1. **Физические задачи, приводящие к уравнением с частными производными**: – объемное тело. K(x,y,z) – коэффициент телопроводности, c(x,y,z) – удельная теплоемкость, rho(x,y,z) – плотность тела в точке (x,y,z) , а через u(t,x,y,z) – температура тела в точке (x,y,z) в момент времени t.   
   f(t,x,y,z) – плотность внетренних источников тепла в теле омега. – работа источников тепла, – поток тепла через границу в направлении внутренней нормали. С другой стороны, где . Применив к интергалу по границе теорему Остроградского-Гаусса  
   разделив обе части которого на и перейдя к пределу при , Учитывая произвольность области , получаем отсюда уравнение распространения тепла.   
   Если тело однородно (т.е. , , – константы), то , где – оператор Лапласа, и уравнение распространения тепла преобразуется к виду.

где . Это уравнение называется **уравнением теплопроводности**.

Если g не зависит от времени, то существует стационарное распределение температуры u = u(x,y,z), удовлетворяющее, поскольку , уравнению , или Полученное уравнение называется **уравением Пуассона**(эллиптический тип).

Если внутренние источники тепла отсутствуют, то и получаем уравнение называемое **уравнение Лапласа.**

**Постановка начальных условий:** Условие , задающее распределение температуры в теле в начальный момент времени t = 0, называется начальным условием.

**Постановка краевых условий**: где   
1) – **1-я краевая задача (Дирихле)**; краевое условие задает распределение температуры на границе области ;

2) , где – внешняя нормаль к – **2-я краевая задача (Неймана)**; краевое условие задает скорость изменения температуры на границе области в направлении, нормальном к этой границе;

3) – **3-я краевая задача**; более общее условие, частными случаями которого являются условия Дирихле и Неймана.

Аналогичные краевые (или, иначе, начально-краевые) задачи ставятся для уравнения теплопроводности:

1) – 1-я краевая задача (Дирихле);

2) – 2-я краевая задача (Неймана);

3) – 3-я краевая задача.

2. **Классификация линейных уравнений второго порядка**. Линейное уравнение с частными производными 2-го порядка имеет вид:  
 Сумма слагаемых, содержащих частные производные второго порядка, называется главной частью уравнения.С главной частью связана квадратическая форма от переменных . Зафиксировав точку , приведем квадратичную форму к нормальному виду. где   
1) или – уравнение **эллиптического** типа (в точке );

2) или – уравнение **гиперболического** типа;

3) или – уравнение **параболического** типа.

Типичным представителем гиперболических уравнений является волновое уравнение

**Определение.** Будем говорить, что линейное уравнение 2-го порядка имеет канонический вид в точке , если его главная часть в этой точке где .

Понятно, что задачи приведения уравнения и соответствующей ему квадратичной формы к каноническому виду в фиксированной точке тесно связаны. Более точно: если – матрица перехода к базису, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид, то замена переменных , где – матрица, транспонированная к , приводит уравнение к каноническому виду в точке . (***У меня нет идеи, если написать их вместе или нет***)

**Приведение уравнения с двумя переменными к каноническому виду методом характеристик**. Будем говорить, что линейное уравнение 2-го порядка приведено к каноническому виду в точке , если главная часть его в этой точке имеет вид где .  
Для уравнений с двумя переменными существует способ приведения к каноническому виду сразу во всех точках области, где уравнение принадлежит к определенному типу. Этот способ называется **методом характеристик**.

**Метод характеристик.** Пусть . В этом случае линейное уравнение 2-го порядка имеет вид

Выпишем главную часть уравнения и соответствующую квадратичную форму: Выпишем матрицу квадратичной формы и составим характеристическое уравнение:

1. и разного знака – гиперболический тип;
2. и одного знака – эллиптический тип;
3. один или оба корня равны нулю – параболический тип.

**Гиперболический тип.** Составим так называемое **характеристическое уравнение: .** Это уравнение, рассматриваемое как квадратное относительно , имеет положительный дискриминант :

Пусть и – общие интегралы этих уравнений. Сделаем замену и выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым:

Подставляем в главную часть уравнения: .

