# 1　信号モデル

等価低域での送信信号を

$$x(t) = \sum_{l} g\left(t - lT_s\right) \sum_{k=0}^{K-1} X_{l;k} e^{j2\pi \frac{i_k}{T}(t - lT_s)} \tag{1}$$

とする OFDM システムを考える．ここで，$K$ はサブキャリヤ数，$X_{l;k}$ を第 $l$ 番目の OFDM シンボルにおける第 $k$ サブキャリヤでの送信信号，$T$ を有効シンボル長，$g(t)$ を

$$g(t) = \begin{cases} 1 & -T_{\mathrm{GI}} \leq t < T \\ 0 & t < -T_{\mathrm{GI}}, t \geq T \end{cases} \tag{2}$$

を満たすシンボル波形とし，$T_{\mathrm{GI}}$ はガードインターバル長とし，$T_s = T + T_{\mathrm{GI}}$ を満たす．$i_k$ は第 $k$ サブキャリヤの整数インデックスである．

時刻 $t$ での伝送路のインパルス応答を $h(t;\tau)$ とするとき，受信信号は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t;\tau) x(t - \tau) d\tau + n(t) \tag{3}$$

で与えられる．ここで，$n(t)$ は加法性雑音とする．

受信信号の $T/K$ 毎の標本に基づく DFT 出力は

$$\begin{aligned} Y_{l,k} &= \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} y\left(lT_s + \frac{u}{K}T\right) e^{-j\frac{2\pi i_k u}{K}} \\ &= \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) x\left(lT_s + \frac{u}{K}T - \tau\right) d\tau e^{-j\frac{2\pi i_k u}{K}} + N_{l;k} \\ &= \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) \sum_{l_1} g\left(lT_s + \frac{u}{K}T - \tau - l_1 T_s\right) \\ &\times \sum_{k_1=0}^{K-1} X_{l_1;k_1} e^{j2\pi \frac{i_{k_1}}{T}\left(lT_s + \frac{u}{K}T - \tau - l_1 T_s\right)} d\tau e^{-j\frac{2\pi i_k u}{K}} + N_{l;k} \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる．ここで，

$$N_{l;k} = \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} n\left(lT_s + \frac{u}{K}T\right) e^{-j\frac{2\pi i_k u}{K}} \tag{5}$$

とした．伝送路のインパルス応答 $h(t;\tau)$ が $\tau < 0$，$\tau > T_{\mathrm{GI}}$ でゼロであると仮定できるとき，

$$\begin{aligned} Y_{l;k} &= \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} \int_{0}^{T_{\mathrm{GI}}} h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) \sum_{k_1=0}^{K-1} X_{l;k_1} e^{j2\pi \frac{i_{k_1}}{T}\left(\frac{u}{K}T - \tau\right)} d\tau e^{-j\frac{2\pi i_k u}{K}} + N_{l;k} \\ &= \sum_{k_1=0}^{K-1} X_{l;k_1} \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} e^{j2\pi \frac{i_{k_1} - i_k}{K} u} \int_{0}^{T_{\mathrm{GI}}} h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) e^{-j2\pi \frac{i_{k_1}}{T}\tau} d\tau + N_{l;k} \\ &= \sum_{k_1=0}^{K-1} X_{l;k_1} \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} H_{l,u;k_1} e^{j2\pi \frac{i_{k_1} - i_k}{K} u} + N_{l;k} \end{aligned} \tag{6}$$

と書くことができる．但し，

$$H_{l,u;k} = \int_{0}^{T_{\mathrm{GI}}} h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) e^{-j2\pi \frac{i_k}{T}\tau} d\tau \tag{7}$$

とした．$H_{l,u;k}$ が $u$ によらず一定で

$$H_{l;k} \approx H_{l,u;k}, (u = 0, \cdots, K-1) \tag{8}$$

とみなせるとき，

$$\begin{aligned} Y_{l;k} &= \sum_{k_1=0}^{K-1} H_{l;k_1} X_{l;k_1} \frac{1}{K} \sum_{u=0}^{K-1} e^{j2\pi \frac{i_{k_1}-i_k}{K} u} + N_{l;k} \\ &= H_{l;k} X_{l;k} + N_{l;k} \end{aligned} \tag{9}$$

