

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Электронный конспект лекций по дисциплине  
«Вычислительная математика»

преподаватель: Рубан А.А.

редактура: студенты группы ИП-813

Афонин А.Д

Бурдуковский И.А.

Стояк. Ю. К.

# Оглавление

<b>ТЕМА 1: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КУРСА .....</b>	<b>4</b>
П.1 ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМОВ: .....	4
П.2 АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ: .....	4
П.3 ИЗМЕНЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ:.....	4
П.4 ИЗМЕНЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИИ:.....	5
П.5 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТИ:.....	5
<i>Вычисление чисел с погрешностью (ДЗ) .....</i>	6
<b>ТЕМА 2: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ.....</b>	<b>7</b>
П.1 ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ:.....	7
1. <i>Метод Гаусса:.....</i>	7
<i>Метод Гаусса (ДЗ) .....</i>	9
2. <i>Модификация метода Гаусса: .....</i>	10
<i>Модифицированный метод Гаусса (ДЗ).....</i>	11
3. <i>Трудоемкость метода Гаусса: .....</i>	12
П.2 ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ:.....	12
1. <i>Справочный материал. Нормы векторов и матриц: .....</i>	12
2. <i>Метод простых итераций (МПИ): .....</i>	14
<i>Метод простых итераций (ДЗ) .....</i>	19
П.3 Модификация МПИ – метод Зейделя.....	20
<i>Метод Зейделя (ДЗ) .....</i>	21
<i>Оценка трудоемкости решения СЛАУ различными методами: .....</i>	22
<b>ТЕМА 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ....</b>	<b>23</b>
П.1 НУ И СНУ.....	23
П.2 ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НУ – МЕТОД ПРОСТОГО ДЕЛЕНИЯ (МПД) ИЛИ МЕТОД БИССЕКЦИЙ. .....	23
<i>Метод половинного деления (ДЗ) .....</i>	24
П.3. Модификация МПД – Метод Хорд (МХ). .....	25
<i>Метод хорд (ДЗ) .....</i>	27
П.4 Метод Ньютона (метод касательных).....	28
<i>Метод Ньютона (ДЗ).....</i>	29
П.5 Скорости сходимости МПД, МХ, МН:.....	30
П.6 Многомерный вариант метода Ньютона: .....	32
<i>Решение СНУ методом Ньютона: через обратную матрицу (ДЗ).....</i>	35
<i>Решение СНУ методом Ньютона: через Гаусса (ДЗ).....</i>	37
П.7 Вариации метода Ньютона: .....	38
7.1 <i>Комбинированный метод (сочетание МН и МХ): .....</i>	38
7.2 <i>Видоизмененный метод Ньютона:.....</i>	38
П.8 Метод итераций, решение НУ и СНУ:.....	38
8.1 <i>Одномерный вариант МИ.....</i>	38

<b>ТЕМА 4: ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.....</b>	<b>42</b>
П.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ОБЩИЙ ПОДХОД К ЕЁ РЕШЕНИЮ:.....	42
П.2 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ. ....	42
2.1 Формула Лагранжа, интерполяционный многочлен: .....	42
Формула Лангранжа (ДЗ).....	44
2.2 Схема Эйткена:.....	45
Схема Эйткена (ДЗ).....	47
2.3 Погрешности интерполяционного многочлена: .....	48
2.4. Конечные разности. ....	51
Формула Ньютона (ДЗ).....	53
Погрешности формул Ньютона ИМ: .....	54
2.5. Центральные формулы для интерполяционного многочлена – формулы Бесселя и Стирлинга.....	54
П.3 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ.....	56
3.1. Определение кубического Сплайна. ....	56
3.2. Свойства кубического Сплайна .....	57
3.3. Формулы для вычисления кубического сплайна. ....	58
Интерполяция кубическими сплайнами(ДЗ).....	60
П.4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. ....	61
Тригонометрическая интерполяция (ДЗ).....	62
4.2. Быстрое преобразование Фурье.....	63
4.3. Многомерная интерполяция. ....	63
Многомерная интерполяция (ДЗ) .....	64
П.5. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ.....	65
5.1. Обратная интерполяция.....	65
Обратная интерполяция (ДЗ).....	66
5.2. Численное дифференцирование функции. ....	67
Численное дифференцирование функции (ДЗ).....	69
П.6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	72
6.1. Общая идея, решение. ....	72
6.2. Частные случаи, формулы Ньютона - Котеса.....	72
6.3. Погрешности формул численного интегрирования.....	74
6.4. Общие формулы трапеции и Симпсона численного интегрирования.....	75
Численное интегрирование: формула трапеций (ДЗ).....	76
Численное интегрирование: формула Симпсона (ДЗ).....	77
6.5. Погрешности общих формул трапеции и Симпсона. ....	78
6.6. Метод двойного пересчёта для оценки погрешности численного интегрирования.....	79
6.7. Метод коррекции в двойном пересчёте. ....	79

<b>ТЕМА 5: ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ДУ И СДУ).....</b>	<b>80</b>
П.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ....	80
П.2. ПРОСТЕЙШИЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ.....	80
<i>Метод Эйлера (ДЗ).....</i>	81
П.3.ПРОСТЕЙШАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА – МЕТОД РУНГЕ-КУТТА 2-ГО ПОРЯДКА.....	82
<i>Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по времени (ДЗ).....</i>	83
<i>Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по производной (ДЗ).....</i>	84
П.4. СВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ К СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЁ РЕШЕНИЕ. ....	85
<i>Метод Эйлера (ДЗ).....</i>	87
<i>Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по времени (ДЗ).....</i>	88
<i>Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по производной (ДЗ).....</i>	89
<i>Метод Рунге-Кутта 4го порядка. ....</i>	90
<i>Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (ДЗ) .....</i>	91
П.5. ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ОДНОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДУ.....	93
(МЕТОДА ЭЙЛЕРА И МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТА 2ГО, 4ГО ПОРЯДКА).....	93
П.6. МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДУ И СДУ. ....	93
<i>Метод Рунге-Кутта 4-го порядка. 5 шагов. Метод Милна (ДЗ) .....</i>	94
<i>Метод Рунге-Кутта 4 порядка: 4 и 5 шаг (ДЗ) .....</i>	96
<i>Метод Милна. 2 шага (ДЗ) .....</i>	97
П.7. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ДУ И СДУ МЕТОДОМ ДВОЙНОГО ПЕРЕСЧЕТА. КОРРЕКЦИЯ РЕШЕНИЯ. ....	98
П.8. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ....	98
П.9. ЧТО ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ ДУ НЕ МОЖЕТ БЫТЬ РАЗРЕШЕНО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ?.....	99
<b>ТЕМА 6: АППРОКСИМАЦИЯ.....</b>	<b>100</b>
П.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ. ....	100
П.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ....	101
<i>Метод наименьших квадратов (ДЗ) .....</i>	106
<b>ТЕМА 7: НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.....</b>	<b>107</b>
П.1. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ .....	107
НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (ЗНО) И НАОБОРОТ. ....	107
П.2. МЕТОД ГРАДИЕНТА.....	107
П.3. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗНО. ....	108
<i>Методы Золотого сечения (ДЗ) .....</i>	110
<b>ТЕМА 8: МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО .....</b>	<b>111</b>
П.1.ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО. ....	111
П.2.МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В ЧИ. ....	111
П.2. ВТОРОЙ ВАРИАНТ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО(ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕ ПО N-МЕРНОМУ КУБУ, А ПО НЕКОТОРОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ N-МЕРНОЙ ОБЛАСТИ D). ....	112

# Тема 1: Основные понятия курса

## **П.1 Характеристики алгоритмов:**

- Погрешность
- Трудоемкость
- Требование памяти

## **П.2 Абсолютная и относительная погрешности:**

$x$  - приближенное значение некоторой величины

$x_0$  - точное

$\Delta x = |x - x_0|$  - абсолютная погрешность

$\delta x = \frac{\Delta x}{|x_0|} = \frac{\Delta x}{x_0}$  - относительная погрешность (должна быть <<1)

## **П.3 Изменение абсолютной и относительной погрешностей при арифметических операциях:**

### **Теорема 1.1:**

При сложении и вычитании приближенных величин абсолютные погрешности складываются (абсолютная погрешность суммы (разницы) не превосходит суммы абсолютных погрешностей).

### **Доказательство:**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ y &= y_0 + \Delta y \\ \hline x + y &= (x_0 + y_0) \pm (\Delta x + \Delta y) \end{aligned}$$

приближенное значение суммы      точное значение суммы      абсолютная погрешность суммы

### **Теорема 1.2:**

При перемножении (делении) приближенных величин относительные погрешности складываются (т.е. относительная погрешность произведения (частного) не превышает суммы относительных погрешностей).

### **Доказательство:**

$$x = x_0 + \Delta x = x_0 \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x_0}\right) = x_0 (1 \pm \delta x)$$

$$x = x_0 (1 \pm \delta x)$$

$$y = y_0 (1 \pm \delta y)$$

$$x \cdot y = x_0 \cdot y_0 (1 \pm \delta x \pm \delta y \pm \delta x \delta y)$$

*деление*

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \left(\frac{1 \pm \delta x}{1 \pm \delta y}\right)$$

## П.4 Изменение погрешности при вычислении функции:

### Теорема 1.3:

$$f(x) = f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm f'(x_0) \Delta x$$

При вычислении функции абсолютная погрешность умножается на  $|f'(x_0)|$

### Следствие 1.4:

При вычислении степенной функции ( $f(x) = x^\alpha$ ) относительная погрешность умножается в  $|\alpha|$  раз.

### Доказательство:

$$f(x) = x^\alpha$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = f(x_0) \pm \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Delta x = x^\alpha \left(1 \pm \alpha \frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

$$x_0^\alpha$$

### Следствие 1.5:

При вычислении экспоненты

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = f(x_0) \pm f'(x_0) \Delta x = e^{x_0} \pm e^{x_0} \Delta x = e^{x_0} (1 \pm \Delta x)$$

относительная погрешность результата равна абсолютной погрешности аргумента.

### Замечание 1.6:

Если многократно суммировать приближенные величины одного порядка, то абсолютная погрешность будет увеличиваться не в  $n$  раз, а в  $\sqrt{n}$  раз (так как количество "+" и "-" примерно равно ( $n$  слагаемых)).

## П.5 Источники погрешности:

- ❖ Исходные данные
- ❖ Округление чисел при машинном вычислении
- ❖ Погрешность вычислительных методов

### Вычисление чисел с погрешностью (ДЗ)

$$x = 2,384 \pm 0,021$$

$$y = 9,485 \pm 0,014$$

$$x + y = 2,384 + 9,485 \pm (0,021 + 0,014) = 11,869 \pm 0,035$$

$$x - y = 2,384 - 9,485 \pm (0,021 + 0,014) = -7,101 \pm 0,035$$

В операциях с делением и умножением переходим от абсолютной погрешности к относительной.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2,384 \left(1 \pm \frac{0,021}{2,384}\right) \cdot 9,485 \left(1 \pm \frac{0,014}{9,485}\right) = 2,384(1 \pm 0,009) \cdot 9,485(1 \pm 0,001) = \\ &22,612(1 \pm (0,009 + 0,001)) = 22,612(1 \pm 0,01) = 22,612 \pm 0,226 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2,384 \left(1 \pm \frac{0,021}{2,384}\right)}{9,485 \left(1 \pm \frac{0,014}{9,485}\right)} = \frac{2,384(1 \pm 0,009)}{9,485(1 \pm 0,001)} = 0,251(1 \pm 0,01) = 0,251 \pm 0,002$$

$$y^2 = 9,485^2 \left(1 \pm \frac{2 \cdot 0,014}{9,485}\right) = 89,965(1 \pm 0,003) = 89,965 \pm 0,269$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{11,869 \left(1 \pm \frac{0,035}{11,869}\right)}{-7,101 \left(1 \pm \frac{0,035}{-7,101}\right)} = \frac{11,869(1 \pm 0,003)}{-7,101(1 \pm 0,005)} = -1,761(1 \pm 0,008) = -1,671 \pm 0,013$$

$$\sqrt{x} = 2,384^{1/2} \left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{0,021}{2,384}\right) = 2,384^{1/2} \left(1 \pm \frac{1}{2} 0,009\right) = 1,544(1 \pm 0,004) = 1,544 \pm 0,006$$

$$x - y^2 = 2,384 \pm 0,021 - 89,965 \pm 0,269 = -87,581(0,021 + 0,269) = -87,581 \pm 0,290$$

$$\sin x = \sin 2,384 \pm \cos 2,384 \cdot 0,021 = 0,69 \pm 0,73 \cdot 0,021 = 0,69 \pm 0,015$$

$$\sin y = \sin 9,485 \pm \cos 9,485 \cdot 0,014 = 0,06 \pm 0,1 \cdot 0,014 = 0,06 \pm 0,001$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} \cdot (x - y^2)}{\sin x + y^2} &= \frac{(1,544 \pm 0,006) \cdot (-87,581 \pm 0,290)}{(0,69 \pm 0,015) + (89,965 \pm 0,269)} = \frac{1,544(1 \pm 0,004) \cdot -87,581(1 \pm 0,003)}{90,655 \pm 0,296} \\ &= \frac{-135,225(1 \pm 0,007)}{90,655(1 \pm 0,003)} = -1,495(1 \pm 0,01) = -1,492 \pm 0,15 \end{aligned}$$

$$\ln x = \ln 2,384 \pm \frac{1}{2,384} \cdot 0,021 = \ln 2,384 \pm \frac{0,021}{2,384} = 0,869 \pm 0,009$$

## Тема 2: Методы решения СЛАУ

### **П.1 Точные и приближенные методы решения СЛАУ:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

В дальнейшем будем считать  $n=k$

$$Ax=b \quad A= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & , \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Методы решения СЛАУ делятся на 2 группы точные и приближенные:

- Точные (т.е. методы, которые дают точное решение за конечное число шагов при условии, что все действия выполняются абсолютно точно).
- Приближенные (итерационные)

При применении этих методов точного решение никогда не будет получено, оно является пределом последовательности приближенных решений.

Точные методы: метод Гаусса, метод Крамера, через обратную матрицу, ...

Приближенные методы: метод простой итерации, метод Зейделя, ...

#### **1. Метод Гаусса:**

Основная идея: привести исходную матрицу  $A$  к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк, после чего СЛАУ легко решается.

*Метод состоит из двух частей:*

*1-ая часть – прямой ход: приведение матрицы к треугольному виду.*

*2-ая часть – обратный ход: решение СЛАУ с треугольной матрицей.*

Прямой ход:

$$1) \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad \left[ \begin{array}{l} \\ + 1 \left( \frac{-a_{21}}{a_{11}} \right) \\ + 1 \left( \frac{-a_{31}}{a_{11}} \right) \\ + 1 \left( \frac{-a_{n1}}{a_{11}} \right) \end{array} \right]$$

$$2) \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad \left[ \begin{array}{l} \\ b_2 - 2 \left( \frac{-a_{32}}{a_{22}} \right) \\ b_3 - 2 \left( \frac{-a_{n2}}{a_{22}} \right) \end{array} \right]$$

.....

$$3) \left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

.....

Нюансы метода Гаусса:

Если ведущий элемент (на диагонали) на каком-либо этапе обратного хода равен нулю – переставим строки (строки смотрим ниже диагонали) так, чтобы ведущий элемент не был равен нулю. Если это невозможно, т.е. в  $j$ -ом столбце все строки с  $i$ -ой и вниз нулевые, тогда матрица А вырожденная.

## Метод Гаусса (ДЗ)

Оригинальная матрица:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Прямой ход: приведём матрицу к треугольному виду

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} (2)^{\text{я строка}} + 1,5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \\ (3)^{\text{я строка}} + 0,5 \cdot (1)^{\text{я строка}} \end{matrix} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 + 1,5 \cdot (-2) & 1 + 1,5 \cdot 1 & -6 + 1,5 \cdot (-3) & -9 + 1,5 \cdot (-8) \\ 1 + 0,5 \cdot (-2) & 1 + 0,5 \cdot 1 & 2 + 0,5 \cdot (-3) & 5 + 0,5 \cdot (-8) \end{array} \right) =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2,5 & -10,5 & -21 \\ 0 & -0,5 & 0,5 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} (3)^{\text{я строка}} + 0,2 * (2)^{\text{я строка}} \end{matrix} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2,5 & -10,5 & -21 \\ 0 & -0,5 + 0,2 \cdot 2,5 & 0,5 + 0,2 \cdot (-10,5) & 1 + 0,2 \cdot (-21) \end{array} \right) =$$

Получаем треугольный вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2,5 & -10,5 & -21 \\ 0 & 0 & -1,6 & -3,2 \end{array} \right)$$

Обратный ход: запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -1,6x_3 = -3,2 \\ 2,5x_2 - 10,5x_3 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ 2,5x_2 - 21 = 21 \\ -2x_1 + x_2 - 6 = -8 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

## 2. Модификация метода Гаусса:

Метод Гаусса с выбранным ведущим элементом.

Единственное отличие модифицированного метода Гаусса от обычного состоит в том, что на каждом этапе прямого хода на место ведущего элемента ставим максимальный по модулю среди возможных, т.е среди элементов столбца, который находится не выше главной диагонали.

Пример решения СЛАУ модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{array}{c}
 1) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{array} \right) \\
 2) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \\
 3) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{array} \right) \\
 4) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(на втором этапе выбираем максимальный по модулю элемент и меняем строку, содержащую выбранный элемент с первой строкой)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -\frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_2 = (-\frac{4}{3}x_3)/(-\frac{4}{3}) = (-\frac{4}{3})/(-\frac{4}{3}) = 1$$

$$x_1 = \frac{3 - x_3 + x_2}{3} = 1$$

**Замечания:** метод Гаусса с выбором ведущего элемента работает лучше (точнее) чем обычный метод Гаусса (т.е. его точность выше). Погрешности при реализации метода Гаусса возникают при машинном округлении чисел, модифицированный метод Гаусса позволяет решать с той же точностью.