Заметим, что коэффициенты при производных и в полученной формуле равны нулю. Действительно, Аналогично, . В итоге получаем: откуда после деления на приходим к виду (**Канонический вид**)  
**Эллиптический тип.** В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет отрицательный дискриминант и, соответственно, комплексно-сопряжённые корни и . Следовательно, интегралы характеристического уравнения и комплексные и, более того, комплексно сопряженные. . После замены главная часть примет вид. – канонический вид (после деления на ) уравнения эллиптического типа.  
**Параболический тип.** В случае параболического уравнения дискриминант уравнения для характеристик равен нулю, а потому имеется только один корень и, как следствие, всего один общий интеграл . , где – произвольная функция класса , независимая с . После замены главная часть примет вид. , откуда опять-таки делением на получаем канонический вид для параболического уравнения.  
**Определение. Характеристиками** уравнения называются кривые, задаваемые уравнениями , где – действительный интеграл уравнения .

Посмотрим, какие характеристики имеют уравнения рассмотренных нами типов.

1. В эллиптическом случае, как было выяснено, интегралы и комплексные. Характеристик нет.
2. В гиперболическом случае имеем два семейства характеристик: и .
3. В параболическом случае имеется всего один общий интеграл, следовательно, и одно семейство характеристик.

**3. Постановка краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона(В прямоугольнике):** Прямоугольник ; .

Рассмотрим сначала однородное уравнение и будем искать решение в виде произведения . Тогда значит для выполнения равенства при всех необходимо равенство обеих частей константе. Предположим теперь, что краевые условия на двух противоположных сторонах прямоугольника нулевые, . Тогда . Получили однородную краевую задачу для

1. , , а значит не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля.
2. *.* Составим характеристическое уравнение для уравнения :. Уравнение имеет действительные корни , откуда . Из условия получаем

а т.к. определитель системы , то и краевая задача имеет только тривиальное решение.

1. . Из краевых условий , откуда . Отсюда получаем: – собственные значения и, соответственно, – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.

После того как найдены собственные функции, мы можем найти решение **первой краевой задачи** для уравнения Пуассона. Решение будем искать в виде ряда Подставляя этот ряд в уравнение Пуассона. Разложим теперь в ряд по синусам правую часть:

Далее, подставим ряд в краевые условия: Отсюда , где . Получили для краевую задачу, имеющую единственное решение. Действительно, общее решение уравнения , а из краевых условий

если . В этом случае с помощью замены . можно добиться обнуления указанных краевых условий для новой неизвестной функции : . Разумеется, правая часть уравнения и оставшиеся краевые условия могут в результате замены измениться: , , .

**Вторая и третья краевые задачи.** Если на всех сторонах прямоугольника задана производная по нормали к границе , имеем дело с задачей Неймана. Если же на части сторон задать нормальную производную, а на остальных – саму неизвестную функцию, получим третью краевую задачу. В случае краевого условия Далее, для условия а для условия

**(В круговых областях):** При решении уравнения Пуассона в круговых областях (круг, внешность круга, кольцо, сектор круга и кольца) удобно перейти к полярным координатам: . Выясним, как записывается оператор Лапласа в полярных координатах:

Отсюда Из полученного равенства выражаем и получаем уравнение Пуассона в полярных координатах: Далее, как и в прямоугольной области, ищем решение уравнения Лапласа в виде произведения , подставляя которое в уравнение Лапласа, получаем , откуда . Рассмотрим сначала первую краевую задачу в круге : . Учитывая, что решение должно быть периодическим по , приходим к задаче Штурма-Лиувилля: Решениями этой задачи являются, очевидно, функции Далее ищем решение задачи Дирихле в виде ряда по собственным функциям: Подставив этот ряд в уравнение Пуассона, получим: Разлагая функцию в ряд Фурье: , приходим к уравнениям для коэффициентов и :

Полученные уравнения имеют общие решения , и соответственно. . Для сектора круга и кольца краевые условия следует задавать также на лучах и , и собственные функции будут отличными от указанных выше собственных функций для остальных круговых областей. Так, для условий Дирихле задача Штурма-Лиувилля имеет вид т.е. совпадает с той, которая была в случае прямоугольника

**Первая и Вторая формулы Грина для оператора Лапласа. Утверждение.** Пусть ограниченная область имеет кусочно-гладкую границу , а функции . Тогда справедлива первая формула Грина: где — единичная внешняя нормаль к границе , – вектор градиента, , .

**Доказательство.** Рассмотрим векторное полe . По теореме Остроградского–Гаусса откуда Перенося первое слагаемое из правой части в левую, приходим к требуемому равенству. Меняя местами функции и в первой формуле Грина, получим . Вычитая из одного равенства другое, получаем **вторую формулу Грина**:

1. **Фундаментальное решение уравнения Лапласа.** Фундаментальное решение уравнения Лапласа определяется как где – площадь единичной сферы в , .

**Утверждение.** Фиксируем произвольную точку . Тогда .  
**Доказательство.** , где , . Найдём частные производные фундаментального решения:

где Теперь вычислим оператор Лапласа:

**Замечание 1.** Поскольку , то для любого фиксированного .

**Замечание 2.** Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называют **гармоническими.** Таким образом, фундаментальное решение уравнения Лапласа является гармонической функцией как по переменной при , так и по переменной при .

**Представление решений уравнения Пуассона с помощью потенциалов.** **Теорема**. Пусть . Тогда для любой точки верно тождество где – внешняя нормаль к границе области .

**Доказательство**. Применим 2-ю формулу Грина для функций ( – фиксированная точка) в области , где . Получим где , – внешняя нормаль к границе области . Учитывая, что , приходим к равенству Рассмотрим интегралы Имеем: где – площадь сферы . Поскольку , Далее, когда . Следовательно,

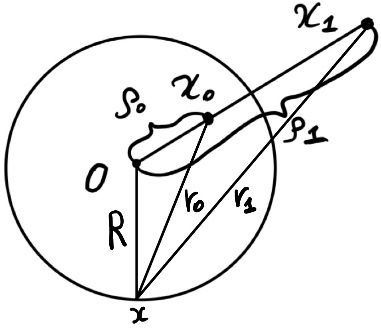
Перейдём ко второму интегралу . Имеем: где . При . Отсюда, используя теорему о среднем для интеграла, получим: где – некоторая точка. Заметим, что при , а потому . Делая предельный переход при в равенстве приходим к соотношению откуда перестановкой слагаемых получаем требуемую формулу.

**Замечание.** Полученная формула называется представлением решения уравнения Пуассона с помощью потенциалов. Если в , , , то формула перепишется в виде где первый интеграл носит название **объёмного потенциала с плотностью** , – **потенциала двойного слоя с плотностью** , – **потенциала простого слоя с плотностью** .

1. **Функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа.** Пусть для каждой

фиксированной точки – функция, удовлетворяющая условиям: . Если такая функция существует, то с её помощью можно получить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона Покажем это. Применим вторую формулу Грина для функций и : Поскольку , отсюда получаем: Вспомним формулу представления решения с помощью потенциалов: Сложим эти два тождества и, учитывая, что при , получим: где . Отметим, что полученная формула носит условный характер: если решение задачи Дирихле существует, то оно выражается через функцию с помощью этой формулы. Функция называется **функцией Грина задачи Дирихле** **для уравнения Лапласа** в области .

**Построение функции Грина для уравнения Лапласа в шаре.** Пусть – шар радиуса в пространстве , . Обозначим через точку, симметричную относительно сферы (т.е. лежит на прямой и ). Далее, обозначим , , и , где – произвольная точка замкнутого шара .

где , если , и при . Покажем, что определенная выше функция является функцией Грина. Поскольку, очевидно, , нам достаточно удостовериться, что функция удовлетворяет условиям: 1) и 2) . Проверим 1). Имеем:

Т.к. , то при всех выполняется , а потому Проверим 2). Возьмём . Заметим, что тогда (см. рисунок), т.к. в силу Следовательно, и , а значит когда . Таким образом, построенная нами функция является функцией Грина для уравнения Лапласа в шаре.

1. **Теорема о среднем значении гармонической функции по сфере :** **Не смог найти(мб есть в лекции 7 или 8)**

**Принцип максимума для уравнения Лапласа.** Теорема (принцип максимума). Пусть – ограниченная область в , и . Тогда для произвольной точки **.**

**Доказательство**: Поскольку непрерывная функция ограничена в области , то для некоторой константы . Рассмотрим положительную функцию где – число настолько малое, что ( ограничена, значит для некоторого , а потому достаточно взять ). Покажем, что . Доказательство проведем от противного. Предположим, что для некоторой точки . Тогда своего наибольшего значения в замкнутой области функция достигает в некоторой точке , а значит – точка локального максимума. Покажем, что .

Имеем: , откуда . Но по условию теоремы – пришли к противоречию. Итак, , откуда

Переходя в последнем неравенстве к пределу при , получим , следовательно , и значит .

**Следствие**. Пусть в условиях теоремы . Тогда .

**Доказательство.** Для функции в , и значит согласно теореме . Получаем: , откуда .

**Единственность решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Теорема**. Задача Дирихле имеет не более одного решения в классе .

**Доказательство**. Пусть и – два решения рассматриваемой задачи. Тогда их разность является решением однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

Поскольку в силу предыдущей теоремы и следствия из нее то , т.е. в .

1. **Непрерывная зависимость решения первой краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона от граничного условия и правой части.**

**Теорема**. Пусть ограниченная область, и . Пусть, далее, – решение класса первой краевой задачи Тогда где константа зависит лишь от области .

**Доказательство**. Выберем такое, что . Рассмотрим функцию , где . Очевидно, и . Отсюда для функции , где , а для функции , По принципу максимума , значит и, следовательно, Аналогично по следствию из принципа максимума , откуда Учитывая, что и , отсюда получим и, следовательно,

**Следствие.** Пусть и – решения класса задач Дирихле соответственно, где и . Тогда

**Доказательство.** Разность решений удовлетворяет задаче Дирихле Поэтому утверждение следствия вытекает из доказанной выше теоремы.

**Замечание.** Утверждение следствия означает непрерывную зависимость решения 1-й краевой задачи для уравнения Пуассона от правой части и краевых условий. Отметим, что задачи, обладающие свойством непрерывной зависимости решения от исходных данных, называют **корректно поставленными** или просто **корректными**.

1. **Метод разделения переменных для уравнений уравнений Лапласа и Пуассона в областях специального вида: прямоугольнике, параллелепипеда, круге, кольце. Задача Штурма-Лиувилла(Лекция 9, хз если они правильно)**

где – 1-я краевая задача (Дирихле),

– 2-я краевая задача (Неймана),

– 3-я краевая задача.

Рассмотрим сначала одномерный случай: . Как это делалось и для уравнения Пуассона, начинаем с решения однородного уравнения при нулевых краевых условиях: Ищем решение в виде произведения , откуда после подстановки в уравнение . Разделяем переменные: , получаем **задачу Штурма-Лиувилля**: . Собственные функции этой задачи нам известны: . Далее ищем решение исходной задачи в виде ряда , подстановка которого в уравнение дает равенство (здесь ). Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях в левой и правой частях полученного равенства, приходим к уравнениям для : Подстановка ряда для в начальное условие дает , откуда Получили задачу Коши для уравнения первого порядка относительно неизвестной . Теперь рассмотрим двумерный случай, сначала для прямоугольной области: . Действуем как в одномерном случае: рассматриваем однородное уравнение при нулевых краевых условиях . Ищем решение в виде произведения Получаем: . Далее, . Ищем решение в виде ряда подстановкой которого в уравнение теплопроводности получаем уравнения для : Здесь – коэффициенты разложения функции в двойной ряд по синусам: . Аналогично, подстановкой ряда для в начальное условие получаем (**Прямоугольник(собой отрезок или пугол)**)

(**круг**) Наконец, рассмотрим задачу Дирихле в круге с нулевым краевым условием на его границе: . Вспомним запись оператора Лапласа в полярных координатах: – и будем искать решение однородного уравнения в виде произведения . Учитывая необходимость периодичности решения по , приходим к **задаче Штурма-Лиувилля** решениями которой являются функции и . Соответственно, , и, в свою очередь, получаем **задачу Штурма-Лиувилля** уже для функции : Остановимся на ней более подробно.

Можно проверить, что при рассматриваемая задача имеет только тривиальное решение . В случае , т.е. , получаем уравнение . Сделаем в нем замену и пересчитаем производные: , . Заменяя в уравнении для производные в соответствии с приведенными формулами, получим уравнение Бесселя: фундаментальную систему решений уравнения Бесселя образуют функции – функция Бесселя – и – функция Неймана. Поскольку при , а искомое решение должно быть определено в круге и, в частности, в его центре, т.е. при (а значит и при ), то . Вспомним о краевом условии . Как известно, функция Бесселя имеет счетное множество нулей , причем множество дискретно (не имеет предельных точек). Отсюда . Таким образом, для каждого наша задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное множество собственных функций отвечающих собственным значениям , а решение рассматриваемой задачи Дирихле следует искать в виде ряда

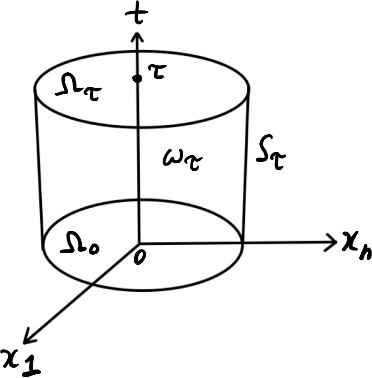
1. **Постановка основных краевых задач и задачи Коши для уравнения теплопроводности**

(**I am not sure, but it was at the beginning of lection 9 I guess. Last one was too**)

Напомним постановку основных краевых задач для уравнения теплопроводности (коэффициент перед оператором Лапласа для краткости полагаем равным единице; изменения для случая очевидны): где – 1-я краевая задача (Дирихле),

– 2-я краевая задача (Неймана),

– 3-я краевая задача. Кроме того, в отличие от уравнения Пуассона, для которого задача Коши, как можно показать, является некорректно поставленной задачей, для уравнения теплопроводности будет рассматриваться задача Коши:

**Первая и Вторая формулы Грина для оператора теплопроводности.** 

Введем обозначения: – бесконечный цилиндр в -мерном пространстве с основанием , – цилиндр конечной высоты , – боковая поверхность цилиндра , – сечение цилиндра плоскостью (оно же верхнее основание цилиндра ). Далее, обозначим через **оператор теплопроводности** и через оператор, сопряжённый к . Наконец, будем обозначать через градиент функции по пространственным переменным и через градиент ее по всем переменным.

**Формулы Грина:** Введём обозначение .

**Утверждение.** Пусть . Тогда справедливы **формулы Грина**:

(1-я формула Грина) и (2-я формула Грина), где – единичный вектор внешней нормали к поверхности цилиндра ( – проекция на ось , – на оси ).

**Доказательство.** Рассмотрим -мерное векторное поле . По формуле Гаусса-Остроградского Имеем: откуда с учетом определения оператора теплопроводности Далее, поскольку на боковой поверхности цилиндра , получаем: На основаниях цилиндра и и соответственно, откуда Заменив интегралы в на равные им интегралы в соответствии с вышеприведенными формулами, получим 1-ую формулу Грина. Для вывода 2-ой формулы Грина применим формулу Гаусса-Остроградского к векторному полю : Повторяя те же выкладки, что и при выводе 1-ой формулы Грина, придем к равенству Вычитая полученное равенство из 1-ой формулы Грина и перенося интеграл в левую часть, приходим ко 2-ой формуле Грина.

1. **Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.**

Пусть – функция Хевисайда. Рассмотрим функцию -ух переменных где . Эта функция называется **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**.

**Утверждение 1**. Функция бесконечно дифференцируема всюду, кроме точек плоскости . При этом для каждой фиксированной точки

**Доказательство**. В полупространстве и утверждение очевидным образом выполнено. При доказательство представляет собой простое упражнение на дифференцирование. Остается случай . Применив правило Лопиталя, несложно убедиться, что при 0 и как сама функция , так и все ее частные производные стремятся к нулю, благодаря чему утверждение оказывается выполненным и во всех точках плоскости , за исключением .

**Следствие.** Для каждой фиксированной точки

**Доказательство**. Достаточно заметить, что , и сослаться на предыдущее утверждение.

**Утверждение 2**. При любых фиксированных и

**Доказательство**. Делая замену , и используя известное значение интеграла Пуассона , получим:

**Представление решений уравнения теплопроводности с помощью потенциалов. (надо посмотреть это. Лекции 11)**Пусть, как и в предыдущей лекции, – ограниченная область, – цилиндр высоты , – его боковая поверхность, – сечение цилиндра плоскостью , – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

**Теорема**. Пусть . Тогда для произвольной точки ,

**Замечание.** По аналогии с уравнением Пуассона интеграл называют **объёмным тепловым потенциалом** с плотностью , интегралы и – **тепловыми потенциалами простого слоя** с плотностями и соответственно, а интеграл – **тепловым потенциалом двойного слоя** с плотностью .

**Доказательство теоремы**. Применим вторую формулу Грина к функциям и в области (отметим, что , как функция переменных , бесконечно дифференцируема в замкнутой области ): откуда, с учетом того, что , получаем: Первой нашей целью будет показать, что интеграл стремится к , когда . Используя известное нам из прошлой лекции свойство фундаментального решения: при – оценим разность где последнее равенство получено в результате замены , а . Для оценки интеграла заметим, что при и , а потому и, следовательно,

Теперь рассмотрим интеграл .

Возьмем произвольное и выберем такое, что где – шар радиуса . Запишем как Тогда Для оценки интеграла заметим, что в силу непрерывности функции найдется такое, что , как только . Выберем теперь так, чтобы выполнялось неравенство . Тогда при для всех и значит для всех . Отсюда Итак, при , причем . Следовательно, . Окончательно получаем: Теперь вернемся к равенству (\*) и осуществим предельный переход при в остальных зависящих от слагаемых. Благодаря ограниченности подынтегральной функции на боковой поверхности цилиндра Не столь благополучно обстоит дело с интегралом , поскольку единственная критическая точка функции лежит как раз на верхнем основании цилиндра . Заметим, однако, что интеграл является сходящимся. Действительно, интеграл монотонно убывает как функция благодаря неотрицательности подынтегральной функции. С другой стороны, По свойству ограниченной монотонной функции, существует Осуществив в (\*) предельный переход при и произведя перестановку слагаемых, придем к равенству Наконец, учитывая, что при , заменим цилиндр на (и, соответственно, на ) и получим нужное нам соотношение. Теорема доказана.

1. **Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области**

будет обозначать цилиндр высоты , – его боковую поверхность, – сечение цилиндра плоскостью .

**Теорема (принцип максимума в ограниченной области).** Пусть и в . Тогда

**Доказательство**. Непрерывная в функция ограничена, следовательно . Обозначим где выбирается произвольно. Тогда в . Покажем, что Предположим, что и . Тогда, если , то в силу необходимых условий максимума и . В случае же следует заменить первое равенство на неравенство: (почему?). В любом случае в точке , и, следовательно, в точке (напомним, что и в ). С другой стороны, в и, следовательно, в точке – пришли к противоречию. Таким образом, достигается на , и неравенство (\*) доказано. Отсюда Перейдём в последнем неравенстве к пределу при и получим , после чего остается только прибавить к обеим частям константу .

**Следствие 1.** Пусть и в . Тогда

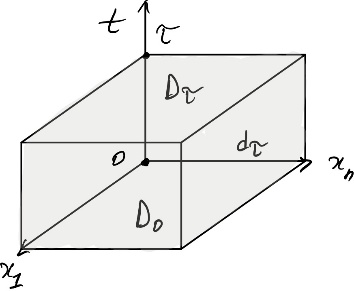
**Доказательство**. Положим . Тогда

**Следствие 2 (*о единственности решения первой краевой задачи*).** Решение класса задачи единственно.

**Доказательство.** Пусть – решения краевой задачи. Тогда их разность удовлетворяет однородной задаче Поскольку , то в силу доказанной теоремы и следствия 1 Но в силу начального и краевого условий и, следовательно, .

1. **Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности в неограниченной области.** **Единственность решения задачи Коши.**

Рассмотрим область в (*n* + 1)-мерном пространстве , представляющую собой слой между плоскостями и (см. рисунок).

**Теорема (принцип максимума в неограниченной области).** Пусть – ограниченная функция класса , и пусть в (а значит и в ). Тогда

**Доказательство.** Функция ограниченная, следовательно, . Рассмотрим функцию Нетрудно проверить, что . Пусть, далее, где произвольно. Тогда в и . Обозначим . Выберем число настолько большим, что . Для функции в цилиндре применим принцип максимума в ограниченной области. В цилиндре, как и во всем слое , , на его основании . На боковой поверхности цилиндра также . Отсюда согласно принципу максимума , или При увеличении неравенство сохраняется, а значит неравенство выполняется при всех . Делаем предельный переход при и получаем . **Единственность решения задачи Коши. Следствие 1.** Пусть – ограниченная функция класса , в . Тогда

**Следствие 2.** Решение задачи Коши единственно в классе ограниченных функций из пространства .

**Замечание.** Требование ограниченности решения задачи Коши для его единственности существенно. Советским математиком А.Н. Тихоновым было построено неограниченное решение класса однородной задачи Коши (с нулевой правой частью у уравнения и нулевым начальным условием). При этом функция, тождественно равная нулю, очевидно, также удовлетворяет однородной задаче. Таким образом, если отказаться от требования ограниченности решения, не будет и его единственности.

два следствия доказываются совершенно аналогично следствиям из принципа максимума в ограниченной области.

1. **Непрерывная зависимость решения первой краевой задачи и задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности от граничного и начального условий и правой части уравнения.**

Рассмотрим первую краевую задачу где .

**Теорема (об оценке решения).** Пусть , и . Тогда для произвольной точки где .

**Доказательство**. Рассмотрим функции , где , и , где . Тогда в На основании и боковой поверхности цилиндра и . По принципу максимума Отсюда и , а значит и . Теорема доказана.

**Следствие 1.** В условиях доказанной теоремы

**Доказательство**. В силу теоремы

**Следствие 2** **(непрерывная зависимость решения от исходных данных)**. Пусть и – решения первой краевой задачи класса для исходных данных и соответственно, . Тогда

**Доказательство**. Функция удовлетворяет краевой задаче , , . Из следствия 1 вытекает, что

**Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начального условия и правой части уравнения**. Рассмотрим теперь задачу Коши

**Теорема (об оценке решения задачи Коши)**. Пусть (сохраняются обозначения предыдущей лекции). Тогда

**Доказательство**. Введем функции и . Тогда в . Применив к функциям и принцип максимума в неограниченной области, получим: Отсюда, поскольку , приходим к неравенствам: что доказывает теорему. Как и при рассмотрении первой краевой задачи, получаем 2 следствия.

**Следствие 1.** В условиях доказанной теоремы

**Следствие 2** **(непрерывная зависимость решения от исходных данных)**. Пусть и – ограниченные решения задачи Коши класса для исходных данных и соответственно, причем ограничены в . Тогда

**Замечание.** Утверждения вторых следствий из обеих доказанных в этой лекции теорем означают, в частности, что как первая краевая задача, так и задача Коши для уравнения теплопроводности корректно поставлены. То же относится и к остальным краевым задачам, на которых мы, однако, останавливаться не будем.

1. **Стабилизация решений первой краевой задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности.**

**Стабилизация решений первой краевой задачи.** Рассмотрим первую краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности с нулевым краевым условием: где – боковая поверхность бесконечного цилиндра .

