数字图像处理

第三章

空间域图像增强（Part II）

直方图均衡化+算术图像增强

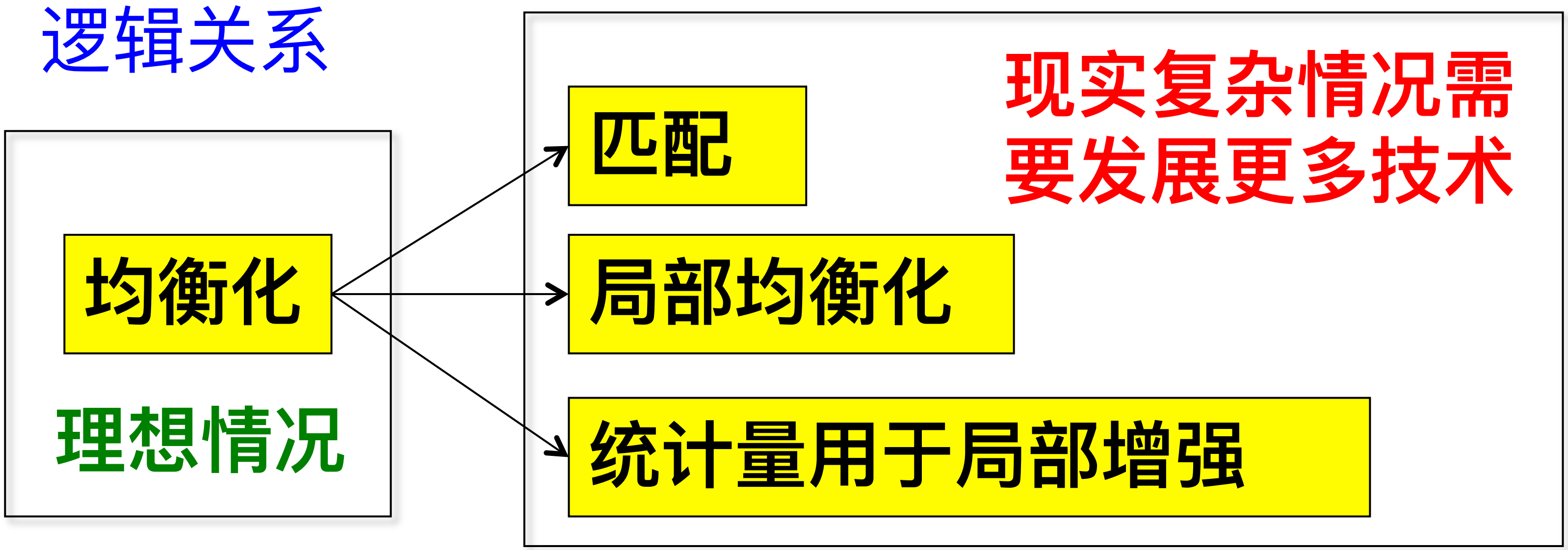
空间域图像增强

- 直方图处理（进阶，稍难）
- 用算术/逻辑操作增强（较简单）

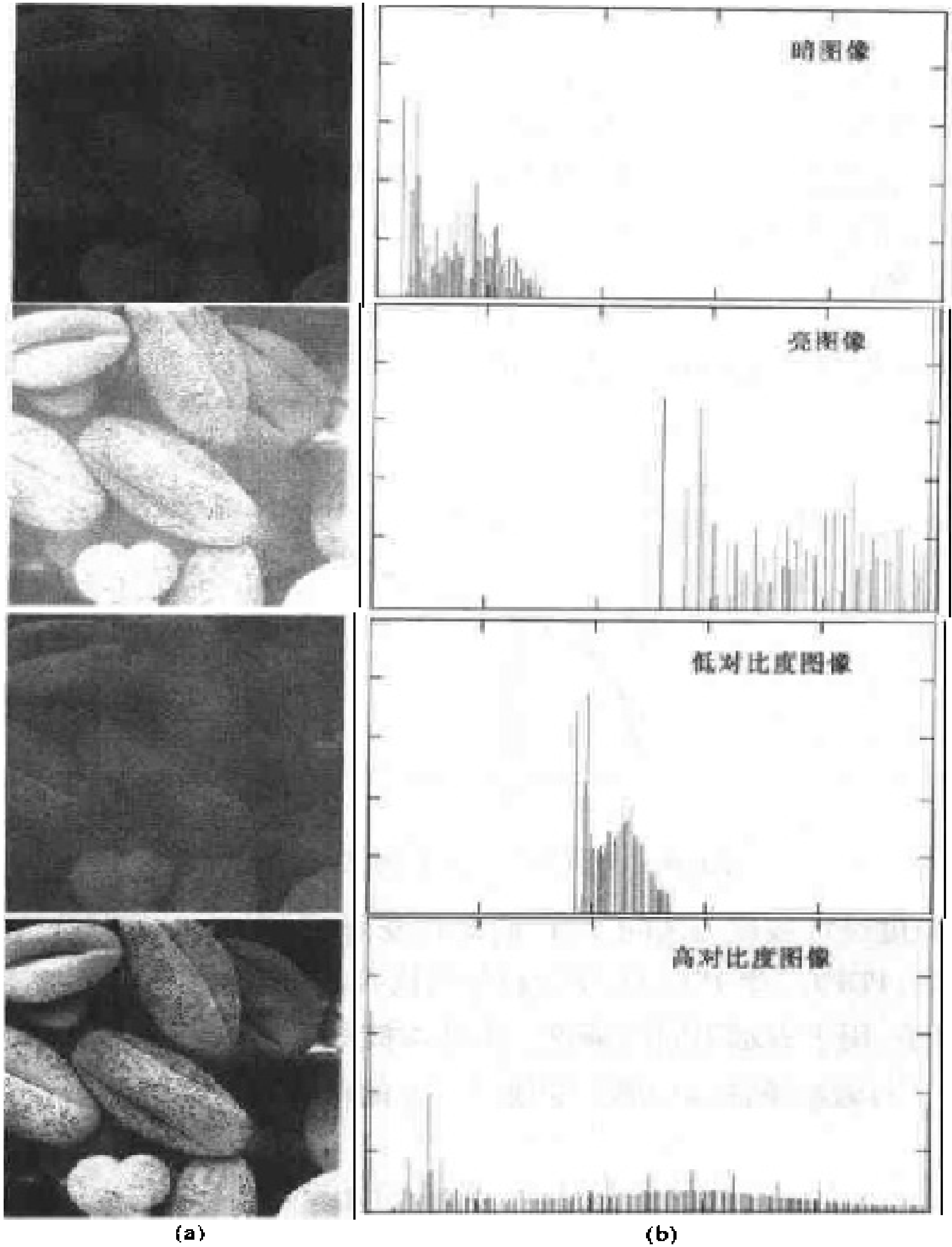
直方图处理

- 直方图均衡化
- 直方图匹配
- 局部直方图均衡化
- 直方图统计量用于局部图像增强

逻辑关系



回顾



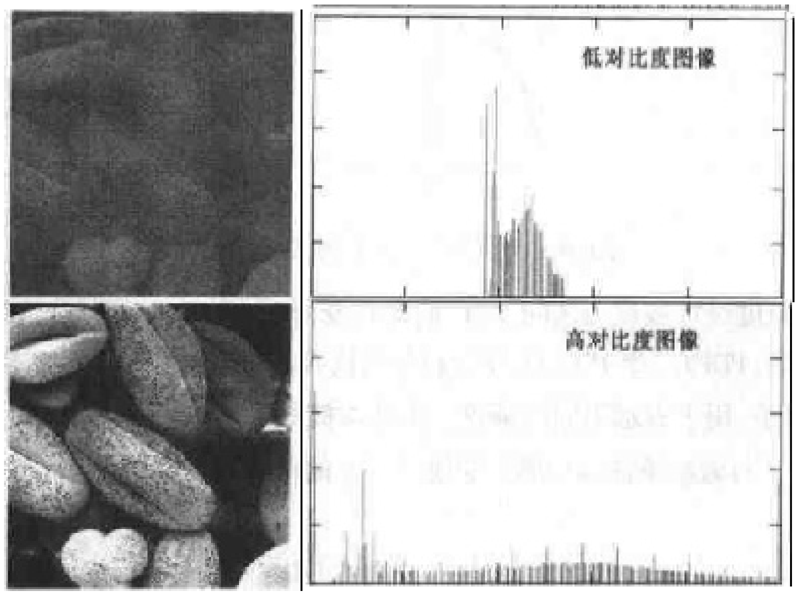
不同的直方图，图像效果的直观感受不同

什么样的的直方图有利于图像增强呢?

