計測と制御
Vol. 24, No. 7
(昭和60年7月)

特集 システム理論

≪解　説≫

離散事象システム

――ネットモデルによるアプローチ――

児玉慎三*・熊谷貞俊*

1. はじめに―離散事象システムとは―

これまでのシステム理論や制御理論で扱われてきたシステムは，主としてプロセス系や機械力学系などに代表される連続システムであり，このクラスのシステムは基本的には熱や電気，力学などを支配する物理法則に従ったふるまいを呈するので連続事象システムということもできよう．

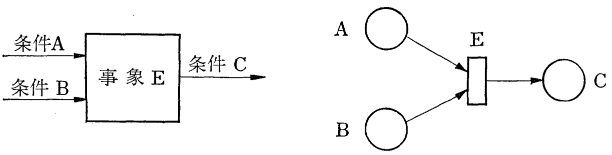
これに対し，本解説で取り上げる離散事象システムは，そのふるまいが離散的な事象の発生により特徴づけられ，身近かな例でいうと，シーケンス制御で対象となるシステムを考えてもらえばよい．シーケンス制御は「あらかじめ定められた順序や条件に従って制御過程を**段階的**に進めていく方式」と定義されているが，ここで特徴となるのはシステム内で起りうる事象には切れ目があり，それらの離散的な事象の生起の複合としてシステム活動が定められることである．たとえば1台の機械で部品を加工するラインでは，部品到着→加工→部品の送り出し，という一連の事象が発生するであろうし，ロボットアームで部品をある位置Aから他の位置Bへ移動するシステムでは，部品がAに到着→部品をつかむ→移動→Bで離す，という事象がある．シーケンス制御の定義を借りるなら，離散事象システムとは「いくつかの離散的事象を包含しており，ある順序または条件に従ってそれら事象が発生し，それにより全体の活動が支えられるようなシステム」を指すといえよう．もちろん詳細なレベルで見ると，たとえばロボットアームが部品を移動する際にはその位置が連続的に変化するように，1つの事象もその発生期間中は連続的な変化を呈するかもしれない．しかし，離散事象システムでは，たんに事象が生起するかしないかというレベルのみが問題であって，それ以下のレベルは（連続事象システムとして扱う問題であるとして）考慮に入れない．つまり離散事象システムというのは，対象システムのどのようなレベルのふるまいを問題にするかというわれわれの視点を反映したものである．

さて一般に事象（event）とは，ある活動（activity）が発生・終了することであり，上に述べたような力学的な運動としての事象はもとより，そのほかにも計算機がデータに計算を施す，通信網で信号が送・受信される，人間が作業工程を行う，なども事象である．したがって，離散事象システムとしてとらえることができるシステムはきわめて広範にわたり，シーケンス制御でふつう対象とされるシステム，たとえば機械加工・組立ライン，ロボット動作，化学，鉄鋼，電力プラントの運転過程などが含まれるのはもちろんであるが，そのほかに計算機のソフトウェア，ハードウェア，オペレーティングシステム，通信プロトコール，オフィスシステム，それに作業計画・管理工程なども含まれるのである．

それではこのような離散事象システムのふるまいは，どのような特徴を有しているであろうか．それを知るにはシステム内において事象がどのような形で発生するかを見ればよい．話を簡単にするためシステムに2個の事象 E_1, E_2 が発生しうるとしよう．E_1 と E_2 の発生の仕方およびその相互関係としてどのような形が考えられるであろうか．まず発生の仕方に**非同期性**がある．すなわち E_1, E_2 は共通の時間軸に同期しているとは限らない．事象は条件さえ整えば発生しうるものであり，E_1, E_2 もなんらかの理由により同期を強制しない限り，時間軸に非同期であるのがふつうである．相互関係としてはまず**並行性**がある．すなわち E_1 と E_2 の間には干渉が存在せず，どちらも独立に並行して発生しうるかもしれない．あるいはとうぜん**干渉**をもつこともある．E_1 と E_2 の間の相互干渉はいろいろな形が考えられる．たとえば E_1 がまず発生してから E_2 が発生できる（あるいはその逆）

* 大阪大学工学部　吹田市山田丘 2-1

キーワード：事象駆動システム (event-driven system), ペトリネット (Petri net), シーケンス制御 (sequential control), ネット理論 (net theory), ファクトリーオートメーション (factory automation)



(a) 単位離散事象モデル　(b) ペトリネットモデル

図 1 離散事象システムの静的構造

という**先行関係**が成立する場合もあるし，E_1, E_2 のどちらも同様に発生しうる状況のとき，一方が発生すると他方は発生できなくなるという**選択性（競合性）**もよく見られる関係である．

連続事象システムの理論が，微分方程式（あるいは差分方程式）というモデルを土台にして発展しているように，離散事象システムの理論を展開するには適切なモデル作りが必要である．とうぜんそのモデルは上記のようにふるまいを表現しうるものでなければならない．

ところでモデルを作るには，まずどのような観点からシステムをとらえるかという考え方をはっきりさせなければならない．連続事象システムのモデルの根本には，システム特性を原因ー結果（あるいは入出力関係）においてとらえるという見方があり，伝達関数や状態方程式などはすべて入出力関係の表現である．この入出力関係からシステムの特性をとらえるという考えは，実は離散事象システムにおいても連続システムの場合と同様に1つの強力な見方である．この見方によると，離散事象の単位モデルは，**図 1**（a）のようにある入力条件（条件A，B）が成立すると事象Eが発生し，その結果出力条件（条件C）が新たに成立するという入出力モデルとしてとらえられる．たとえば部品が到着し，かつ機械が空いている（条件A，B）と，機械加工され（事象E），部品は加工済となる（条件C）という対応が成立する．そして条件Cにより他の事象が生起しうるであろう．このように1つの事象が波及して他の事象が発生するという見方を事象駆動システム（モデル）という．本解説でとり上げるのも事象駆動システムとしての離散事象システムであり，以下2. では事象駆動システムのモデル化に最も適しているとされるペトリネットについて説明し，あわせてなぜペトリネットが有力なモデルであるかに言及する．3. ではネットモデルの解析理論を簡単に述べる．

