Теория на игрите
Задачи

Антагонистична игра между двама играчи с нулева сума

Пример 1

От всеки ред търсим минималното, после избираме максималното

От всеки стълб търсим максималното, после избираме минималното

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 9 & 23 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \underline{10} \\ 9 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underline{10} & 23 \end{array} & \end{array}$$

Тъй като двете са равни, то това е равновесие по Неш. Тоест имаме равновесие в чисти стратегии $(1,1)$ и $P(1,1) = 10 = v$. Равновесните стратегии са редът и стълбът, за които се получава равновесната стойност. Цената на играта е намерената обща стойност.

Пример 2

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \underline{-1} \\ \underline{-1} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underline{1} & \underline{1} \end{array} & \end{array}$$

Тук понеже подчертаните стойности не са равни, нямаме равновесие в чисти стратегии. Търсим в смесени, защото винаги има. Първият избира ред, тоест търсим вероятностите, с които ще избере всеки ред. Но тогава от свойство, за фиксирано x в чиста стратегия, $P(i, y)$ е ред i умножен покомпонентно с y и е печалбата на първия играч. За втория аналогично решаваме система за $P(\overline{X}, j) = v$.

Решаваме системите:

$$\begin{cases} P(1, \overline{y}) = v \\ P(2, \overline{y}) = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_2} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\overline{y_1} + \overline{y_2} = v \\ \overline{y_1} - \overline{y_2} = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_2} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{y_1} = \frac{1}{2} \\ \overline{y_2} = \frac{1}{2} \\ v = 0 \end{cases}$$

Аналогичната система и за x_1, x_2

Окончателно, равновесието по Неш е $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ и цената $v = 0$

Пример 3

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -3 \\ \underline{1} \end{array} \\ \begin{array}{cc} 7 & \underline{5} \end{array} & \end{array}$$

Нямаме равновесие в чисти стратегии.

Решаваме системите:

$$\begin{cases} P(1, \overline{y}) = v \\ P(2, \overline{y}) = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_2} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3\overline{y_1} + 5\overline{y_2} = v \\ 7\overline{y_1} + \overline{y_2} = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_2} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_2} > 0 \end{cases}$$

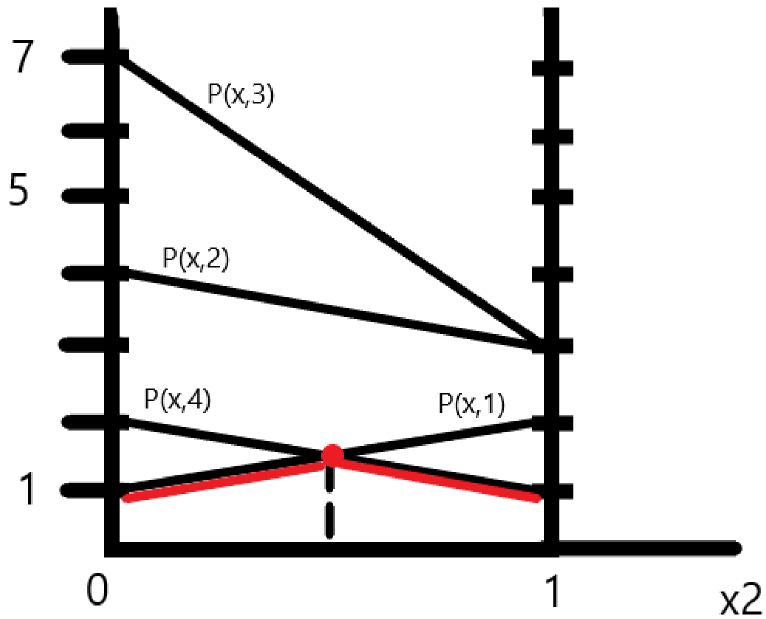
Аналогичната система и за x_1, x_2 и получаваме равновесието.

Пример 4

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \underline{1} \\ \underline{1} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underline{2} & 4 & 7 & \underline{2} \end{array} & \end{array}$$

Нямаме равновесие в чисти стратегии

Понеже тук първият играч има две възможни стратегии, параметризираме по x и избираме x_2. Правим чертеж, максимално точен, като свързваме двете стойности от всяка колона. След това понеже параметризираме по x, гледаме коя е най-високата точка в най-долната линия. Така намираме стойността за x_2, откъдето $x_1 = x_2 - 1$. Височината на тази точка е цената на играта. От това кои линии сме взели като най-долна се ориентираме кои са y-ците, които отговарят на тези линии. Всички други $y_j = 0$. За тези y, които са останали можем да решим система и да ги намерим. За точно определяне на пресечната точка, която търсим, може да си намерим уравненията на правите и да намерим точно коя е точката, ако с други съображения не можем. Нагледно:



От тук виждаме, че $x_2 = \frac{1}{2}$ откъдето $x_1 = \frac{1}{2}$. Също така $v = \frac{3}{2}$.
Виждаме че линиите за y_2 и y_3 не влизат във финалната ни линия, тоест $y_2 = y_3 = 0$. Остана да намерим y_1 и y_4.

