

WAMS 2024 Programowanie - Projekt

Sprawozdanie

Gerard Kalinowski

Nr indeksu: 79605

Zadanie : WAMS – programowanie – projektowe 1

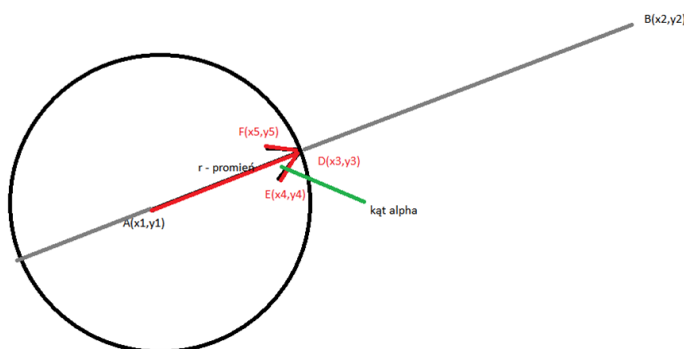
Numer zadania: 1

Spis treści

• Treść polecenia	03
• Wyprowadzenie wzorów	04
• Schemat blokowy	05
• Kod programu	08
• Testy	14
• Wnioski	16

1. Treść Polecenia

Korzystając z równania opisującego okrąg o środku A i promieniu r , oraz równania prostych wyznacz punkty D, E, F opisujące strzałkę ukierunkowaną w stronę punktu B , nachyloną pod kątem α .



Dane Wejściowe (Input)

$A(x_A, y_A)$ - Współrzędne punktu A , będącego również środkiem okręgu

$B(x_B, y_B)$ - Współrzędne punktu końcowego

r - Promień koła o środku w punkcie A

α - Kąt nachylenia ramion strzałki względem promienia (10° – 45°)

Dane Wyjściowe (Output)

$D(x_D, y_D)$ - Punkt opisujący czoło strzałki

$E(x_E, y_E)$ - Punkt opisujący jedno ramię strzałki

$F(x_F, y_F)$ - Punkt opisujący drugie ramię strzałki

Założenia zadania

- Środek okręgu A znajduje się w układzie współrzędnych w punkcie (x_A, y_A)
- Promień r musi być większy od zera: $r > 0$
- Punkt D leży na odcinku AB i jest punktem przecięcia tej linii z okręgiem
- Kąty $\angle ADE, \angle ADF$ mają wartość α
- Długość ramienia strzałki jest równa $1/5$ promienia R
 $|DE| = |DF| = \frac{r}{5}$
 - Długość wektora \overrightarrow{DE} jest pięciokrotnie mniejsza od wektora \overrightarrow{AD}
 $\|\overrightarrow{AD}\| = 5 \times \|\overrightarrow{DE}\|$
- Punkty E, F znajdują się wewnątrz okręgu
 - Punkt F jest symetrycznym odbiciem punktu E względem odcinka AD .
 $F = S_{AD}(E)$
 - Wektor \overrightarrow{DE} należy obrócić o α w lewo i użyć jego negacji do wyznaczenia punktu E

Założenia programu

1. Użytkownik wprowadza Dane Wejściowe.
2. Program przeprowadza obliczenia za pomocą konkretnych wzorów, wszystkie poczynania wyprowadza do konsoli.
3. Finalne współrzędne punktów D, E, F (Dane Wyjściowe) wyprowadza do konsoli.

2. Wyprowadzenie wzorów

0. Ustanowienie współrzędnych punktów A, B , promienia r oraz kąta α :

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), r, \alpha \in (10^\circ, 45^\circ)$$

1. Wektor kierunkowy prostej AB :

a. Wyznaczenie wektora kierunkowego prostej AB , łączącej te dwa punkty:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

b. Długość wektora:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

c. Normalizacja wektora:

$$\hat{u} = \left(\frac{x_{\vec{AB}}}{\|\vec{AB}\|}, \frac{y_{\vec{AB}}}{\|\vec{AB}\|} \right)$$

$$\hat{u} = \left(\frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}, \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \right)$$

2. Wyznaczenie współrzędnych dla punktu $D(x_D, y_D)$:

a. Znaleźnienie punktu D na odcinku AB w odległości d od punktu A wzdłuż wektora \vec{AB}

$$D = A + d \times \hat{u}$$

b. Współrzędne punktu D , gdzie $d = r$, bo punkt leży na okręgu:

$$D = \begin{pmatrix} x_D = x_A \\ y_D = y_A \end{pmatrix} + r \times \begin{pmatrix} x_{\hat{u}} \\ y_{\hat{u}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} x_D = x_A + r \times \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ y_D = y_A + r \times \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \end{pmatrix}$$

3. Wyznaczenie współrzędnych dla punktu $E(x_E, y_E)$:

a. Obliczenie wektora \vec{AD}

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} x_{\vec{AD}} = x_D - x_A \\ y_{\vec{AD}} = y_D - y_A \end{pmatrix}$$

b. Obliczenie długości wektora $\|\vec{AD}\| = r$

$$\|\vec{AD}\| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

c. Obrócenie wektora \vec{DE} o α w lewo, gdzie również $\|\vec{AD}\| = 5 \times \|\vec{DE}\|$:

