

Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И.Герцена

Дисциплина: Решение задач оптимизации

Преподаватель: Авксентьева Елена Юрьевна

Выполнил: Цирулик Иван Александрович

Лабораторная работа № 4.1

Задача 1

Составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
b_j	20	30	30	10	90

Решение:

- 1) Запишем исходную таблицу

	b1	b2	b3	b4	ai
a1	2	3	2	4	30
a2	3	2	5	1	40
a3	4	3	2	6	20
bj	20	30	30	10	90

- 2) Запишем распределительную таблицу полученную применение метода наименьшей стоимости

	b1	b2	b3	b4	ai
a1	2 20	3	2 10	4	30
a2	3	2 30	5	1 10	40
a3	4	3	2 20	6	20
bj	20	30	30	10	90

- 3) Замечаем, что в результате пересчета по циклу оказалось, что число занятых клеток меньше, чем $n + m - 1$: $4 + 3 - 1 = 6 > 5$, т.е. получен вырожденный план.

- 4) Запишем опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

- 5) Вычислим общие затраты на перевозку: $Z = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 170$
 6) Вычислим сумму потенциалов

$u_1 + v_1 = 2$				$u_2 =$	1
$u_1 + v_3 = 2$		Полагая $u_1 = 0$ Найдем:		$u_3 =$	0
$u_2 + v_1 = 3$				$v_1 =$	2
$u_2 + v_2 = 2$				$v_2 =$	1
$u_2 + v_4 = 1$				$v_3 =$	2
$u_3 + v_3 = 2$				$v_4 =$	0

Вывод: Сумма потенциалов во всех незанятых клетках меньше стоимостей перевозок, следовательно по теореме №5 план является оптимальным и единственным.

Задача 2

Составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	30
A_2	9	4	5	7	3	70
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Решение:

- 1) Запишем исходную таблицу

	b1	b2	b3	b4	b5	ai
a1	2	7	3	6	2	30
a2	9	4	5	7	3	70
a3	5	7	6	2	4	50
bj	10	40	20	60	20	150

- 2) Запишем распределительную таблицу полученную применение метода наименьшей стоимости

	b1	b2	b3	b4	b5	ai
a1	2 10	7	3	6	2 20	30
a2	9	4 40	5 20	7 10	3	70
a3	5	7	6	2 50	4	50
bj	10	40	20	60	20	150

- 3) Замечаем, что в результате пересчета по циклу оказалось, что число занятых клеток меньше, чем $n + m - 1$: $5 + 3 - 1 = 7 > 6$, т.е. получен вырожденный план.

- 4) Запишем опорный план

$X =$	10	0	0	0	20
	0	40	20	10	0
	0	0	0	50	0

- 5) Вычислим общие затраты на перевозку: $Z = 10 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 7 \cdot 10 = 490$

- 6) Вычислим сумму потенциалов

$u_1 + v_1 = 2$			Полагая $u_1 = 0$		u	v
$u_1 + v_2 = 7$			Найдем :	1	0	2
$u_1 + v_5 = 2$				2	-3	7
$u_2 + v_2 = 4$				3	-8	8
$u_2 + v_3 = 5$				4		10
$u_2 + v_4 = 7$				5		2
$u_3 + v_4 = 2$				6		

Вывод: Сумма потенциалов не во всех незанятых клетках меньше стоимостей перевозок ($u_1 + v_4 = 0 + 10 > c_{14} = 6$, следовательно по теореме №5 план не является оптимальным)

Задача 3

Составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	2	5	7	6	20
A_2	7	8	3	4	5	110
A_3	2	1	4	3	2	120
b_j	70	40	30	60	50	250

Решение:

1)Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	4	2	5	7	6	20
A2	7	8	3	4	5	110
A3	2	1	4	3	2	120
Потребности	70	40	30	60	50	

2)Получим 1 опорный план:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	4	2	5	7	6[20]	20
A2	7	8	3[30]	4[60]	5[20]	110
A3	2[70]	1[40]	4	3	2[10]	120
Потребности	70	40	30	60	50	

3)Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j , по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$$u_1 + v_5 = 6; 0 + v_5 = 6; v_5 = 6$$

$$u_2 + v_5 = 5; 6 + u_2 = 5; u_2 = -1$$

$$u_2 + v_3 = 3; -1 + v_3 = 3; v_3 = 4$$

$$u_2 + v_4 = 4; -1 + v_4 = 4; v_4 = 5$$

$$u_3 + v_5 = 2; 6 + u_3 = 2; u_3 = -4$$

$$u_3 + v_1 = 2; -4 + v_1 = 2; v_1 = 6$$

$$u_3 + v_2 = 1; -4 + v_2 = 1; v_2 = 5$$

	$v_1=6$	$v_2=5$	$v_3=4$	$v_4=5$	$v_5=6$
$u_1=0$	4	2	5	7	6[20]
$u_2=-1$	7	8	3[30]	4[60]	5[20]
$u_3=-4$	2[70]	1[40]	4	3	2[10]

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$

(1;1): $0 + 6 > 4$; $\Delta_{11} = 0 + 6 - 4 = 2 > 0$

(1;2): $0 + 5 > 2$; $\Delta_{12} = 0 + 5 - 2 = 3 > 0$

4) Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;2): 2

Для этого в перспективную клетку (1;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	5	Запасы
1	4	2[+]	5	7	6[20][-]	20
2	7	8	3[30]	4[60]	5[20]	110
3	2[70]	1[40][-]	4	3	2[10][+]	120
Потребности	70	40	30	60	50	

5) Цикл приведен в таблице (1,2 → 1,5 → 3,5 → 3,2).