2. 離散事象システムのモデル化

前節で述べた離散事象システムの広範なクラスに対し解析や設計に役立つモデルがどのような能力を具備していなければならないかを考えてみると，まず第1にこのようなシステムの特徴的な側面である並行動作や非同期性などに対する表現能力が挙げられる．また解析・検証能力に優れ，システム設計に際して仕様記述から回路実現まで一貫して用いることのできる形式性・階層性および設計変更に対する柔軟性といった能力が望まれる．1962年 C. A. Petri[1] によって提案され，最近 FMS のジョブコントロールなど[2] に応用されつつあるペトリネットはこのような能力を有するモデルの1つとして離散事象システム解析・設計の強力な道具であると考えられる．本節ではこのペトリネットを用いたモデル化について解説するが，その前に離散事象システムの古典的なクラスに対し従来用いられてきたモデル化の手法ならびにその成果について簡単にふれ，ペトリネットのようなネットモデルが要求されるに至った背景について述べてみたい．

2.1 ペトリネットとその他のモデル

ディジタル装置やシーケンス制御器などは代表的な離散事象システムの物理的実現であるがこれらに関しては1950年代からの研究の蓄積があり順序回路理論として体系化がなされている．そのモデルは周知のように入力系列の集合 X^* と有限の状態集合 Q との直積集合 X^*XQ より Q および出力集合 Y への写像 $f: X^*\times Q\to Q$, $g: X^*\times Q\to Y$ により表現され，システムの動的挙動は状態遷移表や状態遷移図により表わされる[3]．シーケンス制御で伝統的に用いられているラダーダイヤグラム，論理回路図，フロー線図などはいずれもこの順序回路の動作表現法に基づくものである．順序回路理論では与えられた入出力系列を実現する写像 f, g を具体的回路素子で構成することを問題とするが，そのために状態の等価性，簡約化，状態分割による直並列・縦続分解定理[4] など線形システム理論の最小実現論に対応する結果が古くから知られている．50年代後半より上記の数学モデルを用いて順序回路論は一般の順序機械（オートマトン）の代数論へ発展し Schreier や Jordan の半群理論を道具に順序機械の構造論が確立されている[5]．最近 Wonham ら[6] がこの順序機械モデルを用いて離散事象システムのフィードバック構造に関する代数的考察を行っているが古典的な順序機械構造論への現代制御論の導入の試みとして興味深い．上に述べた順序機械モデルは同期式を念頭に置いたモデルであり時間の概念は含まれていなかったが，非同期式順序機械については個々の素子の遅延のばらつきによる時間動作が問題となり連続的

な時間軸での定式化が必要となる．また，事象の発生時点に依存する非決定的動作を含むため入出力系列による形式的取り扱いは困難になる．従来，非同期式順序機械については状態遷移表に基づいたハザードや競合の解析・耐故障回路実現といった実際的な設計問題が主として研究されている[7]．Y.C. Ho ら[8]のグループはこのような時間概念を含む離散事象システム（Discrete Event Dynamical Systems の用語は Ho の命名による）の状態方程式を待ち行列を用いて定式化し，動作解析や性能評価の問題への最適制御論を用いたアプローチを行っている．また，Dubois ら[9]は時制論理と同様の手法で離散事象システムでの時間概念を代数化しこの代数上で線形システム理論に対応する解析手法を構築することを試みている．時制論理に基づく離散事象システムの定式化にはこのほかに岩井，片井らの研究がある[10]．以上述べたようにこれまで考察の対象となってきた離散事象システムのクラスに対しては同期・非同期順序機械モデルが主として用いられてきたのであるが，これらのモデルは線形順序的なシステム動作を念頭に置いており，本節の冒頭で述べたような離散事象システムの並行動作という重要な側面をうまく表現し解析することができない．たとえば計算機科学の分野では，従来の線形順序的なシステム構成(ノイマン型)に対して事象駆動的なシステム構成(非ノイマン型)が実現されるに伴って，このようなシステムにおける分散・並行的な動作の仕様記述とプログラミング言語の一貫性がプログラム検証・合成の立場から強く求められることになり，従来の手続き型言語に代って関数型(述語型)言語が用いられはじめている．まったく同様に離散事象システムの対象が FMS にみられるように従来のマシーン制御のレベルから，これらを最下位のレベルに含む複合システムへと発展するに伴ってこれらのシステムの仕様記述と制御方式言語の一貫性が動作検証や柔軟な設計方式確立のために不可欠となりつつある．これから述べるペトリネットのようなシステム構造を直接反映するような表現法が求められるのは，このような事情によるものである．ついでにいえば，ペトリネットは新計算機方式の有力なモデルとして計算機科学の分野で最初に注目され基礎的研究がなされてきたものである[11),12)]．図的表現法として従来用いられている動作フロー線図はシステム動作全体の手続き関係を静的に表現したものであるのに対しペトリネットはこれに加えて動的挙動（状態遷移）も同時に表現し，デッドロック・資源配分・競合・同期といった並列動作に付随するシステムの問題点を解析するうえで強力な道具となることが期待される．現在ではネット理論というシステム理論の一分野が形成されるに至っているがこれについては次節で述べることにし，以下ではペトリネットを用いたモデル化について解説しよう．