## Модифицированный метод Гаусса (ДЗ)

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

Оригинальная матрица

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \end{array} \right)$$

Прямой ход:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ }} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2)\text{я строка} - 1/3 \cdot (1)\text{я строка} \\ (3)\text{я строка} + 2/3 \cdot (1)\text{я строка}}} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ }} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(3)\text{я строка} + 5/4 \cdot (1)\text{я строка}}} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -4,75 & -9,5 \end{array} \right)$$

Обратный ход:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4,75x_3 = -9,5 \\ \frac{5}{3}x_2 - 7x_3 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -9 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 - 14 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ \frac{5}{3}x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 12 = -9 \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 + 0 - 12 = -9 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ 3x_1 = 3 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array} \right.$$

Ответ:  $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

### **3. Трудоемкость метода Гаусса:**

#### Прямой ход: три цикла

j от 1 до n-1 - по столбцу

i от j+1 до n - по строке

k от j+1 до n+1

$$\tau \sim n^3$$

#### Обратный ход: два цикла

$$\tau \sim n^2$$

## **П.2 Приближенные методы решения СЛАУ:**

В приближенных методах точные решения получаются как предел бесконечной последовательности приближений, который мы в некоторый момент времени обрываем (когда достигается заданная точность).

### **1. Справочный материал. Нормы векторов и матриц:**

Пусть  $x$  –  $n$ -мерный вектор.

Нормой вектора называется число, удовлетворяющее следующим свойствам (аксиомам и нормам):

1)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$  - Норма неотрицательна и равна нулю  $\Leftrightarrow$  когда вектор равен нулю.

2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

#### **Замечания:**

a) Фактически норма вектора есть ни что иное, как его длина.

б) Мы живем в пространстве с нормой 2, но на практике обычно удобнее использовать 1-ую или бесконечную нормы.

Примеры норм:  $x = (x_1, \dots, x_n)$

■  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  - первая норма

■  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  - вторая норма

■  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} (|x_i|)$  - бесконечная норма

Определение: Нормой матрицы  $A$  называется число, которое определяется таким образом:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

### Теорема 2.1:

Норма произведения не превосходит произведения норм.

#### Доказательство:

Имеем:

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\| &= \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot B_x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot (B_x)\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot B_x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|B_x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot B_x\|}{\|B_x\|} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|B_x\|}{\|x\|} = \\ &= \max_{y \neq 0} \frac{\|A_y\|}{\|y\|} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|B_x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|\end{aligned}$$

### Следствие 2.2:

Норма k-ой степени

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k$$

Следующая цель – эффективно научиться считать нормы матрицы.

### Теорема 2.3:

Легко вычисляются

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (2.1)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по столбцам.

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (2.2)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам.

#### Доказательство 2.2:

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|Ax_i\|}{\max_i \|x_i\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \left\| \sum_j a_{ij} x_j \right\|}{\max_i \|x_i\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \sum_j |a_{ij}| \|x_j\|}{\max_i \|x_i\|} \leq \\ &\leq \max_{x \neq 0} \frac{\left( \max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \cdot \left( \max_j \|x_j\| \right)}{\max_i \|x_i\|} \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\end{aligned}$$

Итак, мы доказали неравенство  $\|A\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$

для полного доказательства теоремы необходимо доказать второе неравенство (для этого достаточно определить вектор  $\hat{x} \neq 0$ , которого выполняется  $\|A\hat{x}\|_\infty = \|A\| \cdot \|\hat{x}\|_\infty$  (\*)).

если для некоторого вектора выполняется такое равенство, то:  $\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|A\hat{x}\|_\infty}{\|\hat{x}\|_\infty}$

для окончательного доказательства остается определить вектор  $\hat{x}$ , для которого выполняется искомое равенство (\*).

Для того чтобы определить искомый вектор  $\hat{x}$  со свойством (\*), рассмотрим ту строку матрицы, в которой достигается максимальная сумма модулей элементов. Пусть это строка с номером 0.

$$i_0 : \sum_j |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |a_{i_0 j}|$$

тогда положим соответствующую координату  $\hat{x}$

$$\hat{x} = \begin{cases} +1, & a_{i_0 j} \geq 0 \\ -1, & a_{i_0 j} < 0 \end{cases}$$

Тогда координата с номером 0 получается умножением  $i_0$  на столбец.

$$\|A\hat{x}\|_\infty \geq (A\hat{x}) = \sum_j a_{i_0 j} \cdot \hat{x} = \sum_j a_{i_0 j}$$

$\|\hat{x}\|_\infty = 1$ , с учетом этого факта получили искомое соотношение (\*), что и доказывает теорема 2.3.

## 2.Метод простых итераций (МПИ):

Пусть дана СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей A, проделаем с ней следующие преобразования: поделим каждую строку матрицы на диагональный элемент (предполагается что все элементы не нулевые). Данное преобразование называется приведением матрицы к виду удобному для итерации.

После данных преобразований по диагонали получаются единицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\dots - \text{какие-то произвольные элементы, получившиеся путем преобразования исходных, по выше описанному способу})$$

разобьем матрицу A на сумму матриц E и C, где матрица E – единичная матрица и матрица C – по диагонали нули.

$$A = E + C$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(где элементы матрицы  $C$ :  $a_{ij}$  - и есть элементы матрицы  $A$ )

Исходное СЛАУ преобразовано таким образом:

$$Ax=b \quad (E+C)x=b$$

$$x+Cx=b \Rightarrow x=b-Cx \quad (2.3)$$



СЛАУ приведенное к виду удобному для итераций.

Рассмотрим итерационный процесс (2.4)

$$x^{(k+1)} = b - Cx^k$$

Из вектора  $x^k$  - получаем следующий вектор  $x^{k+1}$ .

Стартовый вектор  $x_0$  - обычный нулевой вектор.

#### Теорема 2.4:

Если итерационный процесс (2.4) сходится, то есть существует

$x^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ , то этот предельный вектор  $x^\infty$  и будет точным решением исходного

СЛАУ (2.3)

#### Доказательство:

Рассмотрим формулу (2.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b - Cx^k) = b - Cx^\infty$$

Необходимо исследовать важный вопрос: когда итерационный процесс (2.4) – сходится?

Ответ дает теорема 2.5

#### Теорема 2.5(достаточное условие сходимости):

Если  $\|C\| < 1$ , то итерационный процесс 2.4 сходится, и скорость его сходимости – геометрическая прогрессия со значением  $\|C\|$ .

## Доказательство:

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} &= b - Cx^{(0)} \\
 x^{(2)} &= b - Cx^{(1)} = b - C(b - Cx^{(0)}) = b - Cb + C^2 x^{(0)} \\
 x^{(3)} &= b - Cx^{(2)} = b - C(b - Cb + C^2 x^{(0)}) = b - Cb + C^2 b - C^3 x^{(0)} \\
 x^{(4)} &= b - Cx^{(3)} = b - C(b - Cb + C^2 b - C^3 x^{(0)}) = b - Cb + C^2 b - C^3 b + C^4 x^{(0)} \\
 &\dots \\
 x^{(k)} &= b - Cb + C^2 b - C^3 b + \dots - C^{(k-1)} b + C^k x^{(0)}
 \end{aligned}$$

Для того чтобы доказать, что данная последовательность сходится, докажем, что норма разности  $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \rightarrow 0$ , считаем, что  $k > l$

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^{(l)}\| &= \|b - Cb + C^2b - C^3b + \dots + (-1)^{k-1}C^{k-1}b + (-1)^kC^{k-1}x^0 - (b - Cb + C^2b + \dots + \\ &+ (-1)^{l-1}C^{l-1}b + (-1)^lC^lx^0)\| = \|(-1)^lC^lb + (-1)^{l+1}C^{l+1}b + \dots + (-1)^{k-1}C^{k-1}b + (-1)^kC^kx^0 - \\ &- (-1)^lC^lx^0\| \leq \|C^lb\| + \|C^{l+1}b\| + \dots + \|C^{k-1}b\| + \|C^kx^0\| \leq \|C\|^l\|b\| + \|C\|^{l+1}\|b\| + \dots + \|C\|^{k+1}\|b\| + \\ &+ \|C\|^l\|x^0\| \end{aligned}$$

$$\frac{\overbrace{\|C\|^l \|b\| - \|C\|^k \|b\|}^0}{1 - \|C\|} + \overbrace{\|C\|^k \|x^0\|}^0 + \overbrace{\|C\|^l \|x^0\|}^0 \quad (2.5)$$

## **Следствие 2.6:**

Если  $\|C\| < 1$ , то  $x^k \rightarrow x^\infty$  - точное решение исходного СЛАУ (сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \|C\|$ ), а именно, если взять стартовый вектор

$$x^0 = 0, \quad mo \quad \|x^k - x^\infty\| \leq \frac{\|C\|^k}{1-\|C\|}. \quad (2.6)$$

**Следствие 2.7**(оценка необходимого числа шагов для достижения заданной точности):

Если задана дополнительная погрешность  $\varepsilon$ , то, сделав  $N$  шагов, мы получим решение с заданной точностью, т. е.  $\|x^n - x^\infty\| < \varepsilon$

$\downarrow$   
точное

Доказательство:

Решаем неравенство из формулы (2.6):

$$\frac{\|C\|^k}{1-\|C\|} \|b\| < \varepsilon ; \quad k \geq \log_{\|C\|} \frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|} = \ln \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|})}{\ln \|C\|} ; \quad N = \left\lceil \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-\|C\|)}{\|b\|})}{\ln \|C\|} \right\rceil + 1$$

Пример СЛАУ, решенной МПИ:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = -7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

Матрица А имеет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) :5 \quad \begin{matrix} \text{(приводим к виду удобному для итераций - делим каждую} \\ \text{строку матрицы так, чтобы получить единицы по главной} \\ \text{диагонали)} \end{matrix}$$

$$\text{Получаем матрицу: } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ 1/3 & 1 & 0 & 7/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1 & 3/4 \end{array} \right)$$

Разбиваем матрицу А на сумму матриц Е и С:

$$A = E + C$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^\infty = \max(1/5 + 1/5; 1/3; 1/4 + 1/4) = 1/2$$

$$\|B\|^\infty = \max(3/5; 7/3; 3/4) = 7/3$$

Первый шаг по МПИ (начальный вектор X - нулевой):

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Второй шаг МПИ:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -37/60 \\ 3/15 \\ 11/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73/60 \\ 32/15 \\ 1/60 \end{pmatrix}$$

.....

$$\text{количество шагов } N = \left\lceil \frac{\ln(\frac{10^{-3}(1-1/2)}{7/3})}{\ln 1/2} \right\rceil + 1 = \frac{\ln(0,0002)}{\ln 0,5} + 1 = \frac{-8,52}{-0,69} + 1 \approx 13,3$$

**Замечание 2.8:**

Заметим, что условие  $\|C\|^\infty < 1$  для матрицы C, полученной из матрицы A с помощью стандартной процедуры приведения к виду удобному для итераций, равносильно тому, что для исходной матрицы A выполняется условие диагонального преобразования по строкам, т.е. в каждой строке диагональный элемент строго больше суммы модулей.

$$|a_{ij}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Доказательство:

Заметим, что:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & , j \neq i \\ 0 & , j = i \end{cases}$$

$$\|C\|^\infty < 1 \quad , \forall i \sum_{j \neq i} |C_{ij}| ; \quad \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

## Метод простых итераций (ДЗ)

Оригинальная матрица

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\text{я строка} \div 5} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)\text{я строка} \div -10} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)\text{я строка} \div 5} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right)$$

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^\infty = \max(0,2 + 0,4; 0,2 + 0,3; 0,2 + 0,4) = \max(0,6; 0,5; 0,6) = 0,6$$

$$\|B\|^\infty = \max(0,6; 0,4; 2,4) = 2,4$$

$$N = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^\infty)}{\|B\|^\infty}\right)}{\ln(\|C\|^\infty)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0,6)}{2,4}\right)}{\ln(0,6)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{10^{-4} \cdot (1 - 0,6)}{2,4}\right)}{\ln(0,6)} \right\rceil = [21,58] = 22$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^k$$

Шаг 1: (начальный вектор x - нулевой)

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix};$$

Шаг 2:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \cdot 0,6 - 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 2,4 \\ 0,2 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 - 0,3 \cdot 2,4 \\ 0,2 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 - 0 \cdot 2,4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,88 \\ -0,6 \\ 0,28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,28 \\ 1 \\ 2,12 \end{pmatrix};$$

Шаг 3:

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,28 \\ 1 \\ 2,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,648 \\ -0,692 \\ 0,344 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,048 \\ 1,092 \\ 2,056 \end{pmatrix};$$

### П.3 Модификация МПИ – метод Зейделя.

Рассмотрим не матричную, а формальную запись МПИ:  $x^{(k+1)} = b - Cx^k$

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \dots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

Итак, получаем следующие формулы для МПИ:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= b_1 - (0 \cdot x_1^k + C_{12} \cdot x_2^k + C_{13} \cdot x_3^k + \dots + C_{1n} \cdot x_n^k) \\ x_2^{k+1} &= b_2 - (C_{21} \cdot x_1^k + 0 \cdot x_2^k + C_{23} \cdot x_3^k + \dots + C_{2n} \cdot x_n^k) \\ x_3^{k+1} &= b_3 - (C_{31} \cdot x_1^k + C_{32} \cdot x_2^k + 0 \cdot x_3^k + \dots + C_{3n} \cdot x_n^k) \\ \dots \\ x_n^{k+1} &= b_n - (C_{n1} \cdot x_1^k + C_{n2} \cdot x_2^k + C_{n3} \cdot x_3^k + \dots + 0 \cdot x_n^k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В методе Зейделя в отличие от МПИ при вычислении координат вектора  $x^{k+1}$  будем использовать не только лишь координаты вектора  $x^k$  с предыдущего шага, но и уже найденные координаты вектора  $x^{k+1}$ .

$$(2.8) \quad \begin{cases} x_1^{k+1} = b_1 - (0 \cdot x_1^k + C_{12} \cdot x_2^k + C_{13} \cdot x_3^k + \dots + C_{1n} \cdot x_n^k) \\ x_2^{k+1} = b_2 - (C_{21} \cdot x_1^{k+1} + 0 \cdot x_2^k + C_{23} \cdot x_3^k + \dots + C_{2n} \cdot x_n^k) \\ x_3^{k+1} = b_3 - (C_{31} \cdot x_1^{k+1} + C_{32} \cdot x_2^{k+1} + 0 \cdot x_3^k + \dots + C_{3n} \cdot x_n^k) \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_n - (C_{n1} \cdot x_1^{k+1} + C_{n2} \cdot x_2^{k+1} + C_{n3} \cdot x_3^{k+1} + \dots + 0 \cdot x_n^k) \end{cases}$$

Метод Зейделя сходится при условии  $\|C\|^\infty < 1$  (как и МПИ). Сходится немного быстрее, но в целом скорость сходимости, как и в МПИ, не хуже геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \|C\|$ .

Можно также использовать формулу из следствия 2.7.

## Метод Зейделя (ДЗ)

Оригинальная матрица

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \quad \varepsilon = 10^{-4} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)\text{я строка} \div 5} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)\text{я строка} \div -10} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)\text{я строка} \div 5} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array} \right)$$

$$x^{(k+1)} = B - C \cdot x^k$$

Шаг 1:

$$\begin{cases} x_1^1 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0) = 0,6 \\ x_2^1 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,6 - 0,3 \cdot 0) = 0,4 - 0,12 = 0,28 \\ x_3^1 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,28) = 2,4 - 0,12 - 0,112 = 2,168 \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix}$$

Шаг 2:

$$\begin{cases} x_1^2 = 0,6 - (-0,2 \cdot 0,28 + 0,4 \cdot 2,168) = 0,6 + 0,056 - 0,8672 = -0,2112 \\ x_2^2 = 0,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,3 \cdot 2,168) = 0,4 + 0,04224 + 0,6504 = 1,0926 \\ x_3^2 = 2,4 - (0,2 \cdot (-0,2112) - 0,4 \cdot 1,0926) = 2,4 + 0,04224 - 0,43704 = 2,0052 \end{cases}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 0,28 \\ 2,168 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,168 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix}$$

Шаг 3:

$$\begin{cases} x_1^3 = 0,6 - (-0,2 \cdot 1,0926 + 0,4 \cdot 2,0052) = 0,6 + 0,21852 - 0,80208 \approx 0,0164 \\ x_2^3 = 0,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,3 \cdot 2,0052) = 0,4 - 0,003288 + 0,60156 \approx 0,9983 \\ x_3^3 = 2,4 - (0,2 \cdot 0,0164 - 0,4 \cdot 0,9983) = 2,4 - 0,00328 - 0,30932 \approx 1,9974 \end{cases}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} -0,2112 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 1,0926 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 0,9983 \\ 2,0052 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,0164 \\ 0,9983 \\ 1,9974 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^\infty = \max(0,2 + 0,4; 0,2 + 0,3; 0,2 + 0,4) = \max(0,6; 0,5; 0,6) = 0,6 \\ \|B\|^\infty = \max(0,6; 0,4; 2,4) = 2,4$$

$$N = \left\lceil \frac{\ln \left( \frac{\varepsilon \cdot (1 - \|C\|^\infty)}{\|B\|^\infty} \right)}{\ln(\|C\|^\infty)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln \frac{10^{-4}(1 - 0,6)}{2,4}}{\ln 0,6} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln \frac{4}{240000}}{-0,511} \right\rceil = 22$$

## **Оценка трудоемкости решения СЛАУ различными методами:**

Сравним метод Гаусса и МПИ:

$$\text{Гаусс} - \tau = Cn^3$$

$$\text{МПИ} - \tau = Cn^2N$$

Если  $N$  велико, а  $n$  – мало, то метод Гаусса выгоднее.

Если же  $N$  – не очень большое, а  $n$  – велико (размер матрицы большой, но сходится довольно быстро), тогда выгоднее итерационный метод.

### **Замечание:**

на практике метод Гаусса очень плохо работает с матрицами больших размеров, а итерационные методы одинаково успешно справляются с матрицами любых размеров. С другой стороны метод Гаусса работает всегда, а МПИ работает при условии  $\|C\| < 1$ , т.е. применим не для всех СЛАУ.

**Вывод:** для решения некоторых СЛАУ выгоднее использовать точные методы (метод Гаусса), а для некоторых – приближенные.

## Тема 3. Методы решения нелинейных уравнений (НУ) и систем нелинейных уравнений (СНУ).

### **П.1 НУ и СНУ.**

Системы, где количество уравнений совпадает с количеством неизвестных (как и в СЛАУ).

