基于实分析和泛函分析论证满足叠加性不满足齐次性的实系统

张曹琛

3200105600

摘要

线性系统需要同时叠加性和齐次性，满足齐次性不满足叠加性的例子较好举出，而复数域下满足叠加性不满足齐次性的系统也较易找到，然而，实数域下满足叠加性不满足齐次性的系统却难以得出。本篇文章从实分析和泛函分析角度，论证 Lebesgue 可测实泛函数叠加性可推出齐次性，并在选择公理下给出存在满足叠加性不满足齐次性的实系统在数学上的构造方法。

1 叠加性和齐次性

对于一个系统

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

线性系统的叠加性定义如下

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) \tag{1}$$

即两个信号相加后经过满足叠加性的系统，其输出也为两个信号分别经过系统的输出之和。

而线性系统的齐次性定义如下

$$ax(t) \longrightarrow ay(t) \tag{2}$$

即一个信号放大后经过满足齐次性的系统，其输出也放大相应倍数。

对于满足齐次性但不满足叠加性的系统，找出相应的例子较为容易

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \frac{[x'(t)]^2}{x(t)}$$

$$ax(t) \longrightarrow \frac{[ax'(t)]^2}{ax(t)} = \frac{a^2[x'(t)]^2}{ax(t)} = ay(t)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow & \frac{\{[x_1(t) + x_2(t)]'\}^2}{x_1(t) + x_2(t)} = \frac{[x_1'(t) + x_2'(t)]^2}{x_1(t) + x_2(t)} \\ \neq & y_1(t) + y_2(t) = \frac{[x_1'(t)]^2}{x_1(t)} + \frac{[x_2'(t)]^2}{x_2(t)} \end{aligned}$$

而要在复数域上想出满足叠加性但不满足齐次性的系统，也较为容易

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t) + x^*(t)$$
$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow x_1(t) + x_1^*(t) + x_2(t) + x_2^*(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

而 $y \in R$，因此 $ax(t) \longrightarrow R$，而 $ay(t) \in C$，因此任取 $a \in C$ 且 $a \notin R$，齐次性被破坏。

然而当系统的输入和输出都限制在实数域时，满足叠加性但不满足齐次性的系统的构造就变得极为困难了。

2 Lebesgue 可测实函数分析

对于该问题，可以将其转换为一个数学问题，即对于泛函（即函数的函数）$F(x) = y$，是否存在 F 使得 $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$，但 $F(ax) \neq aF(x)$，其中 x 与 y 均为 $R \rightarrow R$ 的函数。

对于 $y(t) = F(x(t))$，若取固定的 t_0，则 $y(t_0) = F(x)(t_0)$ 是关于 x(t) 在若干个（可以是无限）t 上的值的计算函数，即

$$F(x)(t_0) = f(x(\tau_0), x(\tau_1), \cdots) \tag{3}$$

对于不同的 x，$\tau_0, \tau_1, \cdots$ 的取值完全相同，因此可以直接将 $F(x)$ 在某一具体 t 上的值视作自变量为多个实数的函数，而输入函数的叠加和齐次（加法和数乘）不同 τ 的函数值之间不会产生影响，因此系统泛函 F 可以被直接转化为普通的实数函数，这里函数的参数可以看作一个实数向量（向量的加法和数乘正好也能保证不同值间不会产生影响）。

目前系统泛函已经被转换为实数向量到实数的映射，而进一步还可以简化该问题，假设该函数可以直接写为单实数作变量的函数 f(x)（比如 F 是不同实值函数的有限线性叠加 $F(x(t))(t_0) = f_1(x(t_1)) + f_2(x(t_2)) + \cdots$，而最简单的表现形式就是 $F(x(t))(t_0) = f(x(t_0)))$，后续的讨论将会基于这个简化的 f(x) 进行讨论。

在这里，可以证明，当 f 为 Lebesgue 可测实函数时，叠加性可推出齐次性。

这里首先简单介绍 Lebesgue 可测函数的概念

测度可以简单具象地被理解为对集合长度或是多元函数的面积、体积等的“测量结果”，而外测度即实数空间上任一子集的“度量”，$E \subset R^n$ 的外测度定义为

$$\mu^*(E) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(Q_k) \colon \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \supset E\} \tag{4}$$