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} x_{\vec{DE}} = \frac{x_{\vec{AD}} \cos(\alpha) - y_{\vec{AD}} \sin(\alpha)}{5} \\ y_{\vec{DE}} = \frac{x_{\vec{AD}} \sin(\alpha) + y_{\vec{AD}} \cos(\alpha)}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} x_{\vec{DE}} = \frac{(x_D - x_A) \cos(\alpha) - (y_D - y_A) \sin(\alpha)}{5} \\ y_{\vec{DE}} = \frac{(x_D - x_A) \sin(\alpha) + (y_D - y_A) \cos(\alpha)}{5} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AD}\| = 5 \times \|\vec{DE}\|$$

$$\|\vec{DE}\| = \sqrt{(x_{\vec{DE}})^2 + (y_{\vec{DE}})^2}$$

d. Negacja wektora \vec{DE} :

$$-\vec{DE} = \vec{DE}' = \begin{pmatrix} x_{\vec{DE}'} = \frac{-(x_D - x_A) \cos(\alpha) + (y_D - y_A) \sin(\alpha)}{5} \\ y_{\vec{DE}'} = \frac{-(x_D - x_A) \sin(\alpha) - (y_D - y_A) \cos(\alpha)}{5} \end{pmatrix}$$

e. Wyznaczenie punktu E :

$$E = \begin{pmatrix} x_E = x_D + x_{\vec{DE}'} \\ y_E = y_D + y_{\vec{DE}'} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} x_E = x_D + \frac{-(x_D - x_A) \cos(\alpha) + (y_D - y_A) \sin(\alpha)}{5} \\ y_E = y_D + \frac{-(x_D - x_A) \sin(\alpha) - (y_D - y_A) \cos(\alpha)}{5} \end{pmatrix}$$

4. Wyznaczenie punktu F , jako symetrycznego odbicia punktu E , względem prostej AB

a. Wzór funkcji liniowej f prostej AB

$$f : \begin{cases} y_A = mx_A + b \\ y_B = mx_B + b \end{cases}$$

$$b = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$$

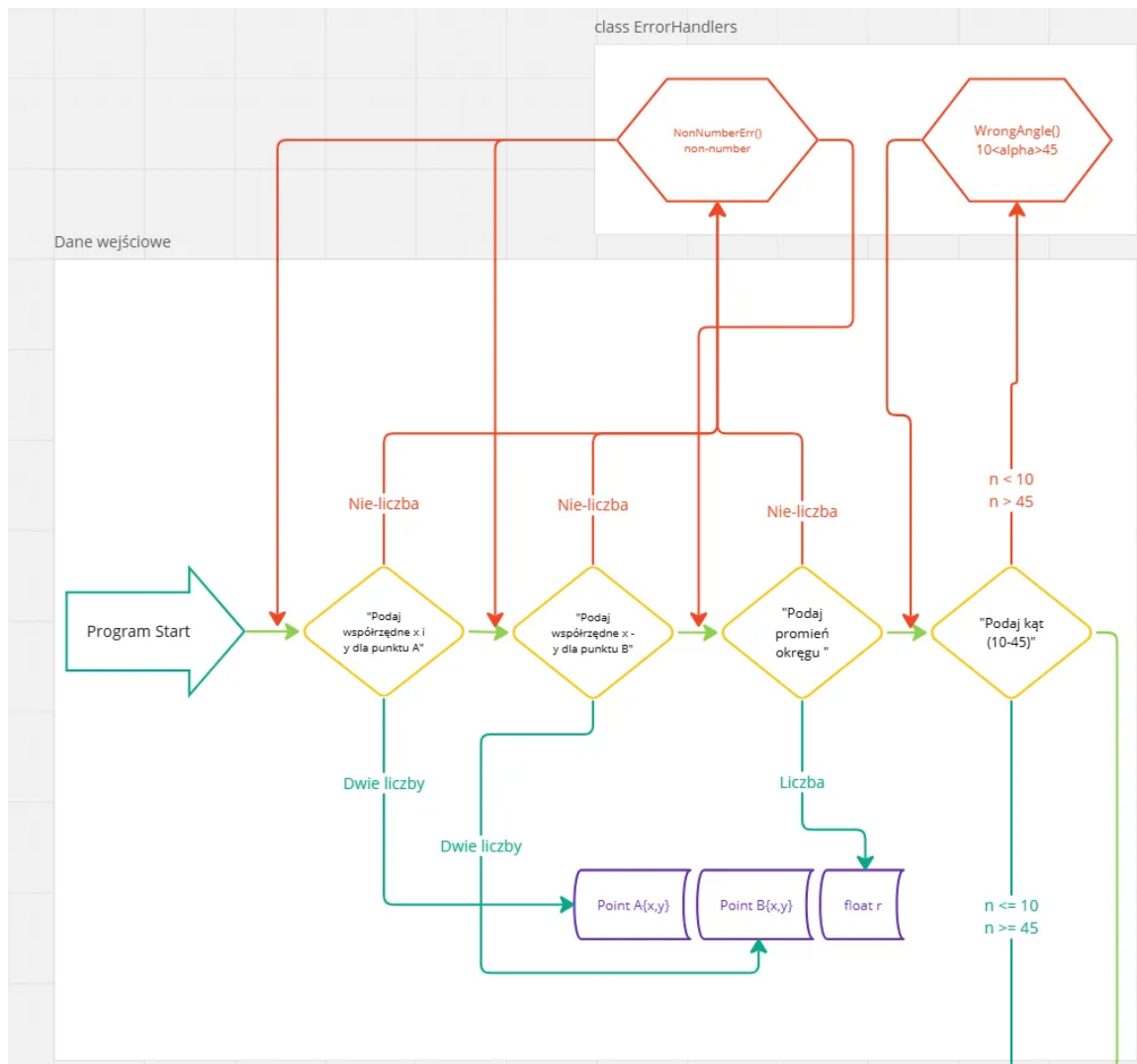
b. Współczynnik kierunkowy funkcji:

