην οποία ασκούνται πάνω του μόνο οι εσωτερικές δυνάμεις λόγω της πίεσης ακτινοβολίας και οι δυνάμεις βαρύτητας. Η ακτινοβολία παράγεται από την απελευθέρωση της δυναμικής ενέργειας λόγω της εισροή ύλης στην πηγή. Η πηγή ακτινοβολεί μέχρι η λαμπρότητα φτάσει στο όριο Eddington. Στο όριο αυτό η πίεση της ακτινοβολίας εμποδίζει την πρόσπτωση ύλης και περιορίζει την λαμπρότητα κάτω από το όριο Eddington. Επιλύοντας την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας μπορούμε να βρούμε το σημείο ισορροπίας του μηχανισμού αυτού.

$$-\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi = 0 \quad (A'.26)$$

όπου,

$$-\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\sigma_T}{m_p c} F_{rad} \quad (A'.27)$$

η δύναμη από την πίεση ακτινοβολίας,  $-\nabla\Phi$  το βαρυτικό δυναμικό και  $\sigma_T$  η διατομή Thomson ηλεκτρονίων. Για την λαμπρότητα Eddington μπορούμε να πούμε:

$$L_{edd} = \int_S F_{rad} dA = \frac{m_p c}{\sigma_T} \int_S \nabla\Phi dA = \frac{4GMm_p c}{\sigma_T} \quad (A'.28)$$

Καταλήγουμε στην σχέση:

$$L_{edd} = 1,26 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{erg/s} = 3,2 \times 10^4 \frac{M}{M_\odot} L_\odot \quad (A'.29)$$

Εάν θεωρήσουμε τους ενεργειακούς γαλαξιακούς πυρήνες αντικείμενα σε θερμοδυναμική ισορροπία, τα οποία μετατρέπουν την βαρυτική δυναμική ενέργεια σε ακτινοβολία, μπορούμε να εντοπίσουμε το όριο στην λαμπρότητα των αντικειμένων ή την χαρακτηριστική μάζα που απαιτείτε για τις παρατηρούμενες ποσότητες ενέργειας.

## A'.6 Υπολογισμός σταθεράς νόμου δύναμης

Όπως έχουμε αναφέρει για τον υπολογισμό του φάσματος ακτινοβολίας από νόμο δύναμης αριθμού σωματιδίων της μορφής  $N(\gamma)d\gamma = \tilde{C} \gamma^{-p}d\gamma$  σε συγκεκριμένο χώρο τιμών παραγόντων Lorentz  $\gamma_{min}, \gamma_{max}$  ολοκληρώνουμε την σχέση της ισχύς για ένα σωματίδιο στο πεδίο τιμών των  $\gamma$ . Στον κώδικα μας η ολοκλήρωση έγινε στο πεδίο τιμών των ενεργειών που προκύπτουν από τον εκάστοτε παράγοντα Lorentz δίνοντας την απαραίτητη προσοχή στις μετατροπές και τις μονάδες μέτρησης της σταθεράς  $\tilde{C}$  όπως φαίνεται παρακάτω. Ξεκινώντας από τον νόμο δύναμης έχουμε ότι:

$$N(\gamma)d\gamma = \tilde{C}\gamma^{-p}d\gamma \equiv dN$$

$$N(E)dE = CE^{-p}dE \equiv dN$$

αφού οι νόμοι δύναμης αφορούν αριθμό σωματιδίων ανά παράγοντα Lorentz και ανά ενέργεια αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να πούμε:

$$N(\gamma)d\gamma = N(E)dE \Rightarrow N(\gamma) = N(E)\frac{dE}{d\gamma} \quad (\text{A'.30})$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση  $E = \gamma mc^2$  βρίσκουμε :

$$N(\gamma) = C(\gamma mc^2)^{-p} mc^2 \Rightarrow \tilde{C} = C(mc^2)^{-p+1} \quad (\text{A'.31})$$

