**21. Компактное и предкомпактное метрическое пространство (подпространство). Примеры. Компактность конечного множества. Ограниченность предкомпактного множества. Предкомпактность ограниченного множества в En и Rnmax. Некомпактность единичного шара в l2.**

*Метрическое Пространство(МП)* называется **компактным**, если любая последовательность точек содержит фундаментальную подпоследовательность.

Подмножество МП называем компактом, если оно образует компакт в индуцированной метрике.(В этом случае любая бесконечная последовательность его элементов содержит подпоследовательност, сходящуюся к элементу этого множества).

Множество называют **предкомпактным** (в узком смысле), если его замыкание – компакт. В этом случае любая бесконечная последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность, однака предел не обязательно является элементом этого множества. МП называется **предкомпактным**(в широком смысле), если любая бесконечная последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.

Замечание: такое определение на топологических пространствах не обобщается, поскольку в них нет понятия фундаментальной (Коши) последовательности.

Замечание. Другой вариант терминологии: предкомпактное (в широком смысле) МП (или множество) называем компактным МП (или множеством), при этом отличая его от компакта.»

**Примеры**: 1) МП Х состоящее из конечного числа точек – компактное.(***Компактность конечного множества***) 2) отрезок [a,b] в пространстве E1 – компактное и предкомпактное множество. 3) интервал (a,b) – не компактное, но предкомпактное множество, так как его замыкание [a,b] компактно.. 4) n не компактно при любом натуральном n, т.к. множество всех возможных натуральных чисел бесконечно, но не содержит фундаментальной подпоследовательности.

**Ограниченность предкомпактного множества**. Если метрическое пространство компактное, то оно полное и вполне ограничееное (обратное утверждение также верно). *Докажем ограниченность*: каждую точку покроем шаром Из компактности следует, что существует конечное число точек таких, что шары покрывают множество M. Очевидно, что эти точки образуют конечную -сеть для множества M.

**Предкомпактность ограниченного множества в En и Rnmax**. Множество в , описываемое неравенствами называется параллелепипедом и является компактным (обозначение: ). Доказательство: последовательность .Числовая последовательность первых координат этих элементов содержит сходящуюся подпоследовательность Подпоследовательность n-тых координат этих элементов, относящихся к элементам, выбранным на (n-1) шаге, содержит сходящуюся подпоследовательность и полученная в результате последовательность и принадлежит . Компактность . Аналогично предыдующему возьмем последоваетльность элементов из A – онграничено, значит любой лежит в пределах некоторого интервала [], а значит выделим компонентой, элементы со сходящейся второй, ...(до n), получим последовательность с покомпонентной сходимостью, которая сходится в .

**Некомпактность единичного шара в l2.** аРассмотрим замкнутый шар в пространстве . С центром в точке и радиусом 1, т.е. множество таких последовательностей действительных чисел, что . Множество не является компактным и, тем более, не является предкомпактным. Действительно, последовательность , где 1 стоит на n-ом месте, не содержит никакой фундаментальной подпоследовательности, т.к. , при . Не компактно даже подмножество элементов, удоавлетваояющих условию .

**22. Ограниченность непрерывного на компакте функционала.**

*Теорема. Непрерывный функционал на компакте ограничен.  
Пусть X – компакт, - непрерывный функционал. Установим, что он ограничен. Доказательство от противного. Пусть функционал неограничен, тогда . Это значит, что последовательность {} – бесконечно большая числовая последовательность, и таковы же все ее подпоследовательности. Поскольку X – компакт, у последовательности {} найдется сходящаяся подпоследовательность {}, предел которой обозначим . Тогда в силу непрерывности (по Гейне-Борелю) получаем: . Но сходящаяся последовательность ограничена, что противоречит тому, что она должна быть бесконечно большой. Доказано.*

*Теорема. Непрерывный оператор на компакте ограничен.*  
Ограниченность оператора на компакте – это ограниченность множества его значений. Это множество ограничено в Y, если ограничено числовое ммножество значений расстояния от элементов множества до произвольного фиксированного элемента . Последнее означает ограниченность множества значений функционала . Функционал непрерывен как композиция непрерывного отображения F и неперывного в Y функционала (относительно первого аргумента). По доказанной выше теореме он ограничен, откуда и вытекает ограниченность F.

