まえがき

本日は「ますらぼ」にお越しいただき, 誠にありがとうございます. 本企画は数学科の有志により企画・運営されているもので, 今年で 6 年目となります.

この冊子「$e^{\pi i}sode$」も有志によって制作・頒布されているもので, 今回で vol.8 です. 歴代の $e^{\pi i}sode$[1] 見本も会場にございますので, よろしければそちらもご覧ください.

今回は「確率論への招待」「正多面体」「リーマンゼータ関数について」と, どれも非常に身近な話題となっています. 一つ一つその面白さをこのまえがきで紹介したいのですが, まえがきだけ読んで満足[2] していただいてはせっかくの本文がもったいないので, あえて何も触れないことにします. 今回も五月祭に引き続き, パズルのコーナーをご用意いたしました.

大変短いあいさつで恐縮でございますが,, 数学科のホームグラウンド[3] であるこの駒場で, 駒場祭を, ますらぼを, そして $e^{\pi i}sode$ を, お楽しみください[4] !(執印)

---

[1] 名作ぞろいである. 本当に.

[2] 理学書あるあるである.

[3] 数学科の建物「数理科学研究科棟」は本郷ではなくここ駒場にある.

[4] また,「ますらぼ」と直接は関係ありませんが 11/23(金) の午後には, 数理科学研究科棟にて, 一般向けの公開講座「行列」がございますので, よろしければお立ち寄りください.

目　次

確率論への招待 (濱田)

イントロダクション

この文章は，理学部数学科 4 年 (2018 年度) の濱田が，駒場祭での数学科企画「ますらぼ」のために作成したものです．ますらぼでのミニ講演は 10-15 分程度であり，短い時間の中で数学の魅力を伝えることはできても，数学をきちんと語るにはそれなりの時間が必要です．そこで，講演では概要だけわかりやすく説明して，詳しい中身に興味が湧いた方にはこの文章を読んでもらおう，ということにしました．この文章で講演内容をどれだけ補えているかはわかりませんが，できるだけわかりやすく書いたつもりです．お暇なときにゆっくりお読みいただければ幸いです．なお，本文中に高校数学で学ぶ記号が説明なしに登場します．意味が分からなければ，調べていただくか，読み飛ばしていただいても差し支えありません．

1　確率論とは

皆さんは「確率」と聞いてどんなことを思い浮かべますか．サイコロやくじを頭に浮かべた方もいれば，天気予報や株価を連想した方もいらっしゃるかもしれません．確率やその考え方は，私たちが考えている以上に日常の中で使われています．私たちが当たり前だと思っていることが，実は確率の考え方に基づいているということもあります．本章では，私たちが中学校や高校で学ぶ確率に関する事柄を思い出しつつ，大学で学ぶ「確率論」と呼ばれる数学の理論について簡単に触れてみたいと思います．

1.1　中学校で学ぶ「確率」

現行の学習指導要領では，中学校第 2 学年において以下の内容を学習することになっています．

> 不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して，確率について理解し，それを用いて考察し表現することができるようにする．
>
> ア 確率の必要性と意味を理解し，簡単な場合について確率を求めること．
>
> イ 確率を用いて不確定な事象をとらえ説明すること．

確率は，不確定な事象の起こりやすさの程度を数値で表現し把握するために用いられます．私たちの生活の中には，気象などの自然現象や為替相場のような不確定な事象が多く存在していますが，数学ではこのような事象をも考察の対象としているのです．以上を踏まえ，中学校では「2 枚の硬貨を投げたときの表裏の出方」のような簡単な場合についての確率の求め方や，確率を根拠として例えばくじ引きの公平性を説明するといったことを学習します．

1.2　高等学校で学ぶ「確率」

現行の学習指導要領では，多くの高校生が第 1 学年で学ぶ数学 A において，以下の内容を学習することになっています．

> ア 確率とその基本的な法則
>
> 確率の意味や基本的な法則についての理解を深め，それらを用いて事象の確率を求めること．また，確率を事象の考察に活用すること．
>
> イ 独立な試行と確率
>
> 独立な試行の意味を理解し，独立な試行の確率を求めること．また，それを事象の考察に活用すること．
>
> ウ 条件付き確率
>
> 条件付き確率の意味を理解し，簡単な場合について条件付き確率を求めること．また，それを事象の考察に活用すること．

学習目標は中学校第 2 学年と大きく変わるわけではありませんが，確率を学習する前に順列・組合せおよびその総数の求め方に触れます．確率の基本的な法則としては

- 任意の事象 A について $0 \leqq P(A) \leqq 1$
- 空事象 $\varnothing$ の確率 $P(\varnothing) = 0$
- 全事象 S の確率 $P(S) = 1$
- 事象 A, B が排反事象のとき $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

が挙げられます．高等学校ではこれらに加え独立性や条件付き確率といった中学校では学んでいなかったことも学習します．

1.3　大学で学ぶ「確率」

中学校や高校では主に確率の具体的な計算方法が扱われていましたが，確率の持つ性質についてもきちんと触れられています．例えば，中学校では以下のようなことを学習したはずです．

> 表裏どちらが出ることも同様に確からしいコインを何回も投げていくと，コインを投げた回数に対する表が出た回数の割合は 0.5 に近づく．

おそらく多くの方は，そんなの当たり前じゃないかと思うのではないでしょうか．もちろん，学校でそう教えられているわけですし，この事実そのものは大変重要なので，それを当たり前と思うこと自体は悪いことではありません．しかし，数学に限らず「当たり前を疑う」のが学問というものです．

少し考えてみると，上の事実は極めて奇妙な現象です．コイン自身は何の意志も持っておらず，投げている人も何ひとつ考えず投げているのに，表が出た回数の割合は**必ず** 0.5 に近づいている．つまり，ランダムに起こっている現象が「規則性」を生み出しているわけです．確率論とは，コイントスのような**ランダムな現象の中に現れる法則性を調べ，証明していく理論**のことなのです．

確率論を本格的に勉強するためには，東京大学理学部数学科においては学部 3 年の前半で学ぶことになる「ルベーグ積分」や「測度論」の基礎を身につける必要があります．これらを学習するために，学部 1，2 年で勉強する微分積分や線形代数を理解し使えるようにしておく必要性は，言うまでもありません．

そこで次章では，ルベーグ積分や測度論に触れたことがなくてもある程度理解できる範囲で，確率論の考え方を説明してみたいと思います．

2　確率論入門

それでは，よく知られている「理想的なサイコロ」について，確率論らしい，少しだけ抽象的な議論をしてみましょう．理想的なサイコロとは，皆さんのご想像の通り「1,2,3,4,5,6 のどの目が出ることも同様に確からしい」サイコロのことです．つまり，「1 の目が出やすい」とか「偶数の目が出やすい」とかそのようなことがない公平なサイコロ，ということです．本章の目標は「理想的なサイコロを何回も投げていくと，1 の目の出る割合が $\dfrac{1}{6}$ に近づくことを確かめる」ことです．

2.1　1 回のサイコロ投げのモデル化

Ω を「理想的なサイコロを 1 回投げる」という試行の根元事象全部の集合とします．すなわち

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

とします．また，Ω の部分集合全部の集合を $\mathcal{F}$ とします．

根元事象という言葉は意外とわかりづらいのですが，試行を行うことで起こりうる事象のうち「最小」のもの，と言えます．すなわち，今の場合なら「1 の目が出る」や「5 の目が出る」がそれに該当し，Ω の要素一つひとつがそれらを表しています．また，根元事象でない事象，例えば「1 以外の目が出る」や「素数の目が出る」は $\mathcal{F}$ の要素です．つまり，$\mathcal{F}$ は「理想的なサイコロを 1 回投げる」という試行の事象全部の集合ということになります．

問題 2.1. 2 つの事象「1 以外の目が出る」と「素数の目が出る」をそれぞれ $\mathcal{F}$ の要素として表してください．

次に，P を次の条件をすべて満たすものとします．

1. $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$
2. $F \cap G = \varnothing$ を満たすすべての $F, G \in \mathcal{F}$ に対して $P(F \cup G) = P(F) + P(G)$

この P が「理想的なサイコロを 1 回投げる」という試行の事象の確率を表すと考えます．ここで，P は $\mathcal{F}$ の要素に対して値を出してくれるものであることに注意してください．

問題 2.2. 次の問いに答えてください．

(1) P の性質 1 において，$P(1)$ や $P(5)$ ではなく $P(\{1\})$ や $P(\{5\})$ となっているのはなぜでしょうか．
(2)「4 の約数の目が出る」という事象，「3 の倍数の目が出る」という事象をそれぞれ A, B とします．このとき，P の性質 1,2 のみを用いて，$P(A)$，$P(B)$，$P(A \cup B)$ を計算してください．
(3) P の性質 1,2 のみを用いて，$P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$ であることを確かめてください．