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $y = \min(1, 5) = 20$. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из x_{ij} , стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	4	2[20]	5	7	6	20
A2	7	8	3[30]	4[60]	5[20]	110
A3	2[70]	1[20]	4	3	2[30]	120
Потребности	70	40	30	60	50	

6) Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j , по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_2 = 2$; $0 + v_2 = 2$; $v_2 = 2$

$u_3 + v_2 = 1$; $2 + u_3 = 1$; $u_3 = -1$

$u_3 + v_1 = 2$; $-1 + v_1 = 2$; $v_1 = 3$

$u_3 + v_5 = 2$; $-1 + v_5 = 2$; $v_5 = 3$

$u_2 + v_5 = 5$; $3 + u_2 = 5$; $u_2 = 2$

$u_2 + v_3 = 3$; $2 + v_3 = 3$; $v_3 = 1$

$u_2 + v_4 = 4$; $2 + v_4 = 4$; $v_4 = 2$

	$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=1$	$v_4=2$	$v_5=3$
$u_1=0$	4	2[20]	5	7	6
$u_2=2$	7	8	3[30]	4[60]	5[20]
$u_3=-1$	2[70]	1[20]	4	3	2[30]

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \leq c_{ij}$.

Минимальные затраты составят: $F(x) = 2*20 + 3*30 + 4*60 + 5*20 + 2*70 + 1*20 + 2*30 = 690$

Задача 4

Составить опорный план (любым из методов опорного плана), проверить его на оптимальность и множественность.

$B_j \backslash A_i$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	8	4	6	3	120
A_2	3	2	5	2	6	30
A_3	6	5	8	7	4	40
A_4	3	4	4	2	1	60
b_j	30	90	80	20	30	250

Решение:

1)Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	2	8	4	6	3	120
A2	3	2	5	2	6	30
A3	6	5	8	7	4	40
A4	3	4	4	2	1	60
Потребности	30	90	80	20	30	

2)Получим 1 опорный план:

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	2[30]	8[10]	4[80]	6	3	120
A2	3	2[30]	5	2	6	30
A3	6	5[40]	8	7	4	40
A4	3	4[10]	4	2[20]	1[30]	60
Потребности	30	90	80	20	30	

3) Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j . по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$$u_1 + v_1 = 2; 0 + v_1 = 2; v_1 = 2$$

$$u_1 + v_2 = 8; 0 + v_2 = 8; v_2 = 8$$

$$u_2 + v_2 = 2; 8 + u_2 = 2; u_2 = -6$$

$$u_3 + v_2 = 5; 8 + u_3 = 5; u_3 = -3$$

$$u_4 + v_2 = 4; 8 + u_4 = 4; u_4 = -4$$

$$u_4 + v_4 = 2; -4 + v_4 = 2; v_4 = 6$$

$$u_4 + v_5 = 1; -4 + v_5 = 1; v_5 = 5$$

$$u_1 + v_3 = 4; 0 + v_3 = 4; v_3 = 4$$

	$v_1=2$	$v_2=8$	$v_3=4$	$v_4=6$	$v_5=5$
$u_1=0$	2[30]	8[10]	4[80]	6	3
$u_2=-6$	3	2[30]	5	2	6
$u_3=-3$	6	5[40]	8	7	4
$u_4=-4$	3	4[10]	4	2[20]	1[30]

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$

(1;5): $0 + 5 > 3$; $\Delta_{15} = 0 + 5 - 3 = 2 > 0$

4 Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;5): 3

Для этого в перспективную клетку (1;5) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	1	2	3	4	5	Запасы
1	2[30]	8[10][-]	4[80]	6	3[+]	120
2	3	2[30]	5	2	6	30
3	6	5[40]	8	7	4	40
4	3	4[10][+]	4	2[20]	1[30][-]	60
Потребности	30	90	80	20	30	

5) Цикл приведен в таблице (1,5 \rightarrow 1,2 \rightarrow 4,2 \rightarrow 4,5).

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $y = \min(1, 2) = 10$.

Прибавляем 10 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 10 из x_{ij} , стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	2[30]	8	4[80]	6	3[10]	120
A2	3	2[30]	5	2	6	30
A3	6	5[40]	8	7	4	40
A4	3	4[20]	4	2[20]	1[20]	60
Потребности	30	90	80	20	30	

7) Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i , v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$$u_1 + v_1 = 2; 0 + v_1 = 2; v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 4; 0 + v_3 = 4; v_3 = 4$$

$$u_1 + v_5 = 3; 0 + v_5 = 3; v_5 = 3$$

$$u_4 + v_5 = 1; 3 + u_4 = 1; u_4 = -2$$

$$u_4 + v_2 = 4; -2 + v_2 = 4; v_2 = 6$$

$$u_2 + v_2 = 2; 6 + u_2 = 2; u_2 = -4$$

$$u_3 + v_2 = 5; 6 + u_3 = 5; u_3 = -1$$

$$u_4 + v_4 = 2; -2 + v_4 = 2; v_4 = 4$$

	$v_1=2$	$v_2=6$	$v_3=4$	$v_4=4$	$v_5=3$
$u_1=0$	2[30]	8	4[80]	6	3[10]
$u_2=-4$	3	2[30]	5	2	6
$u_3=-1$	6	5[40]	8	7	4
$u_4=-2$	3	4[20]	4	2[20]	1[20]

- 8) Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \leq c_{ij}$.
Минимальные затраты составят: $F(x) = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 20 = 810$