**23. Достижение верхней и нижней граней значений непрерывным на компакте функционалом.**

Теорема. Верхняя и нижняя грани множества значений непрерывного функционала на компакте достигаются.  
Иными словами, существует такие элементы компакта, значения функционала на которых совпадают с супремумом и инфимумом(которые, таким образом, становятся максимумом и минимумом). Еще раз подчеркнем, что пустое множество мы исключили из рассмотрения. Доказательство проведем для sup(c inf аналогично). В силу доказанной выше теоремы, . Тогда существует максимизирующая последовательность {}:. К этому же пределу стремятся значения на любой подпоследовательности. Поскольку X – компакт, найдется сходящаяся подпоследовательность , где -ее предел. В силу непрерывности , . С другой стороны, . Поэтому . Доказана.  
Следствие. Если функционал на компакте не достигает сваоей верхней(нижней) грани, то функционал не является непрерывным.  
Следствие. Если верзняя или нижняя грань множества значений непрерывного функционала на МП X не достигается, то X – не компакт.

**24.Равномерная непрерывность непрерывного на компакте функционала.**

Теорема. Функционал, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен.  
Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда .Рассмотрим числовую последовательность и соответствующие ей последовательности . В силу первого условия эти последовательности эквивалентны, тогда эквивалентны и любые их подпоследовательности, отвечающие одинаковым наборам индексов.

Поскольку X — компакт, у последовательности найдётся сходящаяся подпоследовательность , предел которой обозначим . Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности (с теми же индексами) тоже сходится к тому же пределу. Тогда в силу непрерывности f (по теореме Гейне–Бореля),

и , откуда ,  
что противоречит неравенству . Теорема доказана.

Теорема. Оператор, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен. Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда . Рассмотрим числовую последовательность и соответствующие ей последовательности . Поскнольку Х -компакт, у последовательности {} найдется сходящаяся подпоследовательность {}, предел которой обозначим . Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности {} (с теми же индексами) сходится к тому же пределу. Тогда в всилу непрерывности F (по Гейне-Борелю), и , откуда , что противоречит неравенству . Теорема Доказана.

**25.Понятие ε-сети, полная ограниченность и критерий Хаусдорфа предкомпактности метрического пространства. Следствие из критерия (о компактной ε-сети).**

**Понятие ε-сети.** Пусть (X,) – метрическое пространство, и . Подмножество называется ε-сетью для Y, если для каждого найдется такой , что . Если Y=X, то S называется ε-сетью в Х. **Теорема(Критерий ...).** Множествоо компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено, т.е. для того, чтобы метрическое пространство было компактно, нужно чтобы существовала конечная ε-сеть . Доказательство: Пусть А - не вполне ограниченное, т.е. не найдется конечный набор шаров. Пусть – произвольный, тогда , т.к. в противном случае образовывал бы -сеть. Эту операцию можно повторять, таким образом нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, а значит множество не компактно. Достаточность: Пусть конечная -сеть, пространтво вполне ограничено, последовательность монотонно стремится к нулю. Каждый элемент последовательности окружим шашром радиуса , т.к. число шаров конечно, а число элементов бесконечно, в каком-то шаре содержится бесконечное число элементов, далее будем рассматривать только их. Возьмем какой-то, , оставим только элементы, номера которых больше и которые лежат в , выберем и построим -сеть на выбранных элементах. Эту операцию можно повторять бесконечное долго. Таким образом, получим -фундаментальную последовательность, т.е. , значит множество компактно.  
**Следствие:** Пусть А: найдется компактная -сеть, тогда А – компактно. Доказательство: А – исходное множество, B – конечная -сеть для А, С – конечная -сеть для B, тогда C – Конечная -сеть для А.

**26.Равностепенная непрерывность множества функций. Достаточные условия равностепенной непрерывности. Достаточное условие отсутствия равностепенной непрерывности.**

**Равностепенная непрерывность семейства функций** на множестве (равномерная равностепенная непрерывность): . Здесь снова главное – это независимость от выбранной функции. Обычно, когда говорят о равностепенной непрерывности, имеют в виду именно это свойство.   
Утверждение: Конечное семейство равномерно непрерывных отображений равностепенно непрерывно. **Достаточное условие равностепенной непрерывности** – равномерная липшицевость (с L, общими для всего семейства). **Если** , то **достаточное условие равностепенной непрерывности** – Равномерная ограниченность производных.

**27. Предкомпактность множества функций в пространстве C[a,b] (теорема Арцела-Асколи). Необходимость.**

**Теорема Арцела-Асколи** (критерий предкомпактности в C[a,b]). Множество функций предкомпактно в C[a,b] тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Замечание: Равномерная ограниченность множества непрерывных функций – это ограниченность этого множества в МП C[a,b].  
**Необходимым условием** предкомпактности множества является его ограниченность отсюда первое свойство. Докажем равностепенную непрерывность. Воспользуемся -приемом. По критерию Хаусдорфа если множество предкомпактно, то для него найдется конечная -сеть . Т.е. . Инымы словами, . Функции, входящие в сеть, непрерывны на отрезке следовательно, они равномерно непрерывны (по теореме Кантора). Было доказано: конечное множество равномерно непрерывных функций равностепенно непрерывно. Тогда . Отсюда . Равностепенная непрерывность доказана (т.к. зависит лишь от и не зависит от выбора функции ).