これで，理想的なサイコロを 1 回投げるという試行をモデル化できました．

2.2　無限回のサイコロ投げのモデル化

ところで，本章の目標は「理想的なサイコロを何回も投げていくと，1 の目の出る割合が $\dfrac{1}{6}$ に近づくことを確かめる」ことでした．従って，実際には理想的なサイコロを無限回投げるという試行を考える必要があります．ここでは，そのような試行をモデル化してみましょう．

まず，集合 Ω を次のように定義します．

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \mid \text{すべての } n = 1, 2, \cdots \text{ に対し } \omega_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

ここで，ω_n は「n 回目に出た目」を表しています．例えば，$\omega = (1, 5, 2, \cdots)$ という要素は「1 回目に 1 の目が出て，2 回目に 5 の目が出て，3 回目に 2 の目が出て，$\cdots$」という根元事象を表す，ということです．また，Ω の部分集合の集合 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\omega \in \Omega \mid \omega_n = k\} : n = 1, 2, \cdots ; k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

と定めます．右辺の記号は「$\{\omega \in \Omega \mid \omega_n = k\}$ たち [1)] によって生成される σ 加法族」を意味します．詳細は省きますが，2.1 節で出てきた $\mathcal{F}$ と同じように，この集合が「理想的なサイコロを無限回投げる」という試行の事象全部の集合を表しています．

問題 2.3. 「2018 回目に 1 の目が出る」という事象を $\mathcal{F}$ の要素として表してください．

次に，$\mathcal{F}$ の要素を 0 以上 1 以下の実数に対応させるもの P を，次の条件をすべて満たすものとします．ここで，σ 加法族の定義から $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$ です．

1. $P(\varnothing) = 0$
2. 相異なる自然数 i, j に対して $F_i \cap F_j = \varnothing$ となるようなすべての $F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \cdots) = P(F_1) + P(F_2) + \cdots$$

　　が成り立つ．ここで，$F_1 \cup F_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$ であることは σ 加法族の定義からわかる．

この P が「理想的なサイコロを無限回投げる」という試行の事象の確率を表すと考えます．

問題 2.4. P の性質 1,2 から，$F \cap G = \varnothing$ を満たすすべての $F, G \in \mathcal{F}$ に対して $P(F \cup G) = P(F) + P(G)$ であることを導き，さらに $P(\Omega) = 1$ であることを確かめてください．

これで，理想的なサイコロを無限回投げるという試行をモデル化できました．

2.3　1 の目が出る回数を記録する

以下，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を 2.2 節で定義したものとします．$n = 1, 2, \cdots$ に対し，X_n を次のように定めます．

$$\text{すべての } \omega \in \Omega \text{ に対し } X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_n = 1) \\ 0 & (\omega_n \neq 1) \end{cases}$$

[1)] つまり，$\{\omega \in \Omega \mid \omega_2 = 1\}$ や $\{\omega \in \Omega \mid \omega_5 = 3\}$ などのことです．

定義からわかるように，X_n は「根元事象 $\omega \in \Omega$ の n 回目の目が 1 かどうかを判定する関数」であると言えます．さらに，この $X_1, X_2, \cdots$ たちを使って，$S_1, S_2, \cdots$ を

$$\text{すべての } \omega \in \Omega \text{ に対し } S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$$

と定義すれば，S_n は「根元事象 $\omega \in \Omega$ において，n 回目までで 1 の目が何回出たかを教えてくれる関数」となります．

X_n たちや S_n たちは，すべての値についてその値を取る確率が決まっています．例えば，$X_5(\omega) = 1$ となる確率，すなわち $P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_5 = 1\})$ は $\dfrac{1}{6}$ です．このような関数のことを**確率変数**と呼びます．

問題 2.5. $P(\{\omega \in \Omega \mid S_2(\omega) = 0\})$ を求めてください．

ここまで準備すると，本章の目標は次のように書くことができます: $n \to \infty$ のとき $\dfrac{S_n}{n} \to \dfrac{1}{6}$ となる．

2.4　1 の目が出る割合の収束

さて，あとは $n \to \infty$ のとき $\dfrac{S_n}{n} \to \dfrac{1}{6}$ となることを確認するのみとなりました．この事実，すなわち「理想的なサイコロを何回も投げていくと，1 の目の出る割合が $\dfrac{1}{6}$ に近づく」ことを数学的に保証してくれるのが，**大数の法則**です．名前が紛らわしいですが，きちんと証明できる立派な数学の定理です．この定理には仮定や結論にいくつもの種類があるのですが，ここではその 1 つを紹介しましょう．

定理 2.6 (大数の強法則)**.** 独立な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ が，ある定数 μ と $K \geqq 0$ に対して

$$E(X_k) = \mu, E(X_k^4) \leqq K \ (k = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとする．このとき，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ に対し $\dfrac{S_n}{n}$ は μ に概収束する．すなわち

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \frac{S_n(\omega)}{n} \to \mu \ (n \to \infty)\right\}\right) = 1$$

が成り立つ．

まず，定理 2.6 の中身を簡単に説明しましょう．なお，登場する用語などの正確な定義には触れず，直感的な説明に留めることにします．

- 初めに出てくる「独立な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$」とは，大雑把に言えば「$X_1, X_2, \cdots$ たちの値はお互いに影響しあわない」ということを意味します．つまり，X_3 がこの値をとったから X_7 はこの値になる，みたいな現象が起こらないということです．
- $E(X)$ は「確率変数 X が取りうる値の，確率を込めた平均値[2]」を表す記号です．例えば，理想的なサイコロを投げて 3 の倍数が出たら 6 ポイント，それ以外が出たら -3 ポイントとなるゲームを 1 回行うとき，もらえるポイントの確率を込めた平均値は
$$6 \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{2}{3} = 0$$
より，0 ポイントとなります．
- S_n は Ω の要素を 0 以上の整数に対応させる関数でしたから，第 n 項を $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ とする数列を考えようにも，この数列は ω によって変わってしまいます．そこで，1 の目が出る割合 $\dfrac{S_n}{n}$ の収束を，$\dfrac{S_n(\omega)}{n} \to \mu$ となるような事象の確率が 1，というように定義しているのです．このように定義されるものを概収束と呼びます．

では，2.3 節までで定義した理想的なサイコロ投げのモデルに，定理 2.6 をあてはめてみましょう．各回のサイコロの目は互いに影響しあわないので，確率変数 $X_1, X_2, \cdots$ は独立です．また，すべての $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E(X_k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}, E(X_k^4) = \frac{1}{6}$$

となります．従って，定理 2.6 の仮定がすべて満たされているので，$\dfrac{S_n}{n}$ は $\dfrac{1}{6}$ に概収束することがわかります．つまり，「理想的なサイコロを何回も投げていくと，1 の目の出る割合が $\dfrac{1}{6}$ に近づくことを確かめる」ことができました．

[2] これを確率変数 X の期待値と呼びます．

問題 2.7. 定理 2.6 を用いて，次の事実を示してください．

理想的なサイコロを何回も投げていくと，出た目の数の合計を投げた回数で割った値は 3.5 に近づく．

このように，確率論は私たちが確率について当たり前だと思っている性質を数学的にきちんと保証してくれる素敵な理論なのです．

3 問題の解答

問題 2.1

「1 以外の目が出る」が $\{2,3,4,5,6\}$，「素数の目が出る」が $\{2,3,5\}$ です．

問題 2.2

(1) P は Ω ではなく $\mathcal{F}$ の要素に対して値を出してくれるものだから．

(2) $A=\{1,2,4\}$ なので

$$P(A)=P(\{1,2,4\})=P(\{1,2\})+P(\{4\})=P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{4\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

となります．また，$B=\{3,6\}$ なので，同様にして $P(B)=\dfrac{1}{3}$ であることがわかります．さらに，$A\cap B=\varnothing$ なので，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{5}{6}$ と計算できます．

(3) P の性質 2 において $F=G=\varnothing$ とすると $P(\varnothing)=2P(\varnothing)$ となるので，$P(\varnothing)=0$ が従います．また，$P(\Omega)=1$ であることは (2) の $P(A)$ と同様の計算をすれば確認できます．

問題 2.3

$\{\omega\in\Omega\mid\omega_{2018}=1\}$

問題 2.4

$F_1=F$，$F_2=G$ とし，$k=3,4,\cdots$ に対して $F_k=\varnothing$ とします．すると，この $F_1,F_2,\cdots\in\mathcal{F}$ は「相異なる自然数 i,j に対して $F_i\cap F_j=\varnothing$ となる」という条件を満たしています．従って $P(F_1\cup F_2\cup\cdots)=P(F_1)+P(F_2)+\cdots$ が成り立ちますが，F_n たちの定義から $F_1\cup F_2\cup\cdots=F\cup G$，また $k=3,4,\cdots$ に対して $P(F_k)=0$ なので，$P(F\cup G)=P(F)+P(G)$ となります．さらに

$$\Omega=\{\omega_1=1\}\cup\{\omega_1=2\}\cup\{\omega_1=3\}\cup\{\omega_1=4\}\cup\{\omega_1=5\}\cup\{\omega_1=6\}$$

