Твърдение 0.1. *$\xi \mapsto \sin\xi$ е изчислима реална функция в $\mathbb{R}$.*

Доказателство 0.1.

I. *Ще покажем, че* $\sin\frac{m-n}{p+1}$ *е изчислима като* $\mathbb{N}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *функция.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot x^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

Полагаме $q := \frac{m-n}{p+1}$ *и разглеждаме абсолютната стойност на частното на* $s+1$*-вия и* s*-тия член на* $\sin q$.

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{s+1} \cdot 1^{2s+3}}{(2s+3)!}}{\frac{(-1)^s \cdot q^{2s+1}}{(2s+1)!}} \right| = \left| \frac{-q^2}{(2s+2)\cdot(2s+3)} \right| = \frac{q^2}{(2s+2)\cdot(2s+3)}$$

Намираме с минимизация $s_0(q)$ *така:*

$$s_0(q) := \mu\ s \left[\frac{q^2}{(2s+2)\cdot(2s+3)} \leq 1 \right]$$

Изпълнено е:

$$\forall s \geq s_0(q) : \frac{q^{2s+3}}{(2s+3)!} \leq \frac{q^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

$$\left| \sin q - \sum_{s=0}^{s_0(q)+t} \frac{(-1)^s \cdot q^{2s+1}}{(2s+1)!} \right| = \left| \sum_{s=s_0(q)+t+1}^{\infty} \frac{(-1)^s \cdot q^{2s+1}}{(2s+1)!} \right| \leq^{\text{Лайбниц}} \frac{q^{2s_0(q)+2t+3}}{(2s_0(q)+2t+3)!} <^{(*)} \frac{1}{i+1}$$

Редицата $\frac{q^{2s_0(q)+2t+3}}{(2s_0(q)+2t+3)!}$ *е изчислима и клони към 0 монотонно, т.е. е ефективно сходяща.*
Избираме изчислима и тотална $\delta : \mathbb{N}^4 \mapsto \mathbb{N}$ *регулатор на сходимостта така че:*

$$t > \delta(m,n,p,i) \Rightarrow (*) \text{ е вярно.}$$

II. *Избираме* $a, b, c : \mathbb{N}^4 \mapsto \mathbb{N}$ *тотални и изчислими:*

$$\left| \sin\frac{m-n}{p+1} - \frac{a(m,n,p,i) - b(m,n,p,i)}{c(m,n,p,i)+1} \right| < \frac{1}{i+1}$$

Дадено е $\xi \in \mathbb{R}$ *и* (f,g,h) *е име на* ξ.

$$F(f,g,h)(t) := a(f(2t+1), g(2t+1), h(2t+1), 2t+1)$$
$$G(f,g,h)(t) := b(f(2t+1), g(2t+1), h(2t+1), 2t+1)$$
$$H(f,g,h)(t) := c(f(2t+1), g(2t+1), h(2t+1), 2t+1)$$

Сега нека за $q := \frac{f(2t+1)-g(2t+1)}{h(2t+1)+1}$:

$$\left| \sin\xi - \frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} \right| \leq |\sin\xi - \sin q| + \left| \sin q - \frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} \right| := A$$

Имаме, че:

$$|\sin\xi - \sin q| =^{\text{Т. крайни нараствания}} |\cos\nu \cdot (\xi - q)| \leq^{\cos\nu \leq 1} |\xi - q|$$

$$A \leq |\xi - q| + \left| \sin q - \frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} \right| <^{\text{Избор на a,b,c}} |\xi - q| + \frac{1}{2t+2} <^{q \text{ е име на } \xi} \frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+2} = \frac{1}{t+1}$$

Следствие 0.1.