Η σταθερά  $C$  στο σημείο αυτό δεν παρουσιάζει κάποιο φυσικό ενδιαφέρον επομένως θέλουμε να την εκφράσουμε ως προς τον αριθμό σωματιδίων τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην μοντελοποίηση μας στην συνέχεια. Ολοκληρώνοντας τον νόμο δύναμης ως προς όλους του παράγοντες Lorentz  $\gamma_{min}, \gamma_{max}$  η ποσότητα που θα πάρουμε θα είναι ο αριθμός σωματιδίων ο οποίος βρίσκεται στην κατανομή. Έχουμε επομένως:

$$N_o = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} N(\gamma) d\gamma = \tilde{C} \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} \gamma^{-p} d\gamma = \frac{\gamma_{min}^{-p+1} - \gamma_{max}^{-p+1}}{-p+1} \tilde{C} \quad (\text{A'.32})$$

Συνδιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην σχέση για την σταθερά:

$$\tilde{C} = \frac{-p+1}{\gamma_{min}^{-p+1} - \gamma_{max}^{-p+1}} N_{tot} \quad (\text{A'.33})$$

# Παράρτημα Β΄

## Κώδικας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε για τους υπολογισμούς μας. Γράψαμε τον κώδικα στην γλώσσα της Python και χρησιμοποιήσαμε το περιβάλλον της [Anaconda](#).

```
#Import Package Modules to Code
import numpy
import numpy as np
import math as m
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.integrate import quad, dblquad
import scipy.special as sp
import scipy.constants as cn
import numpy
import numpy as np
import math as m
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
from scipy.integrate import quad, dblquad
import scipy.constants as cn
import scipy.special as sp
```



---

```

import astropy.units as u

kpc = 3.085677558128*10**21
pc = 3.085677558128*10**18

#Constants in cgs
fortio =4.80*10**(-10)
c = 2.997925*10**10
me =9.109*10**(-28)
mp = 1.672614*10**(-24)
hpl = 6.25*10**(-27)

#Free Parameters of Models
B=0.001 #s.f.p
gmin_e = 1.2*10**5
gmax_e = 10**6
gmin_p = 3*10**4
gmax_p = 3*10**5
ps_e = 4.4
ps_p = 2
No_e=6.5*10**50 #f.p
No_p=1.5*10**56

Ro=50*pc #source radius
d_L= 18.5*10**3*kpc#(source distance):1.00e+27 cm

#We separate the constant parts in our calculation for easier coding
C_e=No_e*(-ps_e+1)/((me*c**2)**(-ps_e+1)*(gmax_e**(-ps_e+1)-gmin_e**(-ps_e+1
)))
C_p=No_p*(-ps_p+1)/((mp*c**2)**(-ps_p+1)*(gmax_p**(-ps_p+1)-gmin_p**(-ps_p+1
)))
Constant_e=(C_e*4*cn.pi*fortio**2*me*c*(me*c**2)**(-ps_e))/3
Constant_p=(C_p*4*cn.pi*fortio**2*mp*c*(mp*c**2)**(-ps_p))/3

#Electrons power [erg/s]

```

```

def p_e(n):
res = dblquad(lambda x, g: Constant_e*n*g**(-2-ps_e)*(9+36*x**2+16*x**4)/((3
+4*x**2)
*m.sqrt(1+(x**2)/3))*np.exp(-n*4*cn.pi*me*c*(1+(4*x**2)/3)*m.sqrt(1+x**2/3)
/(g**2*3*fortio*B)), gmin_e, gmax_e, lambda x: 0, lambda x: np.inf)
return res

v_e = numpy.logspace(8,17,100)
P_e = v_e*0

for i in range(len(v_e)):
P_e[i] = p_e(v_e[i])[0]

#Proton power [erg/s]
def p_p(n):
res = dblquad(lambda x, g: Constant_p*n*g**(-2-ps_p)*(9+36*x**2+16*x**4)/((3
+4*x**2)*
m.sqrt(1+(x**2)/3))*np.exp(-n*4*cn.pi*mp*c*(1+(4*x**2)/3)*m.sqrt(1+x**2/3)
/(g**2*3*fortio*B)), gmin_p, gmax_p, lambda x: 0, lambda x: np.inf)
return res

v_p = numpy.logspace(8,17,100)
P_p = v_p*0

for i in range(len(v_p)):
P_p[i] = p_p(v_p[i])[0]

#Calculation of synchrotron self-absorption component for electrons

Ca_e=No_e*(-ps_e+1)/(4*cn.pi*Ro**3*(me*c**2)**(-ps_e+1)*(gmax_e**(-ps_e+1)-
gmin_e**(-ps_e+1)))
AbsConstant_e=Ca_e*(ps_e+2)*fortio**2*(me*c**2)**(-ps_e)*c/(6)

def abs_e(n):

