Теория на игрите
Теория

Дефиниция: (равновесие по Неш) Нека $x_i \in X_i$ е стратегия на играч i и $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ е функция на печалба на играч i

$$(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}) \text{ е равновесие по Неш}$$
$$\iff$$
$$P_i(\overline{x_i}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, x_i, \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_n}) \leq P_i(\overline{x_i}, \ldots, \overline{x_n}), \forall i = \overline{1, n}$$

(тоест никой не би променил най-оптималната си стратегия при фиксирани стратегии на другите играчи)

Дефиниция: (игра с нулева сума) Една игра е с нулева сума, ако за фиксиран вектор от стратегии X е изпълнено, че $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i(x) = 0$
(тоест е затворена система, играчите само си разпределят наградата от собствените залози)

I Антагонистична игра между двама играчи с нулева сума

Нека $(\overline{x}, \overline{y})$ е равновесие по Неш.
$P(x, y)$ - печалбата на първия играч
$Q(x, y)$ - печалбата на втория играч
Понеже играта е с нулева сума, имаме $P(x, y) = -Q(x, y)$

Тогава

$$\begin{gathered} 1) P(\overline{x}, \overline{y}) \geq P(x, \overline{y}) \\ 2) Q(\overline{x}, \overline{y}) \geq Q(\overline{x}, y) \\ -P(\overline{x}, \overline{y}) \geq -P(\overline{x}, y) \\ P(\overline{x}, \overline{y}) \leq P(\overline{x}, y) \end{gathered}$$

$\implies P(x, \overline{y}) \leq P(\overline{x}, \overline{y}) \leq P(\overline{x}, y)$
(това е условие за седлова точка - max по x, min по y)

Ако имаме матрична игра с матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$, то $a_{ij} = P(x_i, y_j)$

Дефиниция: (цена на игра)

$$v_{II} = \min_{y \in Y}(\max_{x \in X} P(x,y))$$
$$v_I = \max_{x \in X}(\min_{y \in Y} P(x,y))$$

Ако $v_{II} = v_I = v$, то v е цена на играта и $v = P(\overline{x}, \overline{y})$
v е гарантираната печалба на първия играч.

Твърдение: $v_I \leq v_{II}$

Фиксираме $x_0 \in X, y_0 \in Y$ и тогава е вярно, че

$$P(x_0, y) \leq P(x_0, y_0) \leq P(x, y_0)$$
$$\min_{y \in Y} P(x_0, y) \leq P(x_0, y_0) \leq \max_{x \in X} P(x, y_0)$$
$$\min_{y \in Y} P(x, y) \leq \max_{x \in X} P(x_0, y)$$
$$\max_{x_0 \in X}(\min_{y \in Y} P(x, y)) \leq \min_{y_0 \in Y}(\max_{x \in X} P(x_0, y))$$
$$v_I \leq v_{II}$$

Твърдение: Една игра има цена тогава и само тогава когато има седлова точка (равновесие по Неш)

Смесени стратегии

Може при фиксирани стратегии играта да няма равновесие, тоест играчите да не могат да си изберат стратегия, с която да играят всеки път.

При смесените стратегии, всяка от наличните стратегии се избира с вероятност.

Например, ако $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$ е стратегията на първия играч, то това означава, че той ще играе първата стратегия с вероятност 1/2, втората стратегия с вероятност 1/3, третата с вероятност 1/6 и четвъртата няма да играе никога.

Трябва задължително за даден вектор с вероятности за стратегия на играч да е изпълнено, че $\sum_{x=1}^{n} x_i = 1$ и $x_i \geq 0$

Чиста стратегия i е еквивалентно на записано със смесени стратегии $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ тоест $x_i = 1, x_j = 0$

Тогава имаме, че $P(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

Записът $P(x, j)$ означава смесена стратегия x на първия играч и чиста стратегия j на втория.