均衡化的直方图

直方图均衡化

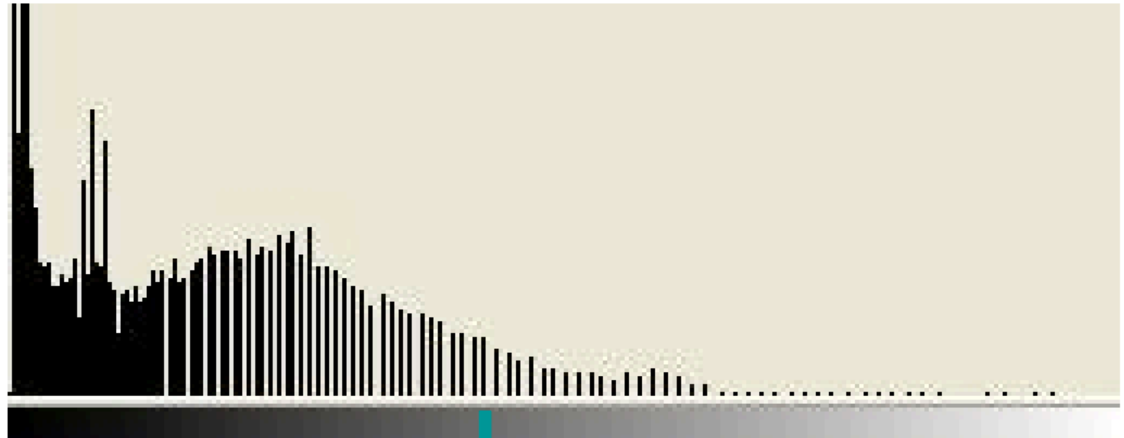
直方图呈均匀分布时，对比度会有明显增强。通过灰度变换函数，将原图像直方图的分布均衡化，这一过程称为直方图均衡化。



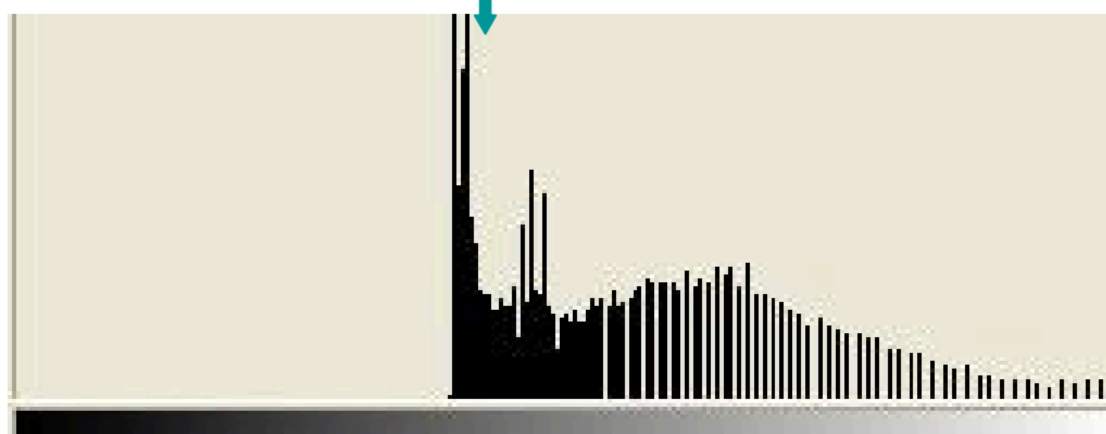
(a) (b)

如何找到相应的灰度变换函数呢?

从简单的例子开始

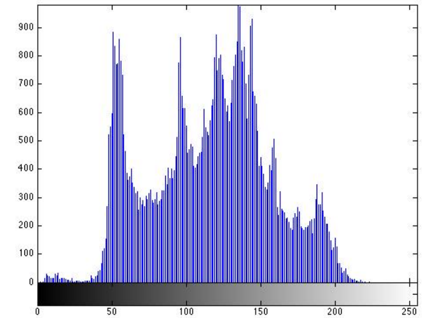


$$D_B = D_A + 1000$$



稍复杂一点的例子

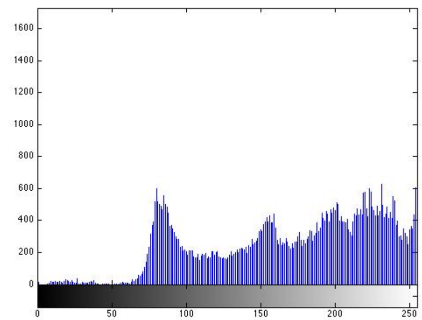
原图



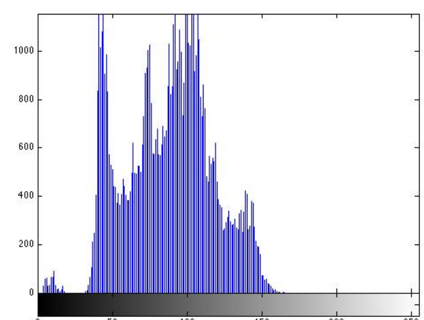
线性运算：

$$D_B = T(D_A)$$
$$= a \times D_A + b$$

$$D_B = 1.5 \times D_A$$



$$D_B = 0.8 \times D_A$$



灰度变换函数与直方图

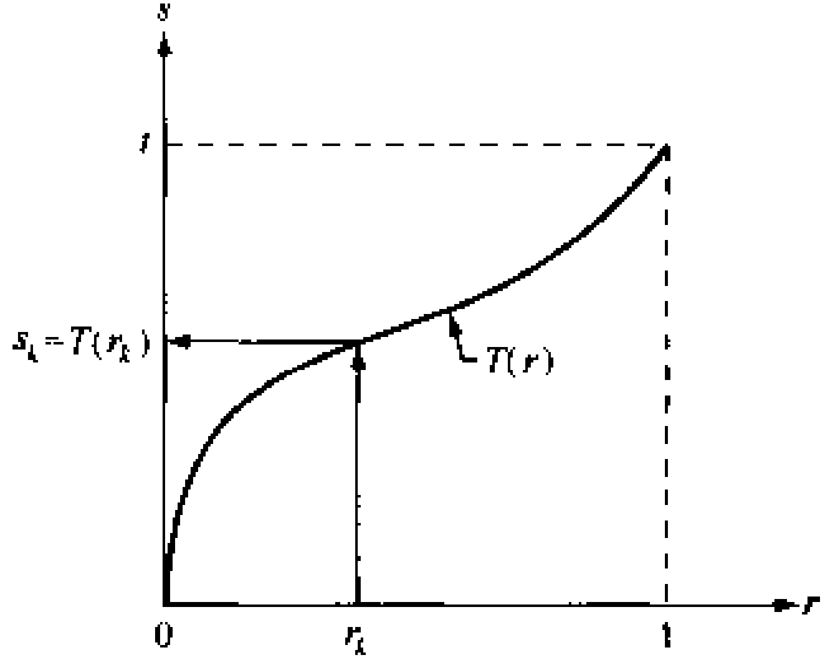
假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数(GST)，产生了输出图像B

输入图像的直方图$H_A(D)$和灰度变换函数GST，如何计算输出图像B的直方图$H_B(D)$?