2.2　ペトリネット

ペトリネットの構造はプレースとトランジションと呼ばれる２種類の節点集合とその間の有向枝集合でできる２部グラフにより表わせる．通常プレースは事象生起に関するシステムの条件を表わしトランジションは離散事象の生起と完了を表現する．自動化仕様記述言語 GRAFCET や FA 用ジョブコントローラに用いられるC-ネット（第４節参照）では逆にプレースで事象生起と完了を表現しトランジションは事象間の遷移に関するゲートの役目を表現する．このようにペトリネットによるモデル化に際してプレース，トランジションに関する２通りの解釈が可能であるが本節では前者の解釈に従ってモデル化を考える．また，１つのプレースやトランジションでより複雑な部分システム全体を代表させることができ，システム挙動の抽象度に応じてさまざまの階層的表現が可能となる．プレース→トランジション，トランジション→プレースの有向枝はそれぞれ生起事象と対応する前提条件および事後の成立条件との関係を明示する(図１参照)．条件と事象を２分したこのネット構造により従来のシーケンスフロー線図に比べシステムの論理構造がより明確に表現できることがわかる．さてこの２部グラフ上でトークンを各プレースに配置しトランジションの適当な発火規則のもとでトークン分布の変化を調べることにより並列動作を含めたシステムの動的挙動が表現される．トークンが置かれているプレースは，そのプレースに対応する条件が現時点で成立していることを表わすものとする．ここで，たんに条件の成立・不成立だけを表わすならトークンは１個でよい．しかしながら，たとえば部品が存在するというだけでなく，何個存在するかという情報まで表現させたいときは，複数

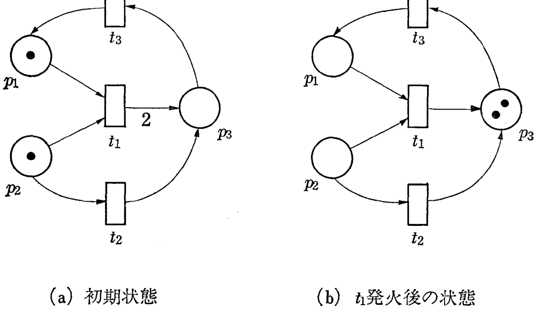


図 2　ペトリネットと発火規則

個必要である．以下各プレースには複数個のトークンを許すものとする．**図2**(a)にトークンの初期配置も含めたペトリネットの例を示す．

図中丸印○でプレースを，四角□でトランジションを表わしトークンはプレース中の黒丸●で表わす．有向枝 a に付随する正整数 $W(a)$ は枝重みを表わし，特に指定しなければ1とする．また各プレース p には許容トークン数の上限を示す容量 $C(p)$ (∞ も含む) を指定する．各プレースのトークンをベクトルに表わしたものをマーキング M と呼び，$M(p)$ でプレース p のトークン数を表わす．システムの状態遷移はトランジション発火に伴うマーキングの遷移により表わせるがその際の遷移規則は以下のとおりである．任意のトランジション t に対し $\mathrm{IN}(t)$, $\mathrm{OUT}(t)$ で t の入力プレース，出力プレースの集合を表わしたときすべての $p\in \mathrm{IN}(t)$, $p'\in \mathrm{OUT}(t)$ に対し

$$M(p)\geqq W(a) \tag{2.1}$$

$$M(p')\leqq C(p')-W(a') \tag{2.2}$$

が成立つとき t は M で発火可能であるという．ただし，a, a' はそれぞれ $p\to t$, $t\to p'$ の有向枝を表わす．発火可能なトランジション t の発火によりマーキング M はつぎの M' に変化するものと定める．

$$M'(p)=M(p)-W(a),\ p\in \mathrm{IN}(t)\wedge p\notin \mathrm{OUT}\ (t) \tag{2.3}$$

$$M'(p)=M(p)+W(a'),\ p\in \mathrm{OUT}(t)\wedge p\notin \mathrm{IN}\ (t) \tag{2.4}$$

$$M'(p)=M(p)+W(a')-W(a),\quad p\in \mathrm{IN}(t)\wedge p\in \mathrm{OUT}\ (t) \tag{2.5}$$

$$M'(p)=M(p),\ \text{otherwise} \tag{2.6}$$

すなわち $\mathrm{IN}(t)$ の各プレースより t への入力枝 a の重みに等しいトークンを除去し，$\mathrm{OUT}(t)$ の各プレースへ t からの出力枝 a' の重みに等しいトークンを加える．

たとえば，図2(a)で発火可能なトランジション t_1 を発火するとマーキングは同図(b)のように変化する．また，発火可能な t_1, t_2 のうち一方を発火させると他方は発火不能となるが，このようなトランジションは競合状態にあるといわれ，システムの非決定的動作，より上位の意思決定機構などをモデル化する際に積極的に導入される場合がある．また，意思決定を必要としない (decision-free) 動作のみをモデル化する際には構造的にこのような競合トランジションを除去しておく必要がある．発火可能なトランジションの発火（実行可能な発火と呼ぶ）によりマーキングは常につぎの不等式を満たすように保たれる．

$$0\leqq M(p)\leqq C(p) \tag{2.7}$$

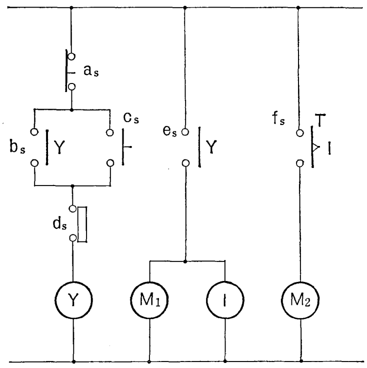
(2.1)から(2.6)の定式化によるペトリネットは一般化ペトリネットと呼ばれ[13]，ペトリネットとだけいえば通常 $C(p)=\infty$, $W(a)=1$ の場合を指す．また，任意のトランジション t に対し $\mathrm{IN}(t)\cap \mathrm{OUT}(t)=\phi$ の場合を純ペトリネットという．このように，考察する問題に対応して発火規則やネット構造を特殊化することにより，解析能力に優れたペトリネットモデルが得られる．最も簡単なネット構造をもつものにマークグラフとその相対構造の状態機械があり，それぞれシステムの並行動作，競合動作が表現でき，システム挙動に関する有用な解析的結果が得られている．文献14)にはこれらのモデルを含め一般に並行システムにおける資源配分・同期の問題に対するモデル化の例が示されており，本解説とあわせて読んでいただきたい．