- *$\xi \mapsto \cos\xi$ е изчислима реална функция в $\mathbb{R}$.*
  - § $\cos\xi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)$
  - § $\cos\xi = \frac{\sin 2\xi}{2\sin\xi}$
- *$\xi \mapsto \tan\xi$ е изчислима реална функция за $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$*

§ $\tan\xi = \frac{\sin\xi}{\cos\xi}$

- $\xi \mapsto \cot\xi$ *е изчислима реална функция за* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

§ $\cot\xi = \frac{1}{\tan\xi}$

Твърдение 0.2. $\xi \mapsto \arctan\xi$ *е изчислима реална функция в* $\mathbb{R}$. *(Дефиниран за интервала* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *на* $\tan$*)*

Доказателство 0.2.
Пак използваме метод на трисекцията.

$$u_k \leq u_{k+1} < v_{k+1} \leq v_k$$

Едно от горните нестроги неравенства е строго.

$$\tan u_k < \xi < \tan v_k$$

$$-\frac{\pi}{2} < u_k < v_k < \frac{\pi}{2}$$

Дадено е $\xi \in \mathbb{R}$ *и име* (f, g, h) *на* ξ.

База: *Търсим* $u_0, v_0 \in \mathbb{Q}$, *такива че:*

§ $-\frac{\pi}{2} < u_0 < v_0 \frac{\pi}{2}$

§ $\tan u_0 < \xi < \tan v_0$

Знаем, че $n \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$ *е изчислима редица* $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. *Тогава нека изберем изчислима и тотална* $\phi : \mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{N}$, *такава че:*

$$\left|\phi(n,i) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\right| < \frac{1}{i+1}$$

Разглеждаме случая $i = n$:

$$\left|\phi(n,n) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right)\right| < \frac{1}{n+1}$$

Имаме:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \phi(n,n) - \frac{1}{n+1} = +\infty$
2. $\phi(n,n) - \frac{1}{n+1} < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$

Имаме още, че $|\xi| \leq |f(0) - g(0)| + 1$. *Сега дефинираме:*

$$\Phi(f,g,h) = \mu\, n \left[|f(0) - g(0)| + 1 \leq \phi(n,n) - \frac{1}{n+1}\right]$$

Сега:

$$|\xi| < |f(0) - g(0)| + 1 < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\Phi(f,d,h) + 1}\right)$$

Трябва $v_0 : \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\Phi(f,g,h)+1} < v_0 < \frac{\pi}{2}$. *Можем по изчислим начин да потърсим такова* v_0, *тъй като* $\frac{\pi}{2}$ *и* $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\Phi(f,g,h)+1}$ *са изчислими и ирационални. После взимаме* $u_0 := -v_0$, *поради симетрията.*

Стъпка: *Нека са намерени* u_k *и* v_k *и изпълняват неравенствата.*
Разделяме интервала $[u_k, v_k]$ *на три части с еднаква дължина като:*

$$v_{k+1} - u_{k+1} \leq \frac{2}{3}(v_k - u_k)$$

Знаем, че $\tan\frac{m-n}{p+1}$ *е изчислима* $\mathbb{N}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *функция.*

$$v_k - u_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k (v_0 - u_0) < \left(\frac{2}{3}\right)^k \pi$$

Регулатора на сходимост не зависи от f, g, h *и се вижда:*

§ $v_k - \xi < v_k - u_k$

§ $\xi - u_k < v_k - u_k$

...

Следствие 0.2.

- $\xi \mapsto \arcsin \xi$ *е изчислима реална функция в* $[-1, 1]$

  § $\arcsin \xi = 2 \arctan \frac{\xi}{1+\sqrt{1-\xi^2}}$

- $\xi \mapsto \arccos \xi$ *е изчислима реална функция в* $[-1, 1]$

  § $\arccos \xi = \frac{\pi}{2} - \arcsin \xi$

- $\xi \mapsto \operatorname{arccot} \xi$ *е изчислима реална функция в* $\mathbb{R}$

  § $\operatorname{arccot} \xi = \frac{\pi}{2} - \arctan \xi$

Твърдение 0.3 (Първа лема за разширението).
Нека $\Theta : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ *като* c *е вътрешна точка за* D. *Ако са изпълнени:*

1. Θ *е изчислима в* $(-\infty, c) \cap D$ *и в* $(c, +\infty) \cap D$

2. c *е изчислимо реално число*

3. Θ *е ефективно непрекъсната в* c, *т.е. съществува тотална и изчислима* $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, *такава че:*

$$\xi \in D \wedge |\xi - c| < \frac{1}{r(t)+1} \Rightarrow |\Theta(\xi) - \Theta(c)| < \frac{1}{t+1}$$