#### **П.2 Простейшие методы решения НУ – метод простого деления (МПД) или метод биссекций.**

Алгоритм МПД:

1. Находим интервал  $a, b$  на котором функция меняет свой знак:

$f(a)*f(b)<0$  (имеет хотя бы один корень)

2. Делим интервал пополам точкой  $C$ :

$$C = \frac{a+b}{2}$$

3. Из 2-х полученных интервалов ( $[a,c]$  и  $[c,b]$ ) выбираем тот, на котором происходит смена знака:

$f(a)*f(c)<0$  -  $[a,c]$

$f(c)*f(b)<0$  -  $[c,b]$

4. Повторить пункт 2, если не достигли наперед заданной точности  $|b-a| > \varepsilon$ , иначе, если  $\frac{|b-a|}{2} \leq \varepsilon$ , то идем на пункт 5.

5. В качестве точного решения берём  $\frac{|b+a|}{2}$  (середина последнего интервала). От этой точки  $x$

расстояние до любой другой точки отрезка не превосходит  $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ .

**Замечание:**

В предложенном выше методе мы контролируем точность по  $x$  ( $|x - x_{точное}| < \varepsilon$ ). Иногда, вместо этого требуется достигнуть заданной точности по  $y$ , т.е.  $|f(x)| < \varepsilon$ , но обычно, под точным понимается точное по  $x$ .

## Метод половинного деления (ДЗ)

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{Начальный интервал: } (1; 2)$$

Находим произведение значений функции в крайних точках:  
 $f(a) \cdot f(b) = (1^2 - 3) \cdot (2^2 - 3) = -2$

### Шаг 1:

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a + b}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5 \quad f(c) = 1,5^2 - 3 = -0,75 \quad \varepsilon = \frac{|b - a|}{2} = 0,5$$

В новых интервалах:

$$(1; 1,5) \quad f(a) \cdot f(c) = -2 \cdot (-0,75) = 1,5 \\ (1,5; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = (-0,75) \cdot 1 = -0,75 < 0, \text{ выбираем этот интервал}$$

### Шаг 2:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале  $(1,5; 2)$

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a + b}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75 \quad f(c) = 1,75^2 - 3 = 0,0625 \quad \varepsilon = \frac{|b - a|}{2} = 0,25$$

В новых интервалах:

$$(1,5; 1,75) \quad f(a) \cdot f(c) = (-0,75) \cdot 0,0625 = -0,046875 < 0, \text{ выбираем этот интервал} \\ (1,75; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = 0,0625 \cdot 1 = 0,0625$$

### Шаг 3:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале  $(1,5; 1,75)$

Находим середину интервала:

$$c = \frac{a + b}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625 \quad f(c) = 1,625^2 - 3 = -0,36 \quad \varepsilon = \frac{|b - a|}{2} = 0,125$$

В новых интервалах:

$$(1,5; 1,625) \quad f(a) \cdot f(c) = (-0,75) \cdot (-0,36) = 0,27 \\ (1,625; 1,75) \quad f(c) \cdot f(b) = (-0,36) \cdot 0,0625 = -0,0225 < 0, \text{ выбираем этот интервал}$$

### Шаг 4:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале  $(1,625; 1,75)$

Находим середину интервала:

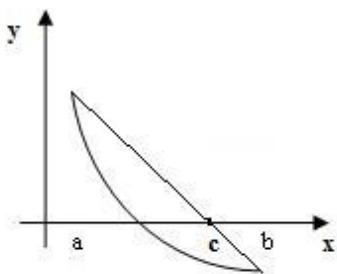
$$c = \frac{1,625 + 1,75}{2} = 1,6875 \quad f(c) = 1,6875^2 - 3 = -0,152 \quad \varepsilon = \frac{|b - a|}{2} = 0,0625$$

В новых интервалах:

$$(1,625; 1,6875) \quad f(a) \cdot f(c) = (-0,36) \cdot (-0,152) = 0,054 \\ (1,6875; 1,75) \quad f(c) \cdot f(b) = (-0,152) \cdot 0,0625 = -0,0095 < 0, \text{ выбираем этот интервал}$$

### П.3.Модификация МПД – Метод Хорд (МХ).

В отличие от МПД в МХ отрезок мы делим не пополам, а на отрезки пропорциональные  $f(a)$  и  $f(b)$ .



т.е. искомая точка С – точка пересечения прямой, проходящей через т. а и б, с Ох.

Уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

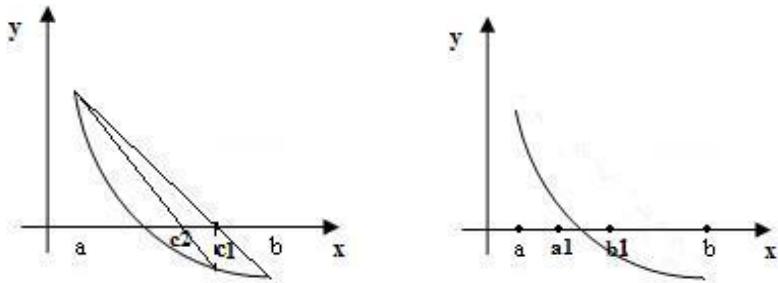
Пересечем эту прямую с Ох:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$(x - a)(f(b) - f(a)) = (b - a)(-f(a))$$

$$x = \frac{(b - a)(-f(a))}{f(b) - f(a)} + a = \frac{(b - a)(-f(a)) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{-bf(a) + af(a) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} = \\ = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (3.1)$$

Из 2-х новых интервалов([a,c] и [c,b]) выбираем тот, на котором происходит смена знака (как и в МПД).



Как мы видим из рисунка, в МПД длина интервала уменьшается вдвое и стремится к нулю, в МХ этого не происходит – длина интервала не стремится к нулю.

Критерий прерывания из МПД в МХ не работает, поэтому берем универсальный критерий прерывания:

Если  $|C_n - C_{n-1}| < \varepsilon$ , то прекращаем вычисления. В качестве приближенного значения берём  $x = C_n$ .

В принципе, универсальный критерий прерывания можно использовать не только при решении МХ, но и при использовании других методов (в МПД, в итерационных методах решения СЛАУ).

Недостаток – мы не можем гарантировать:  $|C_n - C_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow |x_{\text{точное}} - C_n| < \varepsilon$

И поэтому, если есть возможность избежать использование этого критерия прерывания, выгоднее использовать другой. Но, если ничего не остается, применяем универсальный критерий прерывания.

## Метод хорд (ДЗ)

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{Начальный интервал: } (1; 2)$$

В отличие от метода половинного деления, точка  $c$  является не серединой интервала, а вычисляется по формуле

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\varepsilon = c_n - c_{n-1}$$

### Шаг 1:

Вычисляем по формуле значение  $c$  для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)}{1 - (-2)} = \frac{1 + 4}{1 + 2} = 1,666667$$

В интервалах:

$$(1; 1,666667) \quad f(a) \cdot f(c) = 0,444442$$

$$(1,666667; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = -0,222221 < 0, \text{ значит, выбираем этот интервал}$$

### Шаг 2:

Вычисляем по формуле значение  $c$  для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,666667 \cdot 1 - 2 \cdot (-0,222221)}{1 - (-0,222221)} = 1,727273$$

В интервалах:

$$(1,666667; 1,727273) \quad f(a) \cdot f(c) = 0,003673$$

$$(1,727273; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = -0,016528 < 0, \text{ значит, выбираем этот интервал}$$

### Шаг 3:

Вычисляем по формуле значение  $c$  для этого шага:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,727273 \cdot 1 - 2 \cdot (-0,016528)}{1 - (-0,016528)} = 1,731707$$

В интервалах:

$$(1,727273; 1,731707) \quad f(a) \cdot f(c) = 0,000020$$

$$(1,731707; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = -0,001191 < 0, \text{ значит, выбираем этот интервал}$$

### Шаг 4:

Вычисляем по формуле значение  $c$  для этого шага:

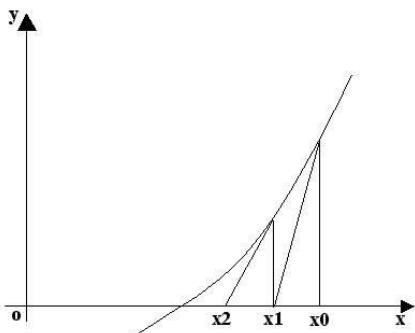
$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,731707 \cdot 1 - 2 \cdot (-0,001191)}{1 - (-0,001191)} = 1,732026$$

В интервалах:

$$(1,731707; 1,732026) \quad f(a) \cdot f(c) = 0,000000102$$

$$(1,732026; 2) \quad f(c) \cdot f(b) = -0,0000854 < 0, \text{ значит, выбираем этот интервал}$$

#### П.4 Метод Ньютона (метод касательных).



Алгоритм МН:

- 1) В качестве начального приближения  $x_0$  берем точку, достаточно близкую к точному решению.
- 2) В этой точке проводим касательную к графику функций до пересечения с Ох – получаем  $x_1$  и т.д.
- 3) Процедура повторяется, пока не будет достигнута заданная точность (универсальный критерий прерывания).

**Формула метода Ньютона:**

уравнение касательной  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , находим точку пересечения с Ох

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.2)$$

### Метод Ньютона (ДЗ)

$$x^2 - 3 = 0 \quad \text{Начальный интервал: } (1; 2)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad f(x) = x^2 - 3; \quad f'(x) = 2x$$

$$\varepsilon = x_n - x_{n+1}$$

В качестве начальной точки  $x_0$  выбираем такую, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции, в нашем случае  $x_0 = 2$

$$x_0 = 2 \\ x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - 0,25 = 1,75$$

Аналогично для последующих  $x$ :

$$x_2 = 1,75 - \frac{1,75^2 - 3}{2 \cdot 1,75} = 1,75 - \frac{3,0625 - 3}{3,5} = 1,75 - 0,017857 = 1,732143 \\ x_3 = 1,732143 - \frac{1,732143^2 - 3}{2 \cdot 1,732143} = 1,732143 - 0,000092 = 1,732051 \\ x_4 = 1,732051 - \frac{1,732051^2 - 3}{2 \cdot 1,732051} = 1,732051 - 0,000000192431 = \\ = 1,7320503333$$

Для сравнения, найдем точное решение данного уравнения

$$\sqrt{3} = 1,7320508075$$

Как видно, приближенное решение совпадает с точным на 6 знаков после запятой.

## П.5 Скорости сходимости МПД, МХ, МН:

### 1) Скорость сходимости МПД:

На каждом шаге длина интервала уменьшается вдвое. Таким образом, через  $k$  шагов достигается следующая точность -  $\frac{|b-a|}{2^{k+1}}$ , решаем неравенство  $\frac{|b-a|}{2^{k+1}} < \varepsilon$

Необходимое число шагов:  $N = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon} \right\rceil$

То есть, МПД сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{1}{2}$  (для добавления одного верного десятичного знака – 3 шага).

### 2) Скорость сходимости МХ:

#### Теорема 3.1:

Если на интервале  $[a,b]$  функция  $f$  – непрерывна и дифференцируема, ее производная на этом интервале имеет постоянный знак, т.е.  $f'$  – либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает на всем интервале, то верна следующая оценка:

$$|x_{\text{точное}} - x^k| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x^k - x^{k-1}| \quad (3.3)$$

где  $x^k$  – решение, найденное на  $k$ -ом шаге,

$$M_1 = \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \quad m_1 = \min_{t \in [a,b]} |f'(t)|$$

#### Следствие 3.2:

Если  $M_1 \leq m_1$ , то если  $|x^{k-1} - x^k| < \varepsilon \Rightarrow |x_{\text{точное}} - x^k| < \varepsilon$  (т.е.  $\frac{M_1 - m_1}{m_1} < 1$ ), т.е. универсальный критерий прерывания работает корректно.

#### Теорема 3.3:

Скорость сходимости в МХ не хуже геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{M_1 - m_1}{m_1}$ , а

именно имеет следующая оценка  $|x^k - x_{\text{точное}}| < \left( \frac{M_1 - m_1}{m_1} \right)^k \cdot \text{const}$

#### Комментарии:

Если  $M_1$  и  $m_1$  очень близки друг к другу, например –  $M_1 < 1.1m_1$ , то тогда  $q = \frac{M_1 - m_1}{m_1} < 0.1$  и

скорость сходимости МХ будет выше, чем скорость сходимости МПД.

Итак, выгодно, чтобы  $M_1$  и  $m_1$  были близки друг к другу, это будет так, если длина интервала будет стремится к нулю, но в МХ это не так, это происходит в МПД, поэтому выгодно комбинировать МХ и МПД.

### 3) Скорость сходимости МН:

#### Теорема 3.4:

Если функция  $f(x)$  дважды непрерывна и дифференцируема на  $[a,b]$  и  $f'$ , и  $f''$  на нем не меняет свои знаки, т.е. монотонно возрастает или убывает и при этом не меняет характера выпуклости. Имеет место неравенство:

$$|x^{k+1} - x_{\text{точное}}| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x^k - x_{\text{точное}}|^2 \quad (3.4)$$

$$M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)| \quad ; \quad m_1 = \min_{t \in [a,b]} |f'(t)|$$

#### Комментарии:

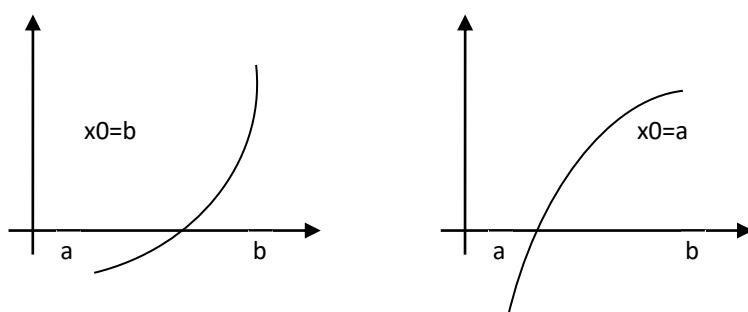
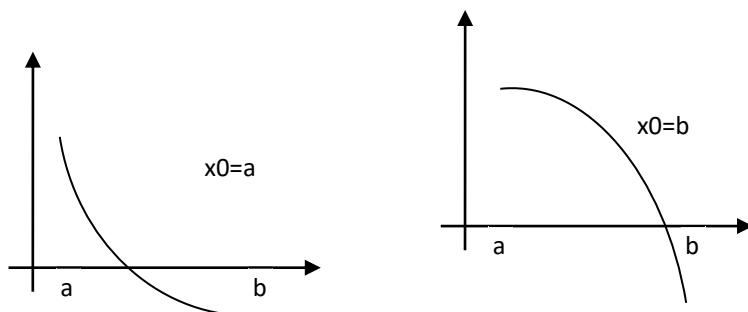
квадрат обеспечивает удваивание числа верных знаков после каждой итерации.

Таким образом, метод Ньютона работает гораздо быстрее, нежели МПД или МХ.

МН имеет гипергеометрическую скорость сходимости.

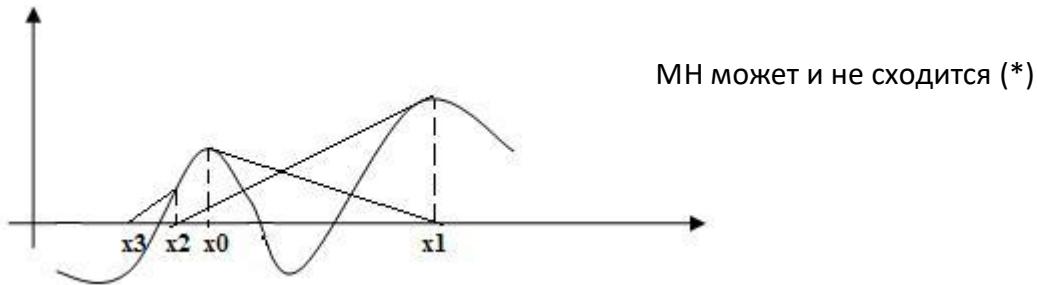
#### **Тонкие места МН:**

1) Какую из 2-х точек интервала  $[a,b]$  выбрать в качестве начального приближения  $x_0$ .



В качестве стартовой точки  $x_0$  выгоднее брать точку, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции.

2) В отличие от МПД и МХ – МН сходится не всегда.



будет сходиться, когда  $x_0$  близко к корню, если  $x_0$  выбрано неудачно (далеко от корня) (\*).

### П.6 Многомерный вариант метода Ньютона:

МПД и МХ применимы только для решения НУ, метод Ньютона может быть легко видоизменен, и его можно применять для решения СНУ.

Рассмотрим СНУ  $n$  на  $n$  ( $n$  – уравнений,  $n$  – неизвестных):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$F(X)=0, \quad X=(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При решении СНУ поступаем таким же образом, как и при решении НУ.

1) Выбираем стартовую точку  $x_0$ , достаточно близкую к корню.

2) В одномерном варианте мы заменили функцию на касательную и приравнивали её к нулю.

Аналогичным образом поступаем и для функции многих переменных, только там заменяем  $f'$  на дифференциал, т.е.:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$F(X) = F(X^0) + \partial F|_{x^0} \cdot (X - X^0) = 0$$

||

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x_0} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}$$

Решаем данное уравнение относительно X:

$$F(X^0) + \partial F|_{x^0} \cdot (X - X^0) = 0$$

$$\downarrow \quad \partial F|_{x^0} \cdot (X - X^0) = -F(X^0)$$

W – матрица частных производных (матрица Якоби)

умножим на матрицу обратную матрице W слева:

$$X - X^0 = -W^{-1}|_{x^0} \cdot F(X^0) \quad (3.5)$$

Окончательный вид формулы многомерного варианта метода Ньютона:

$$X^{k+1} = X^k - \underbrace{W^{-1}|_{x^k} \cdot F(X^k)}_{Y^k} \quad (3.6)$$

**Замечание:**

есть 2 варианта реализации вычисления по формуле (3.6):

а) Явно вычислить обратную матрицу (например, с помощью присоединенной матрицы)

б) Заметим, что вектор  $Y^k$  есть ни что иное, как решение СЛАУ

(3.7)  $W^{-1}|_{x^k} \cdot Y^k = F(X^k)$ , поэтому мы можем не вычислять обратную матрицу, а только решить СЛАУ

(3.7) (например методом Гаусса) и решение этой матрицы подставить в (3.76)  $X^{k+1} = X^k - Y^k$ .