```

---

```

resa = dblquad(lambda x, g: AbsConstant_e*(g**(-ps_e-3)/n)*(9+36*x**2+16*x**
                                     4)
/((3+4*x**2)*m.sqrt(1+(x**2)/3))*np.exp(-n*4*cn.pi*me*c*(1+(4*x**2)/3)
*m.sqrt(1+x**2/3)/(g**2*3*fortio*B)), gmin_e, gmax_e
, lambda x: 0, lambda x: np.inf, epsabs=1.49e-28, epsrel=1.49e-18)
return resa

Abs_e = v_e*0
Pabs_e = v_e*0

ssa_e = 0

for i in range(len(v_e)):
Abs_e[i] = abs_e(v_e[i])[0]

Iabs_e=v_e*0

t_ne = Ro*Abs_e #optiko vathos

#find the index of the table t_n in which the source is becoming optical
thick

for i in range(len(v_e)):
if t_ne[i] >= 1:
ssa_e = i

vssa_e = v_e[ssa_e] #aprox is the value of vssa

#Iabs2_e = P_e*(1-np.exp(-Abs_e*Ro))/((4*cn.pi)**2*Ro**3*Abs_e)
Iabs_e = P_e*(-np.expm1(-Abs_e*Ro))/((4*cn.pi)**2*Ro**3*Abs_e)

#From Intensity to Flux
Fabs_e=v_e*0

```

```

for i in range(len(v_e)):
    Fabs_e[i]=cn.pi*Ro**2*Iabs_e[i]/d_L**2

#Calculation of synchrotron self-absorption component for protons

Ca_p=No_p*(-ps_p+1)/(4*cn.pi*Ro**3*(mp*c**2)**(-ps_p+1)*(gmax_p**(-ps_p+1)-
                                gmin_p**(-ps_p+1)))
AbsConstant_p=Ca_p*(ps_p+2)*fortio**2*(mp*c**2)**(-ps_p)*c/(6)

def abs_p(n):
    res = dblquad(lambda x, g: AbsConstant_p*(g**(-ps_p-3)/n)*(9+36*x**2+16*x**4
                                )/((3+4*x**2)
                                *m.sqrt(1+(x**2)/3))*np.exp(-n*4*cn.pi*mp*c*(1+(4*x**2)/3)*m.sqrt(1+x**2/3)/
                                (g**2*3*fortio*B))
                                , gmin_p, gmax_p, lambda x: 0, lambda x: np.inf, epsabs=1.49e-28, epsrel=1.
                                49e-18)

    return res

Abs_p = v_p*0
Pabs_p = v_p*0

ssa_p = 0

for i in range(len(v_p)):
    Abs_p[i] = abs_p(v_p[i])[0]

Iabs_p=v_p*0

t_np = Ro*Abs_p #optiko vathos

#find the index of the table t_n in which the source is becoming optical
thick

for i in range(len(v_p)):
    if t_np[i] >= 1:
        ssa_p = i