と表せる [3] ことに注意すると，先ほど導いたことを用いて

$$P(\Omega)=P(\{\omega_1=1\})+P(\{\omega_1=2\})+P(\{\omega_1=3\})+P(\{\omega_1=4\})+P(\{\omega_1=5\})+P(\{\omega_1=6\})$$

であることがわかります．上式の右辺の各項の値は $\dfrac{1}{6}$ なので，$P(\Omega)=1$ となります．

問題 2.5

$P(\{\omega\in\Omega\mid S_2(\omega)=0\})$ は「理想的なサイコロを 2 回投げた時に 1 の目が 2 回とも出ない確率」を表していますので，その値は $\dfrac{25}{36}$ です．

問題 2.7

2.3 節以降の説明を真似てみましょう．

以下，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を 2.2 節で定義したものとします．$n=1,2,\cdots$ に対し，X_n を次のように定めます．

すべての $\omega\in\Omega$ に対し $X_n(\omega)=\omega_n$

[3] $\{\omega\in\Omega\mid\omega_1=1\}=\{\omega_1=1\}$ のように省略して書いています．

定義からわかるように，X_n は「根元事象 $\omega \in \Omega$ の n 回目の目を教えてくれる関数」であると言えます．さらに，この $X_1, X_2, \cdots$ たちを使って，$S_1, S_2, \cdots$ を

$$\text{すべての } \omega \in \Omega \text{ に対し } S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$$

と定義すれば，S_n は「根元事象 $\omega \in \Omega$ において，n 回目までの目の和がいくつかを教えてくれる関数」となります．この X_n，S_n たちに対して定理 2.6 を適用しましょう．

各回のサイコロの目は互いに影響しあわないので，確率変数 $X_1, X_2, \cdots$ は独立です．また，すべての $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E(X_k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, E(X_k^4) = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4}{6} = \frac{2275}{6}$$

となります．従って，定理 2.6 の仮定がすべて満たされているので，$\dfrac{S_n}{n}$ は $\dfrac{7}{2}$ すなわち 3.5 に概収束することがわかります．つまり，「理想的なサイコロを何回も投げていくと，出た目の数の合計を投げた回数で割った値は 3.5 に近づく」ことが示せました．

参考文献

[1]　文部科学省，『中学校学習指導要領解説 数学編』，2008
[2]　文部科学省，『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』，2009
[3]　David Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991

正多面体 (井上)

1 前書き

こんにちは、数学科の井上です．今年で 4 年生なので，$e\pi isode$ の原稿を書くのも今回が最後となります．といっても 3 年の時は少し展示を手伝ったのみなので，寄稿するのは 2 回目なのですけれど．$e\pi isode$ のメインのターゲットの読者は中高生ですので，読んで数学っておもしろいなと思ってもらえるものを書けたらいいなと思ってます．難しいことはきっと誰かが書いてくれるので私は書きません．（書けません？）少しでも興味をもって読んでもらえれば嬉しいです．

2 正多面体

定義 2.1. 正多面体（or プラトンの立体）とは，すべての面が同一の正多角形で構成され，すべての頂点で接する面の数が等しい凸多面体のこと．

定理 2.2. 正多面体は正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 つのみである．

正多面体が 5 つしかないことは有名なので，証明も含めてご存知の方も多いと思います．一つだけ証明を紹介します．ほかにもオイラーの多面体公式

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) = 2$$

を用いても示せます．

証明. 多面体を構成する多角形を正 n 角形とし，頂点に集まる面の数を m 個とします．このとき正多角形の角の大きさは $\frac{(n-2)\pi}{n}$ なので，各頂点に集まる角度の和は $\frac{m(n-2)\pi}{n}$ となる．凸多面体であるために，各頂点に集まる角の和は 2π 未満であることが必要になる．よって $\frac{m(n-2)\pi}{n} < 2\pi$ という式が得られる．

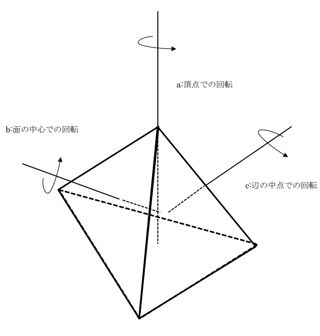
$$\begin{aligned}\frac{m(n-2)\pi}{n} < 2\pi &\iff mn - 2n - 2m < 0 \\ &\iff \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

n, m は定め方から $n, m \geq 3$ を満たす整数であることに注意すると条件を満たすのは $(n, m) = (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$ の 5 通り．これらはそれぞれ正四面体，正八面体，正二十面体，正六面体，正十二面体になっている．　□

なぜ正多面体の話をしようと思ったのか少し動機を説明しますと，定義からも分かるように正多面体は非常に対称性の高い立体です．この対称性がいろいろなところに顔を出していて面白いからです．正多面体を自分自身に移す合同変換を通して対称性を考えます．

一番単純な正四面体を例にとって対称性を見ていきます．

このとき右の図のように，頂点における回転と，面の中心における回転，辺の中点における回転の 3 つが考えられます．まず頂点の回転については $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 回転したときに，元の図形にぴったり重なります．これを 4 つの各頂点で考えます．次に面の中心の回転についても $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 回転したときに，元の図形にぴったり重なりますが，実はこれは頂点での回転を反対側から見ただけの操作になっています．つまり，頂点での回転と同一視されます．最後に辺の中点での回転ですがこれは π 回転のみで，ある辺の中点での回転とそれと向かい合う辺の中点での回転は同一のものになっています．つまり辺の数は 6 本ですが，辺 3 本分のみ考えます．また，何も動かさないという操作も一つの操作として数に入れます．



これらの結果を合わせると全部で，$1+4\times2+3\times1=12$ 通りの形を保つ回転の操作があることが分かります．この操作たちを回転による対称性の群とよびます．

定義 2.3. 正 k 面体に対して，その回転による対称性の群を k 面体群という．さらに，鏡映を含めた対称性の群を拡大 k 面体群という．

k 面体群や拡大 k 面体群が確かに群になっていることは少し確認すればわかります．(ちなみに入っている演算は，回転・鏡映等の操作の合成です．) 一応群の定義を次にあげておきますが，特別な集合だと思っても本稿を読む上ではさしつかえありません．

定義 2.4. 集合 G とその上の演算 $\cdot$ が群であるとは，以下を満たすこと．
任意の $g,h,k\in G$ について，

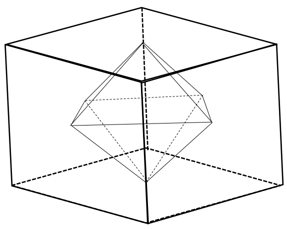
1. 結合法則 $g\cdot(h\cdot k)=(g\cdot h)\cdot k$ を満たす
2. $g\cdot1=1\cdot g=g$ となる単位元 1 が存在する
3. $g\cdot g^{-1}=g^{-1}\cdot g=1$ となる逆元 g^{-1} が存在する

正多面体のそれぞれの特徴をあげると次のようになります．

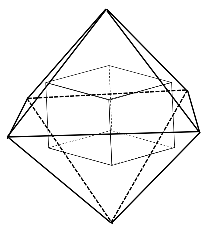
正 k 面体	面の種類 (正 n 角形)	面の数	頂点の数	辺の数	k 面体群の位数 (元の数)	k 面体群と同型な群
4	3	4	4	6	12	$\mathfrak{A}_4$
6	4	6	8	12	24	$\mathfrak{S}_4$
8	3	8	6	12	24	$\mathfrak{S}_4$
12	5	12	20	30	60	$\mathfrak{A}_5$
20	3	20	12	30	60	$\mathfrak{A}_5$

k 面体群の位数に関しては，四面体群の時と同様に頂点における回転と，面の中心における回転，辺の中点における回転の 3 つを重複のないように数え上げれば求められます．

正六面体と正八面体，正十二面体と正二十面体，いずれも k 面体群が同型になっています．これはこの二組がそれぞれ双対と呼ばれる関係になっていることと関係があります．ここでは 2 つの多面体が双対であることを一方の多面体の辺の中心を結んだらもう一方の多面体になるということで定義します．



正六面体の面の中心を結ぶと
正八面体ができる



正八面体の面の中心を結ぶと
正六面体ができる

双対な多角形同士では，それぞれ頂点における回転と面の中心における回転が 1 対 1 に対応しているので，回転による対称性を考えると同じ対称性を持っていることがわかります．