Решаваме системата:

$$\begin{cases} P(1,\overline{y}) = v \\ P(2,\overline{y}) = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_4} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_4} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{y_1} + 2\overline{y_4} = \frac{3}{2} \\ 2\overline{y_1} - \overline{y_4} = \frac{3}{2} \\ \overline{y_1} + \overline{y_4} = 1 \\ \overline{y_1}, \overline{y_4} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{y_1} = \frac{1}{2} \\ \overline{y_4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

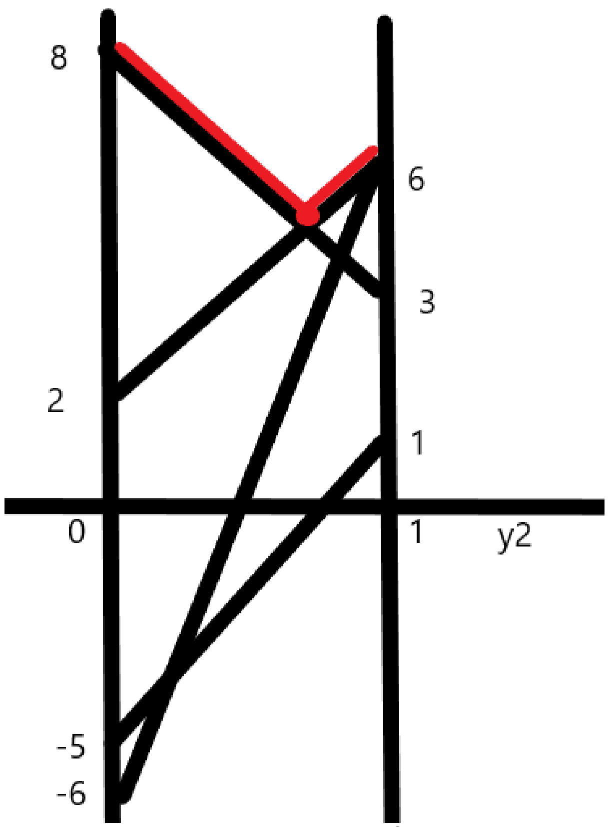
Окончателно, равновесието по Неш е $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}))$ и цената $v = \frac{3}{2}$

Пример 5

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 3 \\ -5 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ \underline{3} \\ -5 \\ -6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ \ 8 & \ \ \underline{6} \end{matrix} & \end{array}$$

Нямаме равновесие в чисти стратегии

Понеже тук вторият играч Y има две възможни стратегии, параметризираме по y и избираме y_2. Правим чертеж, максимално точен, като свързваме двете стойности от всеки ред. След това понеже параметризираме по y, гледаме коя е най-ниската точка в най-горната линия. Така намираме стойността за y_2, откъдето $y_1 = y_2 - 1$. От това кои линии сме взели като най-горна се ориентираме кои са х-овете, които отговарят на тези линии. Всички други $x_i = 0$. За тези x, които са останали можем да решим система и да ги намерим. Нагледно:



От тук виждаме, че $y_2 = \frac{2}{3}$ откъдето $y_1 = \frac{1}{3}$. Също така $v = \frac{14}{3}$.
Виждаме че линиите за x_3 и x_4 не влизат във финалната ни линия, тоест $x_3 = x_4 = 0$. Остана да намерим x_1 и x_2.

Решаваме системата:

$$\begin{cases} P(\overline{x}, 1) = v \\ P(\overline{x}, 2) = v \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} = 1 \\ \overline{x_1}, \overline{x_2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\overline{x_1} + 8\overline{x_2} = \frac{14}{3} \\ 6\overline{x_1} + 3\overline{x_2} = \frac{14}{3} \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} = 1 \\ \overline{x_1}, \overline{x_2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x_1} = \frac{5}{9} \\ \overline{x_2} = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Окончателно, равновесието по Неш е $((\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ и цената $v = \frac{14}{3}$

Пример 6

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ \underline{-1} \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2 & \underline{1} & 3 \end{array} & \end{array}$$

Няма равновесие в чисти стратегии. Понеже играта е симетрична, търсим равновесие от вида (x, x) и знаем че цената е 0, заради симетричността.

Първо гледаме дали е възможно да има стратегия, която със сигурност не играем($x_i = 0$)

Нека без ограниечение на общността

$$\begin{cases} \overline{x_3} = 0 \\ \overline{x_1} > 0 \\ \overline{x_2} > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} P(1, \overline{x}) = 0 \\ P(2, \overline{x}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\overline{x_1} + 1\overline{x_2} - 2\overline{x_3} = 0 \\ -\overline{x_1} + 0\overline{x_2} + 3\overline{x_3} = 0 \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x_1} = 0 \\ \overline{x_2} = 0 \\ \overline{x_3} = 0 \end{cases}$$

Следователно, този случай не е възможен и гледаме да няма нито един $x_i = 0$

$$\begin{cases} P(1, \overline{x}) = 0 \\ P(2, \overline{x}) = 0 \\ P(3, \overline{x}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x_1} = \frac{1}{2} \\ \overline{x_2} = \frac{1}{3} \\ \overline{x_3} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Окончателно, равновесието по Неш е $((\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}))$ и цената $v = 0$

Пример 7

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 9 \\ 11 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \underline{9} \\ \underline{9} \\ \underline{9} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underline{11} & \underline{11} & \underline{11} \end{array} \end{array}$$

Няма равновесие в чисти стратегии.