と書ける．

今，

$$\underline{Y}_l = \begin{bmatrix} Y_{l;0} & \cdots & Y_{l;K-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^K \tag{10}$$

$$\boldsymbol{X}_l = \mathrm{diag}\left( \begin{bmatrix} X_{l;0} & \cdots & X_{l;K-1} \end{bmatrix}^T \right) \in \mathbb{C}^{K \times K} \tag{11}$$

$$\underline{H}_l = \begin{bmatrix} H_{l;0} & \cdots & H_{l;K-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^K \tag{12}$$

$$\underline{N}_l = \begin{bmatrix} N_{l;0} & \cdots & N_{l;K-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^K \tag{13}$$

とするとき，

$$\underline{Y}_l = \boldsymbol{X}_l \underline{H}_l + \underline{N}_l \tag{14}$$

と書くことができる．また，加法性雑音ベクトル $\underline{N}_l$ は $\mathrm{E}\left\{\underline{N}_l\right\} = \underline{0}$，$\mathrm{E}\left\{\underline{N}_{l_1} \underline{N}_{l_2}^H\right\} = \delta_{l_1,l_2} \sigma^2 \boldsymbol{I}$ を満たす複素ガウス確率変数ベクトルの標本とする．

## 1.1 伝送路モデル

伝送路のインパルス応答が

$$h\left(lT_s + \frac{u}{K}T; \tau\right) = \sum_{q=0}^{Q-1} h_{l,u;q} \delta\left(\tau - \frac{q}{K}T\right) \tag{15}$$

のように離散モデルとして扱えるとする．当然，$QT/K < T_{\mathrm{GI}}$ が満たされる．但し，$Q$ は $l, u$ によらず一定であるとする．この時，伝送路の周波数応答は

$$H_{l,u;k} = \sum_{q=0}^{Q-1} h_{l,u;q} e^{-j2\pi \frac{i_k q}{K}} \tag{16}$$

と書くことができる．

$\boldsymbol{W} \in \mathbb{C}^{K \times Q}$ の第 $(k, q)$ 要素を

$$[\boldsymbol{W}]_{k,q} = e^{-j2\pi \frac{i_k q}{K}} \tag{17}$$

とし，

$$\underline{h}_{l,u} = \begin{bmatrix} h_{l,u;0} & \cdots & h_{l,u;Q-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^Q \tag{18}$$

とするとき，

$$\underline{H}_{l,u} = \boldsymbol{W} \underline{h}_{l,u} \tag{19}$$

と書くことができる．

本検討では，$\underline{h}_{l,u}$ は $\mathrm{E}\left\{\underline{h}_{l,u}\right\}=\underline{0}$，$\mathrm{E}\left\{\underline{h}_{l,u}\underline{h}_{l,u}^H\right\}=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\xi_0^2 & \cdots & \xi_{Q-1}^2\end{bmatrix}^T\right)$ を満たす複素ガウス確率変数ベクトルの標本とする．但し，

$$\sum_{q=0}^{Q-1}\xi_q^2=1 \tag{20}$$

を満たすものとする．この時，周波数応答の相関は

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{E}\left\{\underline{H}_{l,u}\underline{H}_{l,u}^H\right\}\right]_{k_1,k_2}&=\left[\boldsymbol{W}\,\mathrm{E}\left\{\underline{h}_{l,u}\underline{h}_{l,u}^H\right\}\boldsymbol{W}^H\right]_{k_1,k_2}\\&=\sum_{q=0}^{Q-1}\xi_q^2e^{-j2\pi\frac{i_{k_1}q}{K}}e^{j2\pi\frac{i_{k_2}q}{K}}\\&=\sum_{q=0}^{Q-1}\xi_q^2e^{-j2\pi\frac{i_{k_1}-i_{k_2}}{K}q}\end{aligned} \tag{21}$$

で与えられる．

また，インパルス応答の各パスの時刻方向の相関は

$$\mathrm{E}\left\{h_{l_1,u_1;q}h_{l_2,u_2;q}\right\}=J_0\left(2\pi\left|\left(l_1-l_2\right)T_s+\frac{u_1-u_2}{K}T\right|f_d\right) \tag{22}$$