一般情况，结论复杂

讨论一种简单情况：单调灰度变换函数

单调函数



- 考虑连续函数并让变量r代表待增强图像的灰度级。假设r被归一化到区间[0,1]。
- 灰度变换函数

$$s = T(r), 0 \le r \le 1$$

重要性质：存在反函数

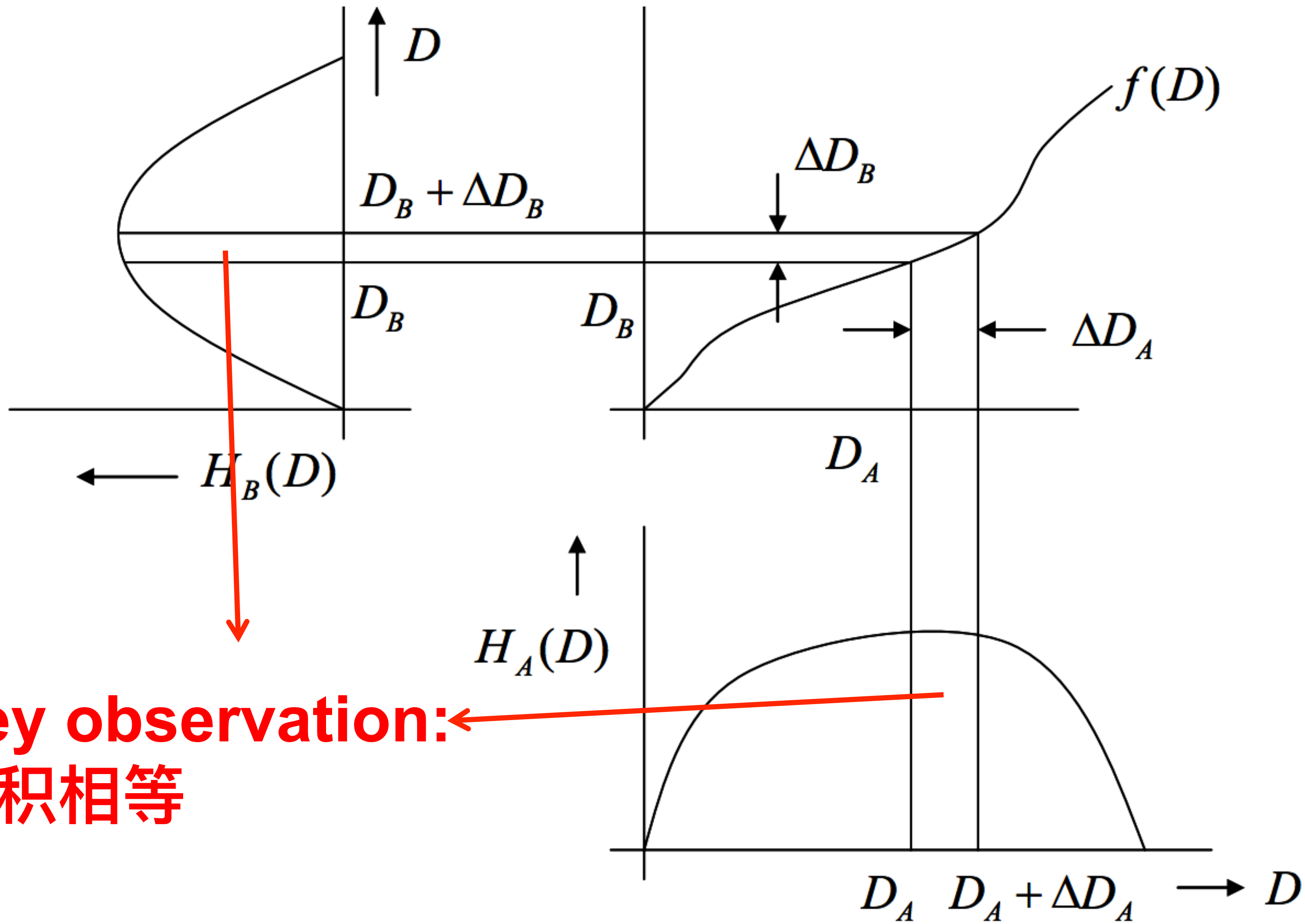
$$r = T^{-1}(s), 0 \le s \le 1$$

(a) $T(r)$ 在区间 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 中为单值且单调递增

(b) 当 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 时，$0 \leqslant T(r) \leqslant 1$

直观示意图

怎么求$H_B(D)$的直方图?



Key observation:
面积相等

推导

- 第一步

$$\int_{D_B}^{D_B+\Delta D_B} H_B(D)\,dD = \int_{D_A}^{D_A+\Delta D_A} H_A(D)\,dD$$

由于面积相等

$$H_B(D_B)\Delta D_B = H_A(D_A)\Delta D_A$$

把积分近似掉

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{\Delta D_B / \Delta D_A}$$

改写

推导

- 第二步：得到通项公式

$$H_B\left(D_B\right)=\frac{H_A\left(D_A\right)}{dD_B/dD_A}=\frac{H_A\left[f^{-1}\left(D_B\right)\right]}{f'\left[f^{-1}\left(D_B\right)\right]}\quad \text{where } f'=\frac{df}{dD}$$

Key: $$\frac{H_A\left(D_A\right)}{dD_B/dD_A}=\frac{H_A\left(D_A\right)}{\left(d/dD_A\right)f\left(D_A\right)}$$ **以及利用反函数**

小测试

线性运算

$$D_B = T(D_A) = a \times D_A + b$$

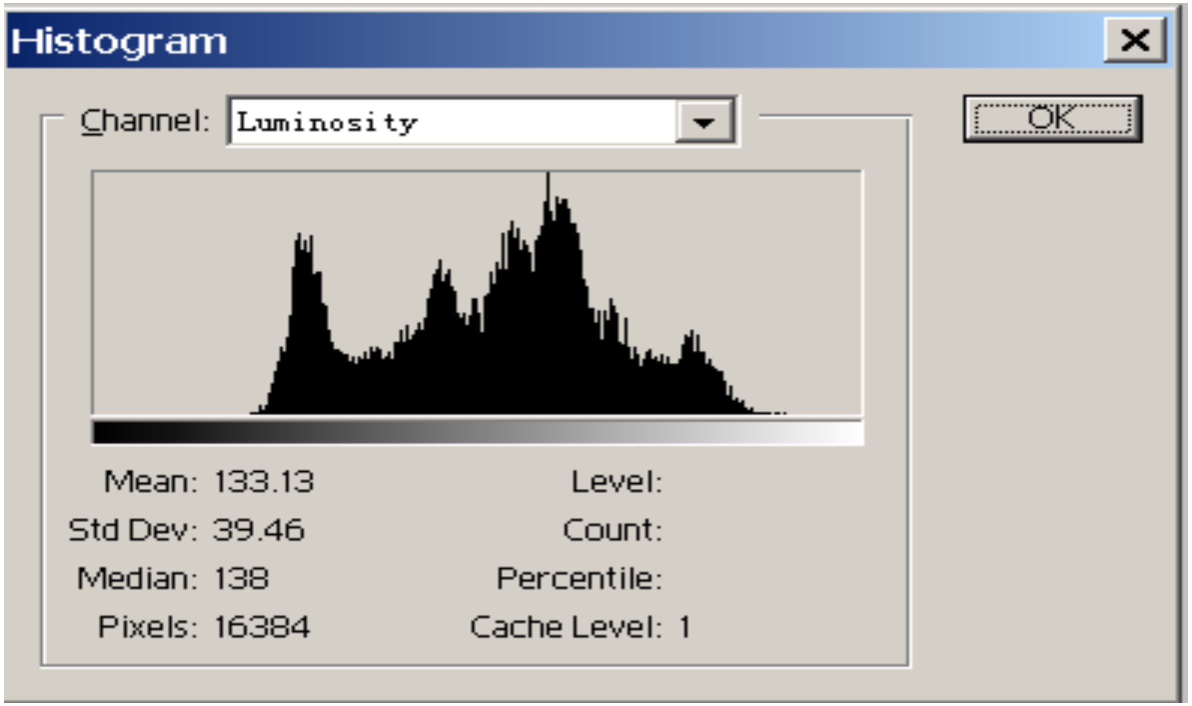
计算$H_A(D)$经线性运算后的直方图$H_B(D)$:

$$D_A = f^{-1}(D_B) = {(D_B - b)}/{a}$$

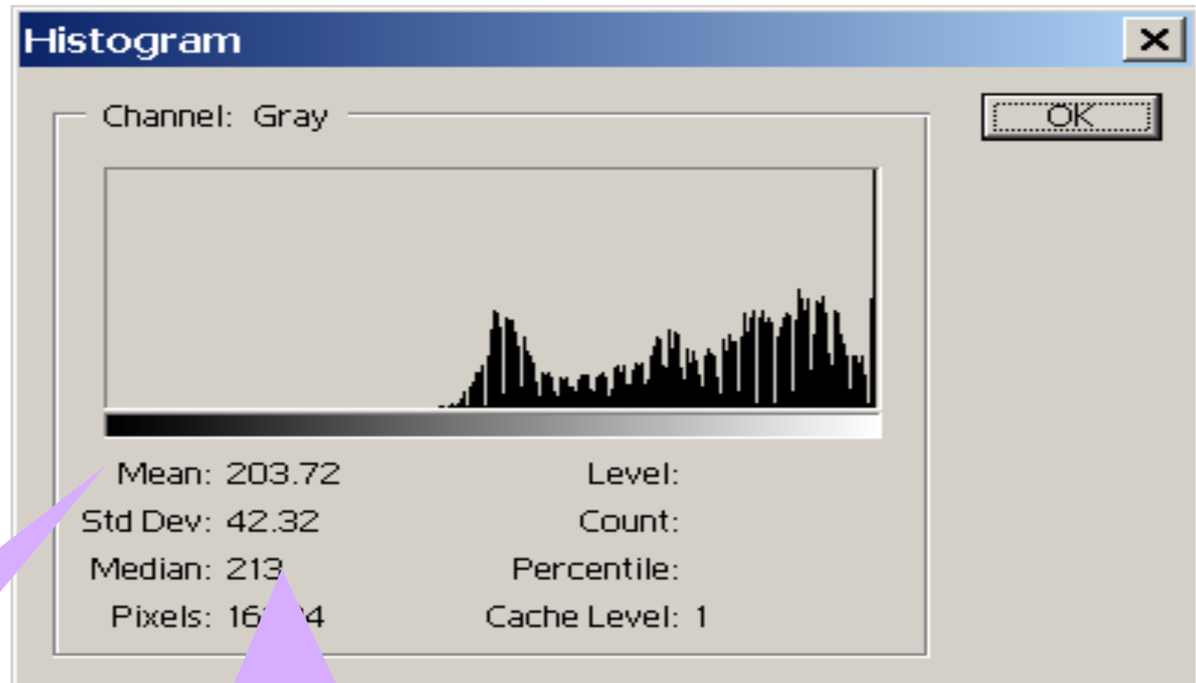
$$H_B(D) = \frac{1}{a} H_A\left(\frac{D-b}{a}\right)$$

