Записки от миналия път в “Изчислимост в анализа”.

Известни твърдения и дефиниции:

Определение 0.1 (Коши)**.**
Функцията $f_\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *наричаме име (представяне) на* $\xi \in \mathbb{R}$*, ако за произволно* $n \in \mathbb{N}$ *е изпълнено:*

$$|f_\xi(n) - \xi| < \frac{1}{n+1}$$

Число $\xi \in \mathbb{R}$ *наричаме изчислимо (примитивно рекурсивно), ако има изчислима (примитивно рекурсивна) функция* $f_\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*, която е име на* ξ*.*

Твърдение 0.1 (Затвореност относно противоположност)**.**
Ако $\xi \in \mathbb{R}$ *е изчислимо (примитивно рекурсивно), то* $-\xi$ *също е изчислимо (примитивно рекурсивно).*
Доказателство:
За произволно $n \in \mathbb{N}$ *и* f_ξ *- име на* ξ *имаме:*

$$|f_\xi(n) - \xi| < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow |-1| \cdot |f_\xi(n) - \xi| < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow |-f_\xi(n) - (-\xi)| < \frac{1}{n+1}$$

Сега функцията $f_{-\xi} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*, където* $f_{-\xi}(n) := -f_\xi(n)$ *е име за* $-\xi$*.* □

Определение 0.2 (Относно функциите $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}, k \geqslant 1$)**.**
Функцията $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ *е изчислима (примитивно рекурсивна), ако съществуват* $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *изчислими (примитивно рекурсивни), за които за произволно* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k$*:*

$$f(\mathbf{n}) = \frac{f_1(\mathbf{n}) - f_2(\mathbf{n})}{f_3(\mathbf{n}) + 1}$$

По горе използвахме сюрективното кодиране на $q \in \mathbb{Q}$ *с тройка естествени числа.*

- $(m, n, p) \mapsto \frac{m-n}{p+1} = q$

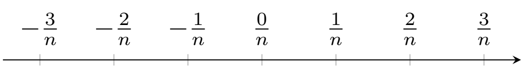
Нови твърдения и дефиниции:

Задача 0.1. *Нека* $\alpha > 0$ *е изчислимо (примитивно рекурсивно) число. Тогава* $\sqrt{\alpha}$ *също е изчислимо (примитивно рекурсивно).*
Решение:
За произволно $n \in \mathbb{N}$ *имаме* $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *такова, че:*

$$|f_\alpha(n) - \alpha| < \frac{1}{n+1} \tag{f}$$

1. *Ще потърсим такава функция* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, че:*

$$\left|\frac{g(n)}{n+1} - \sqrt{|f_\alpha(n)|}\right| < \frac{1}{n+1}, \text{ за произволно } n \in \mathbb{N} \tag{g}$$



За произволно $n \in \mathbb{N}$ *е вярно следното твърдение* P*:*

$$P(n) \leftrightharpoons \forall \beta \in \mathbb{Q}, \exists i \in \mathbb{N} \left(\left|\frac{i}{n+1} - \beta\right| < \frac{1}{n+1}\right)$$

За произволно $n \in \mathbb{N}$ *имаме:*

$$\left|\frac{g(n)}{n+1} - \sqrt{|f_\alpha(n)|}\right| < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \left|g(n) - (n+1) \cdot \sqrt{|f_\alpha(n)|}\right| < 1$$

Сега можем да дефинираме g *така:*

$$g(n) := \left\lfloor (n+1) \cdot \sqrt{|f_\alpha(n)|} \right\rfloor$$

Нека $m \in \mathbb{N}$ *е такова, че* $m = g(n)$ *и по (0.2) имаме* $f_\alpha(n) = \dfrac{f_{\alpha,1}(n) - f_{\alpha,2}(n)}{f_{\alpha,3}(n) + 1}$*. Сега:*

$$m \leqslant (n+1) \cdot \sqrt{|f_\alpha(n)|} < m + 1$$

$$m^2 \leqslant (n+1)^2 \cdot |f_\alpha(n)| < (m+1)^2$$

$$m^2 \cdot (f_{\alpha,3}(n)+1) \leqslant (n+1)^2 \cdot |f_{\alpha,1}(n) - f_{\alpha,2}(n)| < (m+1)^2 \cdot (f_{\alpha,3}(n)+1)$$

Горното неравенство означаваме с релацията $R(m,n)$. За изчислима (примитивно рекурсивна) f_α релацията R е изчислима (примитивно рекурсивна). Сега можем да дефинираме g така:

$$g(n) = \mu_{m \leqslant A\cdot(n+1)}[R(m,n)]$$

Тук A е горна граница на редицата $\{\sqrt{|f(n)|}\}_{n=0}^{\infty}$. Тази редица е очевидно ограничена. Имаме:

$$\sqrt{|f(n)|} \leqslant |f(n)| \leqslant |f_{\alpha,1}(n) - f_{\alpha,2}(n)|$$

Можем да ползваме вместо A например $|f_{\alpha,1}(n) - f_{\alpha,2}(n)|$.

