

数字图像处理思考题

161220096 欧阳鸿荣

1.证明仿射变换保持共线性

假设仿射变换前任取共线的三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 变换后为 $A'(x'_1, y'_1), B(x'_2, y'_2), C(x'_3, y'_3)$ 。

设仿射变换矩阵为 T ,则根据仿射变换的性质, 则有 T 为满秩矩阵。则有仿射变换如下:

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

两边取行列式, 则有(参考网址):

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |T| \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

由于 A, B, C 三点共线, 则有:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

由于 T 是满秩矩阵, 因此显然 $|T| \neq 0$, 因此只能:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

因此有变换后的 A', B', C' 三点共线。

综上所述可知, 仿射变换保持共线性, 共线的点变换后依然共线。

2.证明放射变化保持距离比例

设变换前的空间任取两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设线段 AB 上一点为 $M(x, y)$, 不妨令

$$\begin{aligned} p_A &= [x_1, y_1, 1]^T \\ p_B &= [x_2, y_2, 1]^T \\ p_M &= [x_3, y_3, 1]^T \end{aligned}$$

设 A, B, C 三点共线, 令 $\lambda = \frac{AM}{MB}$ 则满足:

$$p_M - p_A = \lambda(p_B - p_M)$$

则对仿射变换后的 $A'(x'_1, y'_1), B'(x'_2, y'_2), M'(x'_3, y'_3)$, 有:

$$\begin{aligned}p'_A &= Tp_A \\ p'_B &= Tp_B \\ p'_M &= Tp_M\end{aligned}$$

则有：

$$Tp_M - Tp_A = T(p_M - p_A) = T\lambda(p_B - p_M) = \lambda T(p_B - p_M) = \lambda(Tp_B - Tp_M)$$

即：

$$p'_M - p'_A = \lambda(p'_B - p'_M)$$

因此变换后的 $\frac{A'M'}{M'B'}=\lambda$

因此仿射变换后保持距离比例