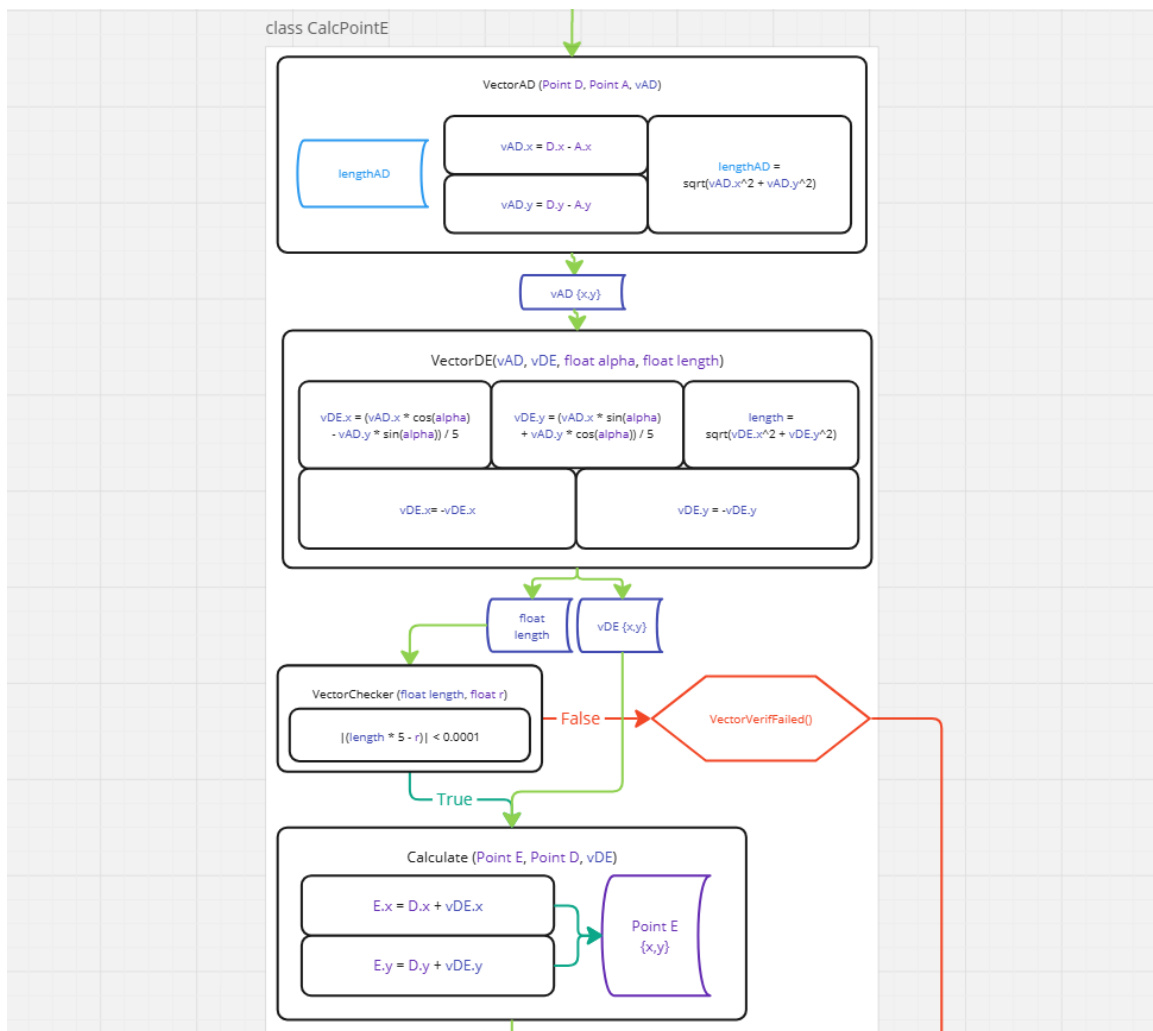
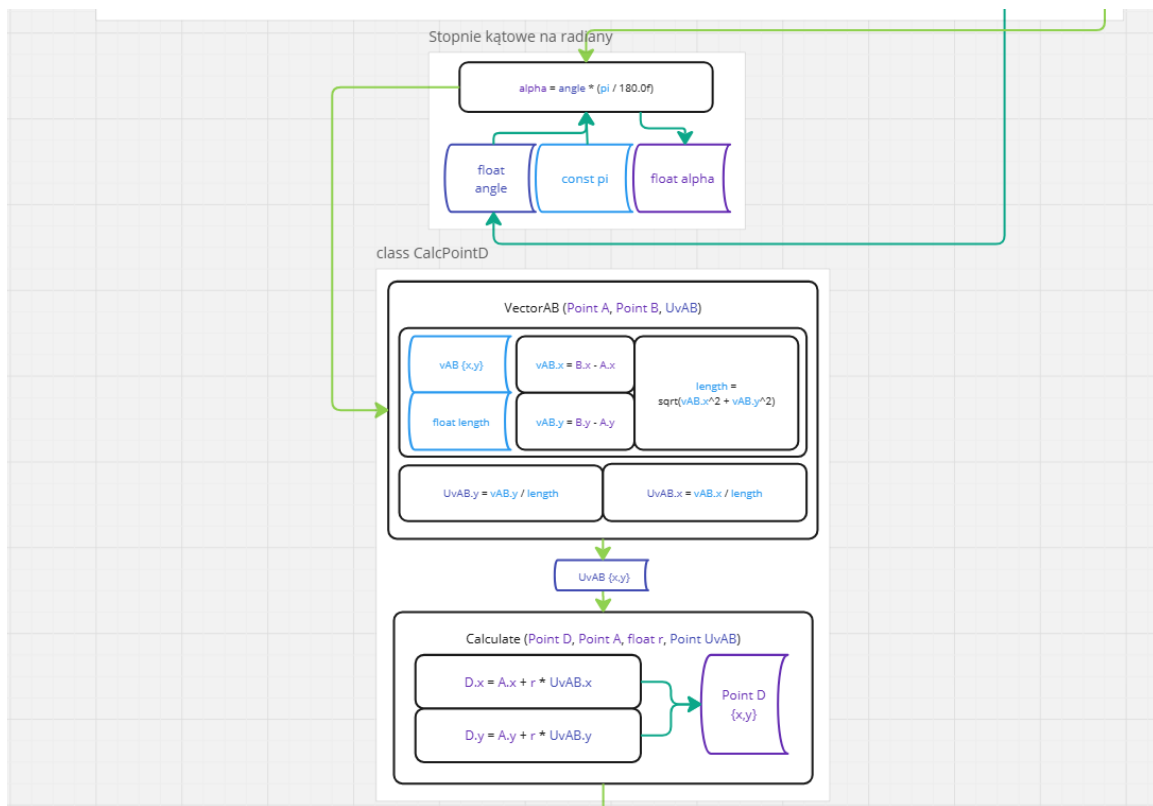
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