举例

$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$



举例

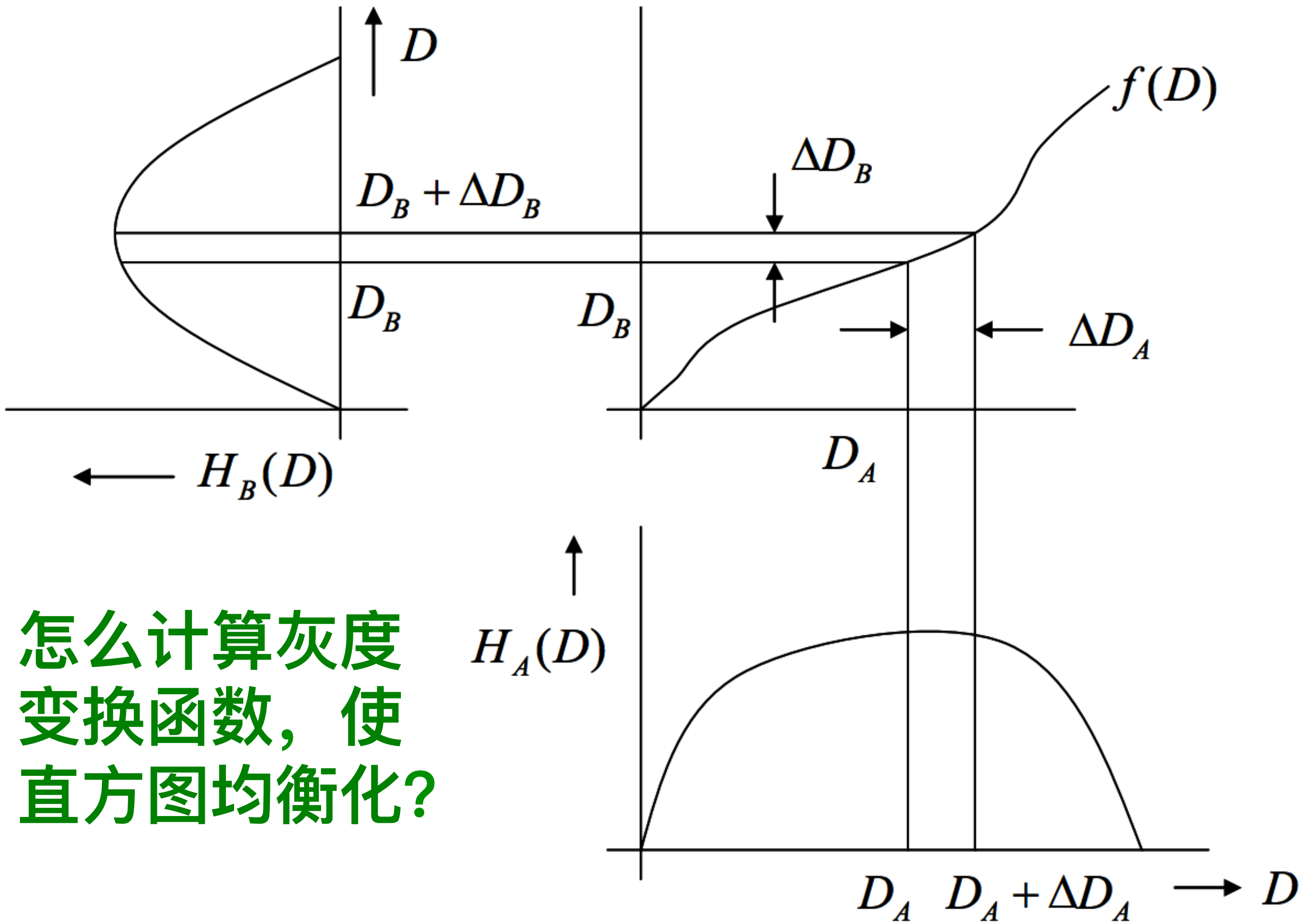


$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$

均值：203.72=1.2*133.13+50

中值：213≈1.2*138+50

直方图均衡化



怎么计算灰度变换函数，使直方图均衡化？

主要思路

请写出直方图均衡化的灰度变换函数?

- 关键步骤

$$\int_0^{D_B} H_B(D)dD = \int_0^{D_A} H_A(D)dD$$

因为D_B是均匀分布

$$\int_0^{D_B} H_B(D)dD = \frac{D_B}{L} \times A_0 = \frac{f(D_A)}{L} \times A_0$$

A0是总像素个数　　L是灰度级个数

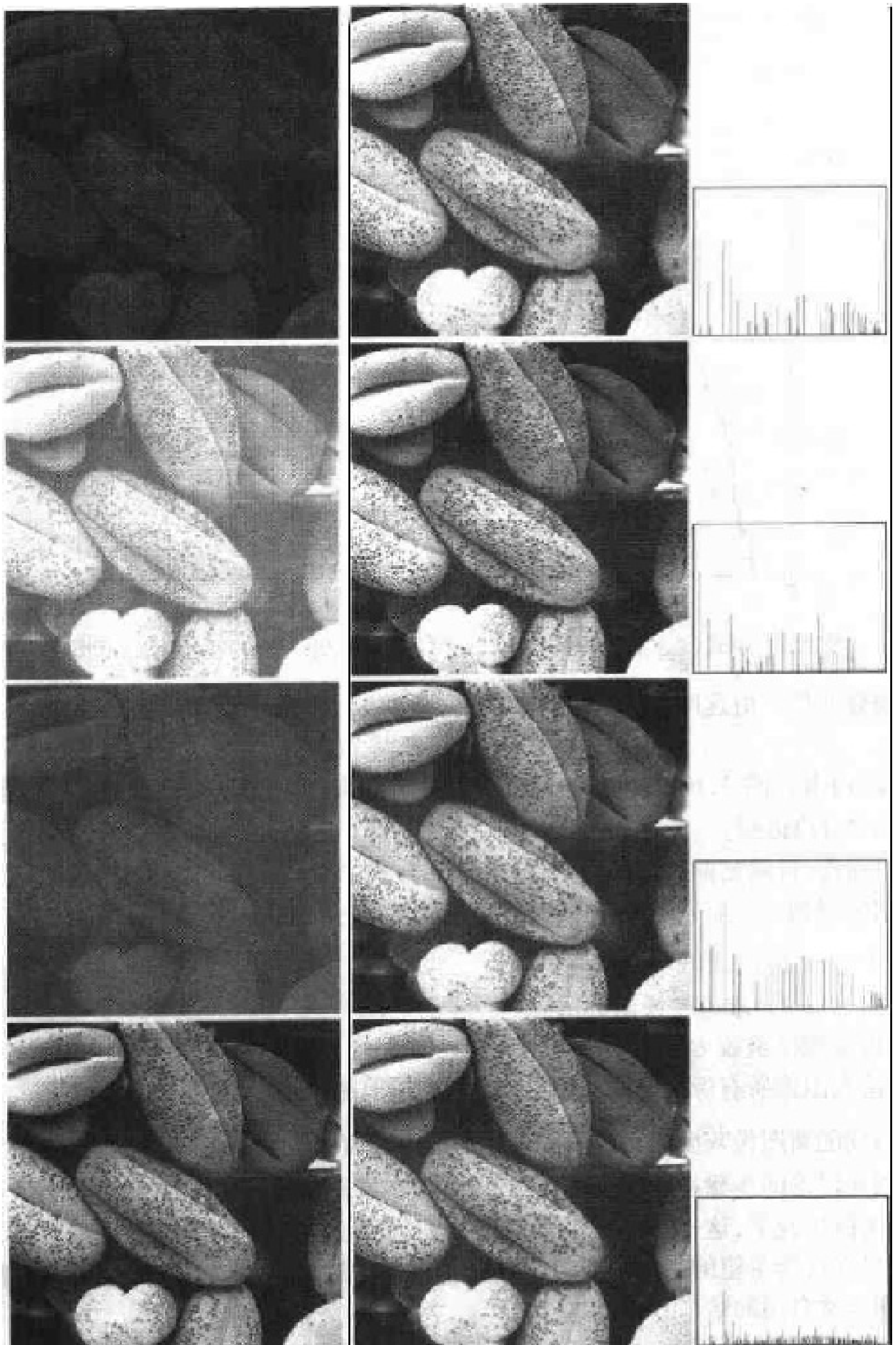
结论

连续形式

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0} \int_0^{D_A} H_A(D) dD$$

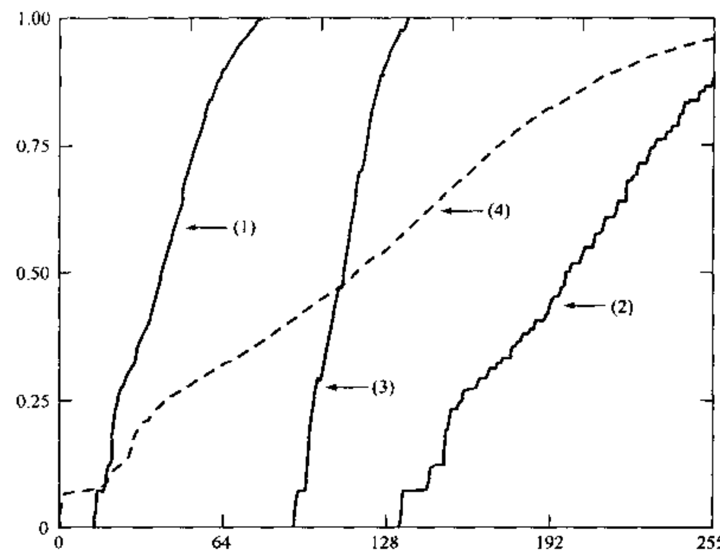
离散形式

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$



(a) (b) (c)