Можем да опростим играта като направим $B = A - 10$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Сега можем да разменим първия и втория ред на матрицата и получаваме

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Сега получихме симетрична игра, която знаем как да решим

Като намерим за нея $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ то за да получим $\overline{x}$ за играта B разменяме стойностите на $\overline{x_1}, \overline{x_2}$. За да намерим окончателното решение на дадената игра, трябва да намерим цената спрямо стойностите на дадената матрица с вече намерената стойност на $\overline{x}$

Пример 8

$$A = \begin{pmatrix} 144 & 60 & 84 \\ 60 & 144 & 124 \\ 84 & 112 & 110 \\ 70 & 126 & 116 \end{pmatrix}$$

Няма равновесие в чисти стратегии.

Можем да опростим играта като премахнем редове и колони.
Ако дадена изпъкнала комбинация на редове (всеки ред умножаваме с неотрицателна константа, като сбора на всички константи е 1) мажорира (е по-голям от) даден ред, то можем да го махнем.

В случая, $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \geq a_4$ (сравняваме покомпонентно), понеже се полува
$(72, 128, 117) \geq (70, 126, 116)$
Тоест можем да премахнем четвъртия ред ($\overline{x_4} = 0$)

$$B = \begin{pmatrix} 144 & 60 & 84 \\ 60 & 144 & 124 \\ 84 & 112 & 110 \end{pmatrix}$$

Сега имаме, че $\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 \geq a_3$ (сравняваме покомпонентно), понеже се полува
$(88, 116, 110) \geq (84, 112, 110)$
Тоест можем да премахнем третия ред ($\overline{x_3} = 0$)

$$B = \begin{pmatrix} 144 & 60 & 84 \\ 60 & 144 & 124 \end{pmatrix}$$

Сега искаме да махнем някой стълб, въпреки че и в този вид вече можем да я решим играта. За целта искаме да намерим стълб, който е по-малък от изпъкнала комбинация на другите стълбове.

Имаме, че $\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{4}b_2 \leq b_3$, понеже $(81, 123) \leq (84, 124)$, тоест можем да махнем третия стълб ($\overline{y_3} = 0$)

$$C = \begin{pmatrix} 144 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}$$

Сега получихме 2x2 игра, която знаем как да решим.

Антагонистична игра между двама играчи - биматрична игра

Пример 1

Когато имаме две матрици, винаги по матрицата на първия играч търсим max по стълбове, а по матрицата на втория играч max по редове

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \underline{7} & 1 \\ \underline{4} & 6 & \underline{6} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \underline{3} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Тъй като има съвпадащи подчертани елементи в двете матрици, то имаме равновесие в чисти стратегии, а именно $(2,3)$ и печалбата на първия играч е $v = 6 = P(2,3)$, а на втория $w = 3 = Q(2,3)$

Пример 2

Когато имаме две матрици, винаги по матрицата на първия играч търсим max по стълбове, а по матрицата на втория играч max по редове

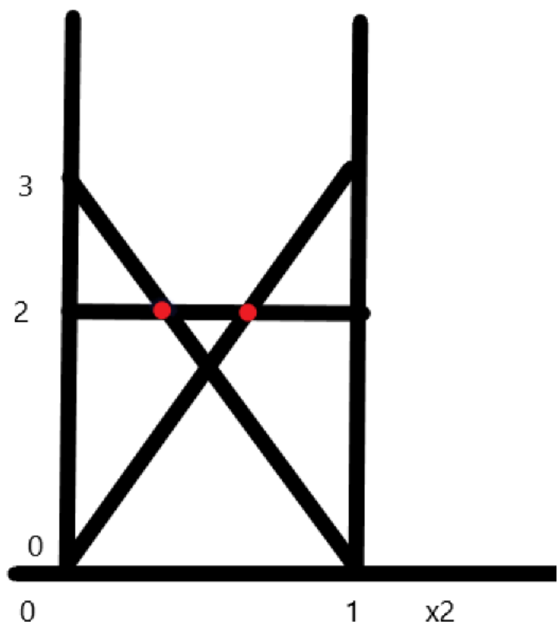
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \underline{7} & \underline{3} \\ \underline{4} & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \underline{3} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Нямаме равновесие в чисти стратегии.

Първият играч има 2 стратегии $x = (x_1, x_2)$, а вторията има 3 стратегии $y = (y_1, y_2, y_3)$

Затова параметризираме по x и избираме x_2. Тогава на чертеж слагаме стойностите от матрицата B, тоест $Q(x, j)$. Винаги гледаме линията най-отгоре и разглеждаме всички точки и интервали, ограничени от точките.

Нагледно:



Още от чертежа е ясно, че възможните стойности за x_2 са $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Но трябва формално да разгледаме трите интервала и двете крайни стойности и да кажем, че там няма решения.