3　対称群

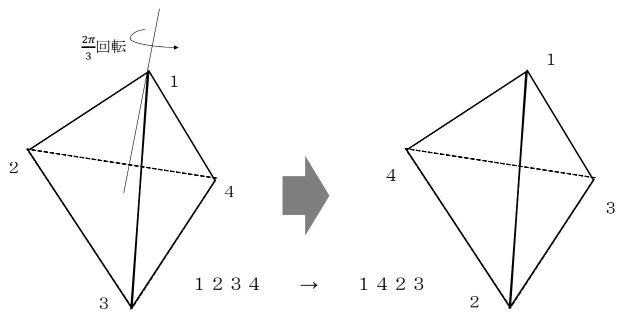
前節の表に出てきた $\mathfrak{S}_4$ や $\mathfrak{A}$ について説明をします．($\mathfrak{A}$ は A を，$\mathfrak{S}$ は S をフラクトゥール文字で書いたものです．慣習的にこう書かれます．) まず $\mathfrak{S}_n$ について．この n には正の整数が入ります．これは $1,2,\cdots,n$ の順に並んでいた n 個の数字を並べ替える操作全体によってできる群を表しています．k と l を入れ替える操作のことを (kl) と書きます．例えば $n=3$ のとき，

123 $\to$ 123	何もしない	id(恒等写像) と書く
123 $\to$ 132	2 と 3 を入れ替える	(23) と書かれる
123 $\to$ 213	1 と 2 を入れ替える	(12) と書かれる
123 $\to$ 231	1 と 2 を入れ替えた後 2 のあった場所にある 1 と 3 を入れ替える	(12)(23) と書かれる
123 $\to$ 312	1 と 2 を入れ替えた後 1 のあった場所にある 2 と 3 を入れ替える	(12)(13) と書かれる
123 $\to$ 321	1 と 3 を入れ替える	(13) と書かれる

よって $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (12)(13), (12)(23)\}$ となることがわかります．(12)(23) を 3 つの数の入れ替えとみなして (123) という書き方をすることもあります．(kl) のように 2 つの数を入れ替えているものを互換といいます．実は $\mathfrak{S}_n$ の元は全て互換の積の形で書き表すことができます．

定義 3.1. $\mathfrak{S}_n$ の元を互換の積で書き表したとき，偶数個の互換の積で書き表せるものを偶置換といい，奇数個の互換の積で表せるものを奇置換という．このとき偶置換全体の集合を $\mathfrak{A}_n$ と書く．

四面体群が $\mathfrak{A}_4$ とみなせるのはどうしてでしょう．四面体の頂点に 1〜4 の番号を振ります．すると回転というのはこの四面体の番号を入れ替えることに他なりません．例えば頂点を中心にして $\frac{2\pi}{3}$ 回転させることを考えます．



上の図のように回転をさせることと頂点を入れ替えることが対応しています．ここで 1234 $\to$ 1423 というのは (24)(34) に対応しています．ほかの回転も全て試してみると，この四面体の対称性の群がちょうど $\mathfrak{A}_4$ に一致することがわかります．ちなみに鏡映も含めた拡大四面体群のほうは $\mathfrak{S}_4$ に一致します．

ほかの多面体についても，同様に考察ができますが番号を振り方をうまく工夫する必要があります．例えば，正六面体群は $\mathfrak{S}_8$ よりずいぶん小さいですから，頂点に全部に番号を振ったものを考えても仕方ありません．(一般に $k \leq l$ のとき $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_l$ であることは定義からわかるので，確かに $\mathfrak{S}_4 \subset \mathfrak{S}_8$ になりますが．) この場合は一番離れた所にある頂点同士の関係はいくら回転させても変わらないことを利用します．すると半分の数の頂点に番号を振れば十分ということがわかります．

4 McKay 理論

これから書くのはおまけの話です．まともに説明すると紙面が足りなくなるので，厳密性のないただのお話として紹介します．McKay 対応といって，今まで散々見てきた多面体群と単純リー環のルート系という数学的に興味のある対象を，一対一に対応させるおもしろい理論があります．リー環がなんであるかについては，足し算とある種の積の入った環でそこそこ扱いやすいものだと思ってください．

定理 4.1. 2 次元特殊線形群 $SL(2)$ の有限部分群は次の 5 つのいずれかに同型になる．

- 位数 $n-1$ の巡回群 (A_{n-1})
- 多面体群 : 正二面体群 (D_{n+2})，正四面体群 (E_6)，正八面体群 (E_7)，正二十面体群 (E_8)，ただし $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ とする．

2 次元特殊線形群 $SL(2)$ とは行列群の一種で，

$$\begin{aligned} SL(2) &= \{X \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \det X = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc=1 \right\} \end{aligned}$$

で定義されます．

位数 n の巡回群についてですが，これは正 n 角形に対する回転による合同変換が作る群と同一視できます．一方，正二面体群は正 n 角形に対する回転と鏡映による合同変換が作る群と同一視できます．

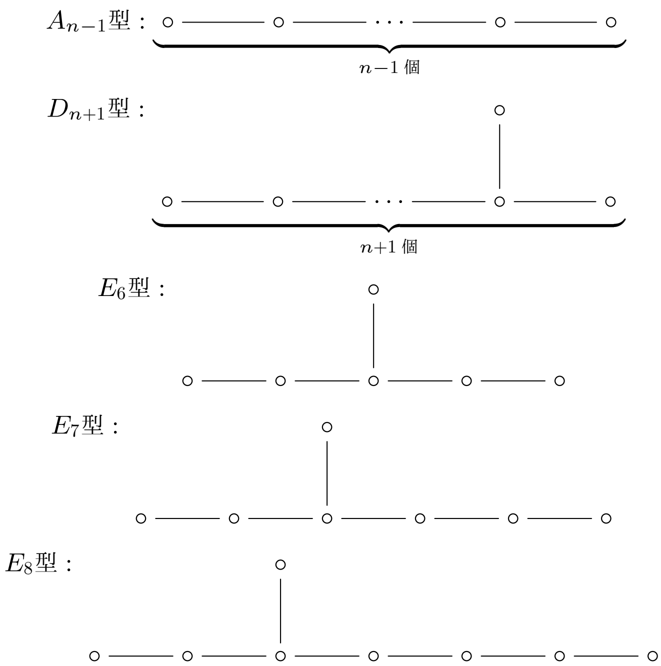
この群 G の持つ性質を知りたいと思ったときに，表現というものを考えてこれにより G を特徴づけようという考え方があります．

定理 4.2. (McKay)

$SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G の表現から構成されるディンキン図形は，既約ルート系の simply laced (辺がすべて一本線である) といわれるディンキン図形と同型である．

既約ルート系のディンキン図形が単純リー環と一対一に対応しています．そのため単純ではないリー環にも同様の対応があるのではないかと研究がすすめられています．

ディンキン図形は表現やルート系などから一意的に構成できますが，次のようなものです．



参考文献

[平井& 山下]　表現論入門セミナー，平井武・山下博，遊星社
[Borovik]　鏡映の数学：有限鏡映群の幾何学，A.V. ボロビック, A. ボロビック著，小林雅人 [ほか] 訳，丸善出版
[松澤]　特異点とルート系，松澤淳一，朝倉書店

リーマンゼータ関数について (今井)

はじめに

この記事は高校数学の数学 III までの知識がある人向けに書いていますが，注釈などを入れて，数学 III 未修者の人にも配慮しながら書いていこうと思っています．

さて，数学好きの人なら知っているかもしれませんが，今年の 9 月，有名なイギリスの数学者アティヤ [1] がリーマン予想を証明したと発表したというニュースがありました．もちろん，まだ検証中なので，本当に証明できているかはわかりませんが，ちょうどいい機会なので，この記事ではリーマン予想に出てくるリーマンゼータ関数について書いていこうと思います．

1 総和法

皆さんは次のような式を見たことがあるでしょうか．

$$1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12} \tag{1}$$

ラマヌジャン [2] のハーディ [3] への手紙に書いてあったことでも有名なこの式ですが，「普通に考えると」この式は正しくありません．しかし，だからといってこの式が全くのでたらめというわけではなく，きちんと意味のある式なのです．

「普通に考えると」この式は正しくないと言いましたが，では「普通に考えると」とはどういうことでしょう．右辺はただの分数なので意味ははっきりしています．問題は左辺です．通常，$1+2+3+4+\cdots$ と書いた場合，1 に 2 を足して，3 を足して，4 を足して，$\cdots$ と足す数を 1 ずつ大きくしながら永遠に足し算をつづけた結果を意味します．数学の記号で書くと