2. *Ще потърсим такова $k \in \mathbb{N}$, че:*

$$\left|\frac{g(k)}{k+1} - \sqrt{\alpha}\right| < \frac{1}{n+1}$$

Ще ползваме следните твърдения (верни за подходящи x и y):

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{T.I.}$$

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|} \tag{S.I.}$$

$$k := (2n+2)^2 - 1 \tag{E.V.}$$

Имаме:

$$\left|\frac{g(k)}{k+1} - \sqrt{\alpha}\right| = \left|\frac{g(k)}{k+1} - \sqrt{|f_\alpha(k)|} + \sqrt{|f_\alpha(k)|} - \sqrt{\alpha}\right| \leqslant^{T.I.} \left|\frac{g(k)}{k+1} - \sqrt{|f_\alpha(k)|}\right| + \left|\sqrt{|f_\alpha(k)|} - \sqrt{\alpha}\right| <^{g}$$

$$<^{g} \frac{1}{k+1} + \left|\sqrt{|f_\alpha(k)|} - \sqrt{\alpha}\right| <^{S.I.} \frac{1}{k+1} + \sqrt{|f_\alpha(k) - \alpha|} <^{f} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} =^{E.V.} \frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{n+1}$$

Сега дефинираме $h_{\sqrt{\alpha}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ за произволно $n \in \mathbb{N}$ така:

$$h_{\sqrt{\alpha}}(n) := \frac{g((2n+2)^2 - 1)}{(2n+2)^2}$$

Функцията $h_{\sqrt{\alpha}}$ е изчислима (примитивно рекурсивна) и е име за $\sqrt{\alpha}$.

$\square$

Твърдение 0.2 (Гжегорчик)**.**
Следните две са еквивалентни:

1. *$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geqslant 0$ е изчислимо (примитивно рекурсивно).*
2. *$\exists f \in \mathcal{F}_1 \left(f \text{ е изчислима (примитивно рекурсивна) и } \left|\frac{f(n)}{n+1} - \alpha\right| < \frac{1}{n+1}\right)$, където $\mathcal{F}_1 = \{f | f : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N} \text{ е функция}\}$*

Доказателство:

- 2. → 1.
  Очевидно. Следва от дефиницията на Коши за $h_\alpha(n) := \frac{f(n)}{n+1}$.

- 1. → 2.
  Нека $h_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ е име за α. Тоест за произволно $n \in \mathbb{N}$ имаме $|h_\alpha(n) - \alpha| < \dfrac{1}{n+1}$. Можем без ограничение на общността да вземем $h_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{\geqslant 0}$, понеже $||h_\alpha(n)| - |\alpha|| < |h_\alpha(n) - \alpha|$.
  Ще потърсим такива $m \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{F}_1$, че:

$$\left|\frac{f(n)}{n+1} - h_\alpha(m) + h_\alpha(m) - \alpha\right| < \frac{1}{n+1}$$

като

$$|h_\alpha(m) - \alpha| < \frac{1}{2n+2}$$

и

$$\left|\frac{f(n)}{n+1} - h_\alpha(m)\right| \leqslant \frac{1}{2n+2}$$

Следователно имаме:

$$|f(n) - (n+1) \cdot h_\alpha(m)| \leqslant \frac{1}{2}$$

Използваме, че за произволно $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor \beta + \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant \beta + \frac{1}{2} < \left\lfloor \beta + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 \xrightarrow[\gamma := \lfloor \beta + \frac{1}{2} \rfloor]{} \gamma \leqslant \beta + \frac{1}{2} < \gamma + 1 \rightarrow \gamma - \frac{1}{2} \leqslant \beta < \gamma + \frac{1}{2} \rightarrow |\beta - \gamma| \leqslant \frac{1}{2}$$

Можем да вземем $m := 2n + 1$ и $f(n) := \left\lfloor (n+1) \cdot h_\alpha(2n+1) + \frac{1}{2} \right\rfloor$

□

Твърдение 0.3 (Неперово число)**.**
Числото $e \approx 2.7182\ldots$ е изчислимо (а и примитивно рекурсивно).
Доказателство:

- *I. начин*
  Използваме следното равенство:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Нека с $S(k)$ означим k-тата частична сума на горната безкрайна сума, т.е. за $k \in \mathbb{N}$:

$$S(k) := \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$$

Имаме:

$$S(k+1) = S(k) + \frac{1}{(k+1)!}$$

$S(k)$ е примитивно рекурсивна функция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, т.е. има примитивно рекурсивни $f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, т.ч.:

$$S(k) = \frac{f_{k,1}(k) - f_{k,2}(k)}{f_{k,3}(k) + 1}$$

Можем да подберем $f_{k+1,1}, f_{k+1,2}, f_{k+1,3}$ за $S(k+1)$ така:

$$f_{k+1,1}(k+1) := f_{k,1}(k) \cdot (k+1)!$$

$$f_{k+1,2}(k+1) := f_{k,2}(k) \cdot (k+1)!$$

$$f_{k+1,3}(k+1) := (f_{k,3}(k) + 1) \cdot (k+1)! \dot{-} 1$$

Сега нека разгледаме:

$$\left| e - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m) \cdot \cdots \cdot (k+1) \cdot k!} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^m \cdot k!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^m} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{\frac{1}{k+1}}{1 - \frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k \cdot k!}$$

За произволно $k \in \mathbb{N}^+$ имаме, че:

$$|S(k) - e| < \frac{1}{k \cdot k!}$$

Сега просто за произволно $n \in \mathbb{N}$ дефинираме $h_e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ така:

$$h_e(n) := S(n+1)$$

Функцията h_e е примитивно рекурсивна и е име на e:

$$|h_e(n) - e| = |S(n+1) - e| < \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

- *II. начин*
  Използваме следните неравенства, които са верни за произволно $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

  Логаритмуваме:

$$(n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < 1 < (n+2)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

  Имаме следните твърдения:

$$\ln(1+x) < x, \forall x \geqslant 0 \qquad \text{(log.1.)}$$

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x), \forall x \geqslant 0 \qquad \text{(log.2.)}$$

  От (log.1.) имаме:

$$(n+2)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < (n+2)\cdot \frac{1}{n+1}$$

  От (log.2.) имаме:

$$(n+1)\cdot \frac{1}{n+2} = (n+1)\cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} < (n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

  Сега нека разгледаме:

$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - e\right| < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot \frac{1}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

  Последното неравенство следва, понеже $e < 3$. Сега можем за произволно $n \in \mathbb{N}$ да дефинираме $f_e : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ име на e така:

$$f_e(n) := \left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3}$$

$$|f_e(n) - e| = \left|\left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3} - e\right| < \left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3}\cdot \frac{1}{3n+3} < \frac{1}{n+1}$$

□

Твърдение 0.4 (Числото Пи)**.**
Числото $\pi \approx 3.1415\ldots$ е изчислимо (а и примитивно рекурсивно).
Доказателство: *Използваме следното равенство:*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Ще покажем, че $\frac{\pi}{4}$ е примитивно рекурсивно, откъдето π е рекурсивно, понеже имаме затвореност относно умножение с примитивно рекурсивни числа (като 4).
Нека положим $a_k := \frac{1}{2k+1}$, за $k \in \mathbb{N}$. Сега горната сума придобива вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

За a_k общият член на редицата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ знаем, че:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \text{ и то монотонно.}$$

Нека с $S(i,j)$, за $i \leqslant j$ означим част от безкрайната сума:

$$S(i,j) := a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - \cdots + (-1)^{j-i}\cdot a_j$$

Ще докажем с индукция по $j-i$, за $i, j \in \mathbb{N}$ следното твърдение:

$$0 \leqslant S(i,j) \leqslant a_i$$

- *База: $j - i = 0$*
  Следователно $i = j$. Тогава $0 \leqslant \frac{1}{2i+1} = a_i = S(i,j) \leqslant a_i$.

- *И.Х.: Нека* $0 \leqslant S(i', j') \leqslant a_i$ *за* $0 \leqslant j' - i' < j - i$.

- *И.С.: Разглеждаме* $S(i, j)$. *Знаем, че* $j - i > 0$, *следователно* $S(i, j) = a_i - S(i + 1, j)$. *Сега имаме:*
  - $S(i + 1, j) \geqslant^{И.Х.} 0 \to S(i, j) \leqslant a_i$
  - $S(i + 1, j) \leqslant^{И.Х.} a_{i+1} \to S(i, j) \geqslant a_i - a_{i+1} \geqslant 0$

Сега получаваме като следствие следното:

$$\left|\sum_{k=i}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k\right| \leqslant a_i \tag{Лема.1.}$$

От:

$$a_i \geqslant |S(i, j)| = \left|\sum_{k=i}^{j}(-1)^k \cdot a_k\right| \overset{j\to\infty}{=} \left|\sum_{k=i}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k\right|$$