Тогава Θ *е изчислима.*

Доказателство 0.3. *Първо:* $\Theta(c)$ *е изчислимо реално число. Нека* $\xi := c + \frac{1}{r(t)+2}$ *и разгледаме:*

$$\left|\Theta\left(c + \frac{1}{r(t)+2}\right) - \Theta(c)\right| < \frac{1}{t+1}$$

Горе $\Theta\left(c + \frac{1}{r(t)+2}\right)$ *е изчислимо по* t. *Нека изберем изчислимо име* (f_c, g_c, h_c) *на* c *и* (f', g', h') *на* $\Theta(c)$.

$$t_0 := 4r(2t+1) + 3$$

Дадено е $\xi \in D$ *и* (f, g, h) *име на* ξ *и* $t \in \mathbb{N}$:

I.

$$\left|\frac{f(t_0) - g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0) - g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right| \leq \frac{2}{t_0+1}$$

$$|\xi - c| \leq \left|\xi - \frac{f(t_0) + g(t_0)}{h(t_0)+1}\right| + \frac{2}{t_0+1} + \left|\frac{f_c(t_0) + g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1} - c\right| < \frac{1}{t_0+1} + \frac{2}{t_0+1} + \frac{1}{t_0+1} = \frac{4}{t_0+1} = \frac{1}{r(2t+1)+1}$$

От ефективната непрекъснатост на c: $|\Theta(\xi) - \Theta(c)| < \frac{1}{2t+2}$. *В този случай:*

$$(F, G, H)(t) := (f', g', h')(2t+1)$$

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} - \Theta(\xi)\right| \leq \left|\frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} - \Theta(c)\right| + |\Theta(c) - \Theta(\xi)| < \frac{1}{2t+2} + \frac{1}{2t+2}$$

II.

$$\left|\frac{f(t_0) - g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0) - g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right| > \frac{2}{t_0+1}$$

Тогава $\xi \neq c$. *Иначе:*

$$\left|\frac{f(t_0) - g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0) - g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right| \leq \left|\frac{f(t_0) - g(t_0)}{h(t_0)+1} - \xi\right| + \left|c - \frac{f_c(t_0) - g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1}\right| < \frac{2}{t_0+1}$$

II.a)

$$\frac{f(t_0) - g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0) - g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1} > \frac{2}{t_0+1}$$

Тогава $\xi > c$ *и в този случай:*

$$(F, G, H)(t) := (F', G', H')(t)$$

Горе F', G', H' *са реализации на* Θ *за* $(c, +\infty) \cap D$.

II.б)

$$\frac{f(t_0)-g(t_0)}{h(t_0)+1} - \frac{f_c(t_0)-g_c(t_0)}{h_c(t_0)+1} < \frac{2}{t_0+1}$$

Тогава $\xi < c$ и в този случай:

$$(F,G,H)(t) := (F'',G'',H'')(t)$$

Горе F'', G'', H'' са реализации на Θ за $(-\infty, c) \cap D$.

Следствие 0.3.
$\xi \mapsto \sqrt[n]{\xi}$ е изчислима в $[0,+\infty)$, понеже $\sqrt[n]{\xi} = e^{\frac{1}{n}\ln\xi}$ е изчислима в $(0,+\infty)$, 0 е изчислимо реално число както и $\Theta(0)$ и е изпълнено:

$$\sqrt[n]{\xi} < \frac{1}{t+1} \leftrightarrow \xi < \frac{1}{(t+1)^n}$$

Откъдето $r(t)+1 := (t+1)^n$.

Твърдение 0.4 (Втора лема за разширението (за слепване))**.**
Нека $\Theta : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ и c е изчислимо.
Ако Θ е изчислима в $(-\infty, c] \cap D$ и в $[c,+\infty) \cap D$, то Θ е изчислима в D.