```

---

```

vssa_p = v_p[ssa_p] #approx is the value of vssa

#Iabs2_e = P_e*(1-np.exp(-Abs_e*Ro))/((4*cn.pi)**2*Ro**3*Abs_e)
Iabs_p = P_p*(-np.exp1(-Abs_p*Ro))/((4*cn.pi)**2*Ro**3*Abs_p)

#From Intensity to Flux
Fabs_p=v_p*0

for i in range(len(v_p)):
    Fabs_p[i]=cn.pi*Ro**2*Iabs_p[i]/d_L**2

#insert observed data in log scale
logdv = np.array([9.177536,9.686636,9.927370,10.988960,11.372912,14.522444,
                  14.800029,14.950365,15.123852])
lognFn = -np.array([15.84841,15.36888,15.29448,14.99820,15.14997,13.30146,13
                  .51873,13.61827,13.73002])
elognFn = -np.array([15.80702,15.32749,15.25309,14.95681,15.10857,13.15534,
                  13.34264,13.55827,13.69430])
ElognFn = -np.array([15.89417,15.41464,15.34024,15.04396,15.19572,13.52331,
                  13.81976,13.68791,13.76894])

dv=10**logdv
nFn=10**lognFn
enFn=10**elognFn
EnFn=10**ElognFn

err=nFn-enFn
Err=EnFn-nFn

asymmetric_error = [err,Err]

```

```
Fall = Fabs_e+Fabs_p
```

```
Fabsc_p = np.nan_to_num(Fabs_p)
```

```
for i in range(len(v_p)):
```

```
Fall[i]=Fabs_e[i] + Fabsc_p[i]
```

```
#Graph printing part of the code
```

```
plt.plot(v_e,v_e*Fabs_e , label='Electrons',ls="--", color="royalblue")
```

```
plt.plot(v_p,v_p*Fabs_p, label='Protons',ls="--", color="indianred")
```

```
plt.plot(v_p,v_p*Fall, label='SED',ls="--", color="black")
```

```
plt.legend()
```

```
plt.errorbar(x=dv, y=nFn, yerr=asymmetric_error, fmt='o')
```

```
plt.ylim(1e-18,1e-12)
```

```
plt.xlim(1e8,1e18)
```

```
plt.xlabel(" [Hz]")
```

```
plt.ylabel(" F ( ) [erg/s cm-2]")
```

```
plt.yscale("log")
```

```
plt.xscale("log")
```

```
#plt.scatter(dv,nFn)
```

```
plt.title("Synchrotron Spectra for power law distribution")
```

# Bibliography

- [1] G. R. Burbidge. On Synchrotron Radiation from Messier 87. , 124:416, September 1956.
- [2] Jean Ballet. X-ray synchrotron emission from supernova remnants. *Advances in Space Research*, 37(10):1902–1908, 2006. Astrophysics.
- [3] R. Moradi, Liang Li, J. A. Rueda, R. Ruffini, N. Sahakyan, and Y. Wang. X-ray and gev afterglows and sub-tev emission of grb 180720b, 2021.
- [4] Stela S. Boula, Apostolos Mastichiadis, and Demosthenes Kazanas. A two-zone emission model for blazars and the role of accretion disk mhd winds, 2021.
- [5] N J Mason, A Dawes, R Mukerji, E A Drage, E Vasekova, S M Webb, and P Limão-Vieira. Atmospheric chemistry with synchrotron radiation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 38(9):S893–S911, apr 2005.
- [6] R. V. Vasudevan, A. C. Fabian, P. Gandhi, L. M. Winter, and R. F. Mushotzky. The power output of local obscured and unobscured agn: crossing the absorption barrier withswift/bat andiras. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402(2):1081–1098, Feb 2010.
- [7] Wei-Hao Bian and Yong-Heng Zhao. Accretion rates and the accretion efficiency in agns. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 55(3):599–603, Jun 2003.
- [8] Volker Beckmann and Chris R. Shrader. *Active Galactic Nuclei*. 2012.
- [9] R. Narayan, R. Mahadevan, and E. Quataert. Advection-dominated accretion around black holes. In M. A. Abramowicz, G. Björnsson, and J. E. Pringle, editors, *Theory of Black Hole Accretion Disks*, pages 148–182, January 1998.