其中 Q_k 为 n 维空间，$\upsilon(Q_k)$ 为该空间的整体体积。

于是，进一步定义可测集，由于子集 E 的外测度是通过下确界定义的，因此外

测度不存在可加性，若对外测度加上某种限制，使得其满足可加性，那这个外测度便能准确的表示“体积度量”这一概念，同时，满足该限制的子集被称作 Lebesgue 可测集，而该限制后的外测度被称作 Lebesgue 测度。限制的定义如下：

$$E \subset R^n, \forall \epsilon > 0, \exists G \supset E\colon \mu^*(G-E) < \epsilon \tag{5}$$

此时，由外测度的次可加性可以推导出，增加该限制后，外测度的可加性得到满足，这里不作过多赘述。

而设 (X, Σ, μ) 为可测空间，$E \in \Sigma$，f 为定义在 E 上的广义实值函数，若对 $\forall \alpha \in R^1, \{f > \alpha\} \in \Sigma$，即 $f > \alpha$ 是一个 Lebesgue 可测集，则我们可以把这样的 f 称作是 E 上的 Lebesgue 可测函数，简称 f 在 E 上 Lebesgue 可测。

而在本章讨论范围内，Lebesgue 可测函数最重要的一个性质是 Luzin 定理。Luzin 定理讲述的是，对于可测集 E 上的任何可测函数 f，都可以用闭集 F 上的连续函数来逼近它，换句话说，任何可测函数，只要改变测度任意小的集上的函数值，就可以变为连续函数，定理的具体描述如下：

引理 1（Luzin 定理） 设 (X,d) 是具有 σ 有限开集的距离空间，E 为 X 中的可测子集，f 在 E 上几乎处处有限，若 f 在 E 上可测，则对于 $\forall \sigma > 0$，存在 E 中闭子集 F_σ，使得 f 在 F_σ 上连续，而 $\mu(E - F_\sigma) < \sigma$

在经过上述的概念和定理介绍后，我们已经可以解决 f(x) 为 Lebesgue 可测实函数时叠加性推出齐次性的问题了。

定理 1 对于 Lebesgue 可测实函数 f，若

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), x_1, x_2 \in R^1 \tag{6}$$

则 $f(x) = cx$

下面是对该定理的证明：

(1) 假设 f 在 R^1 上可导，则对 x_1 求导，$\forall x_2, f'(x_1 + x_2) = f'(x_1)$，容易看出，f 在 R 上导数为定值，即 $f'(x) = c$，因为 $f(0) = 0$，因此 $f = cx$。

(2) 现在假设 f 在 R^1 上不可导，但是连续，则对于有限个 $x_k (1 \le k \le n)$，

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \tag{7}$$

取 (7) 中所有 $x_k = x$，$f(nx) = nf(x)$，再将 x 换成 $\frac{x}{n}$，得 $f(\frac{x}{n}) = \frac{f(x)}{n}$

将 x 换成 mx，进一步得到 $f(\frac{m}{n}x) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{m}{n}f(x)$

从而，可得知 $\forall q \in Q, \forall x \in R^1, f(qx) = qf(x)$，代入 $f(1) = c$ 即得 $f(q) = cq$。

接着利用函数的连续性，对任意无理数 r，对 r 通过有理数列 q_k 进行逼近，$q_k \to r, k \to \infty$，因为 f 是连续的，因此可以对 $f(r)$ 通过 $f(q_k), k \to \infty$ 进行逼近，即

$$f(r) = \lim_{k \to \infty} f(q_k) = \lim_{k \to \infty} cq_k = cr \tag{8}$$

(3) 假设有 f 在 R^1 上不连续，但 f 是 R^1 上的实值可测函数，我们可以利用 Luzin 定理对其进行推导解答。

因 $f(x+h)-f(x)=f(h)$，$f(0)=0$，所以只要 f 在零点连续，f 在 R 上就连续。

取 $E=[-a,a]$，由 Luzin 定理，对 $\forall 0<\eta<\frac{a}{2}$，存在 E 中闭子集 F 使得 $\mu(E-F)<\eta$，且 f 在 F 上连续，换句话说，对 $\forall\epsilon>0,\exists 0<\delta<\frac{a}{2}$，使得对 $\forall x_1,x_2\in F,|x_2-x_1|<\delta\colon|f(x_2)-f(x_1)|<\epsilon$

目前我们的目标是证明上面的式子对于整个 E 都成立，即 $\forall y_1,y_2\in E,|y_2-y_1|<\delta\colon|f(y_2)-f(y_1)|<\epsilon$

