数字图像处理思考题

161220096 欧阳鸿荣

1.对于$\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}$,当$p\to\infty$时，有棋盘距离 $\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}=max(x_1,x_2)$

证明如下：

不妨令$x_1\geq x_2\geq 0$，假设：$\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}=max(x_1,x_2)=x_1$成立，则有如下变形：

$$x_1^p+x_2^p=x_1^p$$

在不涉及极限的情况下，该式子仅在$x_2=0$时成立。

考虑其代数意义，表明在幂次p作用下x_2相比x_1可忽略不计，因此猜想$p\to\infty$时棋盘距离成立。

由题意，有如下式子：

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}\geq\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{x_1^p}=x1$$
$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}\leq\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{2x_1^p}=\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{2}\cdot x_1=x1$$

从而由夹逼准则可以得到，有：

$$\lim_{p\to\infty}\sqrt[p]{x_1^p+x_2^p}=x_1=max(x_1,x_2)$$

成立，证明完毕。

2.对于$\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p}{2}}$,当$p\to 0$时，有 $\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p}{2}}=\sqrt{x_1x_2}$

证明如下：

不妨令$x_1\geq x_2\geq 0$，假设$\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p}{2}}=\sqrt{x_1x_2}$成立，则有如下变形：

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p}{2}}=\sqrt{x_1x_2}$$
$$\frac{x_1^p+x_2^p}{2}=(x_1x_2)^{\frac{p}{2}}$$
$$(x_1^{\frac{p}{2}}-x_2^{\frac{p}{2}})=0$$

则需满足

$$x_1^{\frac{p}{2}}=x_2^{\frac{p}{2}}\text{，即 }x_1^p=x_2^p$$

则有$p\to 0$时成立，证明完毕