**28. Предкомпактность множества функций в пространстве C[a,b] (теорема Арцела-Асколи). Достаточность.**

**Теорема Арцела-Асколи** (критерий предкомпактности в C[a,b]). Множество функций предкомпактно в C[a,b] тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Замечание: Равномерная ограниченность множества непрерывных функций – это ограниченность этого множества в МП C[a,b].  
**Достаточность.**  В предположении, что множество Q равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, мы по построим предкомпактную -сеть, что и будет означать предкомпактность самого множества (по следствию из критерию Хаусдорфа). Множество Q равномерно ограничено: Множество Q равностепенно непрерывно: . Разобьем [a,b] на n равных участков длиной . Сетка Сеточная функция . При этом для справедливо неравенство , поскольку . В частности, . Покажем, что множество Y кусочно-лиенйных функций (непрерывных на [a,b] и линейных на каждом из отрезков ), не превосходящих по модулю М, является -сетью для Q. Для этого сопоставим каждой функции соответствующую функцию – линейный интерполяционный сплайн – по правилу: , при этом . Для линейной нп функции , поэтому . Отсюда вытекает, что , т.е. Y – -сеть для Q. Осталось показать, что множество Y предкомпактно. Для этого убедимся, что оно является изометрической копией куба со стороной 2M в пространстве . Действительно, пусть , тогда . На каждом из отрезков функция y(t)-z(t) линейна, ее наибольшее и наименьшее значения достигается на границах отрезка и, следовательно, ее модуль достигает наибольшего значения также на одном из концов отрезка. Следовательно, , где – векторый пространства , представляющие соответствующие кусочно-линейные функции. Поскольку все координаты не превосходит по модулю M, множество Y изометрически отображается в куб с ребром 2M. Как установлено выше, этот куб, как и любое ограничеенок множество в , предкомпактен (и даже компактен в силу замкнутости), поэтому предкомпактно и множество Y – его изометрическая копия. Таким образом, для произвольного у множества Q найдется предкомпактная -сеть, а потому и само множество Q предкомпактно. Замечание. Как указано выше, множества, предкомпактные в C[a,b], предкомпактны и в простравнствах с интегральной метрикой.

**29. Определение и свойства линейного пространства. Линейное подмножество линейного пространства (линеал). Линейная оболочка множества элементов линейного пространства.**

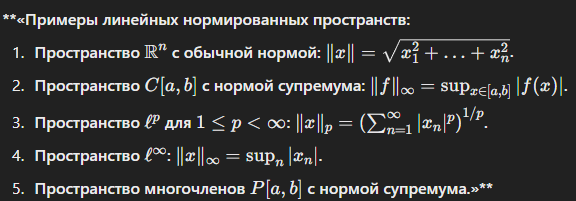
X – Множество, элементы(векторы) обозначаем латинскими буквами. Закон внутренной композиции(сложение элементов) . Коммутативная Группа: 1.(коммутативность сложения). 2. (ассоциативность сложения) 3. (существование нейтрального по сложению элемента – нуля пространства). 4. (существование для каждого элемента множества обратного (противоволожного) по сложению элемента). Следствия(Свойства) – доказать: а) , б. Более сильное свойство: , в) Единственность противополжного элемента: Обозначение: x=(-a), г) Существование и единственность разности: Обозначение: x=b-a.   
Поле (в основном будет , иногда ). Элементы(числа) обозначаем греческими буквами. Закон внешней композиции(умножение элемента на число) (точку обычно опускают). 5. , нейтральный элемент по умножению в поле). 6. (ассоциативность умножения). 7.. 8.. Множество Х с заданными законами внутренней и внешней композиции, удовлетворяющими восьми перечисленным аксиомом(на самом деле одна лишняя) называется **линейным пространством (ЛП)** на полем . – линеал, если (замкнутость множества относительно линейных операций – сложения и умножения на число). Непустое подмножество L’ линейного пространства L называется подпространством, если оно само является ЛП по отношению к операциям сложения и умножения на скаляр в , т.е. если . **Линейной оболочкой** системы векторов называется множество всевозможных комбинаций этих векторов: . Наименьший линеал, содержащий Q. Линейная оболочко линеала – он сам.

