Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И.Герцена

Дисциплина: Решение задач оптимизации

Преподаватель: Авксеньтьева Елена Юрьевна
Выполнил: Цирулик Иван Александрович

Лабораторная работа №5

Задача №1-3

В задачах **1-3** найти локальный экстремум следующих функций:

1. $Z = x_3 + y_3 + 3xy$
2. $Z = x^3y^2\,(12 - x - y),\ x > 0,\ y > 0$
3. $Z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

Решение:

1)

1. **Найдем частные производные**.
   $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\cdot x^2 + 3\cdot y$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\cdot x + 3\cdot y^2$$
2. **Решим систему уравнений**.
   $$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$
   a. **Из первого уравнения выражаем *x* и подставляем во второе уравнение**: **:**
      $x = -y^2$
      $3*y^4+3*y = 0$
      или
      $3*y*(y^3+1) = 0$
      Откуда $y_1 = -1$; $y_2 = 0$
      Данные значения *y* подставляем в выражение для *x*. Получаем: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$
   b. **Из первого уравнения выражаем *y* и подставляем во второе уравнение**:
      $y = -x^2$
      $3*x^4+3*x = 0$
      или
      $3*x*(x^3+1) = 0$
      Откуда $x_1 = -1$; $x_2 = 0$
      Данные значения *x* подставляем в выражение для *y*. Получаем: $y_1 = -1$; $y_2 = 0$
      Количество критических точек равно 2.
      $M_1(-1;-1)$, $M_2(0;0)$ $M_1(-1/3;-1/3)$
3. **Найдем частные производные второго порядка**.
   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$$
   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6\cdot x$$
   $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6\cdot y$$
4. Вычисляем значения для точки $M_1(-1;-1)$
   $$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(-1;-1)} = -6$$
   $$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(-1;-1)} = -6$$
   $$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(-1;-1)} = 3$$
   $AC - B^2 = 27 > 0$ и $A < 0$, то в точке $M_1(-1;-1)$ имеется максимум $z(-1;-1) = 1$
   Вычисляем значения для точки $M_2(0;0)$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(0;0)}=0$$
$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(0;0)}=0$$
$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}_{(0;0)}=3$$
$AC - B^2 = -9 < 0$, то глобального экстремума нет.
Вывод: В точке $M_1(-1;-1)$ имеется максимум $z(-1;-1) = 1$;

2)

1. **Найдем частные производные**.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x^3\cdot y^2+3\cdot x^2\cdot y^2(-x-y+12)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^3\cdot y^2+2\cdot x^3\cdot y(-x-y+12)$$

2. **Решим систему уравнений**.

$$a)$$
$$\begin{cases}-x^3y^2+3x^2y^2(-x-y+12)=0\\ -x^3y^2+2x^3y(-x-y+12)=0\end{cases} => \begin{cases}x_1=0\\ \frac{81y(x-12)^3(x-4)}{128}=0\end{cases} =$$
$$> \begin{cases}x_1=0\\ y_1=0, y_2=4, y_3=12\end{cases} => \begin{cases}x_1=9, x_2=6, x_3=0\\ y_1=0, y_2=4, y_3=12\end{cases}$$

$$b)$$
$$\begin{cases}-x^3y^2+3x^2y^2(-x-y+12)=0\\ -x^3y^2+2x^3y(-x-y+12)=0\end{cases} => \begin{cases}y_1=0\\ \frac{8x^2(x-12)^2(-x-6)}{9}=0\end{cases} =$$
$$> \begin{cases}x_1=0, x_2=6, x_3=12\\ y_1=0\end{cases} => \begin{cases}x_1=0, x_2=6, x_3=12\\ y_1=8, y_2=4, y_3=0\end{cases}$$

Количество критических точек равно 5.
$M_1(9;0)$, $M_2(6;4)$, $M_3(0;12)$, $M_4(0;8)$, $M_5(12;0)$

3. **Найдем частные производные второго порядка**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\cdot x^3\cdot y-3\cdot x^2\cdot y^2+6\cdot x^2\cdot y(-x-y+12)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6\cdot x^2\cdot y^2+6\cdot x\cdot y^2(-x-y+12)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4\cdot x^3\cdot y+2\cdot x^3(-x-y+12)$$

4. **Вычислим значение этих частных производных второго порядка в критических точках $M(x_0;y_0)$.**

Вычисляем значения для точки $M_1(9;0)$
$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(9;0)}=0$$
$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(9;0)}=4374$$
$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}_{(9;0)}=0$$
$AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.
Вычисляем значения для точки $M_2(6;4)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(6;4)} = -2304$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(6;4)} = -2592$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(6;4)} = -1728$$
$AC - B^2 = 2985984 > 0$ и $A < 0$, то в точке $M_2(6;4)$ имеется максимум $z(6;4) = 6912$
Вычисляем значения для точки $M_3(0;12)$
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(0;12)} = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(0;12)} = 0$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(0;12)} = 0$$
$AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.
Вычисляем значения для точки $M_4(0;8)$
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(0;8)} = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(0;8)} = 0$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(0;8)} = 0$$
$AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.
Вычисляем значения для точки $M_5(12;0)$
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(12;0)} = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(12;0)} = 0$$
$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(12;0)} = 0$$
$AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.
Вывод: В точке $M_2(6;4)$ имеется максимум $z(6;4) = 6912$;

3)

1. **Найдем частные производные**.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot x + y + 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2 \cdot y - 1$$
2. **Решим систему уравнений**.

$$a)$$
$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = -2y + 1 \\ -3y + 3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

3. Количество критических точек равно 1.
$M_1(-1;1)$ **Найдем частные производные второго порядка**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

4. **Вычислим значение этих частных производных второго порядка в критических точках $M(x_0;y_0)$.**
   Вычисляем значения для точки $M_1(-1;1)$
   $$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}_{(-1;1)} = 2$$
   $$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}_{(-1;1)} = 2$$
   $$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}_{(-1;1)} = 1$$
   $AC - B^2 = 3 > 0$ и $A > 0$, то в точке $M_1(-1;1)$ имеется минимум $z(-1;1) = 0$
   Вывод: В точке $M_1(-1;1)$ имеется минимум $z(-1;1) = 0$;

Задача №4

В задачах **4-6** найти глобальный экстремум функции ***Z*** в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

4. $\boldsymbol{Z = 3x_1 + x_2}$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 40 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Задача №5

В задачах **4-6** найти глобальный экстремум функции $\boldsymbol{Z}$ в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

5. $\boldsymbol{Z = x_1^2 + 2x_2 - 3}$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Задача №6

В задачах **4-6** найти глобальный экстремум функции $\boldsymbol{Z}$ в области решений системы неравенств (или неравенства). Дать геометрическое решение.

6. $\boldsymbol{Z = x_1 x_2}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 0 \le x_1 \le 3 \end{cases}$$

Решение: