2023.04.25　江原

周波数分析の基礎

Ⅰ．時間領域 から 周波数領域への変換

１．ノンパラメトリックな手法

離散フーリエ変換（DFT：Discrete Fourier Transform）

・離散フーリエ変換の定義

・離散フーリエ変換の性質

・窓関数の必要性

＊離散フーリエ変換を高速に行う手法　－　FFT（Fast Fourier Transform）

２．パラメトリックな手法

線形回帰モデル（自己回帰モデル）

・自己回帰モデルの定義

・どのようにして周波数分析を行うか

Ⅱ．時間領域 から 時間・周波数領域への変換

・ウエーブレット変換

・瞬時スペクトル分析

フーリエ級数展開

今迄学んだフーリエ級数展開は，周期 T の**関数**（**信号であれば連続信号**）x(t)に対して複素数表示で

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m \exp\left(j\frac{2\pi mt}{T}\right)$$

と定義されている．複素フーリエ係数を求める式は

$$X_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-j\frac{2\pi mt}{T}\right)dt$$

で表される．この式を分解すれば

$$X_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)dt - j\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)dt$$

となる．

離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform

離散信号$\boldsymbol{x_n = x(n)}$　　*{データ数はN個とする，$\boldsymbol{n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, N-1}$}*
のフーリエ変換（離散フーリエ変換）は以下のようである．

周波数(の番号) k=0,1,2，・・・・・について

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

と定義されている．

実部を A_k　　　　　　　　　虚部を B_k

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \qquad B_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

とおくと，　　$X_k = A_k - jB_k$　　の形になっている．

離散信号 x_n ; n=0,1,2,3,・・・,N－１(データ数 N 個)について問１～問５を考えてみよう．

$\boxed{\text{問１}}$　離散信号x_nが標本化間隔Δt（秒）で標本化されているとすれば，解析時間は何秒となるか.

$\boxed{\text{問２}}$　離散フーリエ変換の k の変化に相当する周波数間隔Δf は何 Hz となるか.

$\boxed{\text{問３}}$　A_k ,B_k を用いて次の値を求めよ

$|X_k|$ =

$|X_k|^2$ =

位相角　$\arg(X_k)$ =

x_n の離散フーリエ変換 X_k には次の性質がある，証明せよ．

$\boxed{\text{問４}}$　スペクトルの周期性

$X_{k+N} = X_k$

$\boxed{\text{問５}}$　スペクトルの対称性

$X_{-k} = \overline{X_k}$　　複素共役

それでは， $X_{N-k} = X_{-k}$ 負の周波数がどこに出現するか

DFT プログラムの作成

・データは 100Hz−2KAD.txt　を用いる（サンプリング周波数 2KHz）
・先ず平均値 0 のデータにする，その後で最大値（絶対値）が 100 となるように
　正規化する．
・解析するﾃﾞｰﾀの個数を 200 個とする
・解析の時間は何 msec
・スペクトルは何 Hz 間隔となるか

処理結果
＊周波数の番号（k =0,1,2,･･･）と　実部，虚部，振幅の値
＊出来ればスペクトルのグラフも描く（振幅，電圧利得）

使用する Math クラス

πは	System.Math.PI
平方根は	System.Math.Sqrt(　)
sin は	System.Math.Sin(　)
cos は	System.Math.Cos(　)
常用対数は	System.Math.Log10(　)
絶対値	System.Math.Abs(　)

*(　)の中は変数，配列，計算式など

これからの課題
＊窓関数によるスペクトルの変化
＊DFT 以外の手法，線形回帰モデル（AR モデル）についても開発・・可能なグループ