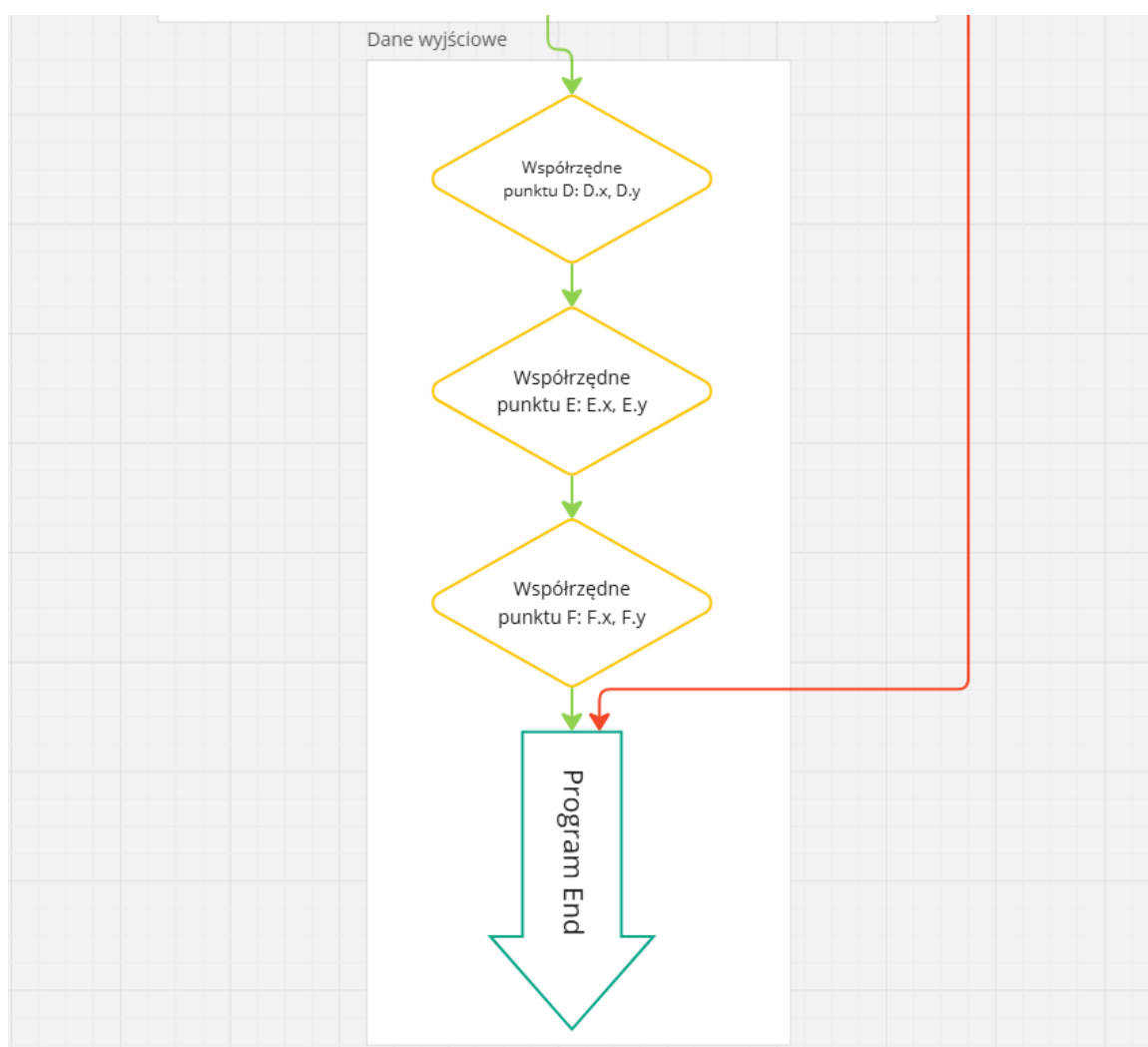
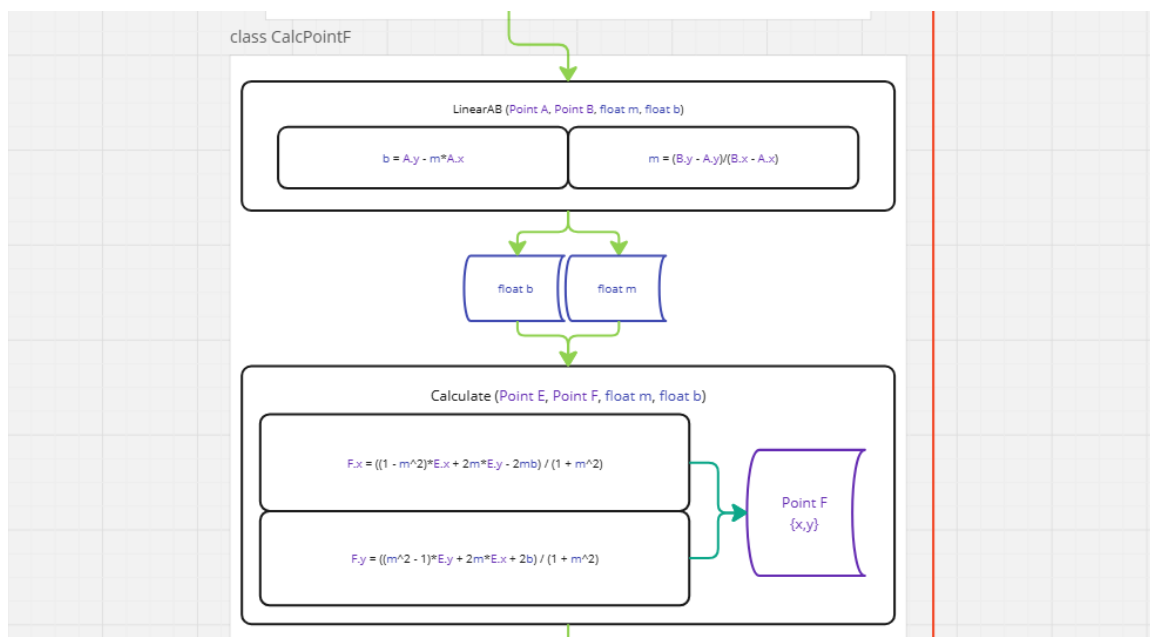
c. Wyznaczenie punktu F ze wzoru na współrzędne punktu będącego symetrycznym odbiciem względem prostej:

$$F = \begin{pmatrix} x_F = \frac{(1-m^2)x_E + 2my_E - 2mb}{1+m^2} \\ y_F = \frac{(m^2-1)y_E + 2mx_E + 2b}{1+m^2} \end{pmatrix}$$

3. Schemat blokowy







4. Kod programu

```
#include <iostream>
// potrzebne dla VectorChecker()
#include <cmath>
// potrzebne do GetValidatedInput()
#include <sstream>
#include <string>
#include <limits>

using namespace std;

/**/=====
    Definiowanie zmiennych punktów jako zbioru współrzędnych
    Przyda się również w sytuacji wektorów
*//=====

struct Point {
    float x;
    float y;
};

/**/=====
    Metody błędów:
    NonNumerErr() - Zła liczba podana jako input
    WrongAngle() - Wartość kąta alpha wykracza poza założenia programu
    VectorVerifFailed() - WektorDE nie spełnia założeń zadania ( $\text{VectorDE} * 5 = r$ )
*//=====

class ErrorHandlers {
public:

    float GetValidatedInput(const std::string& prompt) {
        std::string input;
        float value;

        while (true) {
            cout << prompt;
            getline(cin, input);

            // Konwersja tekstu na liczbę
            stringstream stream(input);
            if (stream >> value && stream.eof()) {
                return value;
            } else {
                cout << "!!! To nie jest liczba, albo użyłeś przecinka jako separatora dziesiętnego - Użyj kropki !!!\n\n";
            }
        }
    }

    void SamePoints() {
        cout << "!!! Punkty A i B nie mogą leżeć w tym samym miejscu !!!\n\n";
    }

    void DivZero(){
        cout << "!!! Punkty A i B leżą na osi OX !!!\n\n";
        cout << "!!! Nie będzie możliwe wyznaczenie punktu F (Dzielenie przez zero) !!!\n\n";
    }

    void WrongAngle() {
        cout << "!!! Kąt ma być w zakresie 10-45 stopni !!!\n\n";
    }
};
```



```

    }

    void WrongRadius() {
        cout << "!!! Podaj liczbę większą niż 0 !!!\n\n";
    }

    void VectorVerifFailed() {
        cout << "!!! Długość wektora DE nie spełnia warunku zadania - błąd w obliczeniach !!!\n\n";
        exit(100);
    }
};

/*//=====
Wyznaczenie punktu D - operacje:
    VectorAB() - metoda wyznaczająca wektor AB:
        - Współrzędne x, y wektora AB
        - Długość wektora AB
        - Normalizacja wektora AB

    Calculate() - metoda wyznaczająca współrzędne punktu D:
        - Współrzędne x, y punktu D
*//=====

class CalcPointD {
public:

    Point UvAB;

    void VectorAB(Point* A, Point* B, Point* UvAB){
        // Współrzędne Wektora AB
        Point vAB;
        vAB.x = B->x - A->x;
        vAB.y = B->y - A->y;
        cout << "-----\n";
        cout << "== Wektor AB: (" << vAB.x << "), (" << vAB.y << ")\n";

        // Długość Wektora AB
        float length;
        length = sqrt(pow(vAB.x,2) + pow(vAB.y,2));
        cout << "== Długość Wektora AB = " << length << endl;

        // Normalizacja (Unifikacja) Wektora AB
        UvAB->x = vAB.x / length;
        UvAB->y = vAB.y / length;
        cout << "== Znormalizowany Wektor AB: (" << UvAB->x << "), (" << UvAB->y << ")\n";
    };

    void Calculate(Point* D, Point* A, float r, Point* UVAB){
        // Współrzędne punktu D
        D->x = A->x + (r * UvAB->x);
        D->y = A->y + (r * UvAB->y);
        //cout << "== PointD: (" << D->x << "), (" << D->y << ")\n";
        cout << "-----\n";
    };
};

/*//=====
Wyznaczenie punktu E - operacje:
    VectorAD() - metoda wyznaczająca wektor AD:
        - Współrzędne x, y wektora AD
        - Długość wektora AD

    VectorDE() - metoda wyznaczająca wektor DE:
        - Współrzędne x, y wektora DE (Obrócenie wektora AD o kąt alpha w lewo)

