

**МИНОБР НАУКИ РОССИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ "ВОРОНЕЖСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"**

**Факультет прикладной математики, информатики и
механики. Кафедра математического и прикладного
анализа. Направление 01.03.02 - Прикладная математика и
информатика.**

**Отчет по учебной практике по получению первичных
профессиональных умений и навыков проектной и
производственно-технологической деятельности
студента 1 курса факультета
Прикладной математики, информатики и механики
Якимов Алексея Сергеевича**

Срок прохождения практики 06.07.2023 - 19.07.2023

Выполнил
Руководитель от кафедры

Якимов Алексей Сергеевич
д.ф.-м.н., проф. Половинкин И.П.

Воронеж 2023

План работы

Заданный интеграл:

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy$$

Основные задачи:

- Точное вычисление интеграла и нахождение его значения
- Описание программного вычисления примерного значения интеграла
- Анализ погрешности полученных значений при разных разбиениях

Точное вычисление интеграла

Вычисление:

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy \quad (1)$$

где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$;

Область D представляет собой круг радиусом 3;

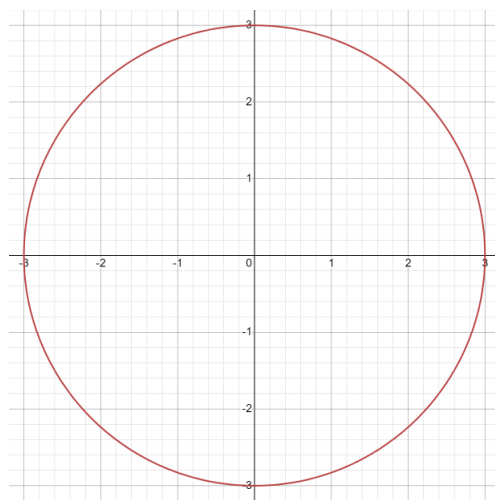


Рис. 1: Область D

Подынтегральное выражение задаёт функцию:

$$\operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 > 4 \\ 0 & x^2 + y^2 = 4 \\ -1 & x^2 + y^2 < 4 \end{cases} \quad (2)$$

Область D разбивается на две области. На внутренней области (обозначена синим цветом) функция принимает значение -1, на внешней (обозначена красным цветом) функция принимает значение 1.

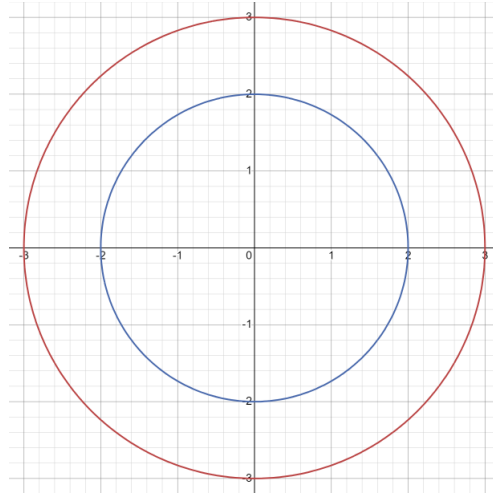


Рис. 2: Разбиение D функцией sgn

Интеграл (1) эквивалентна интегралу

$$\iint (-1) dx dy \quad (3)$$

при $x^2 + y^2 \leq 4$, или интегралу

$$\iint (1) dx dy \quad (4)$$

при $x^2 + y^2 \geq 4$ и $x^2 + y^2 \leq 9$. Вычислим интеграл (3):

$$\int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (-1) dx = \int_{-2}^2 (-x) \Big|_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy = - \int_{-2}^2 (\sqrt{4-y^2} - (-\sqrt{4-y^2})) dy = - \int_{-2}^2 2\sqrt{4-y^2} dy$$

Заменим $y = 2 \sin t$, тогда $dx = 2 \cos t dt$,

$$\begin{aligned} -2 \int_{-2}^2 2 \cos t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} dt &= -4 \int_{-2}^2 \cos t \sqrt{4 \cos^2 t} dt = -4 \int_{-2}^2 2 \cos^2 t dt = -4 \int_{-2}^2 2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= -4 \int_{-2}^2 1 dt - 4 \int_{-2}^2 \cos 2t dt = -4 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \\ &= -4 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{\sin (2 \arcsin (\frac{x}{2}))}{2} \right) \Big|_{-2}^2 = -4\pi; \end{aligned}$$

Вычислим значение следующего интеграла:

$$\int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (1) dx = \int_{-3}^3 (x) \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^3 (\sqrt{9-y^2} - (-\sqrt{9-y^2})) dy = \int_{-3}^3 2\sqrt{9-y^2}$$