ここで，シーケンス制御系を例にそのペトリネットによるモデル化を考えてみよう．**表1**にシーケンス制御系の基本構成要素[15]の1部とそのペトリネットモデルを示す．表中トランジションに付した数字 T で時間遅れを表わす．また ●— は往復有向枝対⇄を表わし制御枝と呼ばれる．発火規則より明らかなように制御枝をもつプレースは対応するトランジションの発火に対する許可条件を表わし，発火によるトークン変化を伴わない．**図3**(a)は主要な構成要素すべてを含むリレー回路の例で，著者らの研究室で開発した動作検証用シミュレータ PCSS (Petri net-Based Concurrent System Simulator) のグラフィックエディタを用いて

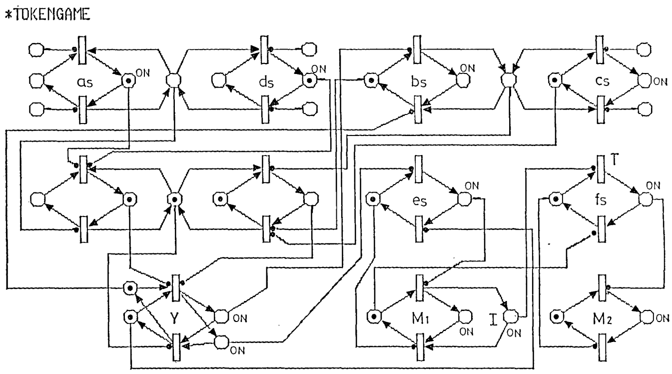
表1　基本構成要素とペトリネットモデル

名称		シンボル	ペトリネットモデル
復帰形スイッチ	a接点		操作，OFF，ON，非操作
	b接点		操作，OFF，ON，非操作
検出用スイッチ	a接点		検出，OFF，ON，非検出
	b接点		検出，OFF，ON，非検出
電磁リレー	コイル	A	励磁，OFF，A，ON，非励磁
	a接点		A:ON，OFF，ON，A:OFF
時限リレー	a接点	T	A:ON，T，OFF，ON，A:OFF
	b接点	T	A:OFF，OFF，ON，T，A:ON

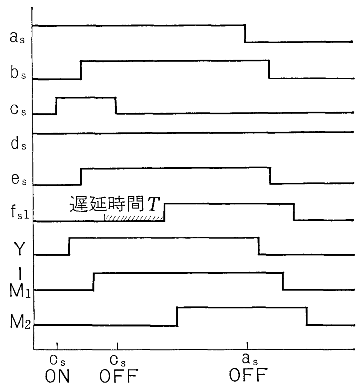
作製したペトリネットモデルを同図(b)，そのシミュレーション結果を(c)に示す．このモデルを用いて，活性，デッドロック，競合，可到達性（後述）などシステムの構造とトークンの初期配置に依存する定性的な性質を解析することができる．**表 2** に構造制約をもつペトリネットの代表的なサブクラスを掲げその特徴をまとめてみた．横枠のレベルで包含関係を示す．表中の事項については次節を参照されたい．実システムのモデル化に当って，新しい有用なサブクラス，あるいは拡張クラスを見出すことが今後の課題である．言語理論やオートマタ理論と関連したペトリネットの表現能力・決定能力については文献 20), 21) を参照され



（a）　リレー回路の例



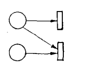
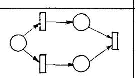
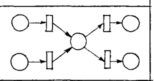
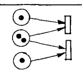
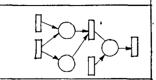
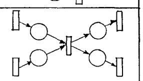
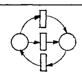
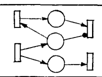
（b）　ペトリネットモデル



（c）　タイムチャート

図 3　リレー回路のペトリネットモデル

表 2　ペトリネットのサブクラス

クラス	特徴	例
拡張単純ペトリネット (extended simple Petri net)	$OUT(p_1)\cap OUT(p_2)\neq\emptyset \Rightarrow OUT(p_1)\supseteq OUT(p_2)$ or $OUT(p_1)\subseteq OUT(p_2)$　DT-条件 $\Longrightarrow$ 活性	
自由選択ペトリネット (free-choice Petri net)	$\lvert IN(t)\rvert=1$ or $\lvert OUT(p)\rvert=1$, $p\in IN(t)$ DT-条件 $\Longleftrightarrow$ 活性	
状態機械 (state machine)	各トランジションが1個の入力プレースと1個の出力プレースをもつペトリネット．有限オートマトンと等価なネット．	
無競合ペトリネット (Persistent Petri net)	トランジション t_1 と t_2 が発火可能であるとき，一方のトランジションの発火によって他方のトランジションが発火不可能にならないようなペトリネット．※他のクラスのようにネット構造で定義されていない。	
構造的無競合ペトリネット (conflict-free Petri net)	$\lvert OUT(p)\rvert=1$ 可到達性に関して，マークグラフとほとんど同じ必要十分条件が得られている．	
マークグラフ	$\lvert OUT(p)\rvert=\lvert IN(p)\rvert=1$ 活性，セイフ性，可到達性に関して，その必要十分条件がネット構造と初期マーキングに関する条件として得られている．16),17)	
ノーマルペトリネット (normal Petri net)	任意の極小有向閉路C内のプレースからの出力トランジションはC内のプレースへの入力トランジションとなっているようなペトリネット．可到達集合は半線形集合．18)	
拡張マークグラフ (extended marked graph)	マークグラフに制御枝の存在を許したペトリネット．拡張マークグラフのあるサブクラスにおいて，ネットが活性であるための必要十分条件がネット構造と初期マーキングに関する条件として得られている．19)	

たい．

3.　ペトリネット理論の基本問題

離散事象システムの数学モデルとしてのペトリネットの理論的研究は近年ヨーロッパを中心に盛んであり，ネット理論と呼ばれるシステム理論の一分野を形成するに至っている[22),23)]．システム理論の対象としてペトリネットの興味ある点は，最近線形システム理論でも取り上げられるようになった構造と性質のかかわりが，ここでは常に中心的な問題となることである．ネット理論の基本的問題としては活性，可到達性，および有界性がある．これらの問題は完全に解かれているわけではなく，またペトリネットの問題はこれに限られるわけではない．実問題からの要請で新たに解明すべき性質や問題が生じうる．ペトリネットはモデル化能力が高いから実問題を直ぐペトリネット上の問題としてとらえうるのもペトリネットの特徴である．