Пример решения СНУ методом Ньютона:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Приводим к виду  $F(X)=0$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}, \text{ в качестве стартовой точки возьмем } X^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Сделаем один шаг по многомерному методу Ньютона:

$$F(X^0) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix} \quad W|_{X^0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad W^{-1}|_{X^0} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 4/8 \\ 7/20 & 4/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = X^0 - W^{-1}|_{X^0}$$

$$F(X^0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 4/8 \\ 7/20 & 4/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{||}{X^1}$$

Затем находим  $X^2$  и т.д., пока не будет достигнута заданная точность:

$$\| X^k - X^{k-1} \| < \varepsilon$$

### Решение СНУ методом Ньютона: через обратную матрицу (ДЗ)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} f'(x)_{1\text{oe уравнение}} & f'(y)_{1\text{oe уравнение}} \\ f'(x)_{2\text{oe уравнение}} & f'(y)_{2\text{oe уравнение}} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \quad x^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Шаг 1:

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad W(x^0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Найдем обратную матрицу:

$$\Delta W = w_{00} * w_{11} - w_{01} * w_{10} \quad \Delta W(x^0) = -8 - 3 = -11$$

$$\begin{matrix} \Delta_{11} = -2 & \Delta_{21} = 3 \\ \Delta_{12} = 1 & \Delta_{22} = 4 \end{matrix} \quad W(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad W^T(x^0) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = \frac{1}{\Delta W} * W^T(x^0) = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix};$$

$$x^1 = x^0 - W^{-1}(x^0) * F(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 1/11 & -4/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/11 \\ 10/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix};$$

Шаг 2:

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} (1,8182)^2 + (0,9091)^3 - 4 \\ \frac{1,8182}{0,9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76/1331 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta W(x^1) = -7,99 - 2,99 = -10,98$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (1,8182) & 3 \cdot (0,9091)^2 \\ \frac{1}{0,9091} & -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \Delta_{11} = -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & \Delta_{21} = 3 \cdot (0,9091)^2 \\ \Delta_{12} = \frac{1}{0,9091} & \Delta_{22} = 2 \cdot (1,8182) \end{matrix}$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & \frac{1}{0,9091} \\ 3 \cdot (0,9091)^2 & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix};$$

$$W^T(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3 \cdot (0,9091)^2 \\ -\frac{1}{0,9091} & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix};$$

$$W^{-1}(x^0) = -\frac{1}{10,98} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1,8182}{(0,9091)^2} & -3 \cdot (0,9091)^2 \\ -\frac{1}{0,9091} & 2 \cdot (1,8182) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2004 & 0,2258 \\ 0,1002 & -0,3311 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 76/1331 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,00587 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,8062 \\ 0,9032 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Решение СНУ методом Ньютона: через Гаусса (ДЗ)

$$\begin{cases} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 - 4 = 0 \\ x/y - 2 = 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon = x^n - x^{n-1}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}; \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} X^{i+1} &= X^i - Y^i \\ Y^i &= \text{СЛАУ} \left( \left( W(x^i) \mid F(x^i) \right) \right) \end{aligned}$$

Шаг 1:

$$F(x^0) = \begin{pmatrix} 2^2 + 1^3 - 4 \\ 2/1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - 4 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1^2 \\ 1/1 & -2/1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y^0 = \text{СЛАУ} \left( \left( W(x^0) \mid F(x^0) \right) \right) = \text{СЛАУ} \left( \left( \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix} \mid \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0,1818 \\ 0,0909 \end{pmatrix} - \text{по методу Гаусса}$$

$$X^1 = X^0 - Y^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1818 \\ 0,0909 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix}$$

Шаг 2:

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} 1,8182^2 + 0,9091^3 - 4 \\ \frac{1,8182}{0,9091} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0572 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W(x^1) = \begin{pmatrix} 3,6364 & 2,4793 \\ 1,0999 & -2,1997 \end{pmatrix};$$

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,00587 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = X^1 - Y^1 = \begin{pmatrix} 1,8182 \\ 0,9091 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,012 \\ 0,00587 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8062 \\ 0,9032 \end{pmatrix}$$

## **П.7 Вариации метода Ньютона:**

### **7.1 Комбинированный метод (сочетание МН и МХ):**

МН быстро сходится, но, увы, не всегда. МХ всегда сходится, но не быстро. Комбинируя оба метода, получаем метод, обладающий достоинствами МХ и МН, а именно – сходится всегда и очень быстро (со скоростью МН).

На каждом шаге КМ проводим и хорду, и касательную, получаем новый интервал.

### **7.2 Видоизмененный метод Ньютона:**

Иногда вычисление производной функции вызывает большие проблемы и чтобы на каждом шаге не вычислять производные, мы вычисляем производную один раз в точке  $X^0$  и используем формулу видоизмененного МН:

$$X^{k+1} = X^k - \frac{F(X^k)}{F'(X^0)} \quad (3.8)$$

Видоизмененный МН сходится хуже, чем обычный МН – со скоростью геометрической прогрессии. Эффекта удваивания числа верных знаков после каждой итерации в нем нет.

## **П.8 Метод итераций, решение НУ и СНУ:**

### **8.1 Одномерный вариант МИ.**

Предполагается, что НУ приведено к виду удобному для итераций.

$$X = U(X) \quad (3.9)$$

Запускаем итерационный процесс (3.10):

$$X^{k+1} = U(X^k) \quad (3.10)$$

#### **Теорема 3.5:**

Если итерационный процесс сходится, то сходится к точному решению НУ (3.9), при условии непрерывности функции  $U$ .

#### **Доказательство:**

в формуле (3.10) переходим к пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} U(X^k)$$

предел заносим внутрь, используя непрерывность функции  $U$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U(X^k) = U \lim_{k \rightarrow \infty} X^k = U(X^k)$$

Рассмотрим пример решения НУ:

$x^2 - 2 = 0$  приводим к виду удобному для итераций, добавим  $x$  с обеих сторон:

$$x = x^2 + x - 2 = U(X)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = u(x^0) = 0 \quad \text{процесс зациклился – не сходится}$$

$$x^2 = -2$$

$$x^3 = 0$$

Попробуем по-другому: перед тем, как прибавить  $x$ , разделим на 2.

$$x = \frac{x^2 + x}{2} + x = U(X)$$

запускаем итерационный процесс для данной функции  $U$ :

$$x^0 = 1 \quad x^4 = -1.453$$

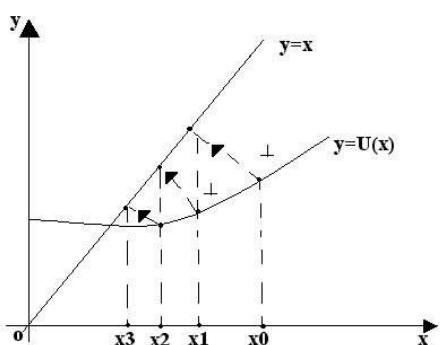
$$x^1 = 1/2 \quad x^5 = -1.397$$

$$x^2 = -3/8 \quad x^6 = -1.421$$

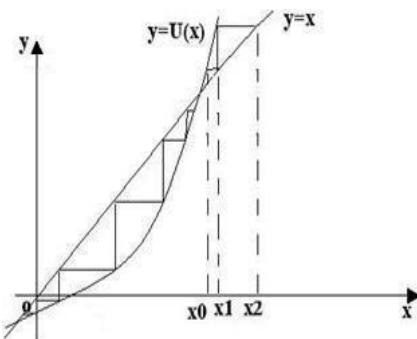
$$x^3 = -1.304$$

данний итерационный процесс сходится к  $-\sqrt{2} = x^\infty$ .

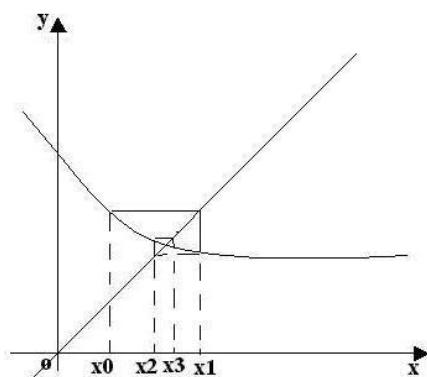
**Графическая интерпретация МИ:**



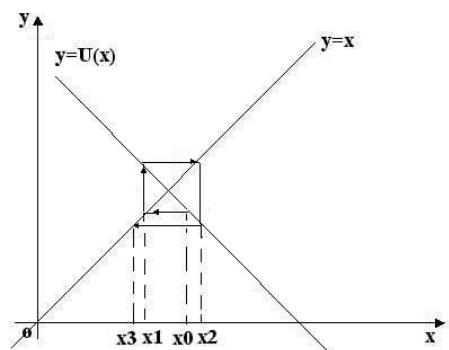
итерационный процесс сходится и сходится монотонно (рис.1)



итерационный процесс расходится монотонно (рис.2)



сходится не монотонно, по спирали (рис.3)



расходится не монотонно, по спирали (рис.4)

Заметим закономерности:

1) Если  $U(X)$  возрастает, то итерационный процесс всегда ведет себя монотонно, при этом он может и сходится и расходится.

Если же  $U(X)$  убывает, то итерационный процесс ведёт себя не монотонно, идет по спирали, при этом он может, как сходиться, так и расходиться.

2) Если  $|U'(X)| < 1$  то итерационный процесс сходится (рис.1 и рис.3).

Если же  $|U'(X)| > 1$ , то итерационный процесс расходится (рис.2 и рис.4)

Метод итераций может применяться не только для решения НУ, но и для решения СНУ. Все происходит точно так же, т.е. СНУ приводим к виду удобному для итераций.

$X$  – вектор,  $U$  – вектор функция.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ U_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$X^{k+1} = U(X^k) \quad (3.10)$$

Если итерационный процесс (3.10) то он сходится к точному решению –  $x^\infty$ .

Наша задача выяснить условия, при которых итерационный процесс сходится.

Ответ на этот вопрос даёт теорема 3.6.

### Теорема 3.6:

Итерационный процесс 3.10 сходится, если отображение  $U$  – сжимающее, т.е. для любых

$$X, Y \quad \|U(X) - U(Y)\| < C \cdot \|X - Y\| \quad (3.11), \text{ где } C = \text{const}, C < 1 \text{ (коэффициент сжатия).}$$

### Доказательство:

$$\begin{aligned} \|X^{i+1} - X^i\| &= \|U(X^i) - U(X^{i-1})\| \leq C \|X^i - X^{i-1}\| = C \cdot (\|U(X^{i-1}) - U(X^{i-2})\|) \leq \\ &\leq C^2 \|X^{i-1} - X^{i-2}\| = \dots \leq C^i \|X^1 - X^0\| \quad (*) \end{aligned}$$

докажем  $\|X^k - X^l\| \rightarrow 0$ , при  $k, l \rightarrow \infty$  тем самым покажем, что итерационный процесс сходится.

$$\begin{aligned} \|X^k - X^l\| &= \|X^k - X^{k-1} + X^{k-1} - X^{k-2} + X^{k-2} - X^{k-3} + \dots + X^{l+1} - X^l\| \leq \|X^k - X^{k-1}\| + \\ &+ \|X^{k-1} - X^{k-2}\| + \dots + \|X^{l+1} - X^l\| \leq C^{k-1} \|X^1 - X^0\| + C^{k-2} \|X^1 - X^0\| + \dots + C^l \|X^1 - X^0\| = \\ &= (\text{по формуле геометрической прогрессии со знаменателем } C) = \frac{(C^k - C^l) \cdot \|X^1 - X^0\|}{C - 1} = \\ &= \frac{(C^l - C^k) \cdot \|X^1 - X^0\|}{1 - C} \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Как нетрудно заметить, мы попутно оценили скорость сходимости МИ. Сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $C$ , где  $C$  – коэффициент сжатия отображения  $U$ . Теперь

наша задача научиться оценивать С – коэффициент сжатия. Ответ на этот важный вопрос даёт теорема (3.7)

### **Теорема 3.7:**

$$C = \max_{x \in D} \|W(X)\|$$

Для области D коэффициент сжатия отображения U – максимум нормы матрицы Якоби – матрицы частных производных отображения U.

$$C = \max_{x \in D} \left\| \left( \frac{\partial(U_i)}{\partial X_i} \right)_{i,j} \right\|$$

**Таблица сравнительных характеристик методов решения НУ и СНУ:**

	МПД	МХ	МН	МИ
Всегда ли работает (сходится)	Да	Да	Нет (сходится, когда $X^0$ близко к $X^\infty$ )	Нет (сходится $ U'  < 1$ или $ W  < 1$ )
Скорость сходимости	Геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/2$ $ X^k - X^\infty  < \frac{b-a}{2^{k+1}}$	Геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1/2$ $ X^k - X^\infty  < const \cdot q^k$	Сходится быстрее других методов после каждой итерации число верных знаков удваивается.	Геометрическая прогрессия со знаменателем C, где $C = \max_{x \in D} \ U'(X)\  = \max_{x \in D} \ W(X)\ $
Можно ли решить СНУ многомерным аналогом	Нет	Нет	Да	Да
Критерий прерывания	$\frac{b-a}{2} < \varepsilon$	Универсальный критерий прерывания $ C^k - C^{k-1}  < \varepsilon$		

### **Замечания:**

1) На самом деле во всех методах имеется конструктивная оценка скорости сходимости, с помощью которой мы можем вычислить N – необходимое количество шагов. Но на практике пользоваться этими оценками очень неудобно (т.к. приходится находить максимум и минимум производных). Поэтому в 3-х последних методах (МХ, МН, МИ) мы применяем универсальный критерий прерывания.

2) Во всех методах, кроме МН, скорость сходимости есть геометрическая прогрессия, поэтому для достижения одного верного десятичного знака нам потребуется  $\log_{1/C} 10$  шагов, где C – знаменатель геометрической прогрессии. МН сходится быстрее, в нем число верных знаков примерно удваивается.

## Тема 4: Интерполяция

### **П.1 Постановка задачи интерполяции, общий подход к её решению:**

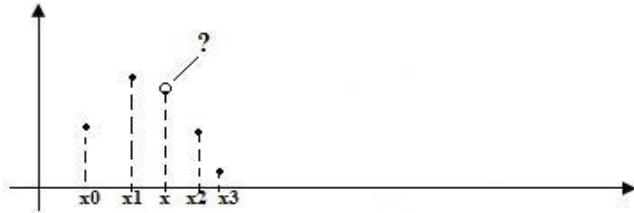
Пусть имеются точки  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  ( $n+1$  точка), в которых нам известны значения функции  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

*Задачи интерполяции:* научиться вычислять значение функции в любой наперед заданной точке.

Комментарии: интерполяция иногда делится на два вида:

- 1)  $x \in [x_0, x_n]$  - собственная интерполяция.
- 2)  $x \notin [x_0, x_n]$  - экстраполяция.

Геометрическая интерпретация:



**Общая идея интерполяции:**

Заменяем неизвестную нам функцию  $f$ , на некоторую интерполирующую в узлах  $x_i$ ,

$g(x_i)$  (т.е.  $g(x_i) = f(x_i) = y_i$ ), которая легко вычисляется, т.е. функция  $g$  должна обладать двумя свойствами:

1.  $g(x_i) = f(x_i) = y_i$
2.  $g$  – легко вычисляется в любой наперед заданной точке  $x$ .

Для этого поступаем следующим образом:

Фиксируем класс функций  $N$ , среди которых будем подбирать искомую функцию  $g$ . При этом класс  $N$  должен быть достаточно большим, чтобы  $g$  нашлась, но с другой стороны – достаточно маленьким, чтобы  $g$  была бы там единственной.

В зависимости от класса  $N$  интерполируемых функций будем говорить об интерполяции:

- а) полиномами
- б) сплайнами
- в) тригонометрическими функциями

### **П.2 Интерполяция многочленами.**

#### **2.1 Формула Лагранжа, интерполяционный многочлен:**

**Теорема 4.1:**

Для любых  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  и  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  существует единственный многочлен  $p \in P_n$  (т.е. многочлен  $p$  в степени  $\leq n$ ) такой, что  $p(x_i) = y_i$ ,  $i = \overline{0, n}$

Доказательство:

Докажем сначала единственность многочлена  $p$ . Предположим, что существует два интерполирующих многочлена  $p_1$  и  $p_2$ . Имеем  $P_1(x_i)=y_i$

$P_2(x_i) = \overline{y_j}$ , где  $i = \overline{0, n}$ . Рассмотрим многочлен  $h=P_1-P_2$ , очевидно его степень не выше  $n$ , с другой стороны он имеет как минимум  $(n+1)$  корней. Как известно из алгебры, у ненулевого многочлена степени  $n$  имеет не более  $n$  корней, а наш многочлен  $h$  имеет  $(n+1)$  корней, следовательно, он тождественно равен 0.  $h \equiv 0$  и  $P_1=P_2$ . Докажем теперь существование многочлена  $p$ : рассмотрим для этого следующий набор многочленов

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i q_i(x_j) \quad (4.2a)$$

$$\text{где } q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (4.2b)$$

Заметим, что все  $q_i$  многочлены степени  $n$ , следовательно,  $P_n(x)$  будет многочлен степени не выше  $n$ . Докажем, что  $p_n(x)$  искомый, т.е.  $p_n(x_i)=y_i$  для этого подсчитаем  $q_i$  в точках  $x_i$

$$q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} \quad (*)$$

Так как один из сомножителей в числителе занулятся. Учитывая (\*) приходим к выводу

$p_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i q_i(x_j) = 0 + 1 \cdot y_j + 0 \dots + 0 = y_j$ , т.е. для данного многочлена (4.2) выполняется свойство

интерполяции. Осталось заметить, что степень многочлена из формулы (4.2) не выше  $n$ .

### Частные случаи интерполяционного многочлена Лагранжа:

$n=1$  (интерполируем по двум точкам)

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$n=2$  (интерполируем по трем точкам)

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$n=3$  (интерполируем по четырем точкам)

$$p_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

### Замечание:

Интерполяционный многочлен из формулы (4.2) называют интерполяционным многочленом Лагранжа. Вообще говоря, интерполяционный многочлен единственен, как доказано в теореме 4.1, но вариантов для вычисления этого многочлена (формул) существует много. Все они выдадут в одной точке один и тот же результат, но вариантов для вычисления будет много. Каждый из этих вариантов (формул интерполяционного многочлена) имеет свои достоинства и недостатки.