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k$$

となります [4]．当然これを計算すると，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$$

となり，$-\frac{1}{12}$ にはなりません．ここで，この $1+2+3+4+\cdots$ のような無限に続く足し算 (無限級数と呼びます) の「計算方法」として，別の方法を考えてみましょう．$1-1+1-1+\cdots$ という無限級数について考えてみます．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$$

と定義します．先ほどの通常の足し算の方法では，

$$1-1+1-1+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$$

となるので，これは $f(x)$ に $x=1$ を代入したものと見なすことができます．

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}0 & (n:\text{偶数})\\ 1 & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

---

1) Michael Atiyah, 1929–

2) Srinivasa Ramanujan, 1887–1920

3) Godfrey Harold Hardy, 1877–1947

4) $\lim_{n\to a}$ とは，n を a に限りなく近づけたときに，その右に書かれた式の値が近づいていく値を表し，この値を極限と呼びます．極限がある 1 つの有限値に定まるとき，収束するといい，それ以外の場合は，発散するといいます．この場合は発散しています．

となるので，この定義では，$1-1+1-1+\cdots$ は収束しないことになります．新しい方法として，$f(x)$ に $x=-1$ を代入するのではなく，$x=1-s$ $(s>0)$ を代入して，s を 0 に近づけたときの極限を $1-1+1-1+\cdots$ の「計算結果」と考えることにします．つまり，

$$1-1+1-1+\cdots=\lim_{s\to+0}f(1-s)$$

と定義するのです[5]．この定義で $1-1+1-1+\cdots$ を計算してみましょう．$-1<x<1$ のとき，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\{1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$$

なので，

$$1-1+1-1+\cdots=\lim_{s\to+0}f(1-s)=\lim_{s\to+0}\frac{1}{1+(1-s)}=\frac{1}{2}$$

となります．この無限級数の「計算方法」をアーベル[6]総和法 (Abel summation) と言い，この「計算結果」をアーベル和 (Abel sum) といいます．

一般的な形で書くと，次のようになります．

アーベル総和法

無限級数 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots$ に対し，$0<x<1$ において $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ が収束し[7]，

$$\lim_{s\to+0}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k(1-s)^k\right\}$$

が収束するとき，その値をアーベル和という．

ここまで無限級数とその通常の計算方法での和も，無限級数とそのアーベル和も等号で結んできましたが，これでは紛らわしいので，無限級数 I に対して，I の通常の計算方法での和を $S(I)$，I のアーベル和を $A(I)$ と書くことにします．つまり，

$$S(1+2+3+4+\cdots)=\infty,\ A(1-1+1-1+\cdots)=\frac{1}{2}$$

のように書きます[8]．

ここまで読んで，そんな勝手に計算方法を変えたものにアーベル「和」などと名前を付けてもいいのか，と思った読者の方もいるかもしれませんが，実は，無限級数が通常の計算方法で収束するとき，アーベル和が定義できて同じ値になるのです (証明は高校数学の範囲を超えてしまうので省略します[9])．

問 1．次の無限級数 I に対し $S(I)=A(I)$ であることを示せ．
ただし，$0<|x|<1$ で $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k+1}=\frac{\log(1-x)}{x}$ であることを用いてよい．

(1) $I: 1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\cdots$
(2) $I: 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k}+\cdots$

アーベル総和法の他にも様々な総和法があります．ここでは定義だけ紹介しておきます．

---

[5] $s\to+0$ とは，s を正の側から 0 に近づけるということです．

[6] Niels Henrik Abel, 1802–1829

[7] つまり，$0<r<1$ を満たす全ての実数 r に対し，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kr^k$ が収束するということ．

[8] この記事ではアーベル和を直感的に理解しやすいように無限級数とそのアーベル和を等号で結んだりしましたが，通常は $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots=b$ と書いたら $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k=b$ (つまり，$S(a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots)=b$) という意味です．その意味では (1) 式は間違っています．

[9] 証明はアーベルの連続性定理，または Abel's theorem on power series で検索すれば出てくると思います．

チェザロ[10] 総和法 (Cesàro summation)

無限級数 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k \right\}$$

が収束するとき，その値をチェザロ和 (Cesàro sum) という．

オイラー[11] 総和法 (Euler summation)

無限級数 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \left\{ \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k a_k \right\}$$

が収束するとき，その値をオイラー和 (Euler sum) という．

ただこれらの総和法でも，$1+2+3+4+\cdots$ を $-\frac{1}{12}$ にはできません．どれを使っても発散してしまいます．では (1) 式はどうすれば出てくるのでしょう．実は，アーベル総和法と似たような考え方でできるのですが，それを説明するのにはまだもう少し準備が必要なのです．

2　ガンマ関数

突然ですが，次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は何でしょう．

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n$$

これは簡単だと思います．答えは $a_n = n!$ です．では，

$$g(0) = 1,\ g(z+1) = (z+1)\cdot g(z) \tag{2}$$

を満たすような性質の良い (ほとんどすべての点で微分可能[12]) 複素関数[13] g は存在するのでしょうか，そして，存在するとしたらそれはどのような形をしているのでしょう．この章ではそのような関数について考えていきたいと思います．

(2) を満たすような性質の良い複素関数 g が存在すると仮定します．$h(z) = \frac{1}{g(z)}$ とおきます．すると，h は

$$h(0) = 1,\ h(z) = (z+1)\cdot h(z+1) \tag{3}$$

を満たすので，n が正の整数のとき，

$$\begin{aligned} h(-n) =&(-n+1)\cdot h(-n+1) \\ =&(-n+1)(-n+2)\cdot h(-n+2) \\ =&\cdots \\ =&(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot h(-1) \\ =&(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot 0\cdot h(0) = 0 \end{aligned}$$

10) Ernesto Cesàro, 1859–1906

11) Leonhard Euler, 1707–1783

12) 正確には，微分可能ではない点の集合が集積点を持たない，となります．直感的にはそういう点が密集しているところがないということです．「性質の良い」と書きましたが，このような性質を持つ複素関数のことを有理形関数 (meromorphic function) といいます．

13) 定義域が複素数全体で，数を代入した時の値が複素数になるような関数のこと．高校の範囲では基本的に定義域も値域も実数の範囲内の関数しか扱わないが，とりあえずこの記事では複素数を代入できるように拡張したと思っておけばよいです．

となります．つまり，z が負の整数のとき，$h(z)=0$ となります．さらに $h(z)$ の零点 ($h(z)=0$ を満たす z のこと) がこれ以外にないと仮定します．実は，零点が負の整数のみであるようなほとんどすべての点で微分可能な関数は

$$C\exp(f(z))\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{m_n}\exp\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{z^k}{k(-n)^k}\right)\right\}$$

(ただし，C は複素数，m_n, l は正の整数，$f(z)$ は複素数平面上すべての点で微分可能な複素関数，$\prod$ は $\sum$ の積バージョン [14]，$\exp(w)=e^w$，e は自然対数の底 [15])[16]

の形にかけることがわかっています [17]．このような関数の中で一番簡単な形のもの，つまりすべての n に対し $m_n=1$ で，$l=C=1$，すべての複素数 z で $f(z)=0$ のときのものを $H(z)$ とします．すると

$$H(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}$$

となり，しかも

$$H(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(1+0)e^{0}\right\}=1$$

です．さらに，ここでは証明はしませんが，$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}$ は積の順番を変えても同じ値に収束するということが示せる [18] ので，

$$\begin{aligned}\frac{H(z)}{H(z+1)} &=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z+1}{n}\right)e^{\frac{-z-1}{n}}\right\}}\\ &=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{z+n}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}}{\left(\frac{z+n+1}{n}\right)e^{\frac{-z-1}{n}}}\\ &=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{z+n}{z+n+1}\right)e^{\frac{1}{n}}\right\}\\ &=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{z+n}{z+n+1}\right)e^{\frac{1}{n}}\right\}\\ &=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{z+1}{z+N+1}\right)\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &=\lim_{N\to\infty}(z+1)\left(\frac{N}{z+N+1}\right)\exp\left(-\log N+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\\ &=(z+1)\cdot 1\cdot e^{\gamma}=e^{\gamma}(z+1)\end{aligned}$$

(ただし，$\gamma=\lim_{n\to\infty}\{-\log N+\sum_{n=1}^{N}(1/n)\}\fallingdotseq 0.57722$，この γ はオイラーの定数と呼ばれる．)
となるので，$h(z)=e^{\gamma z}H(z)$ とすれば，$h(z)$ は (3) の条件を満たします．よって，

$$h(z)=e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\},\ g(z)=e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z+n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}$$

これで，$g(z)$ が求まりました．実際に現在，階乗を一般化した関数として，広く用いられている関数は，オイラーのガンマ関数 $\Gamma(z)$ ですが，これは $\Gamma(z)=g(z-1)$ であり，今求めた g を 1 だけずらしたものとなっています．しか