**30. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности. Бесконечномерные линейные пространства.**

Элементы линейного пространства L называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа . не все равные нулю, что . В противном случае эти элементы эти елементы называются линейно независимыми. Бесконечная система элементов x1,…,xn,… называется **линейно независимой**, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Линейные пространства L1 и L2 над полем K называется **изоморфными** (), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие , согласованное с операциями сложения векторов и умножения на скаляр в этих пространствах. Это означает, что . Если в пространстве L можно найти n линейно независимых векторов, а любые n + 1 элементов линейно зависимы, то говорят, что пространство имеет **размерность** n (dimL=n). Если же в L можно указать систему, состоящую из произвольного числа линейно независимых элементов, то говоря, что пространство L **бесконечномерно**. **Базисом** в n-мерном пространтсве называется любая система, состоящая из n линейно независимых векторов.

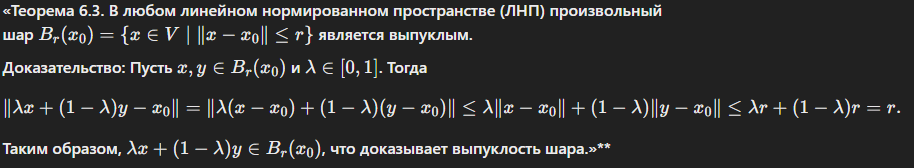
**31. Линейные нормированные пространства (ЛНП). Метрика, порождённая нормой. Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на число. Подчинённость и эквивалентность норм для ЛНП с одинаковыми носителями. Различные типы сходимости последовательностей непрерывных функций на отрезке. Полные (банаховы) и неполные ЛНП. Сепарабельные и несепарабельные ЛНП. Примеры.**

Однозначная неотрицательная функция ‖ ‖, заданная на линейном пространстве , называется нормой, если 1) ||x|| = 0 в том и только том случае, когда x = 0; 2) ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y|| для всех x, y ∈ L (неравенство треугольника); 3) для всех x ∈ L и ∈ R (положительная однородность). Линейное пространство с нормой ‖. ‖ называется **нормированным пространством**. Всякое нормированное пространство L является метрическим пространством с метрикой . Доказательство немедленно вытекает из определения нормы. Утверждение: в ЛНП операции сложения и умножения на число непрерывны. Доказательство: при n→ ∞. В силу неравенства ||.Норма называется **подчинённой норме**, если существует такое число a > 0,что . Две нормы называются **эквивалентными**, если существуют такие числа a, b , что *.*Различные типы сходимости на последовательностей непрерывных функций наотрезке: "просто сходимость", поточечная, по норме, равномерная…Любое конечномерное линейное нормированное пространство - полное.Доказательство:Полное нормированное пространство называется банаховым.

**

**32. Выпуклость подмножеств линейного пространства. Выпуклость произвольного шара в линейном нормированном пространстве (ЛНП). Выпуклость функционалов и неравенство Йенсена. Достаточное условие выпуклости функции одной переменной. Выпуклость функционала нормы в ЛНП.**

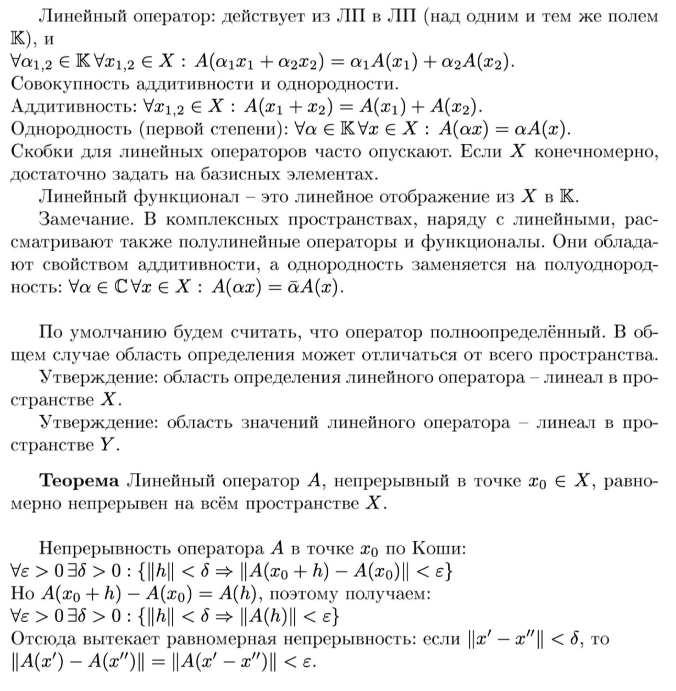
Отрезок, соединяющий x и y: Множество называется **выпуклым**, если со своими двумя элементами оно содержит отрезок, содержащий эти элементы (для любой пары принадлежащих ему точек). Пересечение выпуклых множеств - выпуклое множество.