**Теорема**. Пусть , – решение рассматриваемой задачи. Тогда равномерно по , т.е. .

**Доказательство**: Пусть – фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Фиксируем () и Тогда функция обладает, очевидно, следующими свойствами:

1) ;

2) ;

3) в .

Обозначим , и . Тогда Рассмотрим функции В силу приведенных выше оценок, при . Далее, поскольку и , такие же неравенства для и выполняются и на боковой поверхности цилиндра . Вспомним, наконец, что – решения однородного уравнения, а потому . Применяя принцип максимума, получим: и, аналогично, В силу произвольности полученные неравенства справедливы во всем цилиндре , и, следовательно, Остается заметить, что благодаря независимости от мажорирующей функции сходимость является равномерной по .

**Стабилизация решений задачи Коши.** Рассмотрим теперь задачу Коши

**Теорема**. Пусть и при . Пусть, далее, , где , – ограниченное решение рассматриваемой задачи. Тогда при равномерно по (т.е. ).

**Доказательство**. Пусть произвольно. Учитывая, что при , выберем такое, что при . Далее, при , а (функция такая же, как и в предыдущей теореме). Отсюда По принципу максимума в неограниченной области и аналогично где произвольно. Получаем Возьмем, наконец, такое, что , и тогда .

**Замечание.** В доказанных выше теоремах условия и при могут быть заменены на и при соответственно. Тогда решения будут стабилизироваться к этой константе: при равномерно по (или ). Для доказательства достаточно рассмотреть решение , удовлетворяющее условиям соответствующей теоремы.

1. **Формула Пуассона для решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.**

**Теорема (формула Пуассона)**. Пусть и , причём для некоторой константы . Тогда задача Коши имеет в области решение где

**Доказательство**. Рассмотрим сначала интеграл . Благодаря ограниченности функции и быстрому убыванию на бесконечности экспоненты как сам интеграл, так и все интегралы, полученные из него дифференцированием любое число раз под знаком интеграла по параметрам , сходятся равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве значений параметров , лежащем в . Поэтому законно взятие производных любого порядка под знаком интеграла. Покажем теперь, что . Вспомнив определение фундаментального решения уравнения теплопроводности, перепишем функцию в виде Отсюда по известному свойству фундаментального решения Что касается проверки выполнения начального условия, отметим прежде всего, что функция вообще-то не определена при , однако продолжается на плоскость по непрерывности, причем при и . Рассмотрим разность Делая в интеграле замену , приходим к равенству (здесь мы воспользовались известным значением интеграла Пуассона ). Возьмем теперь произвольное и покажем, что при . Выберем сначала такое , что Далее, найдем такое , что при . Тогда для , удовлетворяющих указанным неравенствам, Перейдем к рассмотрению интеграла Здесь как сходимость интеграла, так и возможность дифференцирования его по параметрам не столь очевидны, как для . Делая замену , приходим к интегралу подынтегральная функция в котором оценивается сверху через , что доказывает его сходимость. Аналогично, сходящиеся (причем равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве значений параметров , лежащем в ) интегралы получаем при однократном дифференцировании под знаком интеграла по , поскольку . Однако возможность двукратного дифференцирования по переменным не столь очевидна, она будет установлена ниже. Покажем, что .

Проверка выполнения начального условия не составит труда, если воспользоваться полученным выше для представлением.

Перейдем к доказательству соотношения . Имеем: Для повторного дифференцирования по переменной запишем внутренний интеграл в виде Заменим интеграл по всему пространству интегралом по шару и проинтегрируем по частям согласно формуле, полученной в предыдущей лекции: после чего перейдем к пределу при . С учетом стремления к нулю интеграла по сфере благодаря быстрому убыванию экспоненты, получим: Теперь можно повторно продифференцировать функцию по : Вспоминая выражение для производной , получаем: . Окончательно для , . Теорема доказана.

1. **Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности в областях специального вида по пространственным переменным: отрезок, прямоугольник, круг. Задача Штурма – Лиувилля. Уравнение Бесселя и функции Бесселя**. (**I am not sure but I think it was on lection 9(I couldn’t find it)**)