[14] $\prod_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}$ という意味．$\sum$ でも同様の書き方をします．

[15] $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\fallingdotseq 2.7183$

[16] e^w という形を見て，実数を複素数乗することができるのかと思った人もいるかもしれません．実は，x が実数のとき，$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ という式が成り立つので，e^w とは，この右辺を使って，$e^w=sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$ と定義したものです．後で出てきますが，正の実数 t に対して t^w も $t^w=e^{w\log t}$ として定義されます．

[17] この右辺を $h(z)$ の積表示といいます．

[18] 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ に対し，$\sum_{n=1}^{\infty}|\log p_n|$ が収束するとき，$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ は絶対収束するといいます．絶対収束ならば順番を変えても同じ値に収束することが言えるので，絶対収束することを示せばよいです．

し，実際にオイラーが考えた階乗を一般化したときはこのようなずれはなく，ルジャンドル[19]が現在の記号 $\Gamma(z)$ と 1 だけずれた定義を使い始めたようです．

さて，ガンマ関数は求まったものの，無限積の形では扱いづらいので，他の形にできないか考えてみます．天下り的ですが，$\mathrm{Re}(z) > 0$，n は正の整数として，次のような積分計算を考えてみましょう．[20]

$$\begin{aligned}\int_0^1 s^n (1-s)^{z-1}\,ds &= \int_0^1 s^n \left\{\frac{-(1-s)^z}{z}\right\}'\,ds\\ &= \left[\frac{-s^n(1-s)^z}{z}\right]_0^1 - \int_0^1 (s^n)'\left\{\frac{-(1-s)^z}{z}\right\}\,ds\\ &= 0 - \int_0^1 (s^n)'\left\{\frac{-(1-s)^z}{z}\right\}\,ds\\ &= \frac{n}{z}\int_0^1 s^{n-1}(1-s)^z\,ds\end{aligned}$$

これを繰り返すと，

$$\begin{aligned}\int_0^1 s^n(1-s)^{z-1}\,ds &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-2)(z+n-1)}\int_0^1 (1-s)^{z+n-1}\,ds\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-2)(z+n-1)}\cdot\frac{1}{z+n}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}\\ &= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{z+k}\right)\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}g(z) &= e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z+n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{z+n}\right)\exp\left(\left(\log N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)z + \sum_{n=1}^{N}\frac{z}{n}\right)\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{z+n}\right)\exp(z\log N)\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{z+n}\right)N^z\right\}\end{aligned}$$

なので，上の積分計算の結果より，

$$\begin{aligned}g(z) &= \lim_{N\to\infty}\left\{\left(z\int_0^1 s^N(1-s)^{z-1}\,ds\right)N^z\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(z\int_0^1 s^N\{N(1-s)\}^{z-1}N\,ds\right)\end{aligned}$$

$t = N(1-s)$ と置換すると，$-dt = N\,ds$ より，

$$g(z) = \lim_{N\to\infty}\left(z\int_0^N\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{z-1}\,dt\right)$$

ここで，$0 \leq y \geq 1$ において $e^y \geq 1+y$，$e^{-y} \geq 1-y$ なので，$y = \frac{t}{N}$ を代入して

$$\left(1+\frac{t}{N}\right) \leq e^{\frac{t}{N}} \leq \left(1-\frac{t}{N}\right)^{-1}$$

[19] Adrien Marie Legendre, 1752–1833

[20] この積分計算は数学 III 未修者の人には何をやってるかわからないかもしれませんが，説明すると長くなってしまうので，こういう式が成り立つんだな，程度で読み飛ばしていただいて結構です．

$$\left(1-\frac{t}{N}\right)^N \leq e^{-t} \leq \left(1+\frac{t}{N}\right)^{-N}$$

$$\begin{aligned}0 \leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{N}\right)^N \leq& e^{-t}-\frac{e^{-t}}{(1-\frac{t}{N})^N}\left(1-\frac{t}{N}\right)^N \\ =& e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^N\right\} \\ =& e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)\right\}\left\{\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^k\right\} \\ \leq& e^{-t}\left(\frac{t^2}{N^2}\right)\cdot N = e^{-t}t^2N^{-1}\end{aligned}$$

となります．これは高校数学の範囲を超えてしまいますが，$|t^z| = |e^{z\log t}| = e^{\mathrm{Re}(z)\log t} = t^{\mathrm{Re}(z)}$ が成り立つことがオイラーの公式からわかる[21)]ので，これを使うと，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^N \left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{N}\right)^N\right\} t^{z-1}\,dt\right| \leq& \left|\int_0^N e^{-t}t^{z+1}N^{-1}\,dt\right| \\ \leq& \int_0^N e^{-t}\left|t^{z+1}\right|N^{-1}\,dt \\ \leq& N^{-1}\int_0^N e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,dt\end{aligned}$$

ここで，十分大きなある実数 T を取ると，

$$t > T \Rightarrow e^{\frac{t}{2}} > t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

となるので，$N > T$ において

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,dt \leq& \int_0^T e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,dt + \int_0^N e^{\frac{-t}{2}}\,dt \\ =& \int_0^T e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,dt + 2(e^{\frac{-T}{2}}-e^{\frac{-N}{2}})\end{aligned}$$

となります．最右辺は $N\to\infty$ とすると有限値に収束するので，この値を τ とおくと，

$$0 \leq \lim_{N\to\infty}\left|\int_0^N \left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{N}\right)^N\right\} t^{z-1}\,dt\right| \leq \lim_{N\to\infty} N^{-1}\tau = 0$$

はさみうちの原理[22)]より，

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_0^N \left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{N}\right)^N\right\} t^{z-1}\,dt\right| = 0$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N \left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{N}\right)^N\right\} t^{z-1}\,dt\right] = 0$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N e^{-t}t^{z-1}\,dt\right) = \lim_{N\to\infty}\left\{\int_0^N \left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{z-1}\,dt\right\}$$

よって，

$$g(z) = z\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^N e^{-t}t^{z-1}\,dt\right)$$

$\sum, \prod$ のときと同様に $\lim_{N\to\infty}\int_0^N$ はまとめて

$$g(z) = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

---

21) x, y が実数のとき，$e^{iy} = \cos y + i\sin y$ の両辺の絶対値を取って，$|e^{iy}| = 1$ となるので，$|e^{x+iy}| = e^x$

22) 十分大きい n で $a_n < c_n < b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$ なら，$\lim_{n\to\infty} c_n = r$ という原理．

と書いてもよいです．$\Gamma(z)=g(z-1)=\frac{g(z)}{z}$ だったので，

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

ただし，初めにつけた仮定があるので，この式は $\mathrm{Re}(z)>0$ でしか成り立ちません．

次に，オイラーの相反公式 (Euler's reflection formula) と呼ばれる下の公式を証明したいと思います．

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{4}$$

$\sin(\pi z)$ を無限積で書くと，

$$\begin{aligned}\sin(\pi z)=&\pi z\prod_{n=-\infty}^{-1}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}\\=&\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}\\=&\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

となります．一方，

$$\begin{aligned}&h(z)h(-z)\\=&\left[e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}\right\}\right]\left[e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}\right]\\=&\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

なので，$\sin(\pi z)=\pi z\cdot h(z)h(-z)$ となります．ここで，$\Gamma(z)=\frac{1}{h(z-1)}$ より，

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{1}{h(z-1)h(-z)}=\frac{1}{z\cdot h(z)h(-z)}=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

となり，オイラーの相反公式が示されました．

最後に，ルジャンドルの 2 倍公式 (Legendre's duplication formula) と呼ばれる下の公式を証明したいと思います．

$$\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

ガンマ関数を無限積で書くと，

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z+n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}$$

で，無限積の部分は $\frac{1}{H(z)}$ となっているので，無限積の部分は積の順番を変えても同じ値に収束することに注意すると，

$$\begin{aligned}&\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\\=&\left[\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z+n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}\right]\left[\frac{e^{-\gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}}{z+\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z+\frac{1}{2}+n}\right)e^{\frac{z+\frac{1}{2}}{n}}\right\}\right]\\=&\frac{e^{-\gamma\left(2z+\frac{1}{2}\right)}}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2z+2n}\right)e^{\frac{2z}{2n}}\right\}\\&\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n+1}{2z+2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)e^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2z}{2n(2n+1)}}\right\}\end{aligned}$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z)\\
=&\left[\frac{e^{-\frac{\gamma}{2}}}{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{\frac{1}{2}+n}\right)e^{\frac{\frac{1}{2}}{n}}\right\}\right]\left[\frac{e^{-2\gamma z}}{2z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{2z+n}\right)e^{\frac{2z}{n}}\right\}\right]\\
=&\frac{e^{-\gamma\left(2z+\frac{1}{2}\right)}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)e^{\frac{1}{2n}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{2z+n}\right)e^{\frac{2z}{n}}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，奇数番目の項と偶数番目の項に分けることで，

$$
\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{2z+n}\right)e^{\frac{2z}{n}}\right\}=\frac{e^{2z}}{2z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2z+2n}\right)e^{\frac{2z}{2n}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n+1}{2z+2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}\right\}
$$