这里，令 $y_2=y_1+d,d<\theta<\frac{a}{2}$，这里只要能证明对上面的 y_1 和 y_2，存在平移的 $x_1,x_2\in F$，使得 $x_2=x_1+d$ 即可，即

$$A=F\cap(F+\{d\})\neq\varnothing \tag{9}$$

由于 Lebesgue 测度的平移不变性

$$\mu(E+\{d\})=\mu(E) \tag{10}$$

可以对 A 的测度进行推导

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mu(F)+\mu(F+\{d\})-\mu(F\cup(F+\{d\}))\\&=2\mu(F)-\mu(F\cup(F+\{d\}))\\&\geq 2\mu(F)-2a-d\\&=2(\mu(E)-\mu(E-F))-2a-d\\&=2(2a-\eta)-2a-d\\&>2(2a-\frac{a}{2})-2a-d\\&=a-d>0\end{aligned}$$

因此 A 的测度大于 0，即 A 不为空，这表明 f 在整个 E 上都是连续的，继而 f 在零点连续，也在整个 R 上连续，根据 (2) 中推导的结论，可得若 f 为 Lebesgue 可测实函数且 f 满足条件式，则 f 一定为连续函数，因此 $f(x)=cx$ 恒成立

3 Lebesgue 不可测函数和选择公理

通过前面的推导可知，对简化过的实系统 f(x)，如果 f 为 Lebesgue 可测实函数，则叠加性一定能推导出齐次性，因此，若想要构造满足叠加性不满足齐次性的实系统，f 必须得是 Lebesgue 不可测函数。

当前，数学家能构造出的 Lebesgue 不可测函数，多是利用选择公理构造而成

的，目前还没有 Lebesgue 不可测函数是否一定要依赖于选择公理的证明。

在这里，首先对选择公理进行一个说明。

由于哥德尔不完备定理，不存在一个完备的数学系统可以证明或证伪所有的理论，因此在构建新的数学理论时必定会引入新的公理。而选择公理就是构建现代集合论 ZFC 时所引入的一条公理。

选择公理，用通俗的解释方法来说就是，对任意数量（可以是无限）的集合，都可以从每一个集合中任取一个元素，形成一个新的集合。需要注意的是，选择公理具有非构造性，即选取元素的方法完全是随机的，无法指出具体选取元素的方法。选择公理的数学描述如下：

$$\forall X: \varnothing \notin X, \exists f: X \to \bigcup X, \forall A \in X(f(A) \in A)] \tag{11}$$

而选择公理也有两个等价的定理或引理。

首先是良序定理。

偏序集表示集合内任意两个元素之间都可以进行大小的比较，而良序集表示集合内存在最小的元素。而良序定理则说明，任意一个集合，都能找到一个与之等势的良序集，也就是说，任何一个集合都能被转化为一个良序集。

还有一个较为重要的等价定理是 Zorn 引理。Zorn 引理说明，如果一个偏序集的任意子集都具有上界，那么这个偏序集本身包含极大元。

上述的两个等价性公理在后续系统的构造证明中有较大的用处。

4 满足叠加性不满足齐次性实系统的构造

对于满足叠加性不满足齐次性实系统的构造，我们可以先以满足叠加性不满足齐次性的复系统为参考，进行构造和设计。

回想复系统时满足叠加性不满足齐次性实系统的构造，我们使用了当前函数值和函数共轭的加法。这个构造方法能够成功的原因是，复数域 C 和实数域 R 都是加法和乘法封闭的，但是实数乘以一个虚数的结果必定是复数。经过该系统后，原本的复数输入被变为了实数输出，这样，在叠加性上，函数仍旧进行一种线性运算，但是在齐次性上，函数经过数乘，其值域产生逃逸，从 R 变为了 C，因此使得齐次性被破坏。

更具体地来阐释上述函数，系统做的实际上就是构建复数域到实数域的映射，而复数域作为实数域组成的二维线性空间，通过将复数投影到实数轴上，既能保留原有的复数域上的线性性质，又能实现复数到实数的映射。