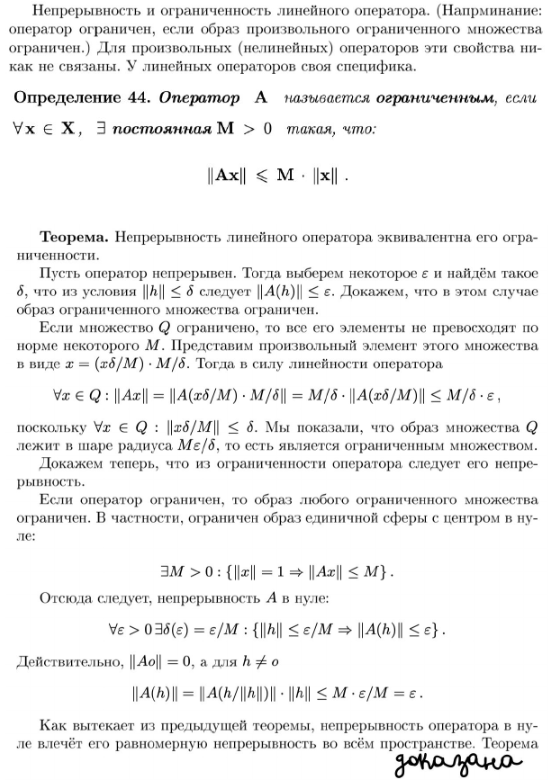


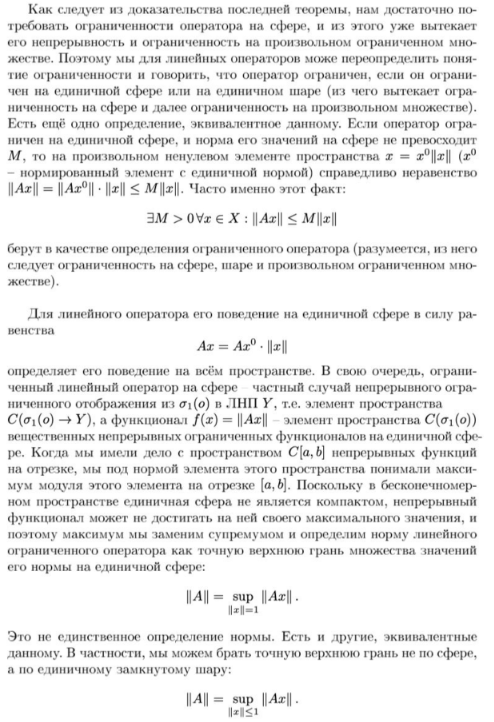
I suppose, eto Sr instead of Br **Функционал** - числовая функция линейного пространства f:X → ℝ, ℂ. График - пара {(x,f(x))} или {(x,y): y=f(x)}. Надграфик {(x , y): y ≥ f(x)}. Функционал называется **выпуклым** (вниз) если у него выпуклый надграфик (выпуклый вниз - если выпукло {(x ,y ): y≤ f(x)}). Если функционал выпуклый вниз, то справедливо **неравенство Йенсена**: . Вывод: . Тогда надграфику, т.е. . (необходимое и достаточное условие длявыпуклости вниз).

**Необходимое и достаточное условие** для выпуклости вверх: . Рассмотрим функционал "Норма": ||x||:X →: 1) ∀x∈X: ||x|| ≥ 0, ||x|| = 0⟺ x = 0 Замечание: ||x|| = 0⟸ x = 0 - преднорма. 2) положительная однородность: ;3) неравенство треугольника: ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y||**Линейное нормированное пространство** (ЛНП) - линейное пространство с заданнойна нём нормой. В нём определены понятия модуля и расстояния.Если есть линейное нормированное пространство, в нём определяется метрика, удовлетворяющая аксиомам: 1) из (2), где = −1; 3) (x,z) =||x-z|| = ||(x −y) + (y − z)|| ≤ ||x−y|| + ||y – z|| = (x,y) + (x,z). Т.е. ЛНП – метрическоепространство.