また，

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=1-\log 2
$$

より，

$$
\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{2z}{2n(2n+1)}}=\left(\frac{e}{2}\right)^{2z}
$$

で，この無限積も順番を変えても同じ値に収束します．よって，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{e}{2}\right)^{2z}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z)\\
=&\frac{e^{-\gamma\left(2z+\frac{1}{2}\right)+2z}}{z(2z+1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)e^{\frac{1}{2n}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2z+2n}\right)e^{\frac{2z}{2n}}\right\}\\
&\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n+1}{2z+2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}\right\}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{2z}{2n(2n+1)}}\\
=&\frac{e^{-\gamma\left(2z+\frac{1}{2}\right)+2z}}{z(2z+1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n}{2z+2n}\right)e^{\frac{2z}{2n}}\right\}\\
&\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2n+1}{2z+2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)e^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2z}{2n(2n+1)}}\right\}\\
=&\frac{e^{2z}}{2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となりますが，(4) 式に $s=\frac{1}{2}$ を代入すると，$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\pi$ がわかり，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)>0$ なので，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ となり，ルジャンドルの 2 倍公式が示されました．

3　リーマンゼータ関数

さて，いよいよ (1) 式がどういう意味なのか解明していきたいと思います．アーベル総和法では，$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots$ という無限級数に対して，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ という関数を考えましたが，今回は，無限級数 $1+2+3+4+\cdots$ に対して $Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ という複素関数を考えてみます．まず，この右辺が $\mathrm{Re}(s)>1$ で収束することを示したいと思います．初めに，s が 1 より大きい実数のときに示します．$n-1\leq t\leq n$ において $n^{-s}\leq t^{-s}$ なので，

$$
n^{-s}=\int_{n-1}^{n}n^{-s}\ dt\leq\int_{n-1}^{n}t^{-s}\ dt
$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^{-s} =&1+\sum_{n=2}^{N} n^{-s}\\ \leq&1+\sum_{n=2}^{N}\left(\int_{n-1}^{n} t^{-s}\,dt\right)\\ =&1+\left(\int_{1}^{N} t^{-s}\,dt\right)\\ =&1+\left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^N\\ =&1+\frac{1-N^{-s+1}}{s-1}\leq\frac{s}{s-1}\end{aligned}$$

となり，数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\right\}$ は単調増加だが上限がある [23] のでこの数列の極限である $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は収束します．

次に s が実数でないときについて示します．$s=\sigma+it$ (ただし，σ, t は実数，$\sigma>1,\ t\neq 0$) とします．前節で出てきたように，$|n^{-s}|=n^{-\mathrm{Re}(s)}$ なので，N より大きい任意の整数 M に対し，

$$0<\left|\sum_{n=N+1}^{M} n^{-s}\right|\leq\sum_{n=N+1}^{M}\left|n^{-s}\right|=\sum_{n=N+1}^{M} n^{-\sigma}\leq\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}=Z(\sigma)-\sum_{n=1}^{N} n^{-\sigma}$$

が成り立つので，$r_N=Z(\sigma)-\sum_{n=1}^{N} n^{-\sigma}$ とおくと，数列 $a_n=\left\{\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\right\}$ の値を複素数平面にプロットすると，a_N 以降の点はすべて，a_N を中心とした半径 r_N の円 (C_N とする) の内部および周のどこかにある．$|a_{N+1}-a_N|+r_{N+1}=r_N$ より，C_{N+1} は C_N に内側から接していて，$\lim_{N\to\infty} r_N=0$ なので，$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は収束します [24]．

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ でないときには収束するとは限りません．たとえば $s=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$$

となってしまいます．

一方，前節のガンマ関数の積分による表示を思い出すと，

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

これに $z=\frac{s}{2}$ を代入し，$n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}$ を掛けて $x=\frac{t}{n^2\pi}$ で置換すると，

$$\begin{aligned}n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)&=\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{n^2\pi}\right)^{\frac{s}{2}-1}\frac{1}{n^2\pi}\,dt\\ &=\int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}Z(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)&=\int_0^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\\ &=\int_0^{1}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx+\int_1^{\infty}\psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx\end{aligned}$$

となります [25]．ここで，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(y+2n\pi)^2\frac{x}{4\pi}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\pi\frac{1}{x}+iky}$$

[23] 数学用語では上に有界であるといいます．

[24] 高校数学の範囲ではそもそもまだ極限を厳密な形で定義していないので感覚的な議論になってしまっていますが，理系の学生が大学1年生で習う $\epsilon-\delta$ 論法を使えばこの証明もちゃんと数式化できます．

[25] 積分と無限和の交換は無条件では行ってはいけませんが，ここでは数学科の3年生の解析学の授業でやる項別積分定理という定理から交換してもよいことがわかります．

という関係式が成り立つ[26]ので，これに $y=0$ を代入すると，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\pi \frac{1}{x}}$$

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1+2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi \frac{1}{x}}\right)$$

$$2\psi(x)+1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\psi(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$$

となるので，積分区間が 0 から 1 までの方の積分で $x=\frac{1}{y}$ と置換すると，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx &= \int_\infty^1 \psi\left(\frac{1}{y}\right) y^{1-\frac{s}{2}} \left(-\frac{1}{y^2}\right)\,dy \\
&= \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{y}\right) y^{\frac{-s}{2}-1}\,dy \\
&= \int_1^\infty \left(\sqrt{y}\psi(y) + \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{1}{2}\right) y^{\frac{-s}{2}-1}\,dy \\
&= \int_1^\infty \psi(y) y^{\frac{1-s}{2}-1}\,dy + \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(y^{\frac{1-s}{2}-1} - y^{\frac{-s}{2}-1}\right)\,dy \\
&= \int_1^\infty \psi(y) y^{\frac{1-s}{2}-1}\,dy + \frac{1}{2}\left[\frac{2y^{\frac{1-s}{2}}}{1-s} + \frac{2y^{\frac{-s}{2}}}{s}\right]_1^\infty \\
&= \int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{1-s}{2}-1}\,dx - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

最後の行の第 1 項では積分の変数を表す文字を y から x に変えただけで，変数変換などは行っていません．また最後の行の第 2 項以降は，$\mathrm{Re}(s)>1$ なので，$\lim_{y\to\infty} y^{\frac{-s}{2}}=0$, $\lim_{y\to\infty} y^{\frac{1-s}{2}}=0$ となっているためこうなっています．よって，

$$\pi^{-\frac{s}{2}} Z(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\,dx - \frac{1}{s(1-s)} \tag{6}$$

右辺の積分は複素数平面全体で収束するので，

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left\{\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\,dx - \frac{1}{s(1-s)}\right\}$$

とおくと，$\mathrm{Re}(s)>1$ では $Z(s)=\zeta(s)$ を満たす，性質の良い複素関数が定義できます．この $\zeta(s)$ がこの記事のタイトルにもなっているリーマン[27]ゼータ関数 (Riemann zeta function)[28]です．

さて，(6) 式の右辺は s を $1-s$ に変えても同じ式になるので，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

が成り立ちます．移項して，

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \cdot \zeta(1-s)$$

ここで，(4) 式と (5) 式より，

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$$

---

[26] 左辺を y の関数とみて，この関数をフーリエ級数展開 (これも数学科の 3 年生の解析学の授業で習います) すると右辺になります．

[27] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866

[28] この関数はリーマンよりも前にオイラーも研究していましたが，この関数の様々な重要な性質を発見したのはリーマンであるため，リーマンゼータ関数と呼ばれています．

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)=2^{1-(1-s)}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-s)=2^{s}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-s)$$

なので，

$$\zeta(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2^{s}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-s)}{\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}}\cdot\zeta(1-s)=2^{s}\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{7}$$

が成り立ちます．この式は関数等式 (functional equation) と呼ばれます．この関数等式に $s=-1$ を代入してみると，

$$\zeta(-1)=\frac{1}{2\pi^{2}}\cdot(-1)\cdot 1!\cdot\zeta(2)=-\frac{\zeta(2)}{2\pi^{2}}$$

となり，

$$\zeta(2)=Z(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

より [29]，$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ となります．ここで，冒頭の (1) 式をみてみましょう．この式の意味が分かったでしょうか．$1+2+3+4\cdots$ は，この式においては，$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ を延長 [30] した関数である $\zeta(s)$ に $s=-1$ を代入したものということを表していたのです．