3.1　いくつかの基本問題

いまペトリネットが n 個のプレース $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を有するものとする．$M(p_i)$ でプレース p_i のトークン数を表わすことにして，全体のトークン分布を示すベクトル $M=\mathrm{col}(M(p_1, \cdots, M(p_n))$ をペトリネットの状態，あるいはマーキングという．初期マーキングはつねに M_0 で表わすことにする．マーキングが M_0 からトランジションの発火系列 σ により M になったとき，$M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ と書き，M は M_0 より可到達であるという．可到達なすべてのマーキングの集合を可到達集合といい，$R(M_0)$ で表わす．$M_0 \xrightarrow{\sigma}$ は σ が M_0 において実行可能なことを示す．

可到達性：与えられた初期マーキング M_0 と目標マーキング M に対し，$M \in R(M_0)$ か否かを判定する問題を可到達問題といい，ペトリネット上の制御問題の多くはこの問題に帰着する．たとえば活性（後述）であるかどうかの判定や，プレースの部分集合に注目した可到達性（部分可到達問題）などは可到達問題に等価であることが知られている[24)]．最近，可到達問題は可解，すなわち有限ステップの手順で判定可能であることが Mayr[25)] により示され，上記の各問題はこの意味で解決されたといえる．しかし一方，この問題の複雑度は指数領域一困難（一般に，計算に要する記憶領域がペトリネットのサイズの指数関数オーダーの大きさ以上要求される）であることも知られており[26)]，したがって実用上の観点からは，一般的に有効な判定法は存在しないといえる．実用的な判定法はペトリネットに構造上の制約を加えたサブクラスについて探さなければならない．事実，後で述べるようにマークグラフや無競合ペトリネットについては，状態方程式による解析手法で可到達問題の必要十分条件が求められており，容易に判定できる．

被覆可能性：与えられた目標マーキング M に対し，M が被覆できるかどうか，すなわち $M' \geq M$ なるマーキング M' に可到達であるかどうかの問題を被覆可能問題という．これは可到達木（後述）を用いて容易に解くことができる．

活性：ペトリネットが活性であるとは，デッドロックを生じないことを意味する．ペトリネットのマーキングが現在どのような $M \in R(M_0)$ にあったとしても，トランジション t がその後に到達可能な適当なマーキング $M_t \in R(M)$ において発火可能となるとき，t は活性であるという．すべてのトランジションが活性であるようなペトリネットを（初期マーキング M_0 に対し）活性であるという．たとえば計算機のオペレーテングシステムは活性でなければならない．この定義による活性は，どのようなでたらめな発火系列を与えてもデッド（発火不能）なトランジションを生じないことを保証しており，あるクラスのシステム，たとえばシーケンス制御系には厳しすぎる性質かもしれない．そこでつぎのようにいくつかのレベルの活性が提案されている[27)]．M_0 においてトランジション t が少なくとも1回発火するような発火系列 $M_0 \xrightarrow{\sigma_1}$ が存在するとき t はレベル（L 1）の活性であるという．また任意の正整数 n に対し，t が n 回発火するような発火系列 $M_0 \xrightarrow{\sigma_n}$ が見出されるとき t はレベル（L 2）の活性であるという．さらに無限発火系列 $M_0 \xrightarrow{\sigma_\infty}$ があり，σ_∞ において t が無限回発火するときレベル（L 3）の活性であるという．最後に，任意の $M \in R(M_0)$ において，t がレベル（L 1）の活性であるとき t はレベル（L 4）の活性であるという．（L 4）は明らかに最も強い活性の概念で，通常の活性の定義と一致する．図4のペトリネットでは，t_1, t_2, t_7 が（L 1），t_3, t_4, t_5 が（L 3），t_6 が（L 2）の活性であるが（L 4）のトランジションはない．

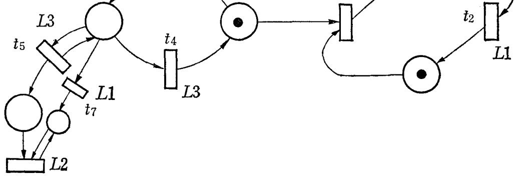


図4　レベル L_1, L_2, L_3 の活性

有界性：任意のマーキング $M \in R(M_0)$ において，ある正整数 k に対し $M(p_i) \leq k,\ i=1,2,\cdots,n$ が成立するときペトリネットは k ー有界という．とくに $k=1$ の場合を安全であるという．たとえばプレースが計算機のバッファーやレジスタを表わすときは，有界性はデータがオーバーフローしないためのプレースの容量制限として必要な性質である．

3.2　可到達木と状態方程式

ペトリネットを理論的に解析する基本的な手段に可到達木と状態方程式がある．可到達木というのは，可到達集合 $R(M_0)$ の各マーキングを節点に，そこに至る発火系列を有向枝に対応させることにより $R(M_0)$ を1つのグラフ（木）に写像したものをいう．ペトリネットが有界であれば $R(M_0)$，したがって可到達木もとうぜん有限であり，この場合可到達性および活性の判定は，有限木上を探索することになり容易である．ペトリネットが有界でないとき，すなわちあるプレースのトークン数が ∞ になりうるとき，$R(M_0)$ は有界集合でないが，これを有限なグラフに写像するため，w という記号を導入する．w は正整数 n に対し，$w>n$, $w \pm n = w$ なる性質を有し，可到達木の節点（マーキング）に w が現れると，その成分は限りなく増大しうることを意味している．可到達木を描くアルゴリズムについては文献27)を参照されたい．可到達木は w を用いることにより常に有限木として描けるが，その一方マーキングに関する詳細な情報が失われるため，可到達木が w を含むときは可到達問題は一般に解けない．活性についても同様であり，可到達木を用いて一般的に解けるのは，有界性，安全性，被覆可能性の判定である．