で与えられるものとする．ここで，$J_0$ は第 0 次第一種ベッセル関数であり，$f_d$ はドップラ周波数とする．

# 2　EM アルゴリズム

本節では，式 (8) の 1OFDM シンボル内での伝送路の時不変性を仮定して議論を進める．また，本節の議論は任意の OFDM シンボル区間で成立するので，特に断らない限り，OFDM シンボル番号 $l$ の表記を省略して記述する．

ここでの問題は $\underline{Y}$ を観測したときに，$\underline{h}$ を推定することである．この最適な規範は最大事後確率規範であり，

$$\begin{aligned}\hat{\underline{h}}&=\underset{\underline{h}\in\mathbb{C}^Q}{\arg\max}\ln p\left(\underline{h}\mid\underline{Y}\right)\\&=\underset{\underline{h}\in\mathbb{C}^Q}{\arg\max}\ln p\left(\underline{h},\underline{Y}\right)\\&=\underset{\underline{h}\in\mathbb{C}^Q}{\arg\max}\ln\sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K}p\left(\boldsymbol{X},\underline{h},\underline{Y}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

と書ける．ここで，$\mathbb{S}$ は $X_k$ の可能なシンボル集合である．しかしながら，この最大化問題は閉じた形で解くことはできない．今，$\underline{h}$ のある推定値 $\hat{\underline{h}}^{(i)}$ の条件付きでの $\boldsymbol{X}$ に関するある確率密度関数 $q\left(\boldsymbol{X}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)$ を導入すると，最大化の目的関数は，イェンセンの不等式を用いると

$$\begin{aligned}\ln\sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K}p\left(\boldsymbol{X},\underline{h},\underline{Y}\right)&=\ln\sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K}q\left(\boldsymbol{X}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)\frac{p\left(\boldsymbol{X},\underline{h},\underline{Y}\right)}{q\left(\boldsymbol{X}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)}\\&\geq\sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K}q\left(\boldsymbol{X}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)\ln\frac{p\left(\boldsymbol{X},\underline{h},\underline{Y}\right)}{q\left(\boldsymbol{X}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)}\\&=B\left(\underline{h}\mid\hat{\underline{h}}^{(i)}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

のように下限を抑えられる．当初の目的関数を直接的に最大化する点推定は困難であるので，この下限 $B$ を最大化する点推定を考える．次の問題は任意に設定できる確率密度関数 $q$ の選定である．この下限

は $\underline{h}$ と $q$ に依存するので，$\underline{h} = \underline{\hat{h}}^{(i)}$ において，この下限を最大とするように $q$ を選ぶことを考える．そこで，ラグランジュ未定乗数法によりパラメタである $q$ を決定する．

$$f(q) = \lambda \left(1 - \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} q\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right)\right) + \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} q\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) \ln \frac{p\left(\boldsymbol{X}, \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)}{q\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right)} \tag{25}$$

なるラグランジュ方程式を考えるとき，$q$ に関する偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \lambda + \ln p\left(\boldsymbol{X}, \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) - \ln q\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) - 1 \tag{26}$$

が 0 となる $q$ は

$$q\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) = \frac{p\left(\boldsymbol{X}, \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)}{\sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X}, \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)} = p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \tag{27}$$

となる．この時，下界関数は

$$B\left(\underline{h} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) = \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln \frac{p\left(\boldsymbol{X}, \underline{h}, \underline{Y}\right)}{p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)} \tag{28}$$

で与えられる．また，

$$\begin{aligned} B\left(\underline{\hat{h}}^{(i)} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) &= \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \\ &= \ln p\left(\underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

であるので，下限 $B$ は $\underline{h} = \underline{\hat{h}}^{(i)}$ において，最大化の目的関数 $\ln p\left(\underline{h}, \underline{Y}\right)$ と接する．したがって，

$$\hat{h}^{(i+1)} = \underset{\underline{h} \in \mathbb{C}^Q}{\arg\max}\, B\left(\underline{h} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) \tag{30}$$

によって，$\underline{h}$ の推定値を更新していけばよい．また，

$$\begin{aligned} B\left(\underline{h} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) &= \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\boldsymbol{X}, \underline{h}, \underline{Y}\right) - \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \\ &\propto \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\underline{Y} \mid \boldsymbol{X}, \underline{h}\right) p\left(\boldsymbol{X}, \underline{h}\right) \\ &\propto \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\underline{Y} \mid \boldsymbol{X}, \underline{h}\right) p\left(\underline{h}\right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \ln p\left(\underline{Y} \mid \boldsymbol{X}, \underline{h}\right) + \ln p\left(\underline{h}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