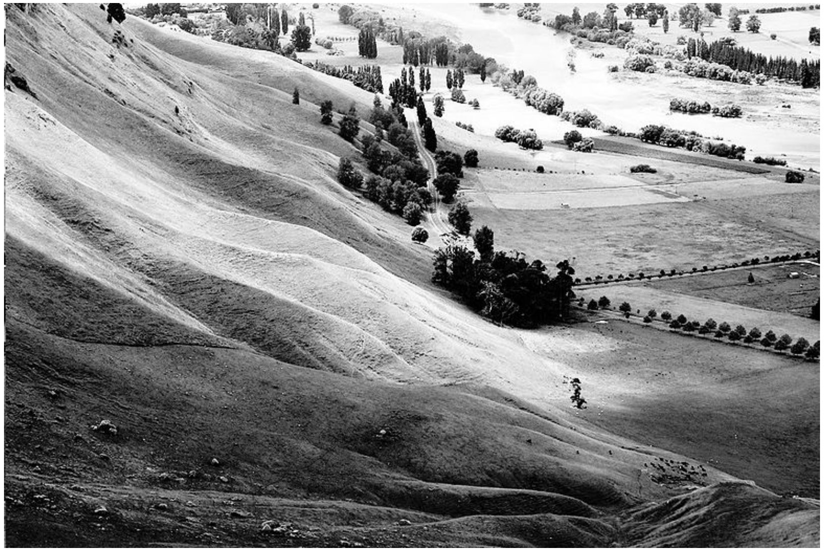
灰度变换函数



更明显的例子

均衡化前

均衡化后



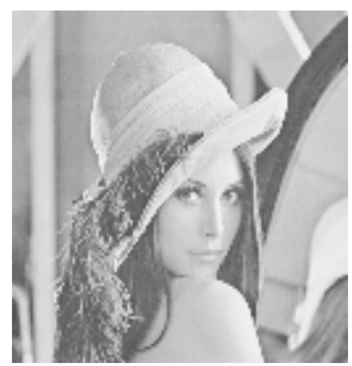
图像明显得
到了增强

直方图匹配（规定化）

- 均匀直方图的基本增强有时并不是最终目标。我们通常希望可以处理后的图像具有某种指定的直方图形状。
- 这种用于产生处理后有特殊直方图的图像的方法，叫做直方图匹配或直方图规定化处理。

灰度变换函数GST

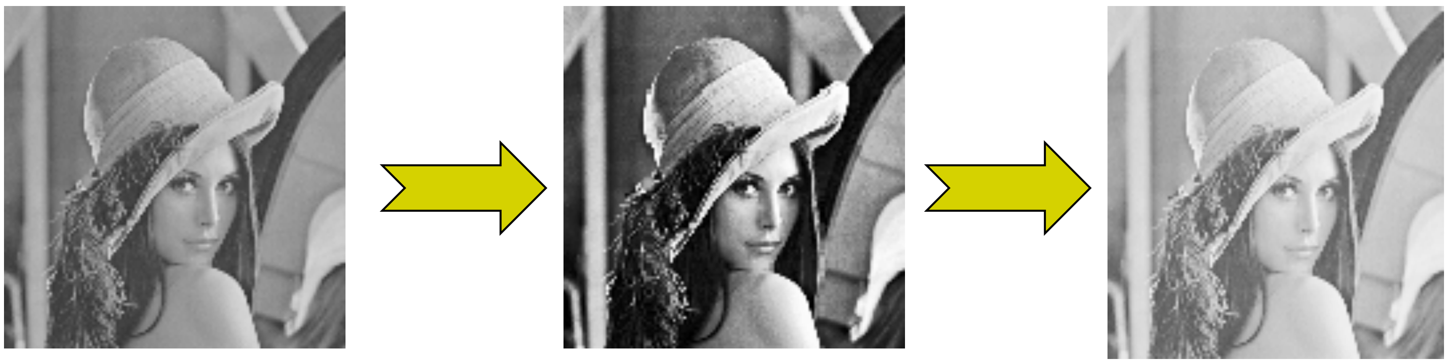
输入



输出

输出直方图分布不要求均匀，要求为某个特定分布

- Key idea：以平衡化直方图图像为桥



A　　均衡化图像B　　C

先把A转化成均衡化图像B

再把B转化成图像C（why）

根据单调灰度变换函数存在反函数

主要的公式

- 步骤：

$$f(D_A)=\frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A}H_A(u)$$

把A转化成均衡化图像B

$$g(D_C)=\frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_C}H_C(u)$$

把C转化成均衡化图像B

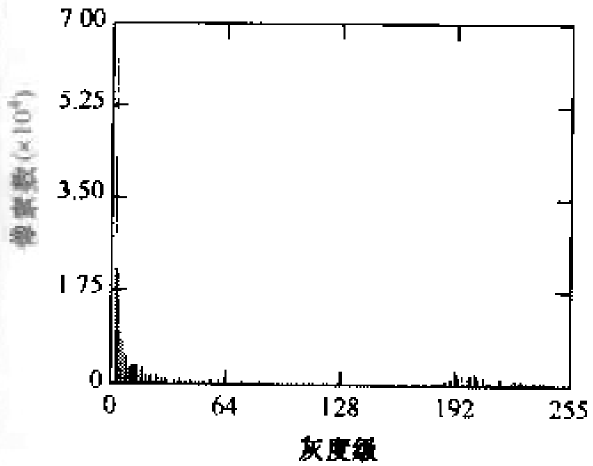
$$D_C=g^{-1}(\frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A}H_A(u))$$

利用反函数

直方图均衡化与直方图匹配

- 火星的卫星图像

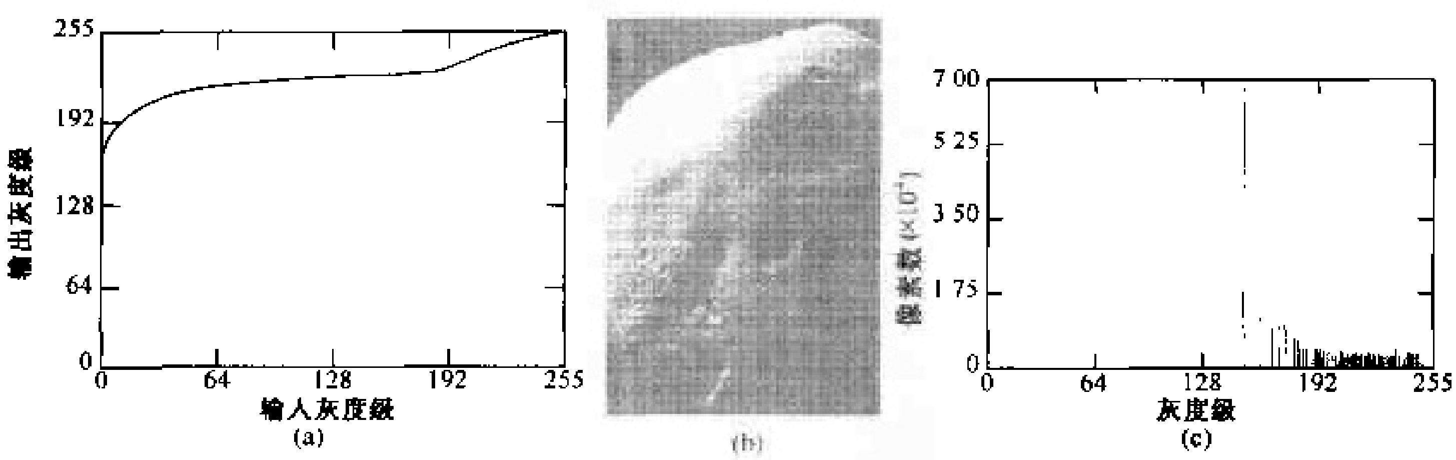

(a)



(b)

