Calculs approchés d’intégrales

ITC31 - Mathématiques

Julie Grastilleur
Mathieu Ardhuin

Table des matières

Introduction

L'intégrale : $\int_a^b f(t)dt$ d'une fonction entre a et b (avec $a < b$) correspond à l'aire située sous la courbe. Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de calculer la valeur d'une intégrale. Chacune ayant ses avantages et ses inconvénients, il est cependant nécessaire de passer par un calcul d'une primitive de la fonction.

Lorsqu'il devient trop compliqué de travailler sur une primitive de $f(t)$ ou bien de réaliser une intégration par partie, il existe plusieurs méthodes afin d'approximer la valeur d'une intégrale. L'objectif de ce rapport est de faire un compte rendu des méthodes existantes de calcul d'intégrales et de les comparer dans le but d'implémenter au final deux de ces méthodes dans un langage de programmation. Nous verrons donc ainsi, dans un premier temps, les différentes méthodes de calcul puis nous nous intéresserons plus particulièrement à deux méthodes, dont nous réaliserons un code fonctionnel, permettant de simuler la méthode de calcul sur une fonction donnée.

I. Méthode des rectangles

Cette méthode consiste à diviser l’aire sous la courbe d’une fonction en rectangles, et à remplacer son intégrale par la somme des aires de ces rectangles.

Soit f une fonction continue et dérivable sur l’intervalle $[a, b]$. On divise cet intervalle en N sous-intervalles égaux, de largeur $h = \frac{b-a}{N}$ et ayant pour extrémités $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h, \dots$ $x_N = a + Nh$. Plus h est petit, plus l’approximation sera précise.

On calcule ensuite la somme A_1 des aires des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}], i \in [\![1, N-1]\!]$ et de hauteur (x_i) , ce qui nous donne une approximation de $\int_a^b f(x)dx$.

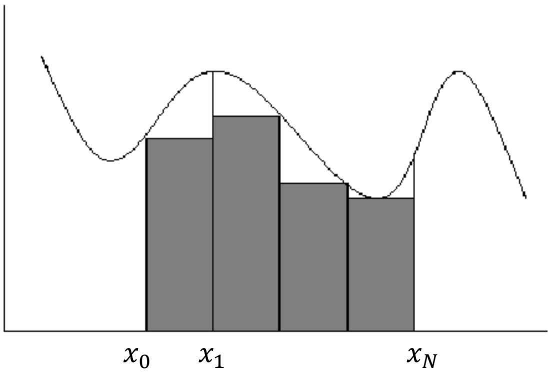

Figure 1. Schéma de la méthode des rectangles[1]

Le principal avantage de cette méthode est sa facilité de compréhension et d’implémentation. Cependant, elle reste très approximative, et ne sera donc pas développée pour la suite du projet.

Il existe plusieurs variantes qui améliorent la précision du calcul. On peut, par exemple, calculer la somme des aires des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}], i \in [\![1, N-1]\!]$ et de hauteur $f((x_{i+1} - x_i)/2)$. Cette méthode est appelé méthode du point milieu.

[1] *Intégration numérique*, http://lsc.cemif.univ-evry.fr:8080/~smam/chapitre9_mt31.html

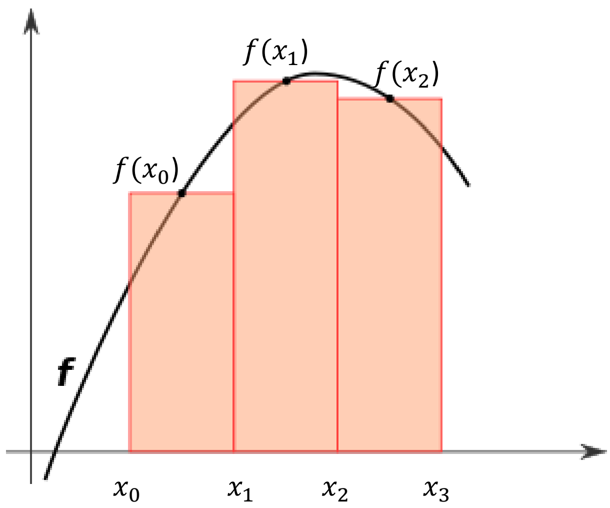

Figure 2. Schéma de la méthode du point milieu[2]