ペトリネットの状態方程式はよく知られているように[28]

$$M_{k+1}=M_k+A^T r_k,\ k=0,1,\cdots \qquad (3.1)$$

と与えられる．ここで M_k は k 番目に到達したマーキングである．r_k は発火させるトランジションに対応した成分が1，他は0の $m\times 1$ 発火（入力）ベクトル（m＝トランジションの個数），A はプレース・トランジションの $m\times n$ 接続行列であり，$A \triangleq A^+ - A^-$ と与えられる．ただし

$$(A^+)_{ij} \triangleq \begin{cases} w(e), & t_i \overset{e}{\to} p_j \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(A^-)_{ij} \triangleq \begin{cases} w(e), & t_i \overset{e}{\leftarrow} p_j \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases} \qquad (3.2)$$

定量制約のない場合，r_k がマーキング M_k で実行可能な発火ベクトルであるには，ペトリネットの発火規則より $M_k \geq (A^-)^T r_k$（純ペトリネットにおいては $M_k + A^T r_k \geq 0$）が必要十分である．すなわち，状態方程式(3.1)はおなじみの線形サンプル値系の表現 $x_{k+1}=Gx_k+Hu_k$ と形式的には一致しているが各ステップ $k=0,1,2,$ で自由な入力を加えることは許されず，つねに状態により $M_k \geq (A^-)^T r_k$ という制約をうけた入力 r_k だけを受け入れるのである．状態方程式を用いると可到達性の必要条件は容易に導ける．いま目標マーキング M が M_0 より発火系列 $r_0, r_1, \cdots, r_k$ を加えて到達したとすれば(3.1)式より次式が成り立つ．

$$M=M_0+A^T\Sigma,\ \Sigma \triangleq r_0+r_1+\cdots+r_k \qquad (3.3)$$

いま rank $A=r$ として

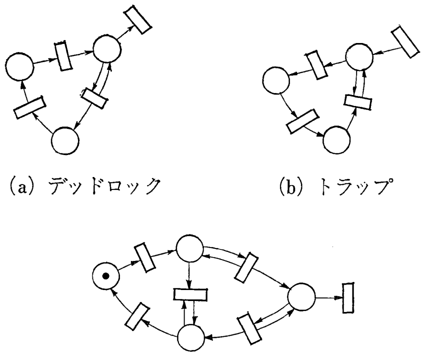
$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{n-r} & \overbrace{\quad}^{r} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array},\quad \det\ A_{12} \neq 0 \qquad (3.4)$$

と分割し，$B_f \triangleq [I_{n-r} \mid -A_{11}^T A_{12}^{-T}]$ を定義すると $B_f A^T = 0$ となる．B_f^T の各列ベクトルは A の零空間の基底である．(3.3)式より

$$B_f M = B_f M_0 \qquad (3.5)$$

が成立するが，これは M が M_0 より可到達である必要条件である．

マークグラフは各プレースが唯一の入出力枝をもつものであるから，各プレースとその入出力枝 →⦿→ を一本のマーク付有向枝 ー●→ で置きかえ，さらにトランジション →▯→ を節点で置きかえると，接続行列 A は電気回路網によく用いられる節点ー枝接続行列となり，B_f は基本閉路行列を表わす．(3.5)式は，マークグラフの各有向閉路について，そのトークンの総和が発火に関係なく不変であることを示している．したがってマークグラフでは，M_0 でトークン和0の有向閉路があると，その有向閉路に属する節点（トランジション）は永久に発火できない．すなわち M_0 でトークン和0の有向閉路が存在しないことがマークグラフが活性であるための必要条件である．実はこれは十分条件でもあることが知られている[29]．(3.5)式がペトリネットの可到達性の必要条件であると述べたが，マークグラフについては，(3.5)式に加えて，(3.3)式を満足する非負整数解 Σ のうち，最小解という単一の解が実行可能であることが可到達性の必要十分となる．実行可能性は容易に判定できて，最小解を $\Sigma_0 \triangleq \text{col.}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)$ とするとき，M_0 でトークン和0の有向閉路上の各節点（トランジション）t_k は発火することが要求されない，すなわち $\sigma_k=0$ となることである[30]．ここで最小解 Σ_0 とは任意の解 Σ に対し $\Sigma_0 \leq \Sigma$ となる非負整数解である．一般ペトリネッ



(a) デッドロック　(b) トラップ

(c) DT－条件を満たすデッドロック

図 5　デッドロックとトラップ

トについては，マークグラフのように，M_0 とネット構造により表現された可到達性の必要十分条件は知られていない．この場合の困難さはいくつかの段階があり，まず与えられた M, M_0 に対し，(3.3)式の非負整数解 Σ の存在条件が明らかでない．つぎにそのような解 Σ が見つけられたとしてもその実行可能性の判定がむずかしい．マークグラフをサブクラスに含む無競合ペトリネットの場合は，1個の最小解 Σ_0 についてのみ実行可能性を検証すればよく，Σ_0 が実行不可能であれば他のいかなる解も実行不可能であることがわかっており[31]，判定はきわめて容易である．ペトリネットで一般的に可到達性や活性を検討するうえで本質的な役割を有すると思われるのは，デッドロックとトラップという構造上の概念である．プレースの部分集合 D において，D のすべての入力トランジションが D の出力トランジションの集合に含まれるとき，D をデッドロックという(**図 5**(a))．この定義からデッドロックがある時点でトークンを失うと，それ以後再びトークンをもつことがないことがわかる．逆に，プレースの部分集合 T において，T のすべての出力トランジションが T の入力トランジションの集合に含まれるとき，T をトラップという(同図(b))．トラップがある時点でトークンをもつと，以後トークンを失うことがない．任意のデッドロックが，初期マーキングにおいて，トークンを有するトラップを含むとき，ペトリネットは DT-条件を満たすということにしよう (同図(c))．マークグラフでは，有向閉路上のプレースの集合はデッドロックかつトラップを形成するから，DT-条件とはトークン和0の有向閉路がないことであり，したがって活性の必要十分条件である．このほか，DT-条件が活性の必要十分条件となるネットに自由選択ネットがあることが知られている[13]．狭義の無競合ネットについては，デッドロックの概念を用いることにより，可到達問題の必要十分条件を初期マーキングとネット構造により表わすことができるという興味ある結果が知られている[32]．さらに拡張されたクラスのネットに対する可到達性問題の解は，部分的にしか知られておらず[33]，今後に残された問題である．