と書くことができる．ここで，

$$p\left(\underline{Y} \mid \boldsymbol{X}, \underline{h}\right) = \frac{1}{\left(\pi\sigma^2\right)^{LK}} \exp\left(-\frac{\left\|\underline{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\underline{h}\right\|^2}{\sigma^2}\right) \tag{32}$$

であるので，

$$B\left(\underline{h} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}\right) \propto -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \underline{\hat{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \left\|\underline{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\underline{h}\right\|^2 + \ln p\left(\underline{h}\right) \tag{33}$$

と書ける．

## 2.1 ML 規範の場合

$\underline{h}$ の事前確率 $p(\underline{h})$ が利用できない場合を考える．この時，

$$\begin{aligned} B\left(\underline{h} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}\right) &\propto \sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \|\underline{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\underline{h}\|^2 \\ &\propto \sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \left\{\left(\underline{h} - \hat{\underline{h}}\right)^H \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\left(\underline{h} - \hat{\underline{h}}\right)\right. \\ &\left.+ 2\Re\left\{\underline{h}^H\left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\hat{\underline{h}} - \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\underline{Y}\right)\right\}\right\} \end{aligned} \tag{34}$$

であるので，$\underline{h}$ の推定値の更新は

$$\hat{\underline{h}}^{(i+1)} = \left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{R}^{(i)}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}^H\left(\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)}\right)^H\underline{Y} \tag{35}$$

で行うことができる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)} = \sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{K\times K} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{R}^{(i)} = \sum_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^K} p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{K\times K} \tag{37}$$

とした．$\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)}$ は $\hat{\underline{h}}^{(i)}$ の条件での $\boldsymbol{X}$ の期待値，$\boldsymbol{R}^{(i)}$ は原点周りの 2 次モーメント行列である．但し，$\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)}$ と $\boldsymbol{R}^{(i)}$ は $\boldsymbol{X}$ に対応するためいずれも対角行列であることに注意する．更に，$\boldsymbol{R}^{(i)}$ は実対角行列であることに注意する．

次に，$p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)$ について議論を進める．$p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right)$ は $\boldsymbol{X}$ に関する同時分布であるが，$\boldsymbol{X}$ の変動がその要素毎に独立であると仮定できる場合，

$$p\left(\boldsymbol{X} \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) = \prod_{k=0}^{K-1} p\left(X_k \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) \tag{38}$$

と書くことができる．また，

$$p\left(X_k \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, \underline{Y}\right) = p\left(X_k \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, Y_k\right) \tag{39}$$

と書ける．ここで，$X_k$ は $Y_k$ にのみ影響することに注意する．この時，

$$\left[\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)}\right]_{k,k} = \sum_{X_k\in\mathbb{S}} p\left(X_k \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, Y_k\right) X_k \tag{40}$$

$$\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]_{k,k} = \sum_{X_k\in\mathbb{S}} p\left(X_k \mid \hat{\underline{h}}^{(i)}, Y_k\right) |X_k|^2 \tag{41}$$

## 2.2 パイロット信号の場合

$\boldsymbol{X}$ が受信機で既知のパイロット信号である場合，

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{(i)} = \boldsymbol{X} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{R}^{(i)} = \boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X} \tag{43}$$

となり，$i$ に依存しない．したがって，伝送路のインパルス応答の推定値は

$$\begin{aligned} \hat{\underline{h}} &= \left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\underline{Y} \\ &= \left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\underline{h} + \underline{N}\right) \\ &= \underline{h} + \left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\right)^{-1}\underline{N} \end{aligned} \tag{44}$$

で与えられる．

## 2.3 パイロット信号でない場合

$X_k$ が受信機で既知のパイロット信号でない場合，$X_k$ の事前確率 $p\left(X_k\right)$ は $X_k$ によらず一定の $1/\left|\mathbb{S}\right|$ であるとすると，

$$p\left(X_k|\underline{\hat{h}}^{(i)}, Y_k\right) = \frac{\exp\left(-\frac{\left|Y_k - X_k\hat{H}_k^{(i)}\right|^2}{\sigma^2}\right)}{\sum_{\tilde{X}_k\in\mathbb{S}}\exp\left(-\frac{\left|Y_k - \tilde{X}_k\hat{H}_k^{(i)}\right|^2}{\sigma^2}\right)} \tag{45}$$