Il existe également une autre méthode consistant en deux méthodes des rectangles : On calcule A_1 la somme des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}], i \in [\![1,\ N-1]\!]$ et de hauteur $f(x_i)$ et A_2 la somme des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}], i \in [\![1,\ N-1]\!]$et de hauteur $f(x_{i+1})$. L'approximation de l'intégrale R est donnée par la formule : $R = A_1 + (A_2 - A_1)$

N.B. Dans le cas d'une courbe décroissante, $R = A_2 + (A_1 - A_2)$

Cette méthode, appelée méthode des trapèzes, est beaucoup plus précise qu'une simple méthode des rectangles.

[2] Wikipédia, *Calcul numérique d'une intégrale*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_num%C3%A9rique_d%27une_int%C3%A9grale (juin 2013)

II. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est une méthode plus précise que la méthode des rectangles mais fonctionne sur le même principe. Cependant, au lieu de découper les différents intervalles $[x_i,\ x_{i+1}]$ en escaliers (rectangles), on remplacera la courbe située entre x_i et x_{i+1} par un segment. Cela revient à réaliser une approximation affine d'un arc de courbe. La figure obtenue est alors assimilable à un trapèze. Pour obtenir le résultat de l'intégrale, il suffit donc de sommer tous les aires définies par les trapèzes.

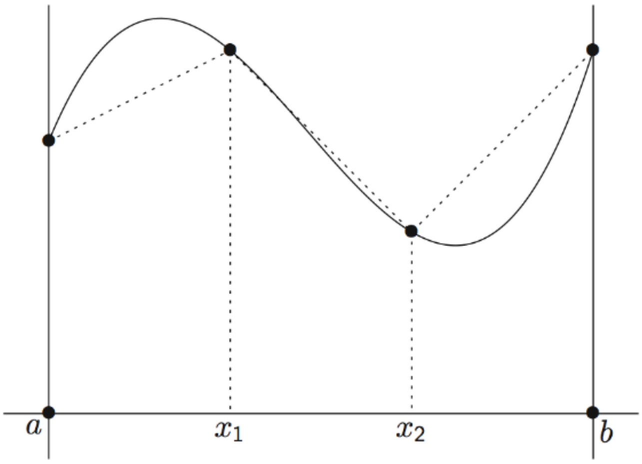

Figure 3. Découpage en trapèzes

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, l'intervalle [a ; b] est découpé en plusieurs points. Entre chaque intervalle $[x_i,\ x_{i+1}]$, on trace un segment qui joint les points $[f(x_i), f(\ x_{i+1})]$. Soit p le pas choisit on a :

$$p = (x_i + x_{i+1})$$

Aire d'un trapèze :

$$A = \frac{p[f(x_i)+f(x_{i+1})]}{2}$$

Donc au final, l'aire décrite par la totalité des trapèzes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{p[f(x_i)+f(x_{i+1})]}{2}$$

Avec n = nombre de points dans l'intervalle.

Comme nous avons vu la méthode des trapèzes revient à combiner deux méthodes des rectangles : elle est donc plus précise.

L'avantage de cette méthode de calcul, en plus d'être plus précise que la méthode des rectangles, est sa facilité de réalisation. En effet, la méthode repose sur une approximation affine entre deux points ainsi qu'une somme. La méthode des Trapèzes a subie de nombreuses améliorations au cours des années. On notera par exemple la méthode de Roomberg. Cette méthode combine la méthode des trapèzes ainsi qu'une méthode d'accélération de convergence qui, réunies, permettent de minimiser le nombre de calculs à effectuer tout en gardant un bon niveau de précision. La méthode des trapèzes semble être une bonne candidate en vue de l'implémentation dans un langage de programmation.