**33. Линейные отображения линейных пространств (операторы, функционалы), их области определения и области значений. Эквивалентность непрерывности линейного отображения линейного нормированного пространства (ЛНП) в одной точке и равномерной непрерывности во всём пространстве.**

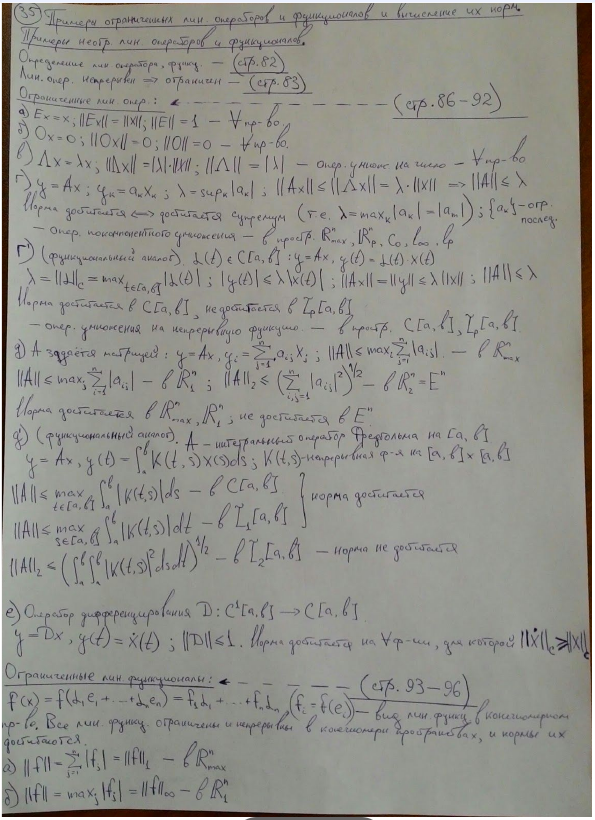
****

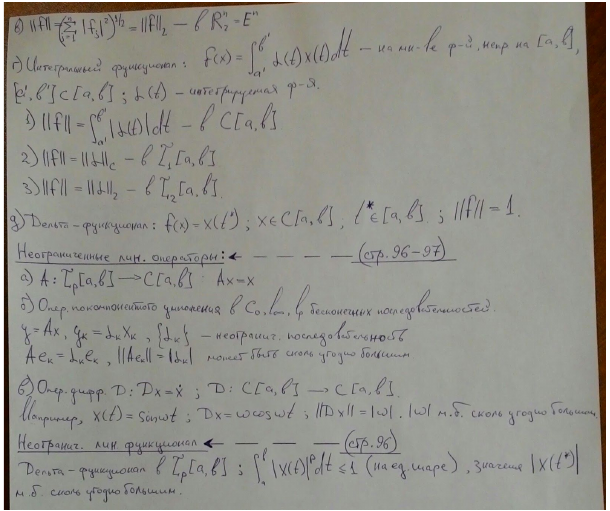
**34. Ограниченные линейные отображения (операторы, функционалы) линейных нормированных пространств (ЛНП). Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного отображения ЛНП. Норма функционала и оператора, эквивалентность различных определений нормы. Оценка нормы оператора (функционала) через его значения на произвольном шар**

****

****

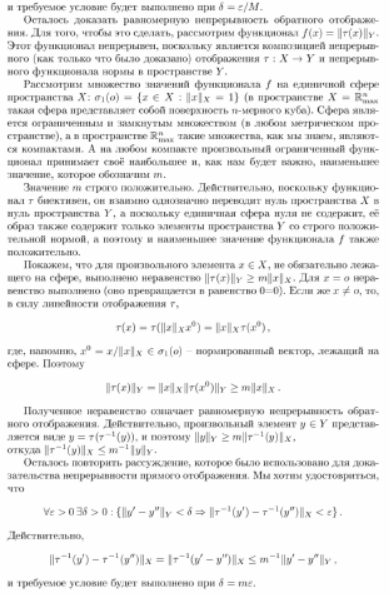
**35.Примеры ограниченных линейных операторов и функционалов и вычисления их норм. Примеры неограниченных линейных операторов и функционалов.**