```

- Długość wektora DE (Do późniejszej weryfikacji z założeniami zadania)
- Negacja współrzędnych wektora DE (Aby punkt E znajdował się wewnątrz okręgu o środku A)

VectorChecker() - metoda sprawdzająca założenie $WektorDE * 5 = AD = r$

- Jeśli prawda -> idź dalej (Floating Point error w granicy 0.0001 jest dopuszczalny)
- Jeśli fałsz -> terminacja programu (kod 100)

Calculate() - wyznaczenie współrzędnych punktu E:

- Współrzędne x, y punktu E

```

*///=====

class CalcPointE {
public:

    Point vAD, vDE;
    float length;

    void VectorAD(Point* D, Point* A, Point* vAD){
        // Współrzędne Wektora AD
        vAD->x = D->x - A->x;
        vAD->y = D->y - A->y;
        cout << "== Wektor AD: (" << vAD->x << " ), (" << vAD->y << ")" << endl;

        // Długość Wektora AD
        float lengthAD;
        lengthAD = sqrt(pow(vAD->x,2) + pow(vAD->y,2));
        cout << "== Długość Wektora AD = " << lengthAD << endl;
    };

    void VectorDE(Point* vAD, Point* vDE, float alpha, float& length){
        // Obrócenie Wektora AD o alpha kątów w lewo, pomniejszenie wartości pięciokrotnie
        vDE->x = (vAD->x * cos(alpha) - vAD->y * sin(alpha)) / (5);
        vDE->y = (vAD->x * sin(alpha) + vAD->y * cos(alpha)) / (5);

        // Wylczenie długości wektora w celu weryfikacji
        length = sqrt(pow(vDE->x,2) + pow(vDE->y,2));

        // Negacja Wektora DE, aby punkt E znajdował się wewnątrz okręgu
        vDE->x = -vDE->x;
        vDE->y = -vDE->y;
        cout << "== Wektor DE: (" << vDE->x << " ), (" << vDE->y << ")" << endl;
    };

    void VectorChecker(float& length, float r){
        // Floating point error handler
        float epsilon = 0.0001;

        // Jeżeli długość wektora DE * 5 jest względnie taka sama z promieniem r to przejdź dalej
        if (fabs((length * 5) - r) < epsilon) {
            cout << "== Długość wektora DE spełnia warunek zadania!\n";
        }
        // W przeciwnym razie, przerwij działanie programu
        else {
            ErrorHandler ErrHand;
            ErrHand.VectorVerifFailed();
        }
    };

    void Calculate(Point* E, Point* D, Point* vDE){
        // Współrzędne punktu E
        E->x = D->x + vDE->x;
        E->y = D->y + vDE->y;
        //cout << "== PointE: " << E->x << " , " << E->y << endl;
        cout << "-----\n";
    }
};

```

```

};

};

/**/=====
Wyznaczenie punktu F - operacje:
(Punkt F jest symetrycznym odbiciem punktu E, względem odcinka AB (prosta f).
Prosta f ma wzór ogólny f:  $y = mx + b$ )

(Wzór na współrzędne punktu F został wyznaczony następująco:
- Wyznaczenie współczynnika kierunkowego na podstawie punktów A i B
   $m = (By - Ay) / (Bx - Ax)$ 
- Wyznaczenie wyrazu wolnego b dla f:  $Ay = m * Ax + b$ 
   $b = Ay - (m * Ax)$ 
- Równanie prostej przechodzącej przez punkt E, prostopadłej do prostej f
   $g: y - Ey = -x/m + Ex/m$ 
- Wyznaczenie punktu przecięcia prostych f i g
  P:  $f = g$ 
  P:  $m * x + b = -x/m + Ey + Ex/m$ 
  P:  $\{Px = (Ex + m * Ey - m * b) / (m^2 + 1)\}$  // podstawienie Px do wzoru prostej g
   $\{Py = m * Px + b\}$  // podstawienie Py do wzoru prostej f
- Odbicie symetryczne punktu E (odległość punktu E od P == odległość punkt F od P)
  F:  $\{Fx = 2Px - Ex\}$ 
   $\{Fy = 2Py - Ey\}$ 
- Po podstawieniu wzorów na Px w równaniu punktu F, wychodzą nam wzory w metodzie Calculate())

- LinearAB() - metoda wyznaczająca współczynnik kierunkowy m i wyraz wolny b:
  - Zmienne m, b

- Calculate() - metoda wyznaczająca współrzędne punktu F:
  - Współrzędne x, y punktu F
**//=====
class CalcPointF {
public:
  float b, m;

  void LinearAB(Point* A, Point* B, float& m, float& b){
    // Współ. kierunkowy m oraz wyraz wolny b funkcji f:  $y = mx + b$  (na której leży odcinek AB)
     $m = (B->y - A->y) / (B->x - A->x);$ 
     $b = A->y - (m * A->x);$ 
    cout << "== Współczynnik kierunkowy m = " << m << endl;
    cout << "== Wyraz wolny b = " << b << endl;
  };

  void Calculate(Point* E, Point* F, float& m, float& b){
    // Współrzędne punktu F
     $F->x = ((1 - \text{pow}(m,2)) * E->x + (2 * m * E->y) - (2 * m * b)) / (1 + \text{pow}(m,2));$ 
     $F->y = (((\text{pow}(m,2) - 1) * E->y) + (2 * m * E->x) + (2 * b)) / (1 + \text{pow}(m,2));$ 
    //cout << "== PointF: " << F->x << ", " << F->y << endl;
  };
};

int main() {

// Error Handlers zawarte w klasie ErrorHandlers
  ErrorHandlers ErrHand;

// TEST INPUT =====
  // Point A = {2,3};
  // Point B = {4,6};
  // float r = 2;
  // float angle = 30;
// TEST INPUT =====