Свойство:
Ако $\overline{x_{i_0}} > 0 \Longrightarrow P(i_0, \overline{y}) = P(\overline{x}, \overline{y}) = v$
Ако $\overline{y_{j_0}} > 0 \Longrightarrow P(\overline{x}, j_0) = P(\overline{x}, \overline{y}) = v$

Свойство:
Ако $(\overline{x_1}, \overline{y_1})$ и $(\overline{x_2}, \overline{y_2})$ са равновесия по Неш, то
$P(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = P(\overline{x_1}, \overline{y_2}) = P(\overline{x_2}, \overline{y_1}) = P(\overline{x_2}, \overline{y_2})$

Свойство: Всяка игра в смесени стратегии има цена.

Симетрични игри

$a_{ij} = -aji \rightarrow a_{ii} = 0$

Свойство: Цената на симетрична игра винаги е 0

Свойство: Равновесието на Неш на симетрична игра е от вида $(\overline{x}, \overline{x})$

Правило за премахване на ред и стълб

Ако фиксираме ред i_0 и за произволни α_i е изпълнено, че

$$\begin{cases} \sum \alpha_i a_i \geq a_{i_0} \\ \sum \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

то можем да премахнем ред i_0 (a_{i_0}), тоест $\overline{x_{i_0}} = 0$

Ако фиксираме стълб j_0 и за произволни β_i е изпълнено, че

$$\begin{cases} \sum \beta_i b_i \leq b_{j_0} \\ \sum \beta_i = 1 \\ \beta_i \geq 0 \end{cases}$$

то можем да премахнем стълб j_0 (b_{j_0}), тоест $\overline{y_{j_0}} = 0$

II Антагонистична игра между двама играчи - биматрична игра

Имаме $A_{m \times n}, B_{m \times n}$
Нека $P(x, y)$ е функция на печалба на първия играч

Нека $Q(x, y)$ е функция на печалба на втория играч

Дефиниция: (равновесие по Неш) $(\overline{x}, \overline{y})$ е равновесие по Неш, ако

$$1) P(\overline{x}, \overline{y}) \geq P(x, \overline{y})$$
$$2) Q(\overline{x}, \overline{y}) \geq Q(\overline{x}, y)$$

където
$P(x, y) = x^T A y = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$
$Q(x, y) = x^T B y = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$

III Кооперативни игри с двама играчи - биматрични

Заедно избират какви стратегии да играят, за да максимизират печалбата си.

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} x_i y_j = \sum_{i,j} p_{ij} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix}$$

Нека S е затворено изпъкнало множество, образувано от линиите, свързващи точките $\{(a_{ij}, b_{ij})\}$ от матриците A и B на двамата играчи
Нека

$$v^* = \min_{y \in Y} (\max_{x \in X} Q(x, y)) \text{ и } u^* = \max_{x \in X} (\min_{y \in Y} P(x, y))$$

Тогава $(\overline{u}, \overline{v})$ е решение на $(S, (u^*, v^*))$ и притежава следните свойства:

- $(\overline{u}, \overline{v}) \in S$
- $(\overline{u}, \overline{v}) \geq (u^*, v^*)$
- $\nexists (u, v) \in S : \begin{cases} u > \overline{u} \\ v > \overline{v} \end{cases}$
- ако $(\overline{u}, \overline{v}) \in T \subset S$ е решение на $(S, (u^*, v^*))$, то е решение и на $(T, (u^*, v^*))$
- ако $L(u, v) = (u', v')$ - положителна биективна линейна трансформация, то щом $(\overline{u}, \overline{v})$ е решение на $(S, (u^*, v^*))$, значи $L(\overline{u}, \overline{v})$ е решение на $(L(S), L(u^*, v^*))$
- $(u, v) \in S \rightarrow (v, u) \in S$, решението на $(S, (u^*, u^*))$ е от вида $(\overline{u}, \overline{u})$

Съществува единствена точка, която удовлетворява горните свойства и е решение на задачата
$$\begin{cases} (u-u^*)(v-v^*) \to \max \\ u \geq u^* \\ v \geq v^* \\ (u,v) \in S \end{cases}$$

IV Кооперативни игри с повече от двама играчи

$N = \{1, \dots, n\}$ - играчи
Дефиниция: (коалиция) Произволно непразно подмножество S на N се нарича коалиция.