## Формула Лангранжа (ДЗ)

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

Найти  $y$  для  $x = 2.56$

Т.к. имеем 4 узла интерполяции, то найти  $P_3(x)$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(2.56) = 1 \frac{(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1.4142 \frac{(2.56-1)(2.56-3)(2.56-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \\ + 1.7321 \frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 2 \frac{(2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$P_3(2.56) = -0.0591 + 0.6989 + 1.0895 - 0.1281 = 1.6012$$

Теперь посчитаем погрешности усечения, округления и реальную:

$$M_4 = \max \left| (\sqrt{x})'''' \right| = \max \left| \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)''' \right| = \max \left| \left( \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \right)'' \right| = \max \left| \left( \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \right)' \right| = \max \left| \left( \frac{-15}{16\sqrt{x^7}} \right) \right| = \frac{15}{16}$$

$$\epsilon_{yceq} \leq \frac{M_4}{4!} \cdot ((2.56-1)(2.56-2)(2.56-3)(2.56-4)) = \frac{M_4}{4!} \cdot 0.5535 = 0.0216$$

$$\epsilon_{realnoe} = \epsilon_{okpye} + \epsilon_{yceq} = 5 \cdot 10^{-5} + 0.0216 = 0.02165$$

$$\epsilon_{okpye} = 5 \cdot 10^{-5}$$

Рассмотрим следующий вариант вычисления интерполяционного многочлена.

## 2.2 Схема Эйткена:

### Теорема 3.2:

если (1)  $P_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x)$  - многочлен, интерполирующий функцию  $f$  в точках  $x_0 \dots x_{n-1}$  (степени не выше  $n-1$ ), а (2)  $P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x)$  - многочлен, интерполирующий функцию в точках  $x_1 \dots x_n$  (степени не выше  $n-1$ ), то многочлен  $P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x)$  - многочлен, интерполирующий функцию в точках  $x_0 \dots x_n$  (степени не выше  $n$ ) может быть вычислена по формуле:

$$P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x) = \frac{P_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x)(x - x_n) - P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x)(x - x_0)}{x_0 - x_n} \quad (4.3)$$

### Доказательство:

Заметим, что многочлен  $P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x)$  имеет степень не выше  $n$ , так как каждый из многочленов (1) и (2) имел степень не больше чем  $(n-1)$ , мы домножали на многочлен первой степени.

Осталось проверить, что данный многочлен в узлах интерполяции задает значения  $y_i$ .  
 $P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$

Рассмотрим три возможности:

1. Проверим, что свойства интерполяции выполняются и в крайних точках  $x_0$  и  $x_n$ :

$$a) P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_0) = \frac{P_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_0)(x_0 - x_n) - P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_0)(x_0 - x_0)}{x_0 - x_n} = \frac{y_0(x_0 - x_n) - P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_0) * 0}{x_0 - x_n} = y_0$$

$$b) P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_n) = \frac{P_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_n)(x_n - x_n) - P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_n)(x_n - x_0)}{x_0 - x_n} = y_n$$

2. Проверим, что (4.3)-интерполирующий, если  $i$  – не крайние точки:

$$P_{x_0, x_1 \dots x_n}(x_i) = \frac{P_{x_0, x_1 \dots x_{n-1}}(x_i)(x_i - x_n) - P_{x_1, x_2 \dots x_n}(x_i)(x_i - x_0)}{x_0 - x_n} = \frac{y_i((x_i - x_n) - (x_i - x_0))}{x_0 - x_n} = y_i$$

### Замечание:

В теореме 4.2 приведем другой способ вычисления интерполяционного многочлена, существование и единственность которого были доказаны в теореме 4.1. В теореме 4.1 была формула Лагранжа, в теореме 4.2 схема Эйткена.

Обобщим формулу из теоремы 4.2:

$$P_{x_k, x_1 \dots x_l}(x) = \frac{P_{x_k, x_1 \dots x_{l-1}}(x)(x - x_l) - P_{x_{k+1}, x_2 \dots x_l}(x)(x - x_k)}{x_k - x_l} \quad (4.4)$$

На основании (4.4) и очевидного наблюдения  $P_{x_i}(x) = y_i$  (т.к. мы должны подобрать многочлен 0-ой степени значение которого в т.  $x_i = y_i$ ), приходим к следующей картине для вычисления интерполяционного многочлена:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 = P_{x_0}(x) & \nearrow & P_{x_0, x_1}(x) & \nearrow & P_{x_0, x_1, x_2}(x) & \nearrow & P_{x_0, x_1, x_2, x_3}(x) \\ y_1 = P_{x_1}(x) & \searrow & P_{x_1, x_2}(x) & \searrow & P_{x_1, x_2, x_3}(x) & \searrow & \\ y_2 = P_{x_2}(x) & \nearrow & P_{x_2, x_3}(x) & \nearrow & & & \\ y_3 = P_{x_3}(x) & \searrow & & & & & \end{array} \quad (4.5)$$

(4.5) – схема Эйткена вычисления интерполяционного многочлена, все слияния производятся по формуле (4.4).

## Схема Эйткена (ДЗ)

x	y
1	1.0000
2	1.4142
3	1.7321
4	2.0000

**Найти у для x = 2.56**

$$\begin{array}{ll}
 y_0 = P_{x_0}(x) & P_{x_0 x_1}(x) \\
 y_1 = P_{x_1}(x) & P_{x_1 x_2}(x) \\
 y_2 = P_{x_2}(x) & P_{x_2 x_3}(x) \\
 y_3 = P_{x_3}(x) & P_{x_0 x_1 x_2 x_3}(x)
 \end{array}$$

$$P_{x_0 x_1} = \frac{P_{x_0}(x-x_1) - P_{x_1}(x-x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{1 \cdot (2.56-2) - 1.4142 \cdot (2.56-1)}{1-2} = 1.6462$$

$$P_{x_1 x_2} = \frac{P_{x_1}(x-x_2) - P_{x_2}(x-x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{1.4142 \cdot (2.56-3) - 1.7321 \cdot (2.56-2)}{2-3} = 1.5922$$

$$P_{x_2 x_3} = \frac{P_{x_2}(x-x_3) - P_{x_3}(x-x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{1.7321 \cdot (2.56-4) - 2 \cdot (2.56-3)}{3-4} = 1.6142$$

$$P_{x_0 x_1 x_2} = \frac{P_{x_0 x_1}(x-x_2) - P_{x_1 x_2}(x-x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{1.6462 \cdot (2.56-3) - 1.5922 \cdot (2.56-1)}{1-3} = 1.604$$

$$P_{x_1 x_2 x_3} = \frac{P_{x_1 x_2}(x-x_3) - P_{x_2 x_3}(x-x_1)}{x_1 - x_3} = \frac{1.5922 \cdot (2.56-4) - 1.6142 \cdot (2.56-2)}{2-4} = 1.5984$$

$$P_{x_0 x_1 x_2 x_3} = \frac{P_{x_0 x_1 x_2}(x-x_3) - P_{x_1 x_2 x_3}(x-x_0)}{x_0 - x_3} = \frac{1.604 \cdot (2.56-4) - 1.5984 \cdot (2.56-1)}{1-4} = 1.6011$$

$$y_0 = 1.0000$$

$$y_1 = 1.4142$$

$$y_2 = 1.7321$$

$$y_3 = 2.0000$$

$$P_{x_0 x_1}(x) = 1.6462$$

$$P_{x_1 x_2}(x) = 1.5922$$

$$P_{x_2 x_3}(x) = 1.6142$$

$$P_{x_0 x_1 x_2}(x) = 1.604$$

$$P_{x_1 x_2 x_3}(x) = 1.5984$$

$$P_{x_0 x_1 x_2 x_3}(x) = 1.6011$$

Оценим трудоёмкость вычисления интерполяционного многочлена по формуле Лагранжа и по схеме Эйткена:

1) Формула Лагранжа:

$(n+1)$  слагаемых, в каждом  $2n$  умножений +1 деление +  $2n$  (+/-).

Итого  $\tau \approx 2n^2(\text{умножений}) + 2n^2(+/-) + n(\text{делений})$

2) Схема Эйткена:

Слияний на первом этапе –  $(n-1)$ , на втором  $(n-2)$ , ..., итого  $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$

В каждом действии  $4(+/-) + 2(*) + 1(/)$  таким образом,  $\frac{n^2}{2}$  действий.

$\tau \approx n^2(\text{умножений}) + 2n^2(+/-) + \frac{n^2}{2}(\text{делений}) \approx 3.5n^2$

С одной стороны, в формуле Лагранжа количество операций немного больше, но в схеме Эйткена на порядок больше деления.

1. Главное достоинство схемы Эйткена состоит в том, что вычисления по этой схеме можно оборвать в любой момент, при этом мы получим многочлен, который интерполирует функцию не во всех точках, а лишь в некоторых, но его значение будет близко к И.М. В формуле Лагранжа прерывать вычисления раньше времени нельзя.

2. Схема Эйткена более устойчива к вычислительным погрешностям.

Поэтому можно прибавлять по одному узлу интерполяции слева и справа, пока не достигнем заданной точности (универсальный критерий прерывания).

### 2.3 Погрешности интерполяционного многочлена:

При интерполировании возникает два типа погрешностей:

1. погрешность усечения (возникает из-за замены функции на интерполирующий многочлен);

2. погрешность округления (возникает из-за того, что значения интерполируемой функции  $f$  в узлах интерполяции известны не точно, а приближенно, с некоторой погрешностью  $\eta$ )

Обычно возникает из-за того, что значения функции в точках  $x_i$  – округляются.

**Замечание:** если мы округляем до 4-х знаков, то погрешность  $5 \cdot 10^{-5}$ .

#### Теорема 4.3(оценка $\varepsilon_{\text{усеч.}}$ при интерполировании многочлена):

$\varepsilon_{\text{усеч.}}$  с учетом знака для интерполирующего многочлена (остаточный член И.М.)  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ ,

может быть вычислен по формуле  $r_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , где  $f(x)$  - точное

значение,  $P_n(x)$  - приближенное значение,  $f^{(n+1)}$  -  $(n+1)$  производная, С некоторая точка  $\in [(x_0, x_n), x]$  - наименьший интервал, который содержит все узлы интерполяции.

Функция  $f$  должна быть  $(n+1)$  раз непрерывно дифференцируема.

Доказательство:

Рассмотрим  $\Pi(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$  со старшим коэффициентом равным 1.

Введем функцию  $U(x) = r_n(x) - k\Pi(x)$ , где  $k$  некоторая const подобранная специальным образом, для этого фиксируем точку  $\bar{x}$ , не совпадающую ни с одним узлом интерполяции

$$k = \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})}, \quad \text{то есть подбираем } k \text{ так, чтобы } U(\bar{x}) = 0$$

$$U(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} \Pi(x)$$

$$U(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) - k * 0 = 0 \quad i = \overline{0, n}$$

$$U(\bar{x}) = r_n(\bar{x}) - \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} \Pi(\bar{x}) = 0$$

Следовательно, функция  $U$  на интервале  $[x_0, x_n, x]$  обращается в 0, как минимум  $(n+2)$  раза. Тогда, ее производная  $U'$  обращается в 0, как минимум  $(n+1)$  раз.  $U''$  как минимум  $n$  раз. Следовательно,  $U^{(n+1)}$  обращается на этом интервале хотя бы один раз в 0, т.е. существует  $C \in [(x_0, x_n), \bar{x}]$

$$U^{(n+1)}(C) = 0$$

$$U^{(n+1)}(C) = (f(C) - P_n(C))^{n+1} - k(\Pi(\bar{x}))^{n+1} = f^{(n+1)}(C) - \underbrace{P_n(c)^{n+1}}_{0 \text{ т.к. } (n+1) \text{ производная равна } 0} - k(n+1)! = 0$$

$k(n+1)!$  - т.к. этот многочлен степени  $(n+1)$

$$f^{(n+1)}(C) = \frac{r_n(\bar{x})}{\Pi(\bar{x})} (n+1)!$$

$$r_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} \Pi(\bar{x})$$

Заменим  $\bar{x}$  на  $x$  и получим формулу.

**Следствие 4.4:**

$$\varepsilon_{yceu.} = |r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \quad (4.7)$$

$$\text{где } M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

**Замечание:**

(4.7) – удобна тем, что в ней нет т.с – местоположение которой мы не знаем.

Пример:

Вычисление интерполяционного многочлена и оценка  $\varepsilon_{yce}$  в узлах

$x_0=100, x_1=121, x_2=144, y_0=10, y_1=11, y_2=12$ .

Найдем  $\sqrt{115}$ , используя интерполяцию по трем точкам.

$$P_2(115) = 10 \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} + 12 \frac{(115-121)(115-100)}{(144-100)(144-121)} = 10.7228$$

$$\varepsilon_{\text{реальное}} = 1 \cdot 10^{-3}$$

Оценим  $\varepsilon_{yce}$ :  $\varepsilon_{yce} \leq \frac{M_3}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 2 * 10^{-3}$

$$f''' = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M_3 = \max \left| \frac{3}{8} x^{-5/2} \right| = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

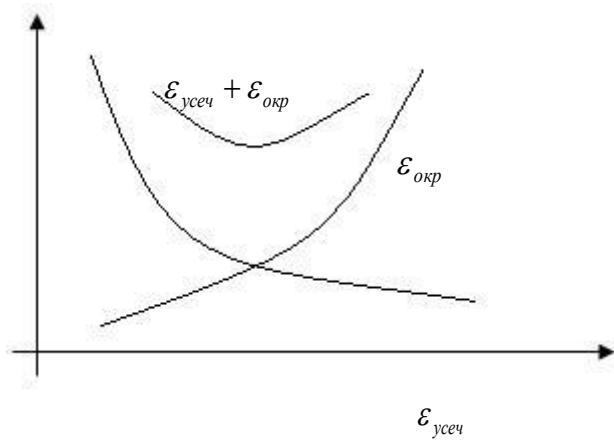
$\varepsilon_{okp}=0$ , т.к. значения функции в узлах интерполяции были известны точно.

$$\varepsilon_{\text{реальное}} = 10^{-3} \leq \varepsilon_{yce} + \varepsilon_{okp} = 2 * 10^{-3}$$

**Замечание:**

Заметим, что с увеличением числа узлов интерполяции  $\varepsilon_{okp}$  быстро стремится к  $\infty$ , а

$$\varepsilon_{yce} \rightarrow 0$$



Необходимо, чтобы  $\varepsilon_{yce} + \varepsilon_{okp}$  были бы малы. Для этого число узлов интерполяции должно быть не слишком маленьким (т.к.  $\varepsilon_{yce}$  будет велико), но и не слишком большим (т.к.  $\varepsilon_{okp}$  будет велико).

Если же узлов много, то возьмем ближайшие значения, а остальные откинем.

## 2.4. Конечные разности.

### Формулы Ньютона интерполяционного многочлена.

Конечной разностью функции  $y=f(x)$  называется функция  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ , где  $h$  – фиксированный шаг. Конечные разности иногда называются конечными разностями первого порядка.

Функция обозначается:  $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{(k-1)} f(x))$

Принимаем  $\Delta^{(0)} f(x) = f(x)$

Считаем:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) + f(x)) =$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta(\Delta f(x))) = \Delta(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)) =$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(x+n-k)h$$

#### Таблица конечных разностей:

Если функция  $f(x)$  задана своими значениями  $y_i$  в равноотстоящих узлах  $x_i$  с шагом  $h$ ,  $x_i=x_0+ih$ ,  $i = \overline{0, n}$ , то конечные разности в точках  $x_i$  удобно вычислять с помощью таблицы конечных разностей.

Рассмотрим функцию  $f(x)=2x^3-2x^2+3x-1$

$$x_i=x_0+ih=0+i*1, i = \overline{0, 5}$$

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	-1	3	8	12	0	0
1	2	11	20	12	0	
2	13	31	32	12		
3	44	63	44			
4	107	107				
5	214					

### Наблюдения:

- Каждый раз длина столбца уменьшается на 1, при  $n=5$  доходим до  $\Delta^5$ .
- Конечная разность похожа на производную, в нашем случае – многочлен третьей степени, поэтому  $\Delta^3$  не нулевые (следующие - нулевые)

### Теорема 4.4 (о связи между конечной разностью и производной):

Если функция  $f$ ,  $n$  – раз непрерывно дифференцируема, то

$$\Delta^n f(x) = h^n f''(\xi), \text{ где точка } \xi \in [x_0, x_n]$$

### Комментарии:

При  $n=1$  это в чистом виде теорема Лагранжа из курса мат. анализа.

Удобно записывать формулу интерполяционного многочлена через конечные разности (1-ую и 2-ую формулы Ньютона интерполяционного многочлена)

### **Первая формула Ньютона ИМ:**

$$(4.9) P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\dots(q-n+1), \text{ где } q = \frac{x-x_0}{h}$$

### **Вторая формула Ньютона ИМ:**

$$(4.10) P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q+1)\dots(q+n-1), \text{ где } q = \frac{x-x_n}{h}$$

$y$  – убывает, т.к. столбец уменьшается.

### Комментарии:

- В 1-ой формуле Ньютона  $\Delta$  берем из нулевой строки таблицы конечных разностей.
- Во 2-ой формуле Ньютона  $\Delta$  берем из нижней побочной диагонали в таблице конечных разностей.
- И 1-ая и 2-ая формулы Ньютона могут быть оборваны, если мы возьмем в 1-ой формуле Ньютона не  $(n+1)$  слагаемых, а  $(k+1)$  (до  $\Delta^k$ ), то мы получим интерполяционный многочлен, который интерполирует функцию в  $(k+1)$  крайних точках (от  $x_0$  до  $x_k$ ).

Аналогичным образом и со 2-ой формулой Ньютона (т.е. возьмем не  $(n+1)$  слагаемых, а  $(k+1)$  (до  $\Delta^k$ )), то мы получим интерполяционный многочлен, который интерполирует функцию в  $(k+1)$  крайних точках (от  $x_n$  до  $x_{n-k}$ ).

- И в том и в другом случае мы можем оборвать вычисления раньше времени, используя универсальный критерий прерывания.
- При добавлении 1-го нового слагаемого, в 1-ой формуле Ньютона мы добавляем один новый узел интерполяции, двигаясь слева направо, а во 2-ой формуле Ньютона – справа налево.