III. Méthode de Simpson

Comme les démarches précédentes, cette méthode consiste à diviser l'intervalle de travail $[a, b]$ en N sous-intervalle (N étant pair) de longueur $\frac{b-a}{N}$. Pour chacun de ces sous-intervalles, on calcule une approximation de f correspondant à un polynôme de degré 2 P_i - dit d'interpolation - qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_i, x_{i+1} et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ vaut alors la somme des intégrales de ces polynômes.

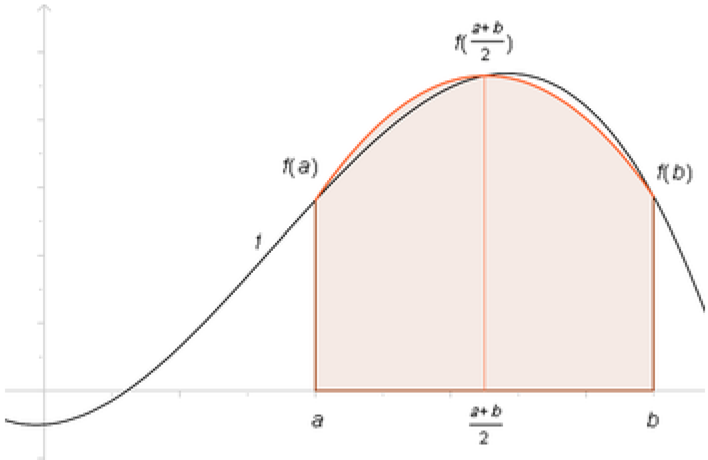

Figure 4. Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)dx$$

Avec $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)dx = \frac{(x_{i+1}-x_i)}{6}\left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right)$.

Cette méthode est très précise et est très utilisée par les calculatrices ou les programmes informatiques. Elle sera donc implémentée dans la suite du projet.

Comme nous avons pu le voir, l'approximation d'un arc de courbe par la méthode de Simpson revenait à assimiler l'arc en question à un polynôme de degré 2. Il est cependant possible d'augmenter la fiabilité de la méthode en augmentant le degré du polynôme qui va servir à l'approximation (utile dans certains cas particuliers). En effet, on distingue plusieurs méthodes dérivées de la méthode de Simpson :

- La méthode des 3/8 : qui revient à réaliser une interpolation de degré 3
- La méthode de Boole-Villarceau : interpolation de degré 4
- La méthode de Weddle : interpolation de degré 6

Ces méthodes sont malheureusement très adaptées à certains types de fonctions (les oscillations des polynômes sont de plus en plus marquées au fil de l'augmentation du degré du polynôme). Elles auront aussi pour effet de complexifier grandement les calculs et, de ce fait, l'utilisation de la méthode et son implémentation.

Conclusion

Comme nous avons pu le constater, il existe plusieurs méthodes permettant de réaliser le calcul approché d'une intégrale. D'après ce que nous avons vu, la méthode des trapèzes s'impose comme la méthode ayant le meilleur rapport entre difficulté de mise en œuvre et fiabilité. Ce sera donc notre premier choix pour la traduction en langage informatique. La méthode Simpson quant-à-elle est le plus précise des procédés décrits dans ce rapport. Elle constituera donc notre deuxième implémentation

Références

ChronoMaths, *Méthode de Simpson*, http://serge.mehl.free.fr/anx/meth_simpson.html

Université en ligne, *Approximation d'une intégrale*, http://uel.unisciel.fr/mathematiques/integration/integration_ch05/co/apprendre_ch5_02.html

Université Lyon 1, *Calculs approchés d'intégrales*, http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/integrales.pdf

Université de Rennes 1, *Intégration numérique*, http://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/agint/ecrit/analyse-reelle/integration-numerique/X-int-num.pdf

Wikipédia, *Calcul intégral*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_int%C3%A9gral#Calcul_num.C3.A9rique_approch.C3.A9_d.27une_int.C3.A9grale

Wikipédia, *Méthode de Simpson*, http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Simpson (septembre 2013)