1. Да разгледаме сега първо случая $\overline{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ От тук директно следва от чертежа, че $\overline{y_1} = 0$ и $\overline{y_2}, \overline{y_2} > 0$

   Сега можем да премахнем първия стълб на A и остава $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

   Решаваме системата

$$\begin{cases} P(1, \overline{y}) = v \\ P(2, \overline{y}) = v \end{cases} \iff \begin{cases} 7y_2 + 3y_3 = v \\ 5y_2 + y_3 = v \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{y_2} = 0 \\ \overline{y_3} = 0 \end{cases} \to \text{невъзможно}$$

   Следователно това не е ревновесие по Неш

2. Сега да разгледаме случая $\overline{x} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ От тук директно следва от чертежа, че $\overline{y_3} = 0$ и $\overline{y_1}, \overline{y_2} > 0$

   Сега можем да премахнем третия стълб на A и остава $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

   Решаваме системата

$$\begin{cases} P(1, \overline{y}) = v \\ P(2, \overline{y}) = v \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 + 7y_2 = v \\ 5y_1 + y_2 = v \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{y_1} = \frac{2}{5} \\ \overline{y_2} = \frac{3}{5} \\ v = \frac{23}{5} \end{cases} \to \text{равновесие}$$

   Следователно това е ревновесие по Неш

Остана да сметнем печалбата на втория играч. Понеже $\overline{y_1} > 0$, то имаме, че $Q(\overline{x}, 1) = w$. Тоест $\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 0 = w = 2$

Окончателно, равновесието е $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0))$ и $v = \frac{23}{5}, w = 2$

3. Сега да разгледаме формалните интервали и стойности
    - При $x_2 = 0$ имаме, че $x_1 = 1$ и тогава втория играч ще играе винаги първата стратегия, тоест получаваме равновесие в чисти стратегии - противоречие
    - При $x_2 = 1$ - аналогично
    - При $x_2 \in (0, \frac{1}{3})$ имаме от чертежа, че $\overline{y} = (1, 0, 0)$. Тогава щом $\overline{x_1}, \overline{x_2} > 0$ е вярно, че $\begin{cases} P(1, \overline{y}) = v \\ P(2, \overline{y}) = v \end{cases} \iff \begin{cases} v = 1 \\ v = 4 \end{cases} \rightarrow \text{противоречие}$
    - Аналогично при $x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $x_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$

- *Забележка*: навсякъде системите имат и другите две условия че сборът на елементите на вектора е точно 1 и всеки компонент на вектора е по-голям или равен на нула

Пример 3

Когато имаме две матрици, винаги по матрицата на първия играч търсим max по стълбове, а по матрицата на втория играч max по редове

$$A = \begin{pmatrix} \underline{5} & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & \underline{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} \\ 3 & \underline{4} \\ \underline{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Нямаме равновесие в чисти стратегии.

Вторията играч има 2 стратегии $y = (y_1, y_2)$, а пъвият има 3 стратегии $x = (x_1, x_2, x_3)$

Затова параметризираме по y и избираме y_2. Тогава на чертеж слагаме стойностите от матрицата A, тоест $P(i, y)$

Чертежът е аналогичен с този от предната задача - оста само е по y2, и вместо 0,2,3 стойностите са 0,3,5

Още от чертежа е ясно, че възможните стойности за y_2 са $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$. Но трябва формално да разгледаме трите интервала и двете крайни стойности и да кажем, че там няма решения.

1. Ако $0 < \overline{y_2} < \frac{2}{5}$ имаме от чертежа, че $\overline{x} = (1, 0, 0)$, тоест понеже $\overline{y_1}, \overline{y_2} > 0$ имаме, че $\begin{cases} Q(\overline{x}, 1) = w \\ Q(\overline{x}, 2) = w \end{cases} \rightarrow \text{противоречие}$

2. Ако $\frac{2}{5} < \overline{y_2} < \frac{3}{5}$ имаме от чертежа, че $\overline{x} = (0,1,0)$, тоест понеже $\overline{y_1}, \overline{y_2} > 0$ имаме, че $\begin{cases} Q(\overline{x},1) = w \\ Q(\overline{x},2) = w \end{cases} \to \text{противоречие}$
3. Ако $\frac{3}{5} < \overline{y_2} < 1$ имаме от чертежа, че $\overline{x} = (0,0,1)$, тоест понеже $\overline{y_1}, \overline{y_2} > 0$ имаме, че $\begin{cases} Q(\overline{x},1) = w \\ Q(\overline{x},2) = w \end{cases} \to \text{противоречие}$
4. Ако $\overline{y_2} = 0$, то $\overline{y_1} = 1$ и имаме от чертежа, че $\overline{x} = (1,0,0)$, тоест получаваме чиста стратегия $(1,1)$ - противоречие
5. Ако $\overline{y_2} = 1$, то $\overline{y_0} = 1$ и имаме от чертежа, че $\overline{x} = (0,0,1)$, тоест получаваме чиста стратегия $(3,2)$ - противоречие
6. Ако $\overline{y_2} = \frac{2}{5}$, то $\overline{y} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ От тук директно следва от чертежа, че $\overline{x_3} = 0$ и $\overline{x_1}, \overline{x_2} > 0$
   Решаваме системата

$$\begin{cases} Q(\overline{x},1) = w \\ Q(\overline{x},2) = w \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = w \\ 2x_1 + 4x_2 = w \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x_1} = 0 \\ \overline{x_2} = 0 \end{cases} \to \text{невъзможно}$$