と書ける．ここで，$\hat{H}_k = \left[\boldsymbol{W}\underline{\hat{h}}^{(i)}\right]_k$ とする．

$\left|X_k\right|^2 = c_k$ である時,

$$\left[\boldsymbol{R}^{(i)}\right]_{k,k} = c_k \tag{46}$$

となり，$\left(\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{R}^{(i)}\boldsymbol{W}\right)^{-1}$ は $i$ によらないため，その演算は事前の 1 回で良い．

# 付録 A　相関のある複素ガウス乱数生成

$\underline{x} = \begin{bmatrix}x_0 & \cdots & x_{K-1}\end{bmatrix}^T$ が $\mathrm{E}\left\{\underline{x}\right\} = \underline{0}$，$\mathrm{E}\left\{\underline{x}\underline{x}^H\right\} = \boldsymbol{R}$ を満たす複素ガウス確率変数ベクトルの標本とする．$\boldsymbol{R}$ はエルミート行列であるので，その固有値はすべて実数であり，その固有値を対角に並べた行列を $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\lambda_0 & \cdots & \lambda_{K-1}\end{bmatrix}^T\right)$ とすると，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H$ と表すことができる．但し，$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}\underline{u}_0 & \cdots & \underline{u}_{K-1}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{K\times K}$ は固有ベクトルを並べた行列であり，ユニタリ行列となる．$\underline{u}_k$ は $\lambda_k$ に対応する固有ベクトルとする．

今，$\underline{y} = \begin{bmatrix}y_0 & \cdots & y_{K-1}\end{bmatrix}^T$ を $\mathrm{E}\left\{\underline{y}\right\} = \underline{0}$，$\mathrm{E}\left\{\underline{y}\underline{y}^H\right\} = \boldsymbol{I}$ を満たす複素ガウス確率変数ベクトルの標本とする．この時,

$$\underline{x} = \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\underline{y} \tag{47}$$

によって $\underline{x}$ を生成することで,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left\{\underline{x}\right\} &= \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\,\mathrm{E}\left\{\underline{y}\right\}\\ &= \underline{0} \qquad (48)\\ \mathrm{E}\left\{\underline{x}\underline{x}^H\right\} &= \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\underline{y}\left(\boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\underline{y}\right)^H\right\}\\ &= \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\,\mathrm{E}\left\{\underline{y}\underline{y}^H\right\}\left(\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^H\boldsymbol{U}^H\\ &= \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H\\ &= \boldsymbol{R} \qquad (49)\end{aligned}$$

を満たすことができる．

# 付録 B　事後確率計算

$a_m > 0$ の下，$\underline{a} = \left[a_0, \cdots, a_{M-1}\right]^T$ が与えられたとき,

$$x_m = \frac{e^{-a_m}}{c} \tag{50}$$

を求めたい．ここで，

$$c = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-a_m} \tag{51}$$

とする．したがって，

$$\sum_{m=0}^{M-1} x_m = 1 \tag{52}$$

を満たす．この計算は数式上は問題なくとけるが，$a_m$ が非常に大きいとき，桁落ちを引き起こす．

$$X_m = \ln x_m = -a_m - \ln c \tag{53}$$

と書くとき，

$$X_{m_1} - X_{m_2} = -a_{m_1} + a_{m_2} \tag{54}$$

なる恒等式は ${}_M\mathrm{C}_2$ 個成立する．未知変数ベクトルを $\underline{X} = [X_0, \cdots, X_{M-1}]^T$ として，${}_M\mathrm{C}_2 \times M$ の係数行列を $\boldsymbol{A}$ とし，対応する右辺ベクトルを $\underline{b} \in \mathbb{R}^{{}_M\mathrm{C}_2}$ として，

$$\underline{X} = \left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^T \underline{b} \tag{55}$$

と書ける．

例えば，$M = 4$ の場合，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -a_0 + a_1 \\ -a_0 + a_2 \\ -a_0 + a_3 \\ -a_1 + a_2 \\ -a_1 + a_3 \\ -a_2 + a_3 \end{bmatrix} \tag{57}$$