直方图均衡化与直方图匹配

- 均衡化效果



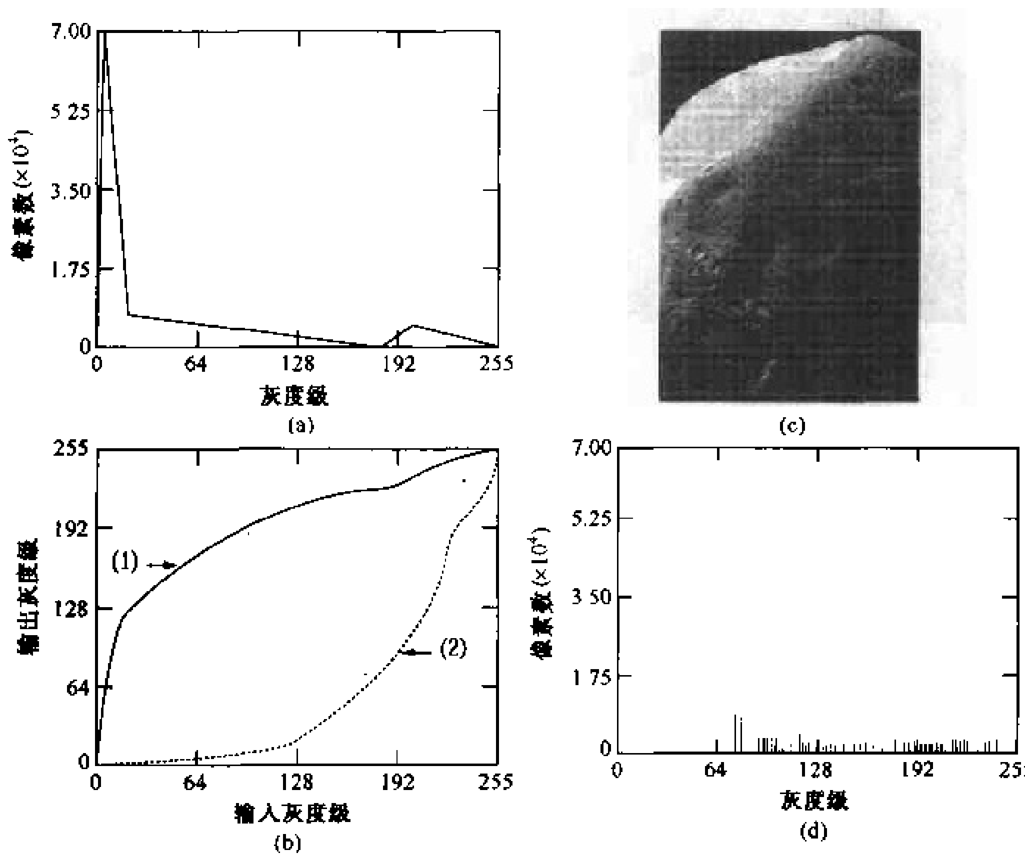
(a) (b) (c)

只是"漂白"了，并没有增加太多信息

直方图均衡化与直方图匹配

- 直方图匹配效果

更靠近原图像，但增加了更多细节

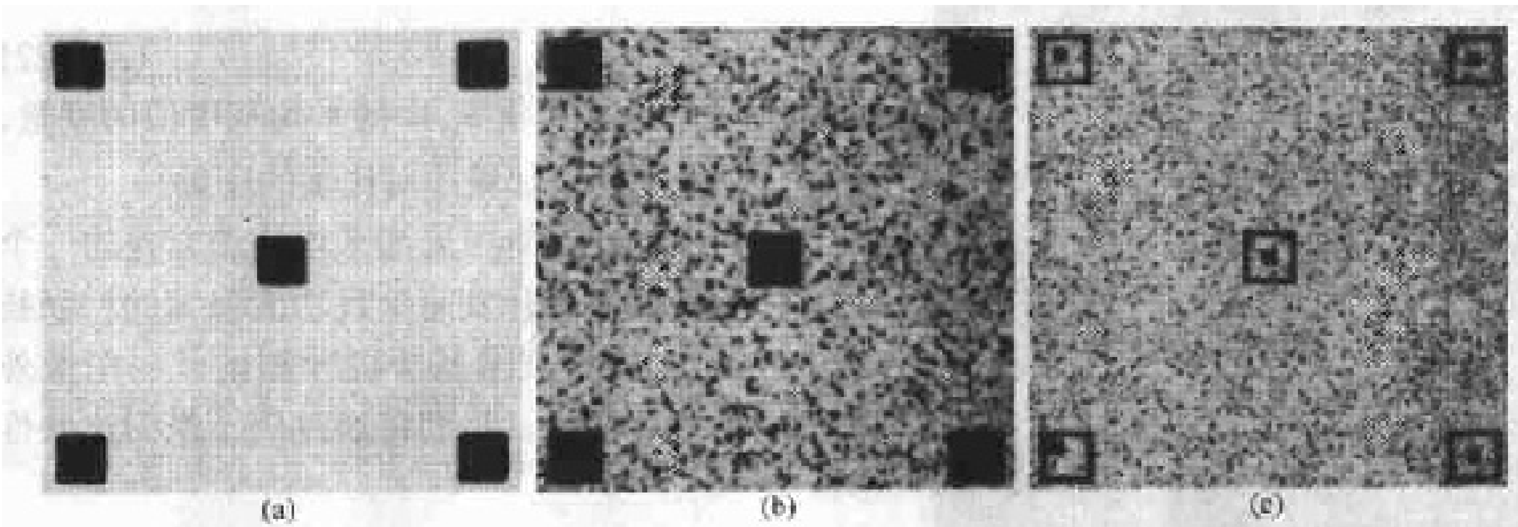


如何确定需要规定的直方图?

与具体问题相关。一旦规定好，就有技术可以处理

局部增强

- 如果不希望对整体图像增强，只希望对局部进行增强怎么办？这类技术就叫做局部增强。



原始图像　　全局直方图增强　　局部直方图增强，取7X7的领域

NOTE：局部直方图均衡化只是局部增强的一种技术；
增强通常会伴随着噪声增大

在图像增强中使用直方图统计学

- 回顾均值、方差

灰度平均值 $$m = \sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

n阶距 $$\mu_n(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^n p(r_i)$$

反应了灰度值的散度

2阶距最常用，也称为方差 $$\mu_2(r) = \sum_{i=0}^{L-1} (r_i - m)^2 p(r_i)$$

思考

$\mu_0(r), \mu_1(r)$

等于什么？

在图像增强中使用直方图统计学

- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{s_{xy}} = \sum_{(s,t)\in S_{xy}} r_{s,t}p(r_{s,t})$$

$$\delta^2_{s_{xy}} = \sum_{(s,t)\in S_{xy}} [r_{s,t} - m_{s_{xy}}]^2 p(r_{s,t})$$

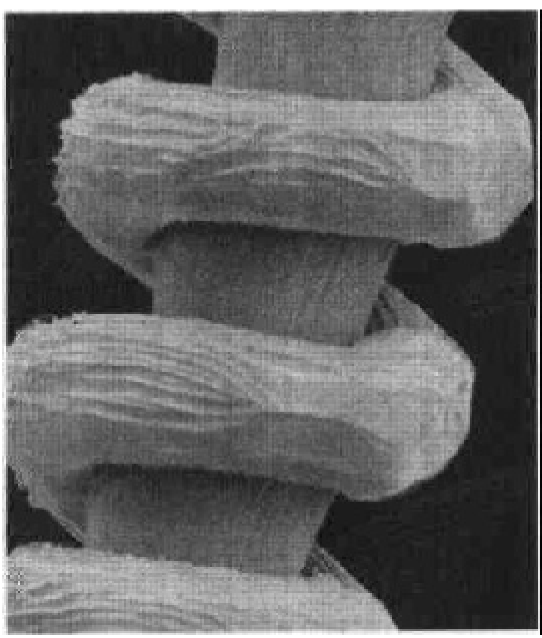
S_{xy} 表示像素(x,y)的近邻集合

在图像增强中使用直方图统计学

- 考虑如下灰度变换函数

$$g(x,y)=\begin{cases} E\cdot f(x,y) & \text{如果 } m_{s_{xy}}\leqslant k_0M_G \text{ 且 } k_1D_G\leqslant\sigma_{s_{xy}}\leqslant k_2D_G \\ f(x,y) & \text{其他} \end{cases}$$

此处，如前所述的，E，k_0，k_1 和 k_2 是特定的参数；M_G 是输入图像的全局平均值；D_G 是全局标准差。



找到了划痕轨迹！

直方图用于图像增强

1. 应用众多
2. 给定图像A的直方图H_A，单调灰度变换函数f，如果求变换后图像B的直方图H_B

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{dD_B / dD_A} = \frac{H_A\left[f^{-1}(D_B)\right]}{f'\left[f^{-1}(D_B)\right]} \quad \text{where } f' = \frac{df}{dD}$$

$$D_A = f^{-1}(D_B) = (D_B - b)/a$$

$$H_B(D) = \frac{1}{a} H_A\left(\frac{D-b}{a}\right)$$

3. 给定图像A的直方图H_A，变换后均衡化的图像B，如何求灰度变换函数f?