   Следователно това не е равновесие по Неш
7. Ако $\overline{y_2} = \frac{3}{5}$, то $\overline{y} = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ От тук директно следва от чертежа, че $\overline{x_1} = 0$ и $\overline{x_2}, \overline{x_3} > 0$
   Решаваме системата

$$\begin{cases} Q(\overline{x},1) = w \\ Q(\overline{x},2) = w \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = w \\ 4x_2 + x_3 = w \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x_2} = \frac{3}{4} \\ \overline{x_3} = \frac{1}{4} \\ w = \frac{13}{4} \end{cases} \to \text{равновесие}$$

   Следователно това е равновесие по Неш

Остана да сметнем печалбата на първия играч. Понеже $\overline{x_2} > 0$, то имаме, че $P(2, \overline{y}) = v$. Тоест $\frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot 3 = v = 3$

Окончателно, равновесието е $((0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}))$ и $v = 3, w = \frac{13}{4}$

- *Забележка*: навсякъде системите имат и другите две условия че сборът на елементите на вектора е точно 1 и всеки компонент на вектора е по-голям или равен на нула

Кооперативни игри с двама играчи - биматрични

Пример 1

Тук е удобно да гледаме двете матрици като една матрица от наредени двойки.

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-\frac{4}{3},-4) \\ (-3,1) & (-4,1) \end{pmatrix}$$

Определямае u_0 като цената на играта на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Няма равновесие в чисти стратегии, значи решаваме системата

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = v \\ -\frac{4}{3}x_1 + 4x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Откъдето получаваме, че $u_0 = v = 0$

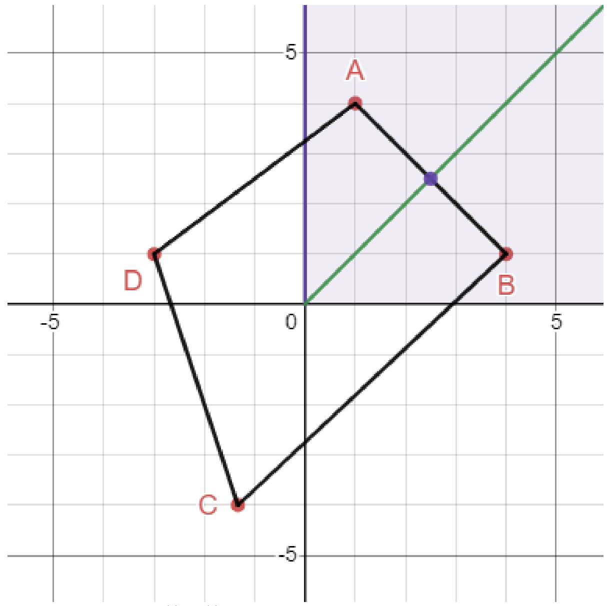
Определямае v_0 като цената на играта на матрицата

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Няма равновесие в чисти стратегии, значи решаваме система...
Откъдето получаваме, че $v_0 = v = 0$

Окончателно $(u_0, v_0) = (0, 0)$

Правим чертеж на множеството S, което представлява свързани с прави точките от дадената матрица. Разглеждаме само частта, от него, в която $(u, v) \geq (u_0, v_0) = (0, 0)$. Спазвайки шестте аксиоми може да определим решението по 3 начина.



Решението е $(\overline{u}, \overline{v}) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

Най-лесният е като гледаме чертежа и намерим пресечната точка на ъглополовящата на първи квадрант със страната срещу нея(от симетричността).

Вторият вариант е да намерим решение на системата $\begin{cases} uv \to \max \\ (u,v) \in S \\ (u,v) \geq (u_0, v_0) \end{cases}$

Където u,v са координати на точките, удовлетворяващи уравнението на отсечката AB, спомената в горния метод $(A + \alpha(B - A))$

Тоест $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ и $\alpha \in [0,1]$

Тогава се получава, че $uv = a\alpha^2 + b\alpha + c$

Когато намерим НГС на тази парабола за $\alpha \in [0,1]$, ще имаме координатите на точката, което е и решението ни.

Третият начин е чрез използване на множители на Лагранж. Тогава решаваме системата

$$\begin{cases} (u-u_0)(v-v_0) \to \max \\ au + bv = c \text{ (гореспоменататa отсечка)} \\ (u,v) \geq (u_0, v_0) \end{cases}$$

Това се свежда до намиране на екстремум на $\mathbb{L}(u,v,\lambda) = (u-u_0)(v-v_0) + \lambda(au + bv - c)$. Решаваме като занулим едновременно частните производни по трите променливи. При намерените стойности, намираме и търсеното решение $(\overline{u}, \overline{v}) = (u, v)$.