## Формула Ньютона (ДЗ)

x	y
1	1.0000
1.5	1.2247
2	1.4142
2.5	1.5811

Найти у для x = 1.69

Составим таблицу конечных разностей:

x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	0.2247	-0.0352	0.0126
1.5	1.2247	0.1895	-0.0226	
2	1.4142	0.1669		
2.5	1.5811			

**Первая формула Ньютона:**

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)\dots(q-n+1), \text{ где } q = \frac{x-x_0}{h}$$

$$q = \frac{1.69 - 1}{0.5} = 1.38$$

$$\begin{aligned} P_3(1.69) &= 1 + \frac{0.2247}{1!} \cdot 1.38 + \frac{-0.0352}{2!} \cdot 1.38(1.38-1) + \frac{0.0126}{3!} \cdot 1.38(1.38-1)(1.38-2) = \\ &= 1 + 0.310086 - 0.00922944 - 0.00068276 = 1.3002 \end{aligned}$$

**Вторая формула Ньютона:**

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \dots + \frac{\Delta^m y_{n-m}}{m!} q(q+1)\dots(q+m-1), \text{ где } q = \frac{x-x_n}{h}$$

$$q = \frac{1.69 - 2.5}{0.5} = -1.62$$

$$\begin{aligned} P_3(1.69) &= 1.5811 + \frac{0.1669}{1!} \cdot (-1.62) + \frac{-0.0226}{2!} \cdot (-1.62)(-1.62+1) + \frac{0.0126}{3!} \cdot (-1.62)(-1.62+1)(-1.62+2) = \\ &= 1.5811 - 0.270378 - 0.01134972 + 0.00080151 = 1.3002 \end{aligned}$$

Погрешности формул Ньютона ИМ:

Т.к. формула Ньютона один из вариантов вычисления ИМ, то формулы для  $\varepsilon_{y_{\text{сеч}}}$  и  $\varepsilon_{\text{окр}}$  можем взять прежние.

$$\varepsilon_{\text{окр}} \leq 2^{n-1} \eta$$

По теореме 4.3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y_{\text{сеч}}} &= \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_0}{h} = q \\ x - x_0 = hq \\ x - x_1 = h(q-1) \end{array} \right\} = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} hq \cdot h(q-1) \dots h(q-n) = \\ &= \underbrace{\frac{h^{k+1} \cdot f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}}_{\text{по теореме 4.4}} q(q-1) \dots (q-n) = \frac{\Delta^{(n+1)} y_0}{(n+1)!} q(q-1) \dots (q-n) \quad \text{где} \quad q = \frac{x - x_0}{h} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Комментарии:

Как мы видим из формулы (4.11)  $\varepsilon_{y_{\text{сеч}}}$  в формуле Ньютона есть ничто иное как первое отбрасываемое слагаемое. Таким образом, при вычислении по формуле Ньютона, мы постоянно оцениваем  $\varepsilon_{y_{\text{сеч}}}$  и в нужный момент мы можем прервать вычисления.

## 2.5. Центральные формулы для интерполяционного многочлена – формулы Бесселя и Стирлинга.

Формулы Ньютона (4.9), (4.10) – односторонние, а Бесселя и Стирлинга – центральные, т.е. в этих формулах, при добавлении новых слагаемых, узлы интерполяции добавляются справа и слева от точки X, поэтому удобны при практическом вычислении.

В формуле Стирлинга интерполяция проходит по  $(2n+1)$  точке:

$(x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= y_0 + \frac{q}{1!} \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \\ &+ \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots + \\ &+ \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!} \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{2} + \frac{q(q^2 - 1^2) \dots (q^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned}$$

$$\text{где } q = \frac{x - x_0}{h} \quad (4.12)$$

В формуле Бесселя интерполяция проходит по  $(2n+2)$  точкам:

$(x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$

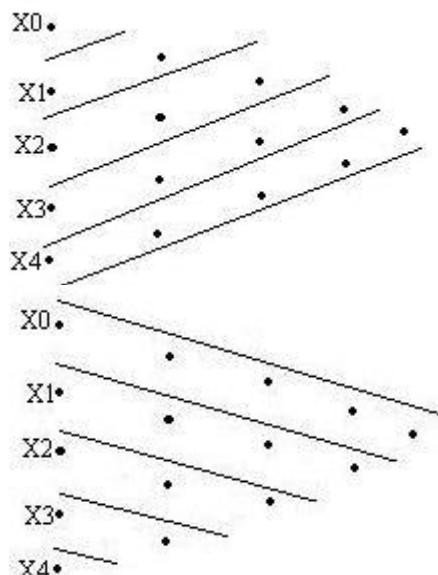
$$\begin{aligned}
 P(x) = & \frac{y_0 + y_1}{2} + p\Delta y_0 + \frac{p^2 - (1/2)^2}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
 & + \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\
 & + \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)(p^2 - (5/2)^2)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2)(p^2 - (5/2)^2)}{7!} \Delta^7 y_{-3} + \\
 & + \dots + \frac{(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2) \dots (p^2 - ((2n-1)/2)^2)}{2n!} \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
 & + \frac{p(p^2 - (1/2)^2)(p^2 - (3/2)^2) \dots (p^2 - ((2n-1)/2)^2)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$P = \frac{(x - (x_0 + x_1)/2)}{h}$$

Комментарии:

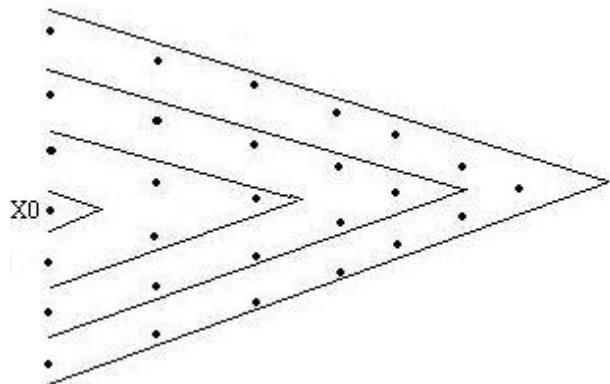
В формулах Бесселя и Стирлинга слагаемые добавляются попарно, при добавлении новой пары, добавляются два новых узла интерполяции: 1 слева и 1 справа, поэтому вычисления по этим формулам можно обрывать раньше времени.

**Сравнительный анализ различных формул вычисления ИМ.**

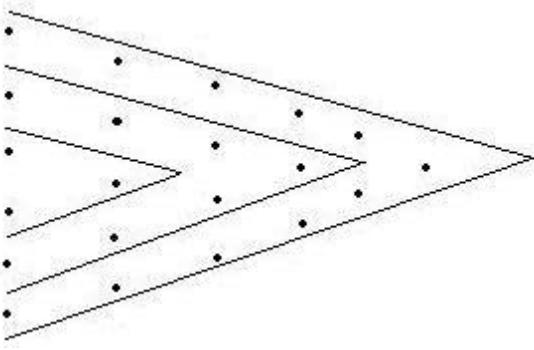


Вторая формула Ньютона добавляется по одному узлу – справа налево.

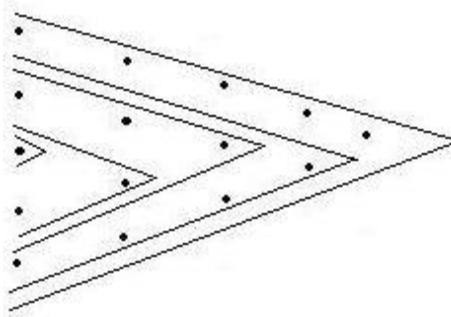
Так происходит интерполяция по 1-й формуле Ньютона, при добавлении слагаемого, добавляется 1 узел интерполяции (слева направо).



Формула Стирлинга.



Формула Бесселя.



Достоинство всех картинок объединяет в себе схема Эйткена – в ней узлы интерполяции мы можем добавлять как угодно.

### П.3 Интерполяция кубическими сплайнами.

#### 3.1. Определение кубического Сплайна.

Кубическим сплайном на сетке  $x_0, x_1, \dots, x_n$  называется функция  $S(x)$ , которая обладает следующими свойствами:

1. на каждом интервале  $[x_{i-1}, x_i]$ , где  $1 \leq i \leq n$ , функция  $S(x)$  является кубическим многочленом (на каждом интервале свой многочлен).
2. на всем интервале  $[x_0, x_n]$   $S(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция
3. на краях интервала вторая производная обращается в ноль (краевое условие).

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

3'. для периодических кубических сплайнов.

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 ; S'(x_0) = S'(x_n) = 0$$

Исследуем вопрос: любую ли функцию можно проинтерполировать кубическим сплайном и всегда ли это можно сделать единственным образом?

Имеем  $n$  участков интерполяции, на каждом – свой кубический многочлен, который задается четырьмя коэффициентами. Итого, имеем  $4n$  коэффициентов, которые нам необходимо найти, для этого нам потребуется столько же уравнений (т.е.  $4n$  уравнений).

Исходя из условий кубического сплайна:

(подсчет уравнений, которых нам дают условия кубического сплайна)

$n$  участков  $[x_{i-1}, x_i]$ , на границах должны выполняться условия интерполяции  $S(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$  ;  $S(x_i) = S_i(x_i) = y_i$  - на каждом участке 2 условия, итого получаем  $2n$  условий.

Вспомним второе условие кубического сплайна, т.е. наша функция дважды непрерывно дифференцируема. Внутри участков это, очевидно, выполняется (т.к.  $S = S_i$  - кубический многочлен). Необходимо проверить непрерывность  $S$ ,  $S'$  и  $S''$  только лишь на границах интервалов, т.е. рассмотрим точку  $x_i$  - в ней стыкаются два интервала:  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $[x_i, x_{i+1}]$

соответственно кубические сплайны:  $S_i$  и  $S_{i+1}$

Предел слева должен быть равен пределу справа для  $S$ ,  $S'$  и  $S''$ , т.е.

$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$  - не пишем т.к. оно уже было посчитано в условии интерполяции.

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$$

+ два условия из пункта 3. Итого, 4n условий.

### 3.2. Свойства кубического Сплайна

#### Теорема 4.5:

Среди всех функций, интерполирующих функцию  $f$  в точках  $x_i$ , где  $i = \overline{0, n}$  именно кубический сплайн обладает наименьшей энергией изгиба, т.е. для него достигается минимум интеграла энергии.

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_n} (y''(x))^2 dx \text{ - интеграл энергии.}$$

#### Следствие 4.6

Из математического анализа известно, что радиус кривизны функции  $y(x)$ :

$$R(x) = \left[ \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right]^{-1} = k(x)^{-1} \quad (k(x) \text{ - кривизна изгиба}). \text{ Как известно из физики, энергия изгиба}$$

гибкой линейки, принявшей очертание графика функций  $y(x)$ , вычисляется по формуле:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_n} \frac{\gamma(x) k^2(x)}{2} dx = C \int_{x_0}^{x_n} k^2(x) dx = C \int_{x_0}^{x_n} \frac{(y'')^2}{(1 + (y')^2)^3} dx \approx C \int_{x_0}^{x_n} (y'')^2 dx$$

$\gamma$  - коэффициент жесткости линейки (предположим  $y' \approx 0$ )

$$\text{Таким образом, энергия изгиба линейки } \approx C \int_{x_0}^{x_n} (y'')^2 dx = I(y).$$

Как мы знаем из физики, любая физическая система, в том числе и линейка, стремится минимизировать свою энергию, следовательно, гибкая линейка, пропущенная через точки  $(x_i, y_i)$   $i = \overline{0, n}$ , (теорема 4.5) примет очертание кубического сплайна. Отсюда и происходит само слово сплайн (spline – рейка, которую используют чертежники).

Очевидно, что кривизна линейки есть функция непрерывная, следовательно,  $S$ ,  $S'$  и  $S''$  непрерывны – это условие 2 из определения кубического сплайна. Также понятно, что на краях кривизна линейки будет нулевая – отсюда берется условие 3.

### 3.3. Формулы для вычисления кубического сплайна.

С одной стороны, мы можем составить  $4n$  уравнений для  $4n$  коэффициента кубического многочлена (см. пункт 3.1).

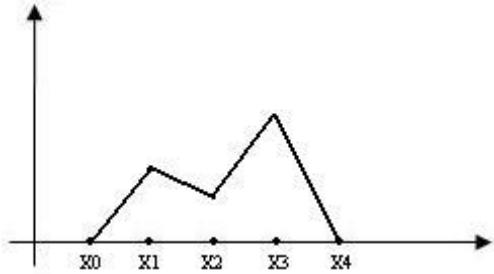
На практике подобный подход не используется, выгоднее идти другим путём (уравнений и неизвестных будет меньше).

#### Другой вариант вычисления кубического сплайна.

Введём следующие моменты:  $S''(x_i) = M_i \quad i = \overline{0, n}$ , с помощью их и будем вычислять кубический сплайн.

$$M_0 = M_n = 0 \text{ из 3-го условия.}$$

Т.к.  $S(x)$  кусочно-кубический многочлен, то  $S''(x)$  – кусочно-линейная функция, которая при этом непрерывна.



Очевидно, что на  $i$ -ом участке  $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$S''_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} M_i = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad h_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.14)$$

$h_i$  - длина  $i$ -ого интервала.

Чтобы получить  $S_i(x)$  проинтегрируем  $S''_i(x)$  дважды:

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + C_1 \\ S''_i(x) &= M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Осталось только подставить константы интегрирования -  $C_1$  и  $C_2$ . Для этого необходимо вспомнить условия интерполяции на краях участков.

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = -y_{i-1} \\ S_i(x_i) = y_i \end{cases}$$

Подставив эти условия в формулу для  $S_i$ , получим 2 уравнения для констант  $C_1$  и  $C_2$ , решив систему, подставим в формулу и получим:

$$S_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left( y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left( y_i - \frac{M_ih_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (4.15)$$

Теперь для расчета кубического сплайна необходимо найти неизвестные моменты  $M_i$ .

Мы уже знаем  $M_0 = M_n = 0$ , остается найти моменты  $M_1, \dots, M_{n-1}$ . Для этого необходимо ограничения 1,2,3, налагаемые на кубический сплайн.

Условие интерполяции использовали при нахождении констант  $C_1$  и  $C_2$  (оно же непрерывность  $S$ ).

Непрерывность  $S''$  мы тоже уже использовали, когда писали формулы для кусочно-линейной функции  $S''$ . Остается использовать условие непрерывности  $S'$ , т.е.

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) \quad i = \overline{1, n-1} \quad (4.16)$$

Получим  $(n-1)$  недостающее уравнение для  $(n-1)$  неизвестного (для  $M_1, \dots, M_{n-1}$ ).

Как нетрудно убедиться, эти условия превращаются в СЛАУ (4.17) для нахождения  $M$ :

$$CM=d \quad (4.17), \text{ где}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{- столбец неизвестных.}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} \end{pmatrix} \quad \text{- квадратная трёх диагональная матрица.}$$

Элементы матрицы  $C$  вычисляются по формуле:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{h_i + h_{i+1}}{3} & i = j \\ \frac{h_i + 1}{6} & j = i + 1 \\ \frac{h_i}{6} & j = i - 1 \\ 0 & |i - j| > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{главная диагональ}) \\ (\text{верхняя диагональ}) \\ (\text{нижняя диагональ}) \end{array}$$

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad \text{- вектор правых частей.}$$

Таким образом, для вычисления кубического сплайна необходимо:

1. Составить СЛАУ по формуле (4.17) (размером  $(n-1) \times (n-1)$ )
2. Решить эту СЛАУ, находя моменты  $M_1, \dots, M_{n-1}$ , добавить к ним  $M_0 = M_n = 0$ .
3. Найдя моменты  $M_i$ , подставить их в формулу (4.15) для нахождения кубического сплайна (перед этим нужно найти  $i$ -номер интервала, в котором лежит точка  $x$ , т.е.  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ).

#### **Замечание:**

При интерполяции кубическими сплайнами сетка не обязана быть равностоющей, как требуется,

например, в формуле Ньютона И.М., но весьма желательно  $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq 4$

## Интерполяция кубическими сплайнами(ДЗ)

x	y
1	2
3	5
5	2
7	-1
9	2

Найти S(2) и S(4)

$$CM = D$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$S_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left( y_{i-1} - \frac{M_{i-1} * h_i^2}{6} \right) \left( \frac{x_i - x}{h_i} \right) + \left( y_i - \frac{M_i * h_i^2}{6} \right) \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right)$$

Точка x = 2 лежит в промежутке [1;3] → i = 1

Точка x = 4 лежит в промежутке [3;5] → i = 2

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \mathbf{0} \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} \\ \mathbf{0} & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}M_1 & \frac{1}{3}M_2 & \mathbf{0} \\ \frac{1}{3}M_1 & \frac{4}{3}M_2 & \frac{1}{3}M_3 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{3}M_2 & \frac{4}{3}M_3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{2-5}{2} - \frac{5-2}{2} \\ \frac{-1-2}{2} - \frac{2-5}{2} \\ \frac{2+1}{2} - \frac{-1-2}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$CM = D \rightarrow \text{решим полученную систему методом Гаусса} \rightarrow M = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \mathbf{0} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Теперь подставляем значения и считаем

$$S_1(2) = 0 \frac{(3-2)^3}{12} + \frac{9}{4} \frac{(2-1)^3}{12} + \left( 2 - \frac{0*4}{6} \right) \left( \frac{3-2}{2} \right) + \left( 5 - \frac{-\frac{9}{4}*4}{6} \right) \left( \frac{2-1}{2} \right) = 4.0625$$

$$S_2(4) = -\frac{9}{4} \frac{(5-4)^3}{12} + 0 \frac{(4-3)^3}{12} + \left( 5 - \frac{-\frac{9}{4}*4}{6} \right) \left( \frac{5-4}{2} \right) + \left( 2 - \frac{0*4}{6} \right) \left( \frac{4-3}{2} \right) = 4.0625$$

## П.4 Тригонометрическая интерполяция.

1. В тригонометрической интерполяции в отличие от других видов интерполяции, интерполяция происходит не по  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а по  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  точкам, т.к. интерполирование происходит периодически и  $y_0 = y_n$ , т.е. период  $T = x_n - x_0$

2.  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  - равноотстоящие узлы интерполяции.