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0}\int_0^{D_A} H_A(D)dD \qquad f(D_A) = \frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$

讨论

- 直方图均衡化一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化”
- 离散形式下，直方图均衡化的概率密度函数是否完全均匀？ ✖
- 直方图均衡化会有失效的时候吗？ ✔

小作业

- 实现直方图均衡化
- 要求
  - 三个部分（图像、代码、文档）
  - 语言：**Matlab**
- 提交的细节可以查阅作业的主页

http://lamda.nju.edu.cn/liyf/dip19/

  - 作业主页可以从课程主页上找到
- 截止日期是：**3月29日23:59:59**

空间域图像增强

- 直方图处理（进阶）
- 用算术/逻辑操作增强

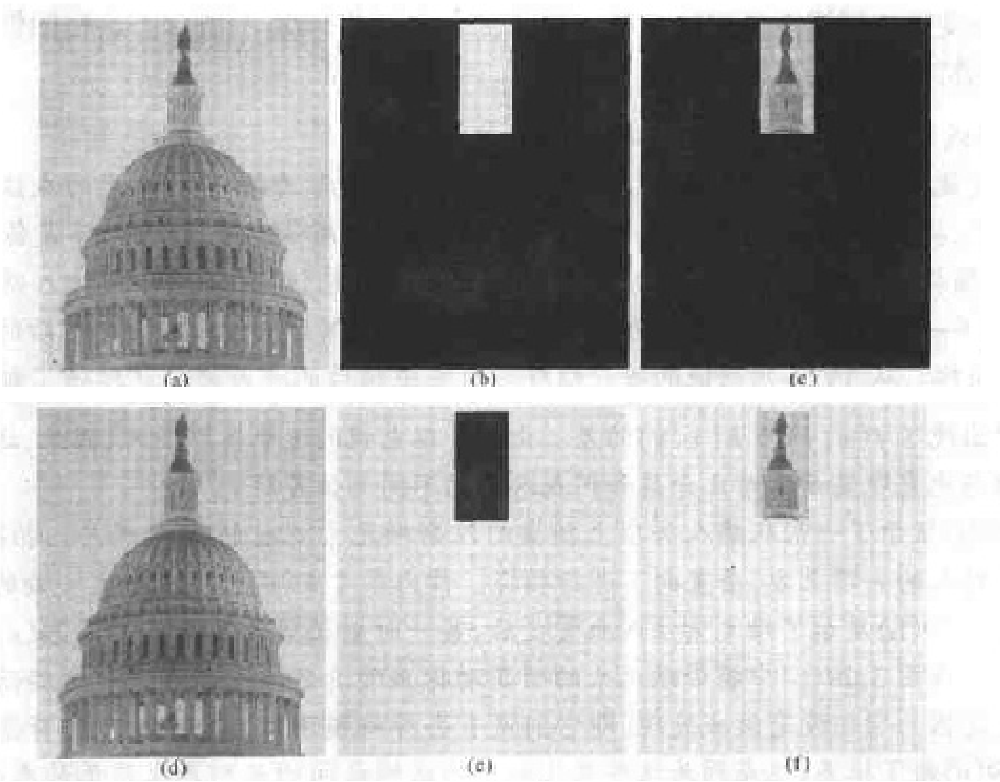
算术/逻辑操作增强

- 算术/逻辑操作主要以像素对像素为基础在两幅或多幅图像间进行。

什么意思呢？

算术/逻辑操作增强

- 算术/逻辑操作主要以像素对像素为基础在两幅或多幅图像间进行。



“与”操作

“或”操作

算术/逻辑操作增强

- 四大类
  - 加法
  - 减法
  - 乘法
  - 除法

$$C(x,y) = A(x,y) + B(x,y)$$

$$C(x,y) = A(x,y) - B(x,y)$$

$$C(x,y) = A(x,y) \times B(x,y)$$

$$C(x,y) = A(x,y) \div B(x,y)$$

图像加法处理

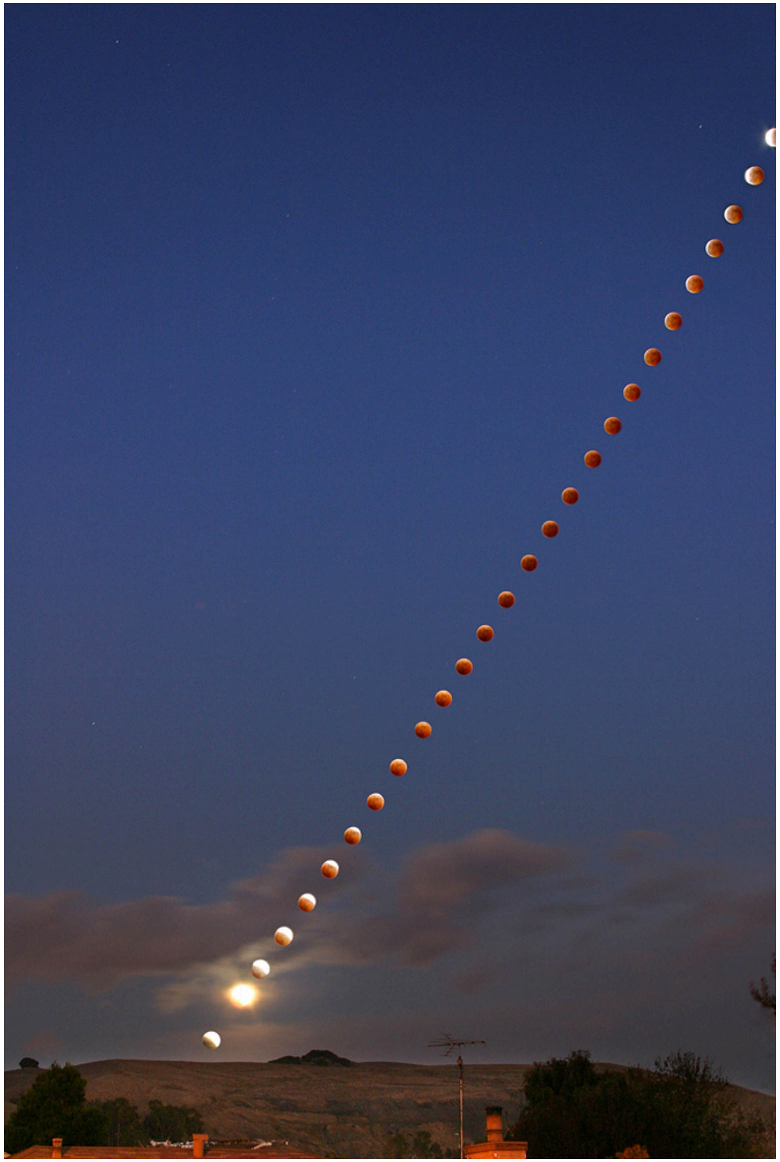
- 小例子

+

=

图像加法处理

- 多次曝光：将不同时间曝光照片进行叠加，得到一张具有特殊效果的照片

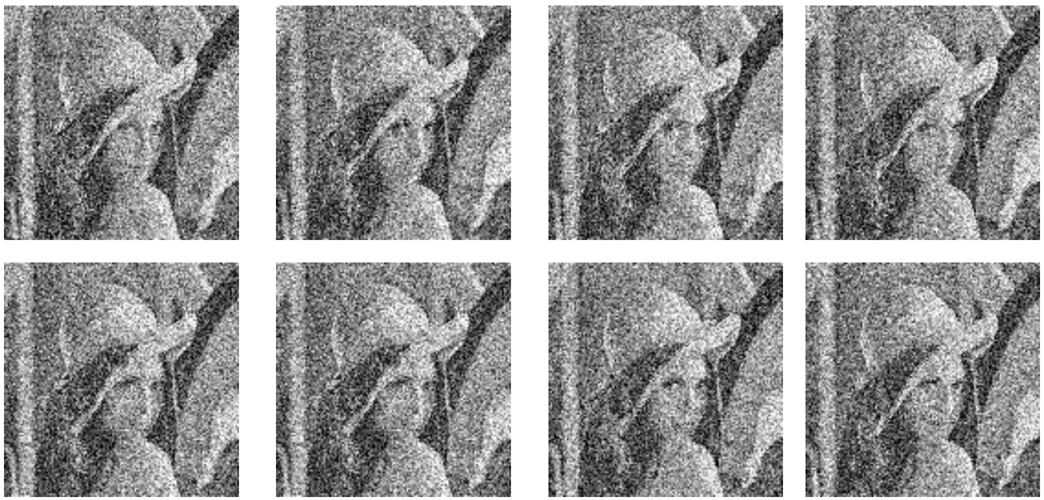


图像加法处理

- 加法运算常用于减少图像中的随机噪声

怎么理解？

图像加法处理



8张随机噪声图像

怎么证明？

加法处理后

噪声明显减少，图像得到增强

推导

- 定理：对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高M倍。
- 证明：$D_i(x,y)=S(x,y)+N_i(x,y)$ where $E\{N_i(x,y)\}=0$

信噪比 $$P(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\{N^2(x,y)\}}$$ $\frac{\text{信号}}{\text{噪声}}$

$$\overline{D}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[S(x,y)+N_i(x,y)\right]$$

$$\overline{P}(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\left\{\frac{1}{M^2}\left[\sum_{i=1}^{M}N_i(x,y)\right]^2\right\}}$$

推导续

- 由于

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)+N_2^2(x,y)\right\}+2E\left\{N_1(x,y)\right\}\varepsilon\left\{N_2(x,y)\right\}$$

- 注意到N1和N2独立，因此

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)\right\}+E\left\{N_2^2(x,y)\right\}$$