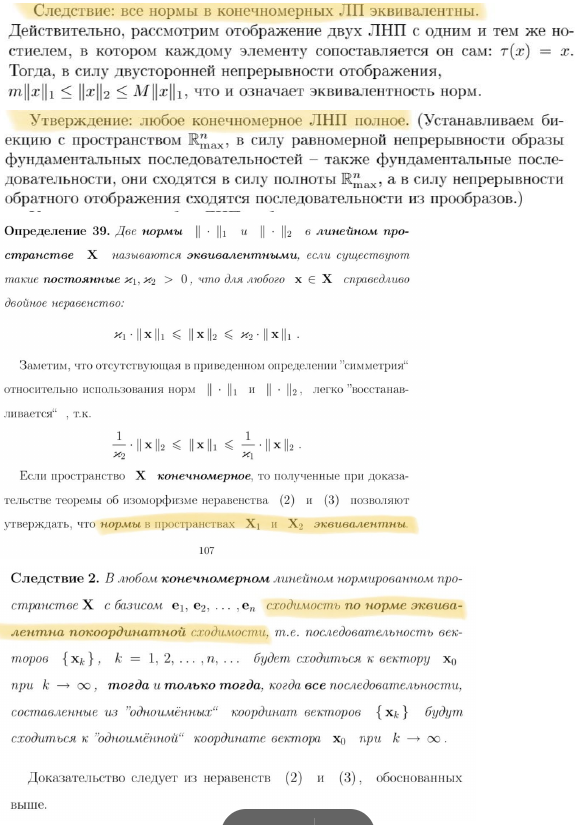
  
It said primeri so here it is

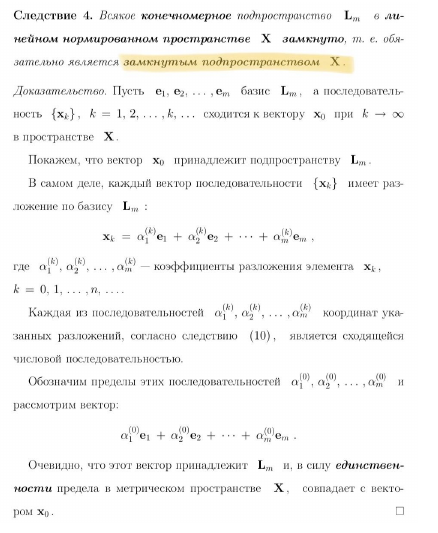


**36.Непрерывность линейных отображений конечномерных линейных нормированных пространств (ЛНП). Изоморфизм конечномерных ЛНП одинаковой размерности. Полнота конечномерных ЛНП и замкнутость конечномерных подпространств. Покомпонентная сходимость последовательности элементов конечномерного ЛНП и сходимость по норме, их эквивалентность. Эквивалентность всех норм в конечномерном ЛНП.**