- [10] C. Megan Urry and Paolo Padovani. Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei. , 107:803, September 1995.
- [11] Ajit K. Kembhavi and Jayant V. Narlikar. *THE STANDARD MODEL*, page 101–121. Cambridge University Press, 1999.
- [12] Maia Nenkova, Matthew M. Sirocky, Željko Ivezić, and Moshe Elitzur. Agn dusty tori. i. handling of clumpy media. *The Astrophysical Journal*, 685(1):147–159, Sep 2008.
- [13] Catherine Grier, B. M. Peterson, P. Martini, R. W. Pogge, A. Pancoast, T. Treu, and L. C. Watson. The Broad Line Region in AGNs: Structure, Physics, and the f Factor. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #223*, volume 223 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 126.03, January 2014.
- [14] Thaisa Storchi Bergmann. The narrow line region in 3d: mapping agn feeding and feedback. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 10(S309):190–195, Jul 2014.
- [15] Eileen T. Meyer, Maria Petropoulou, Markos Georganopoulos, Marco Chiaberge, Peter Breiding, and William B. Sparks. Detection of an optical/uv jet/counterjet and multiple spectral components in m84. *The Astrophysical Journal*, 860(1):9, Jun 2018.
- [16] J. F. Radcliffe, P. D. Barthel, M. A. Garrett, R. J. Beswick, A. P. Thomson, and T. W. B. Muxlow. The radio emission from active galactic nuclei. *Astronomy Astrophysics*, 649:L9, May 2021.
- [17] George Rybicki and Alan Lightman. Radiative processes in astrophysics / george b. rybicki, alan p. lightman. *SERBIULA (sistema Librum 2.0)*, 01 2008.
- [18] Gabriele Ghisellini. Radiative processes in high energy astrophysics. *Lecture Notes in Physics*, 2013.
- [19] Benjamin Monreal. Single-electron cyclotron radiation. *Physics Today*, 69:70–71, 01 2016.
- [20] Xiao-Na Sun, Rui-Zhi Yang, Frank M. Rieger, Ruo-Yu Liu, and Felix Aharonian. Energy distribution of relativistic electrons in the kiloparsec scale jet of M 87 with Chandra. , 612:A106, May 2018.



- [21] Javier Roulet, Horng Sheng Chia, Seth Olsen, Liang Dai, Tejaswi Venumadhav, Barak Zackay, and Matias Zaldarriaga. On the distribution of effective spins and masses of binary black holes from the ligo and virgo o1-o3a observing runs, 2021.
- [22] Hiroki Yoneda, Dmitry Khangulyan, Teruaki Enoto, Kazuo Makishima, Kairi Mine, Tsunefumi Mizuno, and Tadayuki Takahashi. Broadband high-energy emission of the gamma-ray binary system ls 5039: Spectral and temporal features using nustar and fermi observations. *The Astrophysical Journal*, 917(2):90, Aug 2021.
- [23] Milton Abramowitz. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*,. Dover Publications, Inc., USA, 1974.
- [24] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Statistical Physics: Volume 5*. Number v. 5. Elsevier Science, 2013.
- [25] M. Kh Khokonov. Cascade processes of energy loss by emission of hard phonons. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2004.
- [26] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [27] Cosimo Nigro, Julian Sitarek, Paweł Gliwny, David Sanchez, and Matthew Craig. agnpy: Modelling Active Galactic Nuclei radiative processes with python. August 2021.
- [28] Jonelle L. Walsh, Aaron J. Barth, and Marc Sarzi. THE SUPERMASSIVE BLACK HOLE IN m84 REVISITED. *The Astrophysical Journal*, 721(1):762–776, sep 2010.

- [29] Matthew Newville, Till Stensitzki, Daniel B. Allen, and Antonino Ingargiola. LMFIT: Non-Linear Least-Square Minimization and Curve-Fitting for Python, September 2014.
- [30] Frank Rieger. An introduction to particle acceleration in shearing flows. *Galaxies*, 7(3):78, Sep 2019.
- [31] A. G. Pacholczyk. *Radio astrophysics. Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources*. 1970.