- 代入，有

$$\overline{P}(x,y)=\frac{M^2S^2(x,y)}{\sum_{i=1}^{M}N_i^2(x,y)}=\frac{M^2S^2(x,y)}{MN^2(x,y)}=MP(x,y)$$

图像减法处理

- 操作定义

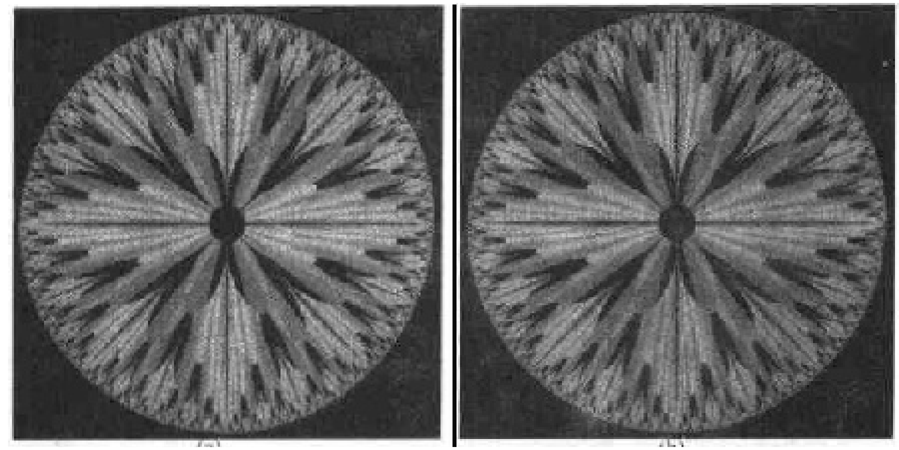
$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$

减法怎么让图像增强呢？

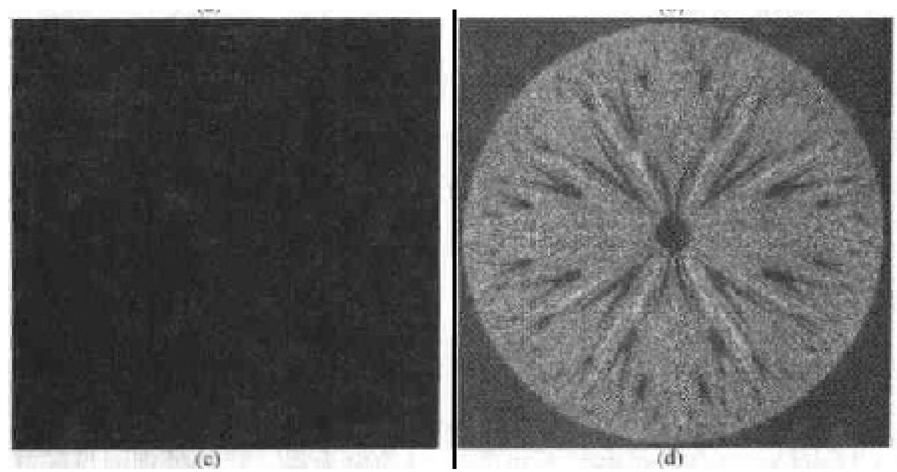
图像减法处理

- 操作定义

$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$



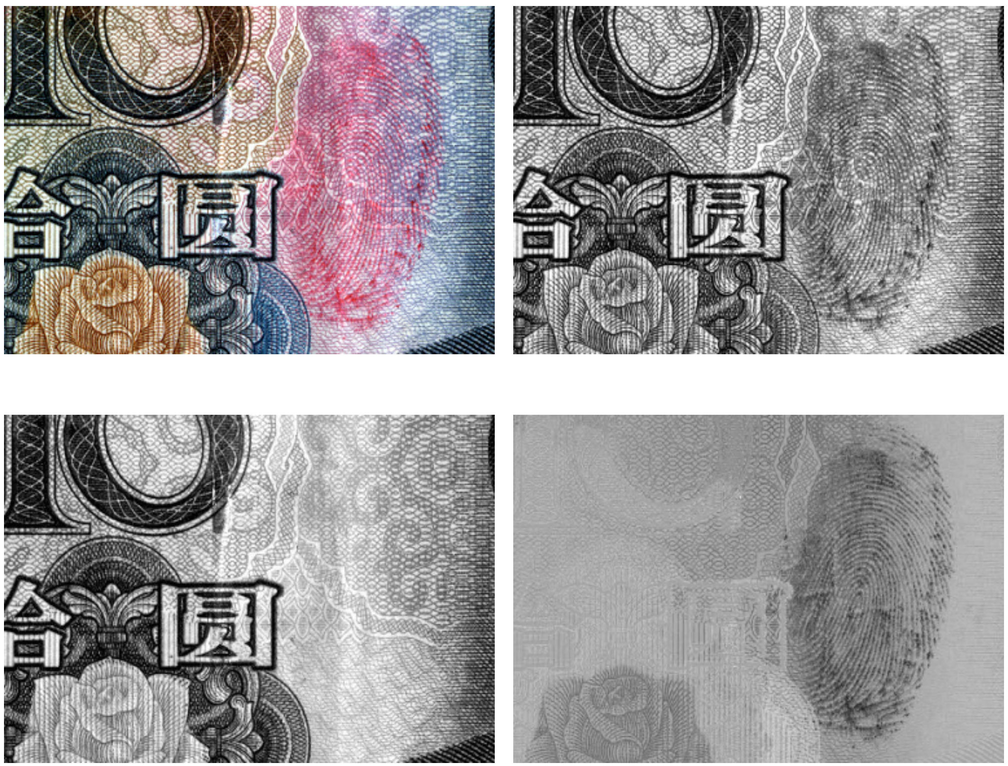
做差再做下直方图均衡化



图像差别的细节被观察到

应用二

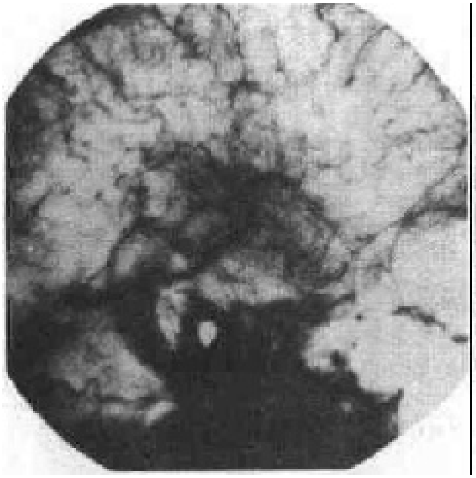
- 指纹抽取

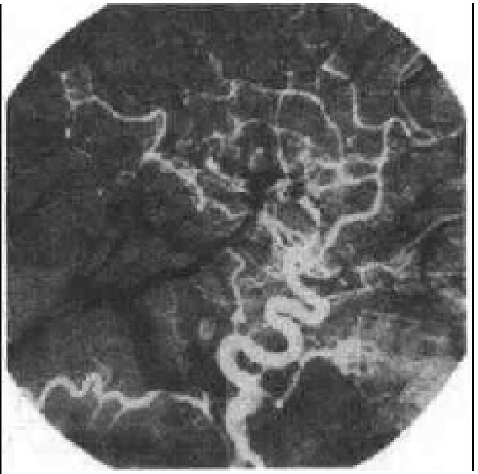


- 车牌号码检测

应用三：掩膜式X光成像法

- 考量不同介质注入病人血管后的反应


(a)


(b)

未注入介质的图像作为掩膜图像（参考图像）使用

注入碘介质后，减去掩膜图像后的血管X光成像

减法操作后取值范围存在负数，比如-255到255，而数字图像只能存正数，怎么办?

- 主要两种办法，都可以称为规范化方法
  - 直接规范化到[0,255]

$$y = (x + 255)/2$$

  - 更精细地规划化到[0,255]

$$y = (x - min)/(max - min) * 255$$

min和max分别为做差图像的最小，最大像素

当min=-255，max=255时，两个方法效果一样；

图像乘法与除法处理

- 乘法：通常用来进行掩模运算
- 除法：通常可以用来归一化

虽然乘法和除法在某些特别应用上会很有用，但总体用的比较少。

加法运算和直方图

- 在某些特殊情况下，加法运算后的图像直方图可以通过被加图像的直方图推导得到。
- 基本假设：输出图像的二维直方图是输入图像直方图的积。

$$H_{AB}\left(D_A, D_B\right) = H_A\left(D_A\right) H_B\left(D_B\right)$$

这个情况下，也认为两幅图像不相关

计算公式

- 主要步骤

$$H(D)=\int_{D_A+D_B=D} H_{AB}(D_A,D_B)\,dD_B$$

$$H(D)=\int_{D_A+D_B=D} H_A(D_A)H_B(D_B)\,dD_B$$

- 因为 $D_A=D_C-D_B$
- 所以

这个计算公式就是著名的**卷积运算**

$$H(D)=\int_{-\infty}^{\infty} H_A(D_C-D_B)H_B(D_B)\,dD_B$$

下一章