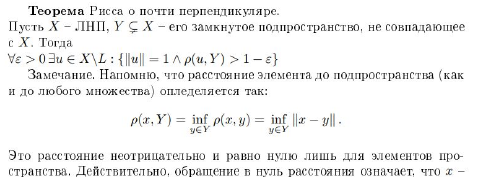
****

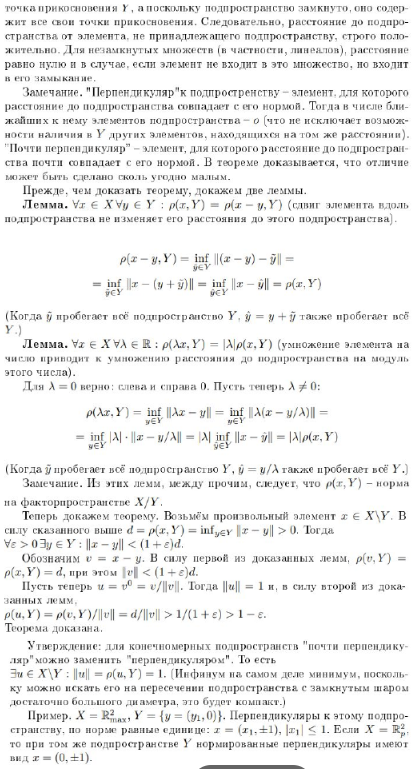
****

****

****

**37. Теорема Рисса о почти перпендикуляре. Модификация теоремы для случая конечномерного подпространства.**

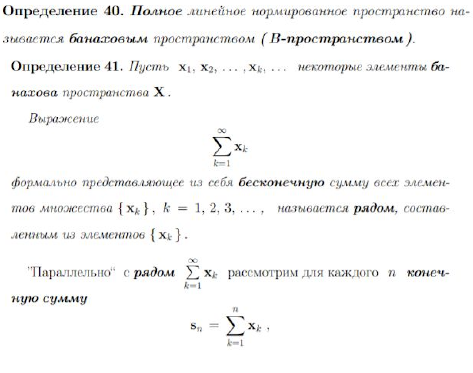
****

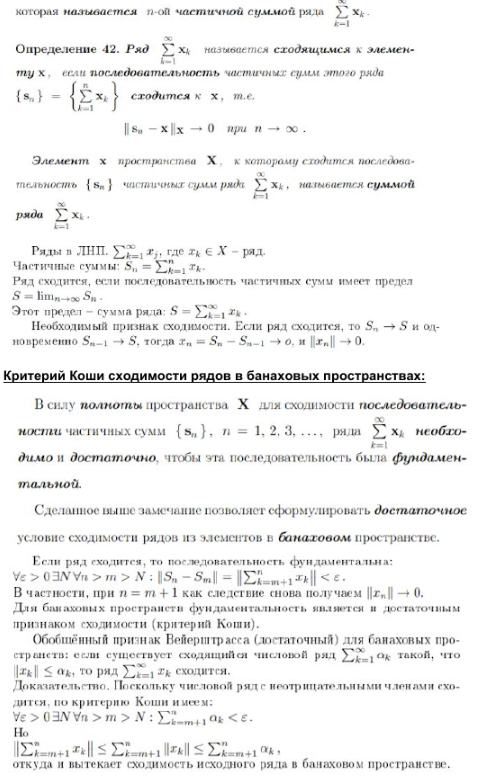
****

**38. Связь конечномерности пространства и предкомпактности всех его ограниченных подмножеств.**

****

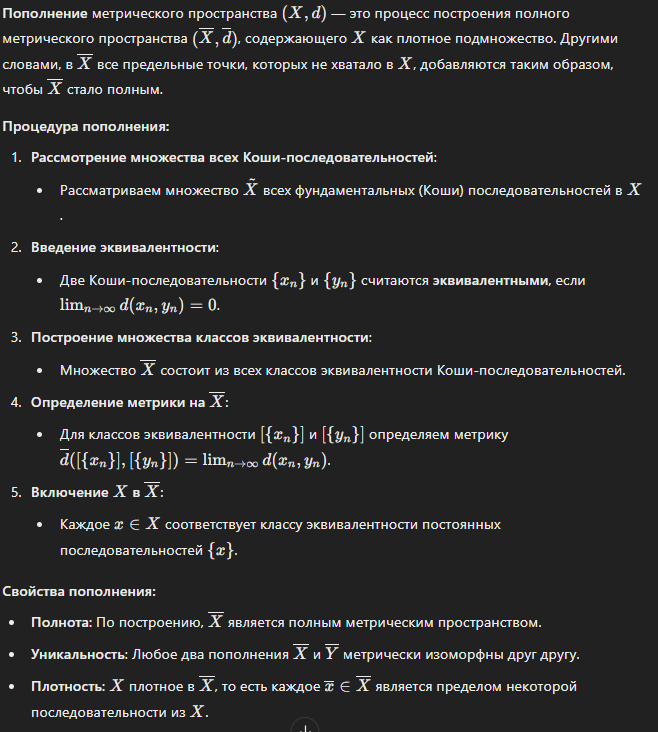
**39. Ряды в линейных нормированных пространствах. Сходимость ряда, его сумма. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши сходимости рядов в банаховых пространствах. Обобщённый признак Вейерштрасса сходимости рядов в банаховых пространствах.**

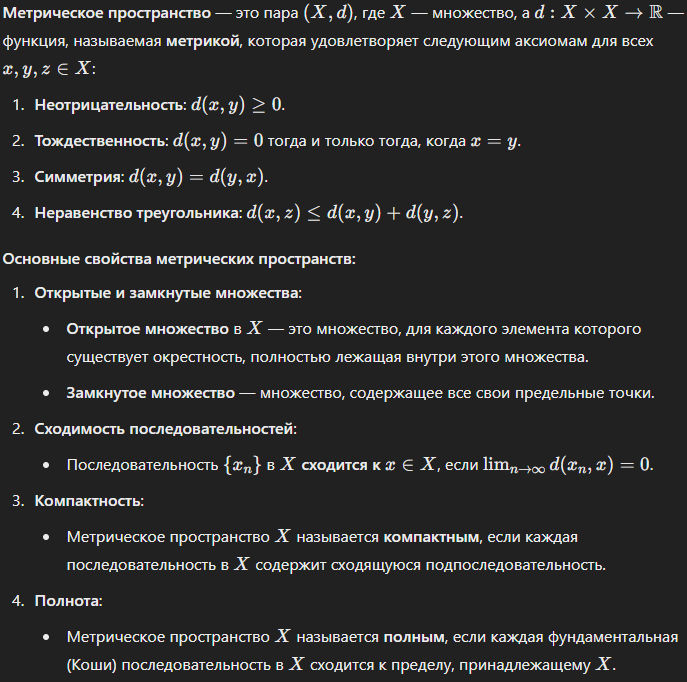
****

****

**40. Метрические пространства RФ, их свойства. Пополнение неполных пространств RФ.**

**Instead of d, this is rho.**

****

****