4　素数定理とリーマン予想

前節で出てきたリーマンゼータ関数ですが，18 世紀のオイラーの時代から研究され始め，現代においても研究が続けられています．特に，整数論の分野でよく出てきます．ここでは，リーマンゼータ関数が絡む問題を 2 つ紹介しようと思います．

1 つ目は素数定理 (prime number theorem) です．

素数定理

x を実数とする．$\pi(x)$ を 1 以上 x 以下の素数の個数だとすると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\pi(x)}{\log x}=1$$

が成り立つ．

この定理は，x 以下の素数の個数が大体 $\frac{x}{\log x}$ で近似できることを表しています．証明はしませんが，素数定理は

$$\mathrm{Re}(s)=1\text{ のとき},\zeta(s)\neq 0$$

という命題と同値であり，これを用いて素数定理がアダマール [31] とド・ラ・ヴァレー・プーサン [32] によって証明されています．

リーマンゼータ関数と素数の関係性については次の式がよく表しています．

$$Z(s)=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}} \tag{8}$$

これは，

$$\sum_{k=0}^{\infty}p^{k-s}=\frac{1}{1-p^{-s}}$$

であることと，$\mathrm{Re}(s)>1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ は和の順番を変えても同じ値に収束することから証明できます．

問 2．(8) 式を証明せよ．

---

[29] $\zeta(2)$ の値を求める問題はバーゼル問題と呼ばれています．$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ の証明などは，ネットで検索すれば出てくるはずですし，前号の $e\pi isode$ にもバーゼル問題に関連した記事があります．

[30] 数学用語では解析接続といいます

[31] Jacques Salomon Hadamard, 1865–1963

[32] Charles-Jean de La Vallée Poussin, 1866–1962

2 つ目はリーマン予想 (Riemann conjecture) です．

リーマン予想

$$\zeta s = 0 \Rightarrow s \text{ は負の偶数，または } \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$$

これはリーマンが [6] で提起した予想です．159 年たった今でもまだ解決されていません．アメリカのクレイ数学研究所によって，この問題はミレニアム懸賞問題の 1 つとされ，100 万ドルの懸賞金がかけられています[33]．ゼータ関数の負の偶数でない零点 s が $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ を満たすことは比較的簡単に証明できます．

$$\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| \geq \frac{1}{1+p^{-\mathrm{Re}(s)}} \geq e^{-p^{-\mathrm{Re}(s)}}$$

なので，$\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき，

$$\begin{aligned}|\zeta(s)| &= \prod_{p:\text{素数}} \left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| \\ &\geq \exp\left(-\sum_{p:\text{素数}} p^{-\mathrm{Re}(s)}\right) \\ &\geq \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mathrm{Re}(s)}\right) \\ &= \exp(-\zeta(\mathrm{Re}(s)) > 0\end{aligned}$$

となり，

$$\mathrm{Re}(s) > 1 \Rightarrow \zeta(s) \neq 0$$

が成り立ちます．(7) 式を使うことで，

$$\mathrm{Re}(s) < 0,\ s \text{ は負の偶数でない} \Rightarrow \zeta(s) \neq 0$$

も成り立つので，これらの対偶より，

$$\zeta(s) = 0 \Rightarrow 0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1 \text{ または } s \text{ は負の偶数}$$

が示されました．

この記事はこれで終わりです．読んでいただきありがとうございました．

参考文献

[1] Berndt, B. C. (1985). *Ramanujan's notebooks: Part 1.* New York: Springer-Verlag.
[2] Hardy, G. H. (1949). *Divergent series.* Oxford: Clarendon Press.
[3] Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis. 3rd ed.* McGraw-Hill Book Company. (アールフォルス，L. V., 笠原乾吉 (訳) (1982). 複素解析. 現代数学社)
[4] Whittaker, E. T., Watson, G. N. (1920). *A course of modern analysis. 3rd ed.* Cambridge: Cambridge University Press
[5] Davis, P. J. (1959). Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function, *The Am. Math. Mon..* 66:10, 849-869. DOI: 10.1080/00029890.1959.11989422
[6] Riemann, G. F. B. (1859). Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monats. Preuss. Akad. Wiss..* 11.
[7] Diamond, H. G. (1982). Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* 7:3, 553-589. DOI:10.1090/S0273-0979-1982-15057-1

[33] http://www.claymath.org/millennium-problems

パズルのコーナー(まどれ〜ぬ)

ピラミッド

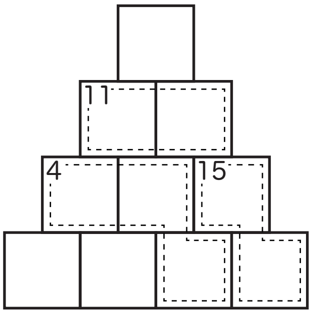
〈ルール〉１．全てのマスに１〜９の数字のうちどれかひとつを書き込みます。

２．同じ高さの段で、同じ数字が２つ以上入ることはありません。

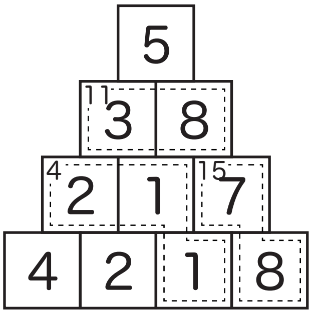
３．一番下の段を除く全てのマスで、そこに入る数字はそのマスの下にある数字の和か差になります。

４．点線で囲まれた枠では、中に入る数字の合計が、左上に書かれた数字と同じになります。

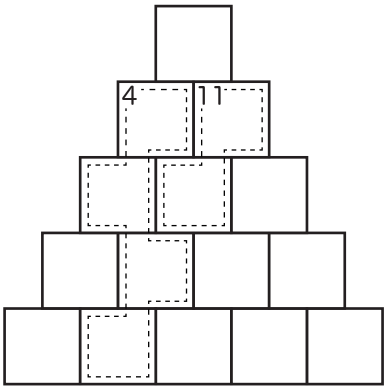
例題



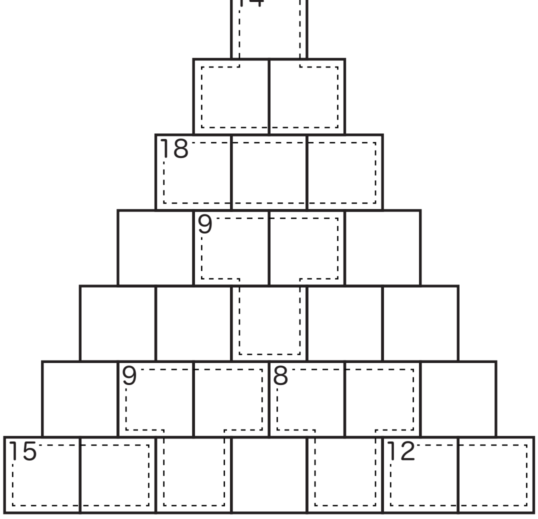
例題の答え



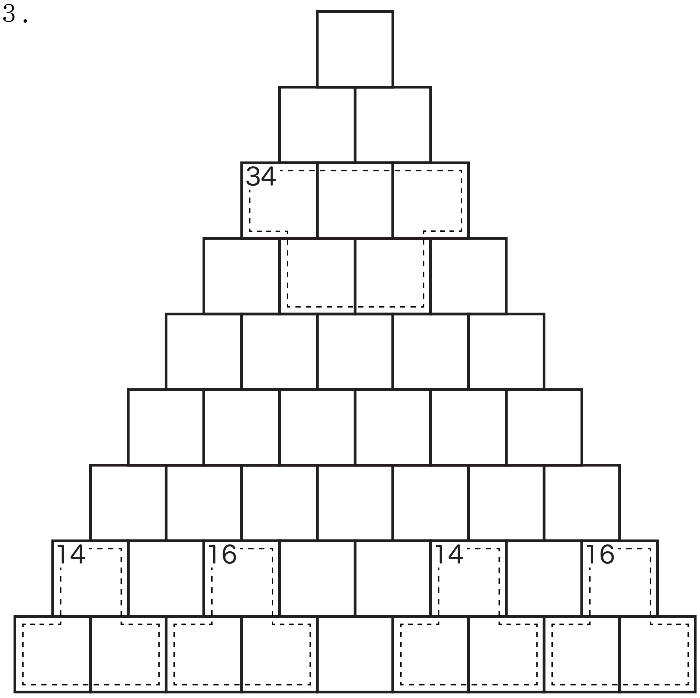
１．



２．



３．



$e^{\pi i}sode$　**Vol.8**

2018 年 11 月 23 日発行
著　者・・・・・東京大学理学部数学科有志
発行人・・・・・執印 剛史