Дефиниция: (характеристична функция) v е характеристична функция на игра с n играчи, дефинирана от подмножество на N като $\forall S \subseteq N$ показва максималната цена на игра с двама играчи S и $N \setminus S$

$$v(S) = \max_{x \in S} \min_{y \in N \setminus S} P(x,y)$$

Свойство: Характеристичната функция $v(S)$ има следните свойства:

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ ако $S \cap T = \emptyset$

Дефиниция: (делба) Делба на игра с n играчи е вектор $x \in \mathbb{R}^n$, показващ на кой играч колко ще дадем и има свойствата $\begin{cases} x_i \geq v(\{i\}) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = v(N) \end{cases}$

Дефиниция: (множество от делби)
$\Delta(v) = E(v) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \ x_i \geq v(\{i\}) \ , \quad \sum x_i = v(N)\}$ е множеството от делбите за дадена игра

Дефиниция: (симетрична игра) v не зависи от елементите на коалицията, а само от броя им

Дефиниция: (доминирана делба) делбата x е по-лоша от делбата y за членовете на коалицията S и казваме, че x се доминира от y : $x \underset{S}{<} y$, ако $x_i < y_i, i \in S$ и $\sum\limits_{i \in S} y_i \leq v(S)$

Дефиниция: (ядро на игра) Всички недоминируеми делби: $x \in C(v) \Leftrightarrow \nexists y \underset{S}{>} x$

Дефиниция: (проста игра) Една игра е проста, ако $v(S) \in \{0, 1\}, \ \ \forall S \subseteq R$

Дефиниция: (изоморфни игри) Две игри u и v са изоморфни, ако съществуват биекция $f : E(u) \to E(v)$, такива, че за всяко $x \in E(u) \ni E(v)$ и $S \subset N$ имаме $y \underset{S}{>} x \iff f(y) \underset{S}{>} f(x)$

Дефиниция: (еквивалентни игри) Две игри u и v са еквивалентни, ако съществуват $r > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такива, че $v(S) = r.u(S) + \sum\limits_{i \in S} \alpha_i$ за всяка коалиция $S \subseteq N$

Дефиниция: (нормализирана игра) Играта v е в $(0, 1)$ нормализация, ако $v(\{i\}) = 0, v(N) = 1$

Теорема: (условие за ядро) $x \in C(u) \iff \sum\limits_{i \in S} x_i \geq u(S)$ за $S \subset N$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = u(N)$

Дефиниция: (съществена игра) Една игра е съществена, ако $v(N) > \sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})$

Дефиниция: (игра с постоянна сума) Една игра е с постоянна сума (или още нулева), ако $v(N) = v(S) + v(N \setminus S)$

Твърдение: Ядрото на всяка симетрична игра е празно

Твърдение: Ядрото на всяка съществена игра с постоянна сума е празно

Твърдение: Всяка съществена игра е еквивалентна на точно една (0,1)-нормализирана игра

Дефиниция: (N-M решение) Едно множество делби V е N-M решение, ако за множеството имаме:

- вътрешна устойчивост: $x, y \in V \Rightarrow y \not>_S x$
- външна устойчивост: $x \notin V \Rightarrow \exists y \in V : \quad y >_S x$

Теорема: (N-M решение) Нека u е (0,1)-нормализирана игра и S е коалиция, такава, че $u(S) = 1$ и $u(T) = 0$ за всяко $T \subset S$. Тогава $V_S = \{x \in E(u) | x_i = 0 \text{ за } i \notin S\}$ е N-M решение

Дефиниция: (носител на игра) Една коалиция T е носител на играта v, ако $v(S) = v(S \cap T)$ за произволна коалиция S

Дефиниция: (вектор на Шепли) $\varphi(v)$ е вектор на Шепли на играта v, ако показва кой играч колко ще получи и определя еднозначно делбата на всяка кооперативна игра v (другаде: $\varphi(v)$ е единствената делба, която е N-M решение)

- $\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(S)$
- $\varphi_{\pi_i}(\pi v) = \varphi_i(v)$
- $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ и $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$

Където $\pi : N \to N$ е пермутация на N

- $\pi v(S) = v(\pi^{-1}(S))$

Твърдение: (вектор на Шепли) $\varphi_i(u) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(u(T) - u(T \setminus i))$