Заменим $y = 3 \sin t$, тогда $dx = 3 \cos t dt$,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-3}^3 3 \cos t \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} dt &= 6 \int_{-3}^3 \cos t \sqrt{9 \cos^2 t} dt = 6 \int_{-3}^3 3 \cos^2 t dt = 18 \int_{-3}^3 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= 9 \int_{-3}^3 1 dt + 9 \int_{-3}^3 \cos 2t dt = 9 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \\ &= 9 \left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{\sin (2 \arcsin (\frac{x}{3}))}{2} \right) \Big|_{-3}^3 = 9\pi; \end{aligned}$$

Найдём значение интеграла (4):

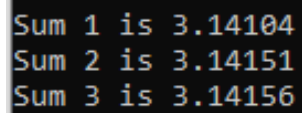
$$9\pi - 4\pi = 5\pi;$$

Теперь вычислим интеграл (1), сложив значения интеграла (3) и (4):

$$5\pi - 4\pi = \pi;$$

Приближенное значение интеграла

Теперь представим вычисление примерного значения интеграла на языке программирования C++.



```
Sum 1 is 3.14104  
Sum 2 is 3.14151  
Sum 3 is 3.14156
```

Рис. 3: Вывод ответа на консоль

```

#include <iostream>
using namespace std;

int sgn(double x, double y)
{
    if ((x * x + y * y - 4) > 0)
        return 1;

    else {
        if ((x * x + y * y - 4) < 0)
            return -1;

        else
            return 0;
    }
}

double integral(double split)
{
    double sum = 0;
    double x1 = -3, x2 = 3;
    double y1 = -3, y2 = 3;
    double xsplit = (x2 - x1) * split;
    double ysplit = (y2 - y1) * split;
    for (double x = x1; x <= x2; x += xsplit)
    {
        for (double y = y1; y <= y2; y += ysplit)
        {
            if ((x * x) + (y * y) <= 9)
                sum += xsplit * ysplit * sgn(x, y);
        }
    }
    return sum;
}

int main()
{
    double split = 0.0005;
    double num = integral(split);
    cout << endl << "Sum 1 is " << num;

    split = 0.0001;
    num = integral(split);
    cout << endl << "Sum 2 is " << num;

    split = 0.00005;
    num = integral(split);
    cout << endl << "Sum 3 is " << num;
}

```

Рис. 4: Код программы

Разберём работу программы.:

- ф-я `sgn`, описывает подинтегральное выражение, возвращающая значение -1, 0, 1, в зависимости от значения.;
- ф-я `integral`, производящая вычисление интеграла с помощью двух циклов. Введённая переменная сум вычисляется путём:

$$\xi = d_x * d_y * sgn(x, y),$$

где d_x и d_y - диаметры разбиения по оси x и y .

Видно, что результат вычисления зависит от диаметра разбиения. Если диаметр будет достаточно мал, то вычисление получится точным.

Вычисление погрешности

Вычислим погрешность

$$\varepsilon = \left| \frac{E_P - E_T}{E_T} \right| \times 100\% \quad (5)$$

E_P - приближенное значение, а E_T - точное.

Погрешность для наименьшего диаметра разбиения результатов:

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{3,14156 - \pi}{\pi} \right| \times 100\% = 0.001\% \quad (6)$$

Так, значение при приближенном вычислении мало отличается от точного.

Литература

- [1] Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин - "Квадратные и кубатурные формулы"
- [2] Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов, В.И.Чехлов, М.И.шабунин - "Сборник задач по матю анализу. 3 том"
- [3] И.А.Виноградова, С.Н.Олехние, В.А.Садовничий - "Мат.анализ в задачах и упражнениях"
- [4] С.М.Львовский - "Набор и верстка в системе L^AT_EX"
- [5] "LaTeX/Управление библиографией"
[https://ru.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Управление библиографией](https://ru.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Управление_библиографией)
- [6] А.В.Кузнецов"Основы LaTeX"
<http://tug.ctan.org/info/russian/basiclatex-ru/BasicLatex.pdf>

Приложение

```
#include <iostream>
using namespace std;

int sgn(double x, double y)
{
    if ((x * x + y * y - 4) > 0)
        return 1;

    else {
        if ((x * x + y * y - 4) < 0)
            return -1;

        else
            return 0;
    }
}

double integral(double split)
{
    double sum = 0;
    double x1 = -3, x2 = 3;
    double y1 = -3, y2 = 3;
    double xsplit = (x2 - x1) * split;
    double ysplit = (y2 - y1) * split;
    for (double x = x1; x <= x2; x += xsplit)
    {
        for (double y = y1; y <= y2; y += ysplit)
        {
            if ((x * x) + (y * y) <= 9)
                sum += xsplit * ysplit * sgn(x, y);
        }
    }
    return sum;
}

int main()
{
    double split = 0.0005;
    double num = integral(split);
    cout << endl << "Sum 1 is " << num;
```

```
split = 0.0001;
num = integral(split);
cout << endl << "Sum 2 is " << num;

split = 0.00005;
num = integral(split);
cout << endl << "Sum 3 is " << num;
}
```

Консоль вывода:
Sum 1 is 3.14104
Sum 2 is 3.14151
Sum 3 is 3.14156