可到達性や活性問題の解を一般的に検討する困難さの1つは，問題が初期状態に依存する点にある．この難点は，初期状態に無関係な性質（すなわちペトリネットの構造に依存する性質）に着目することにより解消される．以下つぎの4つの性質を考える．

構造有界性：任意の初期状態 M_0 に対し $M(p_i)$, $i=1,2,\cdots,n$ が有界のときをいう．

保存的：ある整数ベクトル $f>0$ があり，任意の初期状態 M_0 と M_0 から到達可能な任意の状態 M について $M^Tf=M_0^Tf$ が成立するときをいう．

Repetitive：ある初期状態 M_0 があり，すべてのトランジションを無限回繰返し発火できるときをいう．

Consistent：ある初期状態 M_0 があり，M_0 から出発し再び M_0 に戻り，かつその間にすべてのトランジション t_j は少なくとも1回は発火できるときをいう．

これらはペトリネットの構造にのみ依存する性質であり，したがってつぎに示すように行列 A の性質でもある[14]．

(i)　構造有界性⇔ある整数ベクトル $f>0$ があり $Af\leq 0$ が成立する．

(ii)　保存的⇔ある整数ベクトル $f>0$ があり $Af=0$ が成立する．

(iii)　Repetitive⇔ある整数ベクトル $g>0$ があり $A^Tg\geq 0$ が成立する．

(iv)　Consistent⇔ある整数ベクトル $g>0$ があり $A^Tg=0$ が成立する．

定義とこれらの結果から明らかなように，保存的⇒構造有界，consistent⇒repetitive である．

またこれらから導かれるつぎの結果もしばしば有用である[14]．

(i)　ある整数ベクトル $f\geq 0$ があり $Af\leq 0$ かつ $Af\neq 0$⇒活性な初期状態 M_0 が存在しない．また consistent でない．

(ii)　ある整数ベクトル $g\geq 0$ があり $A^Tg\geq 0$ かつ $A^Tg\neq 0$⇒構造有界でない．またconservative でない．

4.　おわりに

離散事象システムを事象駆動システムとしてとらえ，ネットモデルとその解析理論について述べた．ペ

トリネットはモデル化能力が高く，事象駆動システムをモデル化するのに強力なモデルであるが，その解析理論はまだ十分に開発されていない．したがってこのようなシステムの設計理論もほとんど手がつけられていない．それにもかかわらず現在すでに FA 分野の離散事象システム制御に実用的な道具として取り入れられつつあるのは，基本モデルとしての簡潔さ，表現能力の高さによるところが大きい．東工大・長谷川研究室は，シーケンス制御系設計の体系化の試みの中でペトリネットのこのような特質にいち早く注目し，後出の GRAFCET に先立ってセーフペトリネットに発火制御を行うゲート信号枝を付加したマークフローグラフを提案し[34]，このモデルに従った動作表現，解析，制御に関する研究を行ってきた[35]．

仏 LAAS-CNRS グループは1976年よりペトリネットを用いた階層的システム自動化設計に関する研究を行っている[36]．このアプローチの特徴は，制御フローを表わすコントロールグラフ(セーフペトリネット)とそのプレース，トランジションに対応する詳細なタスクを表わすデータグラフからなる制御スキーマの表現法にある．このような制御スキーマはモジュール化されており，ある制御スキーマ中のトランジションを他の制御スキーマに代置して記述を詳細化する際のコントロールグラフ，データグラフの変更方法，変更したのちのシステムが "well-behave" である十分条件がペトリネットの構造的性質を用いて明らかにされる．すなわち，各構成モジュールの動作検証を行うだけで全システムの動作が検証されるようになっており，ペトリネットの特徴である階層性を生かしたトップ-ダウン設計を可能にしている点は注目に値する[37]．

日立システム開発研究所で開発されたC-ネットモデルに基づく FMS 用ステーションコントローラ SCR[38] は，著者らの知るかぎり初めてのペトリネットの応用商品である．C-ネットは仏の自動化推進協議会が標準的自動化システム仕様記述言語として，1977年に制定した GRAFCET[39] (ステップとトランジションによる命令図表) とよく似ているが前者がこれと無関係にまったく独自に開発されたものであることは興味深い．

三菱中央研究所システム研究部グループによるシーケンス制御系の設計仕様記述の形式化のための研究においては，ペトリネットがその基本的言語として用いられている．仕様記述形式化の目的は設計の頻繁な部分的変更に柔軟に対応できるような記述の一貫性と動作検証の自動化にあり，ペトリネットの階層性と検証能力を利用してこのような目的を達成する設計支援ツールが構築されつつある[40]．

このほかにも計算機ソフトウェア，ハードウェア，通信プロトコルなどにおける動作検証や CAI にペトリネットが応用された例は数多い[41]．また，VLSI の論理設計に公式言語 GRAFCET を用いることにより従来の論理シミュレータでは発見できなかった論理エラーをチェックできたという報告[42]もあるがネット理論の広範な応用化の可能性を示唆するものといえる．

これらの応用化の試みに端的に見られるようにシステム制御への実用に際しては時間の導入や，トークンの属性に依存した発火公理の変更，あるいは発火機構に関する付加的条件の導入などペトリネットの拡張モデルを考える必要があり，逆に理論面では従来のネット理論の枠組みを越えてこれらの拡張ペトリネットの構造論を確立することがこれからの大きな課題である．

(昭和60年4月12日受付)