Доказателство 0.4.
Нека (f_c, g_c, h_c) е изчислимо име на c, (F', G', H') е изчислима реализация на Θ в $(-\infty, c] \cap D$ и (F'', G'', H'') е изчислима реализация на Θ в $[c,+\infty) \cap D$.
Дадено е $\xi \in D$, име (f,g,h) на ξ и $t \in \mathbb{N}$. Търсим най-малкото k за което:

1. $$\left|\frac{f(k)-g(k)}{h(k)+1} - \frac{f_c(k)-g_c(k)}{h_c(k)+1}\right| > \frac{2}{k+1}$$

2. *$(F', G', H')(4t+3)$ и $(F'', G'', H'')(4t+3)$ завършват за $\leq k$ "стъпки" и:*

$$\left|\frac{F'(f,g,h)(4t+3) - G'(f,g,h)(4t+3)}{H'(f,g,h)(4t+3)+1} - \frac{F''(f,g,h)(4t+3) - G''(f,g,h)(4t+3)}{H''(f,g,h)(4t+3)+1}\right| < \frac{1}{2t+2}$$

Тук сме представили операторите в нормална форма $F(x) = y \leftrightarrow \exists z G(x,y,z) = 0$ (в този смисъл стъпки).

Тази минимизация ще е успешна, тъй като за достатъчно голямо k при $\xi \neq c$ ще се удовлетвори (1), а при $\xi = c$ ще се удовлетвори (2).
k е горна граница на броя на стъпките.

$$\left|\frac{F'(f,g,h)(4t+3) - G'(f,g,h)(4t+3)}{H'(f,g,h)(4t+3)+1} - \Theta(c)\right| < \frac{1}{4t+4}$$

$$\left|\frac{F''(f,g,h)(4t+3) - G''(f,g,h)(4t+3)}{H''(f,g,h)(4t+3)+1} - \Theta(c)\right| < \frac{1}{4t+4}$$

I. *Минимизацията приключва в (1).*

I.а)

$$\frac{f(k)-g(k)}{h(k)+1} - \frac{f_c(k)-g_c(k)}{h_c(k)+1} > \frac{2}{k+1}$$

Тогава $\xi > c$ и в този случай:

$$(F,G,H)(t) := (F'',G'',H'')(t)$$

I.б)

$$\frac{f(k)-g(k)}{h(k)+1} - \frac{f_c(k)-g_c(k)}{h_c(k)+1} < \frac{2}{k+1}$$

Тогава $\xi < c$ и в този случай:

$$(F,G,H)(t) := (F',G',H')(t)$$

II. *Минимизацията приключва в (2) и не в (1).*
Тогава:

$$(F,G,H)(t) := (F',G',H')(4t+3)$$

II.а) $\xi \leq c$. В този случай (F', G', H') дават име на $\Theta(\xi)$.

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t) - G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1} - \Theta(\xi)\right| = \left|\frac{F'(f,g,h)(4t+3) - G'(f,g,h)(4t+3)}{H'(f,g,h)(4t+3)+1} - \Theta(\xi)\right| < \frac{1}{4t+4}$$

II.б) $\xi \geq c$. *В този случай:*

$$\left|\frac{F(f,g,h)(t)-G(f,g,h)(t)}{H(f,g,h)(t)+1}-\Theta(\xi)\right| = \left|\frac{F'(f,g,h)(4t+3)-G'(f,g,h)(4t+3)}{H'(f,g,h)(4t+3)+1}-\Theta(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{F'(f,g,h)(4t+3)-G'(f,g,h)(4t+3)}{H'(f,g,h)(4t+3)+1}-\frac{F''(f,g,h)(4t+3)-G''(f,g,h)(4t+3)}{H''(f,g,h)(4t+3)+1}\right|+$$

$$+\left|\frac{F''(f,g,h)(4t+3)-G''(f,g,h)(4t+3)}{H''(f,g,h)(4t+3)+1}-\Theta(\xi)\right| < \frac{1}{2t+2}+\frac{1}{4t+4}$$

Следствие 0.4.

- $\xi \mapsto \sqrt[n]{\xi}$ *при нечетно* n. *Имаме, че в* $[0,+\infty)$ *е изчислимо и, понеже* $\sqrt[n]{\xi} = -\sqrt[n]{-\xi}$ *и в* $(-\infty,0]$ *също е изчислимо.*
- $\xi \mapsto \arctan \xi$. *Имаме:*
  1. *Изчислимо е в* $[0,1]$ *(*$u_0=-1, v_0=1$*).*
  2. *Изчислимо е в* $[1,+\infty)$, $\arctan \xi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\xi}$. *"Слепваме" (1) и (2) и имаме, че е изчислимо в* $[0,+\infty)$.
  3. *Изчислимо е в* $(-\infty,0]$, $\arctan \xi = -\arctan -\xi$.