```

```

// INPUT =====
// Punkty A i B
Point A, B;
while (true){

    A.x = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj współrzędną x dla Punktu A: ");
    A.y = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj współrzędną y dla Punktu A: ");
    cout << "Współrzędne punktu A: (" << A.x << ", " << A.y << ")\n";

    B.x = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj współrzędną x dla Punktu B: ");
    B.y = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj współrzędną y dla Punktu B: ");
    cout << "Współrzędne punktu B: (" << B.x << ", " << B.y << ")\n";

    if(A.x == B.x && A.y == B.y){
        ErrHand.SamePoints();
        continue;
    }

    if(A.x == 0 && B.x == 0){
        ErrHand.DivZero();
        continue;
    }

    break;
}

// Promień okręgu - nie może być ujemny
float r;
while (true){
    r = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj promień okręgu: ");

    if (r <= 0) {
        ErrHand.WrongRadius();
        continue;
    }

    cout << "Promień okręgu to: " << r << endl;
    break;
}

// Kąt pomiędzy ramieniem strzałki a promieniem - w zakresie angle <10,45>
float angle;
while (true){
    angle = ErrHand.GetValidatedInput("Podaj kąt (10-45): ");

    if (angle < 10 || angle > 45){
        ErrHand.WrongAngle();
        continue;
    }

    cout << "Wybrany kąt to: " << angle << endl;
    break;
}

// =====

// Przekształcenie wartości kątowej na radiany
const float pi = 3.14159265358979323846f;
float alpha = angle * (pi / 180.0f);
// =====

// Wyznaczenie punktu D
Point D;

```

```

    CalcPointD CalcPointD;

    CalcPointD.VectorAB(&A, &B, &CalcPointD.UvAB);
    CalcPointD.Calculate(&D, &A, r, &CalcPointD.UvAB);

// Wyznaczenie Punktu E
    Point E;
    CalcPointE CalcPointE;

    CalcPointE.VectorAD(&D, &A, &CalcPointE.vAD);
    CalcPointE.VectorDE(&CalcPointE.vAD, &CalcPointE.vDE, alpha, CalcPointE.length);
    CalcPointE.VectorChecker(CalcPointE.length, r);
    CalcPointE.Calculate(&E, &D, &CalcPointE.vDE);

// Wyznaczenie Punktu F
    Point F;
    CalcPointF CalcPointF;

    CalcPointF.LinearAB(&A, &B, CalcPointF.m, CalcPointF.b);
    CalcPointF.Calculate(&E, &F, CalcPointF.m, CalcPointF.b);

// Output danych wyjściowych
    cout << "=====\n";
    cout << "== Współrzędne punktu D: (" << D.x << ", " << D.y << ")" << endl;
    cout << "== Współrzędne punktu E: (" << E.x << ", " << E.y << ")" << endl;
    cout << "== Współrzędne punktu F: (" << F.x << ", " << F.y << ")" << endl;
    cout << "=====\n";

// KONIEC :D
    return 0;
}

```

5. Testy

Sytuacja 1

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
2	3	4	6	2	30

- Rezultat - Działania wykonane prawidłowo, program nie zwrócił błędu (1)

Output:

== Współrzędne punktu D: (3.1094, 4.6641)

== Współrzędne punktu E: (3.08366, 4.26493)

== Współrzędne punktu F: (2.75084, 4.48681)

Sytuacja 2

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
,2	,x	A	2-c	--2	3-

- Rezultat - Program nie przejdzie dalej póki nie zostaną podane poprawne wartości, powraca do ustalenia wartości błędnej zmiennej

Output: *To nie jest liczba, albo użyłeś przecinka jako separatora dziesiętnego - Użyj kropki*

Sytuacja 3

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
1	1	1	1	1	10

- Rezultat - Program wraca do ustalenia współrzędnych A

Output: *Punkty A i B nie mogą leżeć w tym samym miejscu*

Sytuacja 4

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
0	0	0	0.1	0.1	10

- Rezultat - Program wraca do ustalenia współrzędnych A

Output:

Punkty A i B leżą na osi OX. Nie będzie możliwe wyznaczenie punktu F (Dzielenie przez zero)

Sytuacja 5

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
1	2	3	4	0	10

- Rezultat - Program wraca do ustalenia wartości r (tak samo dla wartości ujemnych)