Пример 2

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix}$$

Определямае u_0 като цената на играта на матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Няма равновесие в чисти стратегии, значи решаваме системата $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = v \\ -x_1 + x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Откъдето получаваме, че $u_0 = v = \frac{1}{5}$

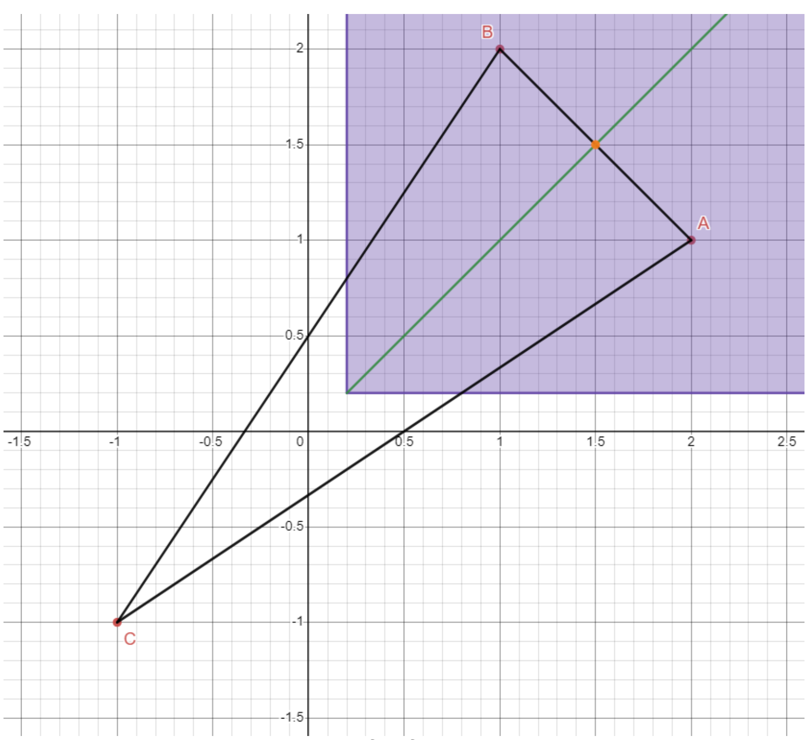
Определямае v_0 като цената на играта на матрицата $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Няма равновесие в чисти стратегии, значи решаваме системата $\begin{cases} x_1 - x_2 = v \\ -x_1 + 2x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Откъдето получаваме, че $v_0 = v = \frac{1}{5}$

Окончателно $(u_0, v_0) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

Правим чертеж на множеството S, което представлява свързани с прави точките от дадената матрица. Разглеждаме само частта, от него, в която $(u, v) \geq (u_0, v_0) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Спазвайки шестте аксиоми може да определим решението по 3 начина.



Решението е $(\overline{u}, \overline{v}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Най-лесният е като гледаме чертежа и намерим пресечната точка на ъглополовящата на първи квадрант със страната срещу нея (от симетричността).

Другите два варианта са аналогични с горния пример.

Кооперативни игри с повече от двама играчи

Пример 1

Имаме играта u, дефинирана с характеристичната си функция и $N = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} u(\{i\}) = -2 \\ u(\{i, j\}) = 2 \\ u(N) = 0 \end{cases}$$

Искаме да направим (0,1)-нормализация на играта

За целта ползваме следните две формули:

- $r = \dfrac{1}{u(N) - \sum\limits_{i \in N} u(\{i\})}$
- $\alpha_i = -u(\{i\}) \cdot r$
- $v(S) = r \cdot u(S) + \sum\limits_{i \in S} \alpha_i$

За конкретната задача, имаме:

- $r = \frac{1}{0-3\cdot(-2)} = \frac{1}{6}$
- $\alpha_i = -(-2) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Тогава получаваме:

- $v(\{i\}) = r \cdot u(\{i\}) + \alpha_i = 0$ - само за проверка(за всяка нормализирана игра едноелементните коалиции се характеризират с 0)
- $v(\{i, j\}) = r \cdot u(\{i, j\}) + \alpha_i + \alpha_j = 1$
- $v(N) = r \cdot u(N) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ - само за проверка(за всяка нормализирана игра съвместната коалиция се характеризира с 1)

Окончателно, нормализираната игра е $\begin{cases} v(\{i\}) = 0 \\ v(\{i, j\}) = 1 \\ v(N) = 1 \end{cases}$