Сега просто за произволно $n \in \mathbb{N}$ *дефинираме* $f_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *така:*

$$f_{\frac{\pi}{4}}(n) := S(0, n)$$

Функцията $f_{\frac{\pi}{4}}$ *е примитивно рекурсивна и е име на* $\frac{\pi}{4}$*:*

$$\left|f_{\frac{\pi}{4}}(n) - \frac{\pi}{4}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant^{Лема.1.} \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{n+1}$$

Получихме, че числото $\frac{\pi}{4}$ *е примитивно рекурсивно. Следователно и числото* π *е примитимно рекурсивно (и следователно изчислимо).* ☐

Теорема (Корени на полиноми)**.**
Нека е даден полином $P(x) := \alpha_0 \cdot x^k + \alpha_1 \cdot x^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} \cdot x + \alpha_k$*, където* $k \in \mathbb{N}$ *и всички коефициенти* α_i *са изчислими. Тогава реалните корени на този полином също са изчислими.*
Доказателство:
Нека $P(\xi) = 0$*. Без ограничение на общността можем да считаме, че* $P'(\xi) \neq 0$*. Ако* P *има изчислими коефициенти, то и* P' *има изчислими коефициенти и то получени от тези на* P*, поради което при* $P'(\xi) = 0$ *просто разглеждаме* P'*. (“Проверката* $P'(\xi) \neq 0$ *не може да се направи конструктивно.”)*
Имаме $|P'(\xi)| > 0$*. Да изберем* $c, d \in \mathbb{Q}^{>0}$*, такива че:*

$$0 < c < \left|P'(\xi)\right| < d$$

След това да изберем $a, b \in \mathbb{Q}$*, такива че:*

$$a < \xi < b \wedge a < \eta < b \to c < \left|P'(\eta)\right| < d$$

Можем да намерим такива числа, понеже $|P'(\eta)|$ *е непрекъсната функция. По теоремата за крайните нараствания на Лагранж:*

$$\forall x \in [a, b], \exists \eta \in (a, b) : |P(x)| - |P(\xi)| = \left|P'(\eta)\right| \cdot |x - \xi|$$

Така получаваме:

$$\forall x \in [a, b] : c \cdot |x - \xi| < |P(x)| < d \cdot |x - \xi|$$

Нека $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *са изчислими функции* $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*, за които за произволно* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$|A_i(n) - \alpha_i| < \frac{1}{n+1}$$

Дефинираме:

$$P_n(x) := A_0(n) \cdot x^k + A_1(n) \cdot x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}(n) \cdot x + A_k(n)$$

Сега имаме:

$$|P_n(x) - P(x)| \leqslant |A_0(n) - \alpha_0| \cdot |x|^k + |A_1(n) - \alpha_1| \cdot |x|^{k-1} + \cdots + |A_{k-1}(n) - \alpha_{k-1}| \cdot |x| + |A_k(n) - \alpha_k| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} \cdot (|x|^k + |x|^{k-1} + \cdots + |x|^1 + 1) \leqslant \frac{h}{n+1},\ \forall x \in [a, b] \text{ и за някое } h \in \mathbb{N}^+.$$

Имаме следните две твърдения:

$$|P_n(x)| \leqslant |P(x)| + \frac{h}{n+1} \tag{*}$$

$$|P(x)| \leqslant |P_n(x)| + \frac{h}{n+1} \tag{**}$$

Нека разделим интервала $[a, b]$ на $n + 1$ равни части с точките:

$$x_i := a + \frac{(b-a)}{n+1} \cdot i,\ 0 \leqslant i \leqslant n+1$$

Очевидно $x_0 = a$ и $x_{n+1} = b$. При подходящо i (което може да бъде търсено алгоритмично):

$$|x_i - \xi| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$|P_n(x_i)| \leqslant^* |P(x_i)| + \frac{h}{n+1} \leqslant d \cdot |x_i - \xi| + \frac{h}{n+1} \leqslant \frac{d+h}{n+1}$$

Ако x_i удовлетворява горното неравенство, то:

$$|P(x_i)| \leqslant^{**} |P_n(x_i)| + \frac{h}{n+1} \leqslant \frac{d+2h}{n+1}$$

Имаме също:

$$c \cdot |x_i - \xi| \leqslant |P(x_i)| \rightarrow |x_i - \xi| \leqslant \frac{1}{c} \cdot \frac{d+2h}{n+1} < \frac{B}{n+1},\ \text{за подходящо } B \in \mathbb{N}^+.$$

Можем да дефинираме $f(n) := x_i$, където $0 \leqslant i \leqslant n+1$ е най-малкото естествено число такова, че:

$$|P_n(x_i)| \leqslant \frac{d+h}{n+1}$$