参考文献

1) C. A. Petri: Communication with Automata, Supplenent to Tech. Rep. RADC-TR-65-337, **1**, Rome Air Development Center, Griffiss Air Force Base, N. Y., (Translation) 1965.
2) N. Komoda et al.: An Autonomous, Decentralized Control System for Factory Automation, Computer, IEEE Computer Society, **17**-12, 73/83 (1984)
3) E. J. McCluskey: Introduction to the Theory of Snitching Circuits, McGraw-Hill, New York, 180/223 (1965)
4) 当麻，内藤，南谷：順序機械，情報科学-13，岩波書店 (1983)
5) K. Krohn, J. L. Rhodes and B. R. Tilson: The Primc Deconposition Theorem of the Algebiaic Theory of Machines, Algebiaic Theory of Machines, Languages, and Semigroups, M. A. Arbib, ed., 81/125, Academic Press, N. Y. (1968)
6) P. J. Ramadye and W. M, Wonham: Algebraic De composition of Controlled Sequential Machines, 8th World Congress IFAC, Ⅲ-37/46 (1981)
7) S. H. Unger: Asynchronous Sequential Scoitching Circuits, John Wiley & Sons, 118/186 (1969)
8) Y. C. Ho and C. Cassandras: A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, Automatica, **19**-2, 149/167 (1983)
9) C. Cohen, D. Dubois and M. Viot: A Linear-System-Thecretic View of Discrete-Event Processes, and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC 30**-2 (1985)
10) 片井，岩井：非同期同時進行システムに対する時制論理に基づくスケジューリング則の構成，計測自動制御学会論文集，**18**-12，1180/1187 (1982)
11) 市川，小林：事象駆動型システムの表現と制御，計測と制御，**21**-10，929/938 (1982)
12) M. Hack: Petri Net Languages, Computation Struc-

ture Group Memo 121, Project MAC, MIT, Cambridge (1975)
13) M. Jantzen and R. Valk: Formal Properties of Place/Transition Nets, W. Brauer ed. Net Theory and Applications, Springer-Verlag, 165/212 (1980)
14) T. Murata: Petri Nets and Their Applications, 計測と制御, **22**-3, 3/11 (1983)
15) 高井(編)：シーケンス制御, オーム社 (1974)
16) 田口, 児玉, 熊谷：セイフ条件を考慮したマークグラフの解析, 電子通信学会論文誌, **63-D**-4, 342/348 (1980)
17) S. Kumagai, S. Kodama and M. Kitagawa: Submarking Reachability of Marked Graphs, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-31**-2, 159/164 (1984)
18) H. Yamazaki: Normal Petri Nets, J. of Computer and System Science, C-46 (1982)
19) K. Tsuji, S. Kumagai, S. Kodama and S. Takeda: On the Liveness of Extended Marked Graphs, Proc. of IEEE ISCAS, Kyoto (1985)
20) J.L. Peterson: Petri Nets, Computing Survey, **9**-3, 223/252 (1977)
21) T. Agerwala and M. Flynn: On the Completeness of Representation Schemes for Concurrent Systems, Proc. of Conference on Petri Nets and Related Methods, MIT, Cambridge, July (1975)
22) C.A. Petri: Interpretation of Net Theory, Interner Bericht 75-07, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, W. Germany, July (1975)
23) H.J. Genrich, K. Lautenbach and P.S. Thiagarajan: Elements of General Net Theory, W. Brauer ed., Net Theory and Applications, Springer-Verlag, 21/164 (1980)
24) M. Hack: The Recursive Equivalence of the Reachability Problem and the Liveness Problem for Petri Nets and Vector Addition Systems, Project MAC, MIT, Cambridge (1974)
25) E.W. Mayr: An Algorithm for the General Petri Net Reuchabihty Problem, Proc. of the 13th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing (1981)
26) R. Lipton: The Reachability Problem Requires Exponential Space, Report 62, Yale University, New Haven (1976)
27) J.L. Peterson: Peti Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall, Englewood Ciffs, New Jersey (1981)
28) T. Murata: State Equation, Controllability, and Maximal Matching of Petri nets, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22**-33, 412/416 (1977)
29) F. Conmoner et al.: Marked Directed Graphs, J. of Computer and System Science, 5, 511/523 (1971)
30) T. Murata: Circuit Theoretic Analysis and Synthesis of Marked Graphs, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-24**-7, 400/405 (1977)
31) L.H. Landneber and E.L. Robertson: Properties of Conflict Free and Persistent Petri Nets, J. ACM 25, 352 (1978)
32) 市川, 横山, 黒木：無競合ペトリネットの可達性の必要十分条件と制御, 計測自動制御学会第10回システムシンポジウム, 255/260 (1984)
33) 市川, 平石：ペトリネットにおけるクラスの可達性の必要十分条件, 計測自動制御学会論文集, **20**-8, 762/764 (1984)
34) 長谷川, 増田, 菊池原：マーク流れ線図とその性質について, 第19回自動制御連合講演会前刷, 1114 (1976)
35) 長谷川：マークフローグラフと FA への応用, 計測と制御, **22**-11, 946/951 (1983)
36) P. Azema, R Valette and M. Diaz: Petri Nets as a Common Tool for Design Verification and Harduare Simulation, 13th Design Automation Conf., San Fiancisco, 109/116 (1976)
37) R. Valette and M. Diaz: Top-Down Formal Specification and Verification of ParallelControl Systems, Digital Processes, 4, 3 (1978)
38) 鷹田, 村田, 春名, 杢屋：FA 用ステトキョンコントローラ (SCF) の提案, 計測自動制御学会第9回システムシンポジウム, 261/266 (1983)
39) 戸塚：グラフセ (GRAFCET) の概要と応用, オートメーション, **29**-5, 43/50 (1984)
40) 井村, 阿部, 武田：シーケンス設計支援システム, 電気学会全国大会, 1331 (1984)
41) C. Girault and W. Reisiy (ed): Application and Theory of Petri Nets, Springer-Verlag (1982)
42) D. Boucher, M. Poize and A. Puissochet: GRAFCET as a Description and Simulation Tool at the Functional Level in CAD System, Proc. of IEEE ISCAS 84 Montreal, 324/327 (1984)