### 4.1. Формулы Т.И.:

$$y(x) = \frac{1}{n} \sum_{-\frac{n}{2} < j \leq \frac{n}{2}} A_j \exp(2\pi ij \frac{x - x_0}{nh}) \quad (4.18a)$$

$$\text{где } nh = T, \quad A_j = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \exp(-2\pi \frac{kj}{n}) \quad (4.18b)$$

#### Замечание:

В этих формулах  $i$  – мнимая единица и для работы по (4.18a), (4.18b) нужна формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

При Т.И. интерполирующая функция  $y(x)$ :

- 1) периодична с периодом  $nh = T$ .
- 2) в узлах интерполяции  $y(x_i) = y_i$ , т.е. если  $y(x_i)$  – вещественное, то в узлах мнимая часть  $y$  – нулевая.
- 3) в промежуточных точках  $y$  может принимать комплексные значения, но  $\operatorname{Im} y$  – будет не велика и её можно отбросить.
- 4) если число узлов интерполяции нечётное, т.е.  $n=2m+1$ , и все  $y_i$  – вещественные, то функция  $y$  полученная по (4.18a), (4.18b) сама по себе будет вещественна.

Коэффициенты  $A_j$  – комплексные, а  $y_i$  – вещественные функции и в этом случае вычисления можно осуществлять не с комплексными, а с вещественными числами по формуле (4.19).

$$(4.19a) \quad y(x) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(2\pi j \frac{x - x_0}{nh}) + \sum_{j=1}^m a_j \sin(2\pi j \frac{x - x_0}{nh})$$

$$(4.19b) \quad b_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k; \quad b_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cos(2\pi \frac{kj}{n}); \quad a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \sin(2\pi \frac{kj}{n}) \quad j = \overline{0, n-1}$$

## Тригонометрическая интерполяция (ДЗ)

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Найти  $y(1.5)$

$$n = 4$$

$$T = 4$$

$$h = 1$$

$$y(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\frac{-n}{2} < j \leq \frac{n}{2}} A_j \cdot \exp(2\pi ij \frac{x-x_0}{nh})$$

$$A_j = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \exp(-2\pi i \frac{kj}{n}), \text{ где } nh = T$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

**Решение:**

$$y(1.5) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{-2 < j \leq 2} A_j \cdot \exp(2\pi ij \frac{1.5-0}{4}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{-2 < j \leq 2} A_j \cdot \exp(\frac{3}{4}\pi ij)$$

$$A_0 = 0 + 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})) + 4(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) + 9(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2})) = i - 4 - 9i = -8i - 4$$

$$A_0 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$$

$$A_1 = 0 + 1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) + 4(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) + 9(\cos(-\frac{3\pi}{2}) + i \sin(-\frac{3\pi}{2})) = -i - 4 + 9i = 8i - 4$$

$$A_2 = 0 + 1(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) + 4(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) + 9(\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)) = -1 + 4 - 9 = -6$$

$$A_{-1} \exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right) = (-8i - 4)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}$$

$$A_0 \exp(0) = A_0 = 14$$

$$A_1 \exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) = (8i - 4)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}$$

$$A_2 \exp\left(\frac{3}{2}\pi i\right) = -6(0 - i) = 6i$$

$$y(1.5) = \frac{1}{4}(6\sqrt{2}i - 2\sqrt{2} + 14 - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6i) = \frac{1}{4}(14 - 4\sqrt{2} + 6i) = \frac{8.3431 + 6i}{4} = 2.0858 + 1.5i$$

## 4.2. Быстрое преобразование Фурье.

Определение: преобразование набора значений функции ( $y_0 \dots y_{n-1}$ ) в набор коэффициентов ( $A_0 \dots A_{n-1}$ ) (используя (4.18б)), участвующих в разложении Фурье, называется прямым преобразованием Фурье (ППФ), а обратным преобразованием Фурье (ОПФ) – преобразование массива  $A_j$  в  $y_k$  (по (4.18б)).

Если осуществлять эти вычисления непосредственно по (4.18а, б), то трудоёмкость -  $\tau = n^2$  (т.к. имеем  $n$  коэффициентов, в каждом из которых  $n$  слагаемых).

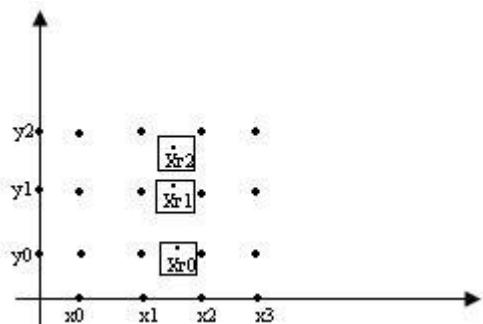
Эти же вычисления можно делать по более быстрым формулам – быстрое преобразование Фурье. Трудоёмкость по этим формулам существенно меньше: не  $n^2$ , а  $n \log_2 n$ .

## 4.3. Многомерная интерполяция.

Пусть мы имеем функцию нескольких переменных, значения которой нам известны в некоторых точках (при задаче интерполирования нам надо знать значение функции  $f$  в наперед заданной точке).

Решим простой вариант двумерной интерполяции  $f(x,y)$ :

$(x_k, y_l)$  - узлы образующие прямоугольную сетку.



- 1)Интерполируем функцию по  $x$  (при фиксированном  $y$ ) и получим значение функции в точке  $x$ .  
При фиксированном  $x$ , 1 раз интерполируем по  $y$  (по 3-м  $x_\Gamma$ ) и получим значение в точке  $x_{\Gamma 2}$ .
- 2) $x$  и  $y$  можно поменять местами и сделать интерполяцию по  $y$  и 1 раз по  $x$ .

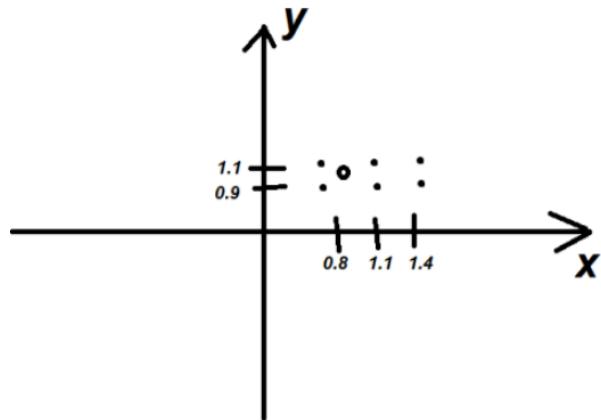
Значения, полученные этими способами весьма близки к точным значениям функции, близки друг к другу, но могут и различаться.

## Многомерная интерполяция (ДЗ)

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

$$f(1, 1) = ?$$

x	y
0,8	0,9
1,1	1,1
1,4	



Вычислим все возможные значения функции:

$$y_0 = 0,9 \begin{cases} f(x_0, y_0) = \frac{1}{0,8+0,9} = 0,5882 \\ f(x_1, y_0) = \frac{1}{1,1+0,9} = 0,5 \\ f(x_2, y_0) = \frac{1}{1,4+0,9} = 0,4348 \end{cases} \quad y_1 = 1,1 \begin{cases} f(x_0, y_1) = 0,5263 \\ f(x_1, y_1) = 0,45 \\ f(x_2, y_1) = 0,4 \end{cases}$$

Способ 1: Сначала интерполируем функцию по x. Затем при фиксированном x - 1 раз интерполируем по y

$$P_2(x, y_i) = f(x_0, y_i) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1, y_i) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2, y_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x, y_0) = 0,5882 \frac{(1-1,1)(1-1,4)}{(0,8-1,1)(0,8-1,4)} + 0,5 \frac{(1-0,8)(1-1,4)}{(1,1-0,8)(1,1-1,4)} + 0,4348 \frac{(1-0,8)(1-1,1)}{(1,4-0,8)(1,4-1,1)} = 0,52684$$

$$P_2(x, y_1) = 0,47251$$

$$P_1(x, y) = f(x, y_0) \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + f(x, y_1) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = 0,52684 \frac{1 - 1,1}{0,9 - 1,1} + 0,47251 \frac{1 - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,4997$$

Способ 2: Сначала интерполируем функцию по y. Затем при фиксированном y - 1 раз интерполируем по x

$$P_1(x_i, y) = f(x_i, y_0) \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + f(x_i, y_1) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

$$P_1(x_0, y) = 0,5882 \frac{1-1,1}{0,9-1,1} + 0,5263 \frac{1-0,9}{1,1-0,9} = 0,55725$$

$$P_1(x_1, y) = 0,475$$

$$P_1(x_2, y) = 0,4174$$

$$P_2(x, y) = f(x_0, y) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1, y) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2, y) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0,55725 \frac{(1-1,1)(1-1,4)}{(0,8-1,1)(0,8-1,4)} + 0,475 \frac{(1-0,8)(1-1,4)}{(1,1-0,8)(1,1-1,4)} + 0,4174 \frac{(1-0,8)(1-1,1)}{(1,4-0,8)(1,4-1,1)} = 0,4997$$

## П.5. Применение интерполяции.

### 5.1. Обратная интерполяция.

С помощью обратной интерполяции можно решать нелинейные уравнения.

Решим  $f(x)=a$ :

Идея обратной интерполяции: пусть  $f$  вблизи корня уравнения  $f(x)=a$  – монотонно возрастает или убывает, тогда у неё существует обратная функция.

$g(x)$  – обратная функция, значение которой в точке  $a$  нас не интересует.

$$f(x)=a ; \quad g = f^{-1}$$

и будет искомым корнем уравнения  $f(x)=a$ ,  $f^{-1}(x) = X$

Возьмём интервал  $[x_0, x_n]$ , на котором  $f$  – монотонна и имеет обратную функцию, следовательно, мы знаем  $y_i = f(x_i)$

Применим интерполяцию для вычисления значений обратной функции  $g$  и найдем значение интерполирующей функции в точке  $a$ . Это и будет, приблизительно, искомый корень.

$$x=g(a)$$

При этом при интерполяции  $x$  и  $y$  меняются местами, так как мы интерполируем не  $f$  а  $g$ .

Пример:

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17

$$f(x)=10$$

Решение находим интерполируя обратную функцию по 4-м точкам (например, по формуле Лагранжа).

$$\begin{aligned} g(10) &= x_0 \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)} + x_1 \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} + \\ &+ x_2 \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} + x_3 \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} = 10 \frac{(10-7)(10-11)(10-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)} + \\ &+ 15 \frac{(10-3)(10-11)(10-17)}{(7-3)(7-11)(7)} + 17 \frac{(10-3)(10-7)(10-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)} + 20 \frac{(10-3)(10-7)(10-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)} = 16,64 \end{aligned}$$

## Обратная интерполяция (ДЗ)

$$x^2 - 2x - 9 = 0 \quad (x = -3, -2, -1)$$

Интерполируем обратную функцию по трём точкам  
(по инвертированной формуле Лангранжа)

$$P_2(y) = x_0 \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y - y_0)(y - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y - y_0)(y - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

Найдём все значения функции  $f(x)$ :

x	y
3	6
-2	-1
-1	-6

$$f(x) = x^2 - 2x - 9$$

Т.к. нужно найти корень, то:  $y = 0$

$$P_2(0) = -3 \frac{(0+1)(0+6)}{(6+1)(6+6)} - 2 \frac{(0-6)(0+6)}{(-1-6)(-1+6)} - 1 \frac{(0-6)(0-1)}{(-6-6)(-6+1)} = -2,1714$$

## 5.2. Численное дифференцирование функций.

### 5.2.1. Постановка задачи численного дифференцирования.

В точках  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ -известны значения функции  $y_i = f(x_i)$ . Задача численного дифференцирования – найти значение производной  $f'$  или  $f''$  или ...  $f^{(n)}$  в любой наперед заданной точке  $x$ . Поступаем также как при интерполяции.

#### Общие идеи:

Заменяем неизвестную функцию  $f$  на интерполирующий многочлен  $P$ .

$f' \rightarrow P'$ ;  $f'' \rightarrow P''$ , а её производная И.М. Продифференцировав формулы для И.М. Схема Эйткена сразу отпадает, т.к. это схема, а не формула.

Формула Лагранжа громоздка, следовательно, будем дифференцировать формулу Ньютона И.М.

### 5.2.2. Формулы численного дифференцирования.

Рассмотрим 1-ю формулу Ньютона И.М.:

$$y(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} q(q-1)(q-2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} q(q-1)(q-2)(q-3) + \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)(q-2)\dots(q-n), \quad \text{где} \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$

дифференцируем по  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} * \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} (0 + \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} (2q-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} (3q^2 - 6q + 2) + \frac{\Delta^4 y_0}{12} 2q^3 - 9q^2 + 11q - 3 + \dots) \approx \\ \approx y'(x), \quad (5.1)$$

Формулу в (5.1) дифференцируем по  $y$ :

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} (0 + 0 + \Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{\Delta^4 y_0}{12} (6q^2 - 18q + 11) + \dots) \quad [5.2]$$

В формулах (5.1) и (5.2) решение можно обрывать раньше. При этом, если в этих формулах до  $k$ , то мы получим производную И.М., которая интерполирует функцию не во всех  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , а только  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$  точках.

Пусть в (5.1) и (5.2)  $x = x_0$ , т.е.  $q=0$ , получаем:

$$(5.3) \quad y'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots)$$

$$(5.4) \quad y''(x_0) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{1}{12} \Delta^4 y_0 - \dots)$$

На практике удобнее дифференцировать не односторонние формулы (1,2 формулы Ньютона), а центральные (формулу Стирлинга), так как узлы интерполяции располагаются симметрично относительно начальной точки  $x_0$ . Возьмём в формуле Стирлинга первые три слагаемых (интерполяция по трём точкам  $x_{-1}, x_0, x_1$ ), получим:

$$p_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} q + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} q^2$$

$$p'_2(x) = \frac{1}{h} \left( 0 + \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q \Delta^2 y_{-1} \right)$$

подставим  $x = x_0$ , т.е.  $q = 0$  получим:

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{(y_0 - y_{-1}) + (y_1 - y_0)}{2} \right) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad (5.5)$$

Если же в формуле Стирлинга взять не 3, а 5 первых слагаемых (интерполяция по 5-ти точкам  $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ ) продифференцируем и подставим  $x = x_0$ , то получим:

$$y'(x_0) = \frac{1}{12h} (y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2) \quad (5.6)$$

Если взять 3 первых слагаемых и продифференцировать дважды по  $q$ , то получим:

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y_{-1} = \left( \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} \right) \quad (5.7)$$

## Численное дифференцирование функции (ДЗ)

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad h = 0,2$$

x	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y	1,6667	1,25	1	0,8333	0,7143

$$(5.5): y'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \frac{0,8333 - 1,25}{0,4} = -1,0418$$

$$(5.6): y'(x_0) = \frac{y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h} = \frac{1,6667 - 10 + 6,6664 - 0,7143}{2,4} = -0,9922$$

$$(5.7): y''(x_0) = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} = \frac{1,25 - 2 + 0,8333}{0,04} = 2,08025$$

### 5.2.3 Оценка погрешностей численного дифференцирования.

Также как и при интерполяции в численном дифференцировании возникают две погрешности:  $\varepsilon_{yceq}$  и  $\varepsilon_{okp}$ .

Погрешность усечения – из-за замены функции на её интерполирующий многочлен и ее производной на производную от интерполяционного многочлена.

Погрешность округления – из-за того, что значение функции в узлах  $x_i$  известны не точно, а с некоторой погрешностью  $\eta$ . Оценим погрешность усечения.

#### Теорема 5.1:

Погрешность усечения в формуле (5.3) численного дифференцирования (при суммировании  $k$ -слагаемых) имеет следующую оценку:

$$\varepsilon_{yceq} = (-1)^k \frac{h^k}{k+1} f^{(k+1)}(C)$$

где  $C \in [x_0, x_k]$ .

#### Доказательство:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yceq} &= f'(x_0) - p'_k(x_0) = (f(x) - p_k(x))|_{x=x_0} = \left\{ \text{берём формулу из теоремы 4.3} \right\} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} (f^{(k+2)}(C) \cdot C'(x) \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) + f^{(k+1)}(C) \cdot 1 \cdot (x - x_1) \dots (x - x_k) + \\ &+ f^{(k+1)}(C) \cdot (x - x_0) \cdot 1 \cdot (x - x_2) \dots (x - x_k))|_{x=x_0} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} (0 + f^{(k+1)}(C) \cdot 1 \cdot (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_k) + 0 + \dots + 0) = \{x - x_0 = qh\} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(C) (-h)(-2h)(-3h) \dots (-kh) = \frac{(-1)^k f^{(k+1)}(C)}{k+1} h^k \quad (5.8) \end{aligned}$$

#### Замечания:

При доказательстве теоремы был использован тот факт, что  $C=C(x)$  и  $C'(x)$  – существует. Это будет так, если функция  $f$  была достаточно гладкой.

Из-за того, что  $C'(x)$  мы вообще никак не можем оценить, погрешность усечения мы можем находить только в узлах интерполяции, с тем, чтобы 1-ое слагаемое, где присутствует  $C'(x)$ , занулилось.

На практике формулу (5.8) мы заменяем на формулу (5.9) (оценка сверху для  $\varepsilon_{yceq}$ )

$$\varepsilon_{yceq} = \frac{M_{k+1}}{(k+1)} h^k \quad (5.9)$$

где  $M_{k+1} = \max_{x \in (x_0, x_k)} |f^{(k+1)}(x)|$

Вспомним, что конечная разность очень похожа на производную ( $\Delta^k y \approx y^k h^k$ ).