Пример 2

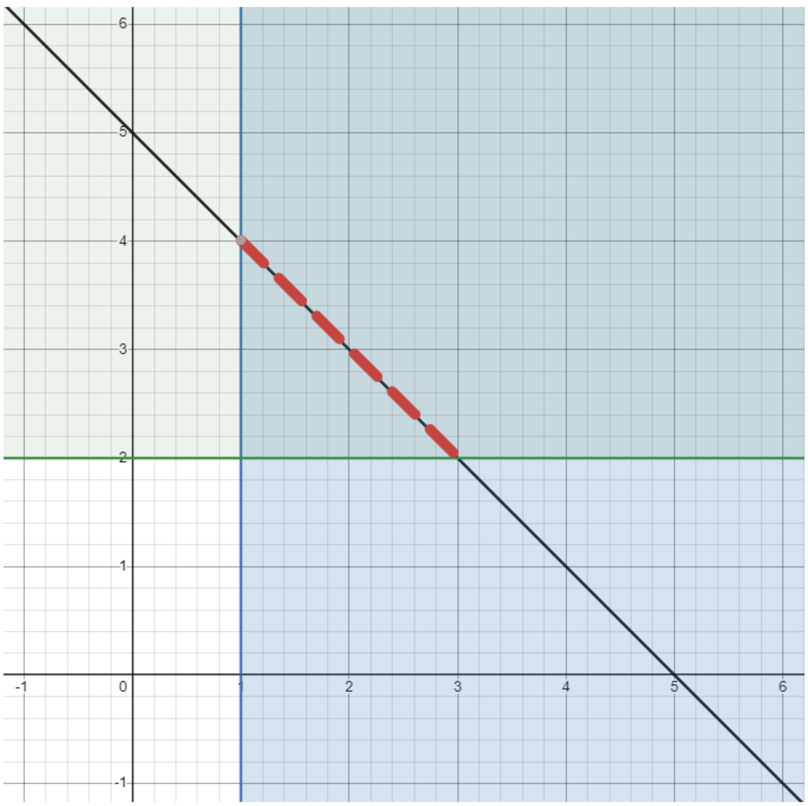
Имаме играта v, дефинирана с характеристичната си функция и $N=\{1,2\}$: $\begin{cases} v(\{1\})=1 \\ v(\{2\})=2 \\ v(\{1,2\})=5 \end{cases}$

Търсим ядрото на играта.

За да намерим ядрото, винаги разглеждаме геометричния обект, зададен като сума на измеренията и равен на $v(N)$. В този случай имаме $N=2$ затова сме в 2d и разглеждаме права. След това за всеки компонент образуван от сбора на измеренията на коалицията S слагаме ограничения да е по-голям от $v(S)$

Имаме, че $C(v)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x+y=5, x\geq 1, y\geq 2\}$

На чертеж:



Пример 3

Имаме играта v, дефинирана с характеристичната си функция и $N=\{1,2,3\}$:

$$\begin{cases} v(\{1\})=1, v(\{2\})=0, v(\{3\})=1 \\ v(\{1,2\})=4, v(\{1,3\})=3, v(\{2,3\})=5 \\ v(\{1,2,3\})=8 \end{cases}$$

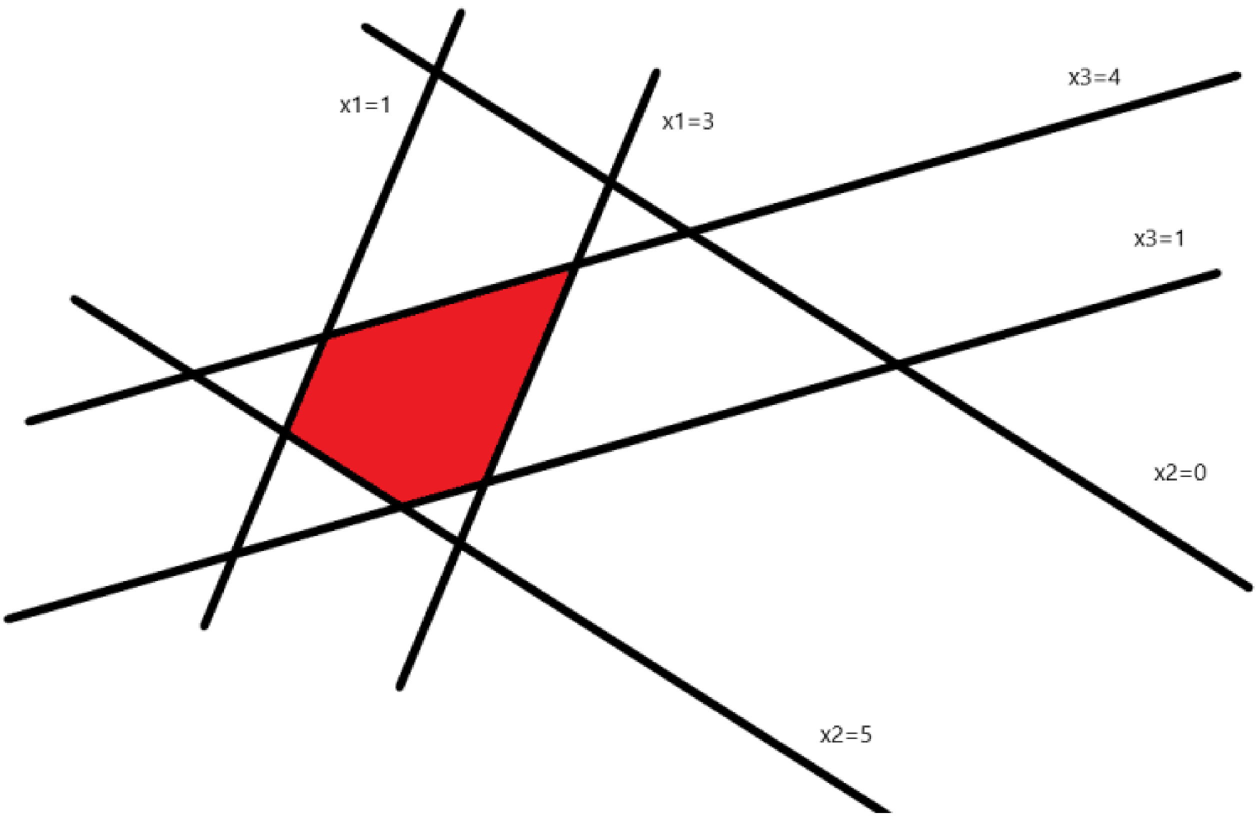
Търсим ядрото на играта.