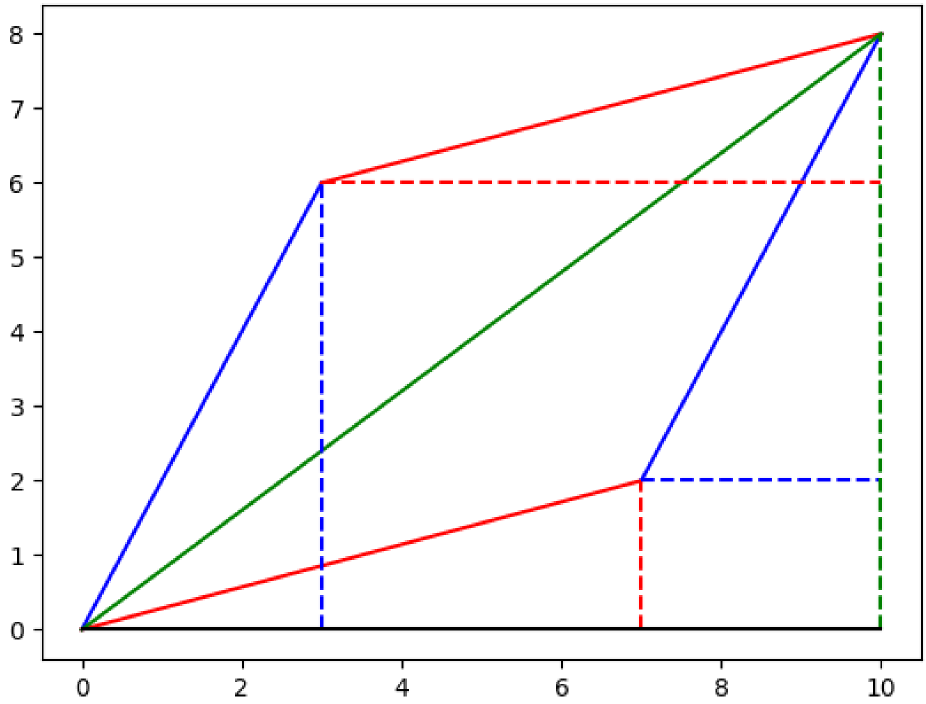

图 1: 复数域上函数示意图

而对于实数域上的函数，我们也可以通过相同的思想来实现满足叠加性不满足齐次性的情形。

首先，我们构造一个由有理数域张成的实数域线性空间。用数学语言表达即为，构造一个线性空间，该线性空间的基分别为 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in R$，对于任意 $y \in R$，存在唯一的向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in Q$ 使得 $y = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$

下面对这个线性空间的构造进行分析和论证：

(1) 实数域可以被表达为有理数域的线性扩张

任取多个线性无关基向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，其一定包含最大值；现在取多组前面所述的线性无关基向量，直到线性空间可以张成整个实数域，由 Zorn 引理可知，这个线性空间一定是有极值的，即任意再添加一组基，则该线性空间的基之间线性相关。在泛函分析中，这类基被称作 Hamel 基。

(2) 该线性空间维数无穷。

取超越数的整数次幂 $1, \pi, \pi^2, \cdots$，由于 π 为超越数，即该数无法作为一个有理多项式方程的解存在，因此各向量线性独立，因此维度一定是无限维。

通过上述的分析和证明，可以得出，可以将实数表示为无穷维的有理数线性空间。这样，我们就可以很容易得出，要想构造在实数域上满足叠加性不满足齐次性的系统，首先可以将该实数拆分成系数为有理数的无限个基的线性组合 $x =$

$a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$，其中 $a \in Q, e \in R$，这样在该线性空间中的计算就仍旧符合线性性质；然后，对该实数向量取某个基上的投影 $y = x \cdot e_1$，为了简化叙述，将 e_1 定为有理数基 1，其它基则是实数基，这样 x 在 e_1 上的投影便是有理数。如此一来，我们成功构造出了实数到有理数的线性映射，在叠加性方面，由于实数被表示成了线性空间，线性性质仍然存在，在取投影后不会破坏其线性性质；在齐次性方面，f 是实数域到有理数域的投影，如果对 f 实施数乘，会使得数乘后的值域从有理数域逃逸到实数域，使得 $f(cx) = cf(x)$ 的左侧必定为有理数，右侧必定为实数，导致齐次性被破坏。

5 不足与致谢

首先，该方法由于使用了选择公理，导致其构造无法通过具体的方式描述出来，只能证明上文所述的线性空间存在，但无法指出具体的 Hamel 基是什么；其次，本文只讨论了系统泛函收敛到实值函数的情况，对于不同时间之间有相互关联的函数（如 $y(t) = x(t) * x(t-1)$）这类的函数并未能做出充分的论证；另外，由于本人对泛函分析的了解仍旧不够深入，难免会有一些推导上的不明晰与错误，烦请老师谅解。

在这里还是要感谢老师能在课间与平时和我讨论这道富有趣味的题目，也感谢计算机系和数学系学长能听我谈论这个问题，深入交流，如果以后有机会，我还想进一步完善这个课程报告，推导更加严谨。

6 引用

[1] 匡继昌. 实分析与泛函分析 [M]. 高等教育出版社,2015.