Output: *Podaj liczbę większą niż 0*

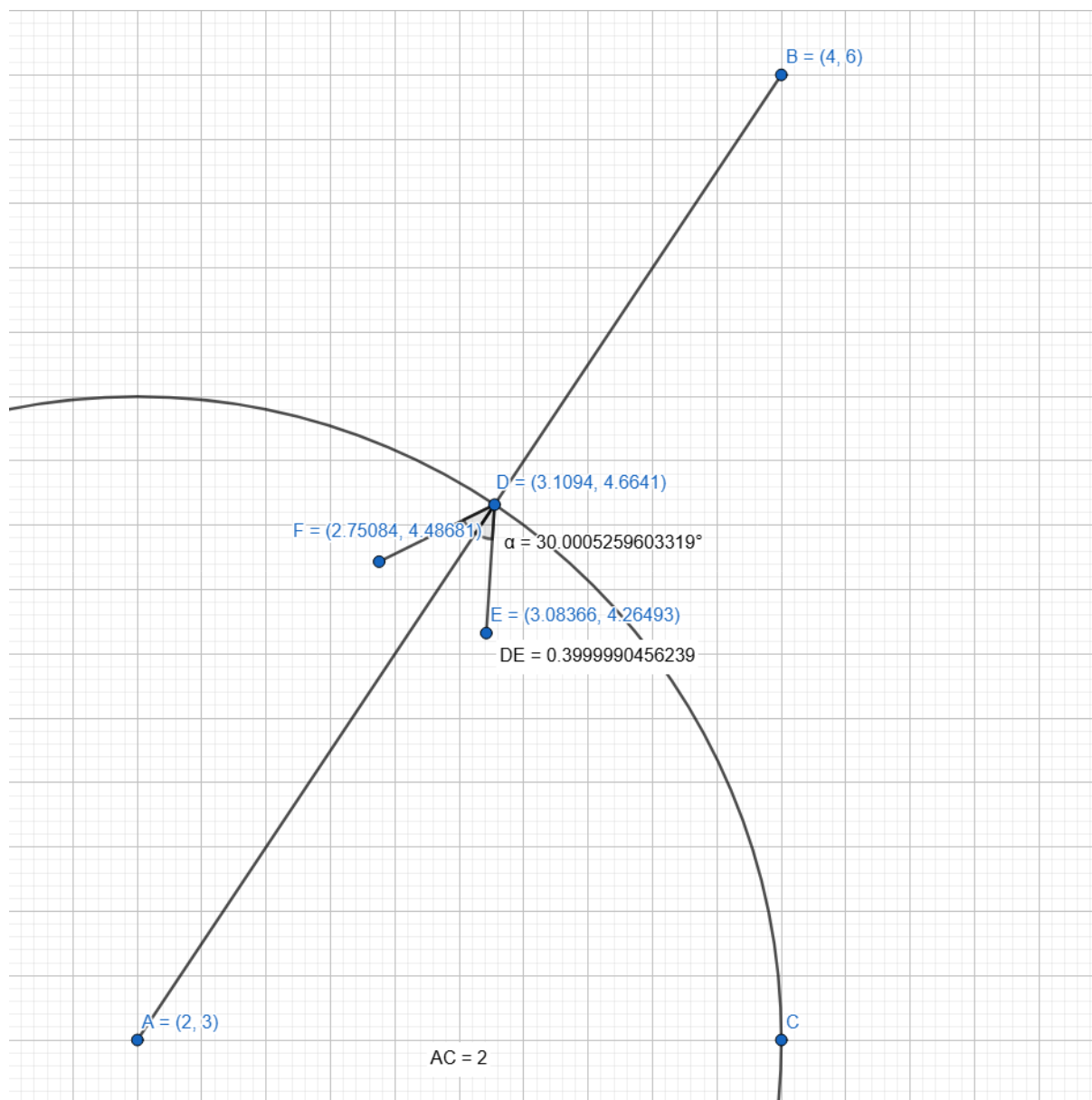
Sytuacja 6

- Wartości

A (x)	A (y)	B (x)	B (y)	r	alpha
1	2	3	4	1	2

- Rezultat - Program wraca do ustalenia wartości kąta (tak samo dla wartości przekraczających 45, oraz wartości ujemnych)

Output: *Kąt ma być w zakresie 10-45 stopni*



(1) - Przedstawienie wizualne wyników z sytuacji nr 1 w programie GeoGebra

6. Wnioski

Rozwiązaniem zastosowanym w napisaniu tego programu było podzielenie funkcji na klasy.

Każda klasa (CalcPointD, CalcPointE, CalcPointF) zawiera metody wyliczające wartości potrzebne do wyznaczenia punktów z Danych Wyjściowych.

Program zawiera komentarze objaśniające właściwości metod każdej klasy.

Do określenia współrzędnych punktów użyto struktury {float x, float y} w celu zachowania przejrzystości kodu.

Klasa ErrorHandler zawiera w sobie metody służące jako sposób, na ewentualne błędne dane wejściowe:

- `getValidatedInput()` - Przeprowadza konwersję danych wejściowych string \rightarrow float, po czym weryfikuje czy nie wystąpił błąd w strumieniu danych (`stream.eof()`)
- `SamePoints()` - Informuje użytkownika o przewidywanym błędzie w kalkulacjach ('nan') w wyniku nieróżności punktów A i B
- `DivZero()` - Informuje użytkownika o przewidywanym błędzie w kalkulacjach ('nan') w wyniku położenia punktów A i B na osi OX
- `WrongAngle()` - Informuje użytkownika o niespełnieniu założeń zadania - wykroczeniu wartości kąta poza zakres 10-45 stopni
- `WrongRadius()` - Informuje użytkownika o niespełnieniu założeń zadania - podanie zerowej lub ujemnej wartości promienia
- `VectorVerifFailed()` - W przypadku niespełnieniu założenia zadania (Długość Ramienia Strzałki (Wektor DE) jest pięciokrotnie mniejszy od promienia okręgu (r)) terminuje działanie programu (kod 100)

To rozwiązanie pomaga w poradzeniu sobie z błędami wynikającymi z inputu użytkownika - niedopuszczenie do nieskończonych pętli czy błędnych wyników

Kod zawiera przykładowe wartości (użyte w sytuacji nr 1, testach) które przyspieszą proces debuggowania. Analogicznie jest z outputem do konsoli, gdzie program nie tylko wydaje współrzędne punktów, ale i wartości wszystkich zmiennych pośrednich - współrzędne wektorów, ich długości itp.

W wyniku limitów liczb zmiennoprzecinkowych wyniki mają rację bytu po zaokrągleniu do części dziesiętysięcznych.