За да намерим ядрото, винаги разглеждаме геометричния обект, зададен като сума на измеренията и равен на $v(N)$. В този случай имаме $N = 3$ затова сме в 3d и разглеждаме равнина. След това за всеки компонент образуван от сбора на измеренията на коалицията S слагаме ограничения да е по-голям от $v(S)$

Имаме, че

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ & x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \Rightarrow x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \geq 3 \Rightarrow x_2 \leq 5 \\ & x_2 + x_3 \geq 5 \Rightarrow x_1 \leq 3\} \end{aligned}$$

На чертеж - в равнината $x_1 + x_2 + x_3 = 8$:



Пример 4

Имаме играта v, дефинирана с характеристичната си функция и $N = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1 \\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1 \\ v(\{1,2,3\}) = 1 \end{cases}$$

Търсим ядрото на играта.

Ядрото се определя от системата $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases} \longrightarrow \text{несъвместима}$

Тоест ядрото е празно и всяка делба е доминируема. Това означава, че играта няма решение.

Пример 5

Имаме играта v, дефинирана с характеристичната си функция и $N = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = \alpha \\ v(\{1,2,3\}) = 1 \end{cases}$$

Търсим α, такова, че ядрото на играта е непразно.

Ядрото се определя от системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq \alpha \\ x_1 + x_3 \geq \alpha \\ x_2 + x_3 \geq \alpha \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3\alpha \Longleftrightarrow \alpha \leq \frac{2}{3}$$

- При $\alpha > \frac{2}{3}$ - ядрото е празно
- При $\alpha = \frac{2}{3}$ - ядрото се състои от една точка $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- При $\alpha < \frac{2}{3}$ - ядрото се състои от множество - триъгълник

Пример 6

Да се определят доминациите на делбите

$x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$y = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Първо да кажем, че за да е делба един вектор x на игра с $N = \{1, \ldots, n\}$ в (0,1)-нормализация трябва:

- $x_i \geq 0$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$

За конкретния случай, двата вектора са делби.

Също така покомпонентно като сравняваме, стигаме до извода, че:

$x \underset{\{1,2\}}{>} y$ и $y \underset{\{4,5\}}{>} x$

Пример 7

Ако имаме игра задена с характеристичната си функция:

$$\begin{cases} v(\{1\}) = 200, \quad v(\{2\}) = 300, \quad v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 800, \quad v(\{1,3\}) = 500, \quad v(\{2,3\}) = 650 \\ v(\{1,2,3\}) = 1000 \end{cases}$$

Искаме да проверим дали векторите са в ядрото:

$x = (330, 490, 180)$

$y = (330, 500, 190)$

Втората делба има сума на компонентите $1020 \neq 1000$ следователно не е в ядрото

Първата делба има сума на компонентите 1000 и отговаря на условията за ядро, следователно е в ядрото

Проверка може да направим като си разпишем ядрото като система от условия и проверим дали дадените вектори удовлетворяват системата.

Пример 8

Нека имаме читирима акционери в едно дружество, които имат дялове съответно 10%, 20%, 30% и 40%. Решение се взима от мнозинство, държащо поне 50% от акциите. Искаме да видим делбата на участието в решения.

Това може да го тълкуваме като игра с $N = \{1, 2, 3, 4\}$ и характеристична функция:

$$\begin{cases} v(\{i\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 0, \quad v(\{i,j\}) = 1 \\ v(\{i,j,k\}) = 1 \\ v(N) = 1 \end{cases}$$

Сега търсим вектора на Шепли $\varphi(v)$

Последователно:

$\varphi_1(v) = \sum_{\substack{T \subseteq N \\ 1 \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{1\})) = \frac{1!2!}{4!}1 = \frac{1}{12}$ - понеже тук само $v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) > 0$ от възможните T

$\varphi_2(v) = \sum_{\substack{T \subseteq N \\ 2 \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{2\})) = \frac{1!2!}{4!}1 + \frac{2!1!}{4!}1 + \frac{2!1!}{4!}1 = \frac{1}{4}$ - понеже тук $v(\{2,4\}) - v(\{4\}) = v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\}) = 1$ и всички други $v(T) - v(T \setminus \{2\}) = 0$

$\varphi_3(v) = \frac{1}{4}$

$\varphi_4(v) = \frac{5}{12}$

Окончателно $\varphi(v) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12})$