Тогда (5.9) можно заменить на (5.10):

$$\varepsilon_{yceq} \approx \frac{\Delta^{(k+1)} y_0}{(k+1)h}$$

Для формул (5.5), (5.6) и (5.7)  $\varepsilon_{yceq}$  можно вывести таким же образом, как и в теореме 5.1, получаем:

$$\text{для (5.5)} \rightarrow \varepsilon_{yceu} \leq \frac{1}{6} h^2 M_3$$

$$\text{для (5.6)} \rightarrow \varepsilon_{yceu} \leq \frac{1}{30} h^4 M_5$$

$$\text{для (5.7)} \rightarrow \varepsilon_{yceu} \leq \frac{1}{12} h^2 M_4$$

$$\text{где } M_3 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f^{(3)}(x)|, \quad M_5 = \max_{x \in [x_{-2}, x_2]} |f^{(5)}(x)|, \quad M_4 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f^{(3)}(x)|$$

**Оценим  $\varepsilon_{okp}$  для центральных формул.**

Рассмотрим формулу (5.5)

$$y'(x) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}, \quad y_1 \leq \eta, y_{-1} \leq \eta \Rightarrow (y_1 - y_{-1}) \leq 2\eta \text{ таким образом } \varepsilon_{okp}: \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \leq \frac{2\eta}{2h} = \frac{\eta}{h}$$

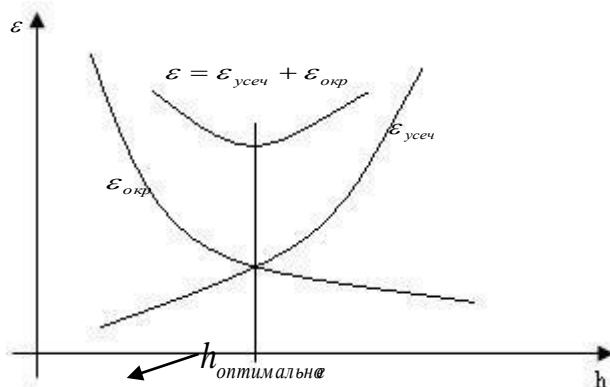
Аналогично:

$$\text{для (5.6)} \rightarrow \varepsilon_{okp} \leq \frac{18\eta}{2h} = \frac{3\eta}{h}$$

$$\text{для (5.7)} \rightarrow \varepsilon_{okp} \leq \frac{4\eta}{h^2}$$

Заметим, что во всех формулах при  $h \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_{yceu} \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_{okp} \rightarrow \infty$  и при  $h \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_{yceu} \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_{okp} \rightarrow 0$

Поэтому имеем следующую картину:



(там, где достигается  $\min(\varepsilon_{yceu} + \varepsilon_{okp})$ )

**Таблица для погрешностей центральных формул:**

	$\varepsilon_{yceu}$	$\varepsilon_{okp}$	$h_{optimal}$	$\varepsilon_{min}$
4.6	$1/6h^2 M_3$	$\eta/h$	$\sqrt[3]{3\eta/M_3}$	$\sqrt[3]{9\eta^2 M_3/2}$
4.7	$1/30h^4 M_5$	$3\eta/2h$	$\sqrt[5]{45\eta/4M_5}$	$15/8\sqrt[5]{4\eta^4 M_5/45}$
4.8	$1/12h^2 M_4$	$4\eta/h^2$	$\sqrt[4]{48\eta/M_4}$	$2/\sqrt[4]{3}\sqrt{M_4 h}$

## П.6. Численное интегрирование.

### 6.1. Общая идея, решение.

Постановка задачи: в узлах  $x_i$  заданы значения функции  $y_i = f(x_i)$   $i = \overline{0, n}$ . Необходимо найти значение  $\int_a^b f(x)dx$  для любых  $a, b$ .

Основная идея численного интегрирования: заменить функцию  $f(x)$  на интерполирующую ее функцию, которую мы и будем интегрировать.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx = \left\{ \text{используя формулу Лагранжа И.М.} \right\} = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^n y_i q_i(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{x_0}^{x_n} q_i(x)dx = \sum_{i=0}^n y_i A_i \quad , \text{ где } A_i \text{ не зависит от исходной функции } f, \text{ а зависит от узлов интерполяции } x_i \end{aligned}$$

Вычислим  $A_i$ :

$$\begin{aligned} A_i^n &= \int_{x_0}^{x_n} q_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{замена} \\ \text{переменных} \\ q = \frac{x - x_0}{h}; dx = dqh \\ x = qh + x_0 \end{array} \right\} = \int_0^n \frac{qh(q-1)h(q-2)h \dots (q-(i-1))h(q-(i+1))h \dots (q-n)h}{ih(i-1)h \dots 2h \cdot h(-h)(-2h) \dots (n-i)} hdq = \\ &= \int_0^n \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-(i-1))(q-(i+1)) \dots (q-n)}{i!(n-i)!} (-1)^{n-i} hdq = \frac{(-1)^{n-i} h}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{q-i} dq = \\ &= (b-a)H_i^n, \quad \text{где } H_i^n = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n} \int_0^n \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{q-i} dq \quad (5.11a) \end{aligned}$$

**Замечания:**

Замена  $A_i^n$  на  $H_i^n$  была сделана с той целью, чтобы коэффициенты Ч.И. не зависели от  $h$ , а зависели от  $n$  и  $i$ .

### 6.2. Частные случаи, формулы Ньютона - Котеса.

Итак, формула Ч.И. принимает следующий вид:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n y_i H_i^n \quad (5.11b)$$

где  $H_i^n$  вычисляется по формуле (5.11a).

Выпишем частные случаи (5.11а):

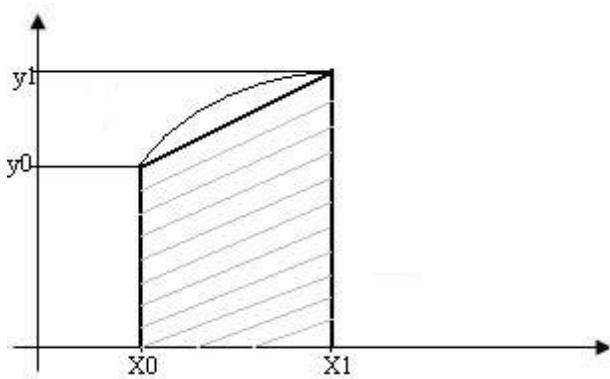
n=1

$$H_{0_1}^1 = \frac{(-1)^{1-0}}{0!(1-0)!*1} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-0} dq = \frac{1}{2}$$

$$H_1^1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1!*0!*1} \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1} dq = \frac{1}{2}$$

Таким образом, при n=1, формула Ньютона - Котеса следующий вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = (x_1 - x_0) \left( \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_1 \right) \quad (5.12) - \text{формула трапеций Ч.И. (выражение из правой части площадь трапеции):}$$



Вычислим коэффициенты Н.-К. n=2:

$$H_{0_1}^2 = \frac{(-1)^2}{0!(2-0)!2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-0} dq = \int_0^2 (g^2 - 3g + 2) dg = \frac{1}{4} \left[ \frac{g^3}{3} - \frac{3}{4} g^2 + 2g \right] \Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

$$H_1^2 = \frac{(-1)^1}{1!*1!*2} \int_0^2 \frac{g(g-1)(g-2)}{g-1} dg = -\frac{1}{2} \int_0^2 (g^2 - 2g) dg = -\frac{1}{2} \left[ \frac{g^3}{3} - g^2 \right] \Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$H_2^2 = \frac{(-1)^0}{2!*0!*2} \int_0^2 \frac{g(g-1)(g-2)}{g-2} dg = \frac{1}{4} \int_0^2 (g^2 - g) dg = \frac{1}{4} \left[ \frac{g^3}{3} - \frac{g^2}{2} \right] \Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

Итак, при n=2, формула Ч.И. принимает следующий вид (**формула Симпсона**): Аналогичным образом вычисляем коэффициенты при большем n.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = (x_2 - x_0) \left( \frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right)$$

Аналогичным образом вычисляем коэффициенты при большем n.

Таблица коэффициентов Ньютона - Котеса:

i \ n	1	2	3	4	5	6	7	8
H <sub>0</sub>	½	1/6	1/8	7/90	19/288	41/840	751/17280	989/28350
H <sub>1</sub>	½	2/3	3/8	32/90	75/288	216/840	3577/17280	5888/28350
H <sub>2</sub>		1/6	3/8	12/90	60/288	27/840	1323/17280	-928/28350
H <sub>3</sub>			1/8	32/90	50/288	272/840	2989/17280	10496/28350
H <sub>4</sub>				7/90	75/288	27/840	2989/17280	*/28350
H <sub>5</sub>					19/288	216/840	1323/17280	10496/28350
H <sub>6</sub>						41/840	3577/17280	-928/28350
H <sub>7</sub>							751/17280	*5888/28350
H <sub>8</sub>								989/28350

### 6.3. Погрешности формул численного интегрирования.

При численном интегрировании возникают два типа погрешностей:  $\varepsilon_{yceu}$  и  $\varepsilon_{okp}$

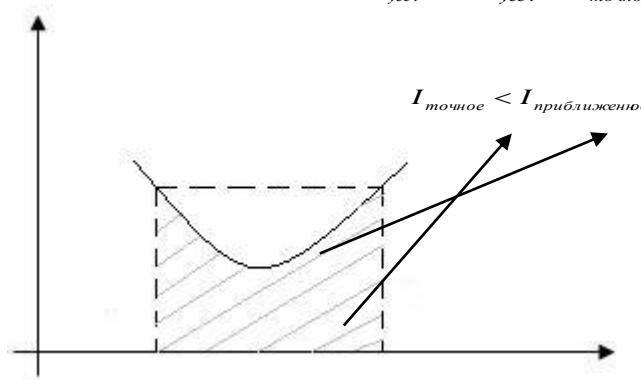
Погрешность усечения возникает из-за замены функции  $f(x)$  на интерполирующий ее многочлен. Погрешность округления возникает из-за того, что значение функции  $y_i$  в узлах интерполяции известно не точно, а приближенно, с некоторой погрешностью  $\eta$ .

#### Теорема 5.2:

$\varepsilon_{yceu}$  (с учётом знака) для формулы трапеции (5.12)

$$(5.15) \quad \varepsilon_{yceu} = -\frac{h^2}{12} f''(C) \quad C \in (x_0, x_2)$$

Комментарии: если  $f'' > 0$ , то  $\varepsilon_{yceu} < 0$  ( $\varepsilon_{yceu} = I_{\text{точное}} - I_{\text{приближенное}}$ )



#### Теорема 5.3:

$\varepsilon_{yceu}$  (с учётом знака) для формулы Симпсона:

$$(5.16) \quad \varepsilon_{yceu} = -\frac{h^5}{90} f'''(C) \quad C \in (x_0, x_2)$$

### Замечания:

Из (5.15) видно – формула трапеций выдаёт правильный результат ( $\varepsilon_{yceu} = 0$ ), если  $f$  – многочлен первой степени (т.к.  $f''(x)=0$ ). Этого следовало ожидать, т.к. при выводении формулы трапеции мы заменяли  $f(x)$  на И.М. её первой степени, который совпадает с  $f(x)$ .

По этой причине логично ожидать, что  $\varepsilon_{yceu}$  для формулы Симпсона будет нулевой, если  $f$  – многочлен второй степени (т.к. в формуле Симпсона происходит интерполяция по трём точкам). Как мы видим из (5.16) формула Симпсона будет верна не только для многочлена третьей степени, т.к.  $f'''(x)=0$ .

## 6.4. Общие формулы трапеции и Симпсона численного интегрирования.

Если требуется найти  $\int f(x) dx$  на большом промежутке, то мы разбиваем этот интервал на множество меньших интервалов, на каждом из которых применяем соответствующую формулу Ньютона – Котеса (трапеции или Симпсона).

### Общая формула трапеций.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{трапеции на каждом} \\ \text{интервале} \end{array} \right\} \approx \\ &\approx (x_1 - x_0) \left[ \frac{y_0 + y_1}{2} \right] + (x_2 - x_1) \left[ \frac{y_1 + y_2}{2} \right] + \dots + (x_n - x_{n-1}) \left[ \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] = \quad (5.17) \\ &= h \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \end{aligned}$$

### Общая формула Симпсона.

Т.к. в формуле Симпсона участвует интеграл от  $x_0$  до  $x_2$ , то, при разбиении исходного участка, мы группируем интервалы попарно и поэтому  $n=2k$  (общее количество участков должно быть чётное).

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} n = 2k - \\ \text{четное} \\ \text{число} \end{array} \right\} \approx \\ &\approx 2h \left[ \frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right] + 2h \left[ \frac{1}{6} y_2 + \frac{2}{3} y_3 + \frac{1}{6} y_4 \right] + \dots + 2h \left[ \frac{1}{6} y_{n-2} + \frac{2}{3} y_{n-1} + \frac{1}{6} y_n \right] = \\ &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \quad (5.18) \end{aligned}$$

### Численное интегрирование: формула трапеций (ДЗ)

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad h = 0,1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = (x_{i+1} - x_i) \left( \frac{1}{2} y_i + \frac{1}{2} y_{i+1} \right)$$

$$\int_1^{1,1} \frac{1}{x} dx = (1,1 - 1) \left( \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0,9091 \right) = 0,0955$$

$$\int_{1,1}^{1,2} \frac{1}{x} dx = (1,2 - 1,1) \left( \frac{1}{2} * 0,9091 + \frac{1}{2} * 0,8333 \right) = 0,0877$$

$$\int_{1,2}^{1,3} \frac{1}{x} dx = 0,0798$$

$$\int_{1,3}^{1,4} \frac{1}{x} dx = 0,0742$$

$$\int_{1,4}^{1,5} \frac{1}{x} dx = 0,0691$$

$$\int_{1,5}^{1,6} \frac{1}{x} dx = 0,0646$$

$$\int_{1,6}^{1,7} \frac{1}{x} dx = 0,0607$$

$$\int_{1,7}^{1,8} \frac{1}{x} dx = 0,0572$$

$$\int_{1,8}^{1,9} \frac{1}{x} dx = 0,0541$$

$$\int_{1,9}^2 \frac{1}{x} dx = 0,0513$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &= 0,0955 + 0,0877 + 0,0798 + 0,0742 + 0,0691 + 0,0646 + 0,0607 + 0,0572 \\ &\quad + 0,0541 + 0,0513 = 0,6939 \end{aligned}$$

## Численное интегрирование: формула Симпсона (ДЗ)

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad h = 0,1$$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7142	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx = (x_{i+2} - x_i) \left( \frac{1}{6} y_i + \frac{2}{3} y_{i+1} + \frac{1}{6} y_{i+2} \right)$$

$$\int_1^{1,2} \frac{1}{x} dx = (1,2 - 1) \left( \frac{1}{6} * 1 + \frac{2}{3} * 0,9091 + \frac{1}{6} * 0,8333 \right) = 0,1823$$

$$\int_{1,2}^{1,4} \frac{1}{x} dx = (1,4 - 1,2) \left( \frac{1}{6} * 0,8333 + \frac{2}{3} * 0,7692 + \frac{1}{6} * 0,7142 \right) = 0,1541$$

$$\int_{1,4}^{1,6} \frac{1}{x} dx = (1,6 - 1,4) \left( \frac{1}{6} * 0,7142 + \frac{2}{3} * 0,6667 + \frac{1}{6} * 0,625 \right) = 0,1335$$

$$\int_{1,6}^{1,8} \frac{1}{x} dx = (1,8 - 1,6) \left( \frac{1}{6} * 0,625 + \frac{2}{3} * 0,5882 + \frac{1}{6} * 0,5556 \right) = 0,1178$$

$$\int_{1,8}^2 \frac{1}{x} dx = (2 - 1,8) \left( \frac{1}{6} * 0,5556 + \frac{2}{3} * 0,5263 + \frac{1}{6} * 0,5 \right) = 0,1054$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 0,1823 + 0,1541 + 0,1335 + 0,1178 + 0,1054 = 0,6931$$

## 6.5. Погрешности общих формул трапеции и Симпсона.

Погрешности усечения общей формулы трапеции и общей формулы Симпсона состоят из суммы погрешностей усечения формулы трапеции и формулы Симпсона на каждом интервале.

$\varepsilon_{yceu}$  для общей формулы трапеции (5.17):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yceu}([x_0, x_n]) &= \varepsilon_{yceu}([x_0, x_1]) + \varepsilon_{yceu}([x_1, x_2]) + \dots + \varepsilon_{yceu}([x_{n-1}, x_n]) = -\frac{h^3}{12} f''(C_1) - \frac{h^3}{12} f''(C_2) + \\ &+ \dots + \frac{h^3}{12} f''(C_n) = -\frac{h^3}{12} (f''(C_1) + \dots + f''(C_n)) = \left\{ \begin{array}{lll} \text{по} & \text{теореме} & o \\ & & \text{среднем} \end{array} \right\} = -\frac{h^2}{12} f''(C)n = \\ &= -(b-a) \frac{h^2}{12} f''(C) = \varepsilon_{yceu} \quad (hn=b-a) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Аналогично выводим  $\varepsilon_{yceu}$  для общей формулы Симпсона (5.18):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yceu}([x_0, x_n]) &= \varepsilon_{yceu}([x_0, x_2]) + \varepsilon_{yceu}([x_2, x_4]) + \dots + \varepsilon_{yceu}([x_{n-2}, x_n]) = -\frac{h^5}{90} f'''(C_1) - \frac{h^5}{90} f'''(C_2) + \\ &+ \dots + \frac{h^5}{90} f'''(C_n) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^k f'''(C_i) = \left\{ \begin{array}{lll} \text{по} & \text{теореме} & o \\ & & \text{среднем} \end{array} \right\} = -\frac{h^5}{90} f'''(C)k = \\ &= -(b-a) \frac{h^4}{90} f'''(C) = \varepsilon_{yceu} \quad (kh=\frac{b-a}{2}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Т.к. местоположение точек С нам не известно, то (5.19) и (5.20) мы заменяем на оценки сверху (2.3 max соответствующих производных).

Для формулы трапеции:

$$(5.21) \quad \varepsilon_{yceu} \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M_2, \text{ где } M_2 = \max |f^{(3)}(t)|$$

$$(5.22) \quad \varepsilon_{yceu} \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M_4, \text{ где } M_4 = \max |f^{(5)}(t)|$$

**Погрешность округления общей формулы трапеции и общей формулы Симпсона:**

Для формулы трапеции:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

$$\left\{ (y_0 + y_n) \rightarrow 2\eta ; \quad \frac{1}{2} (y_0 + y_n) \rightarrow \eta \right\}$$

$$\varepsilon_{okp} = n \cdot \eta \cdot h = (b-a) \cdot \eta$$

Аналогично для формулы Симпсона:

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} \left[ (y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \right] \\ \left\{ (y_0 + y_n) \rightarrow 2\eta ; \quad (y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) \rightarrow (k-1)\eta ; \quad 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) \rightarrow k\eta \right\} \end{aligned}$$

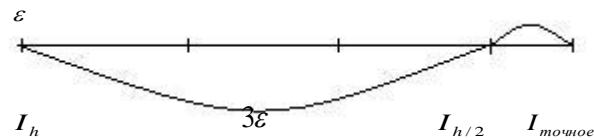
$$\varepsilon_{okp} = (b-a) \cdot \eta$$

## 6.6. Метод двойного пересчёта для оценки погрешности численного интегрирования.

При практических вычислениях часто бывает затруднительно оценить погрешность усечения формулы трапеции или формулы Симпсона из-за того, что надо находить  $\max f''$  или  $f^{(4)}$ . В этом случае используется метод двойного пересчета.

Заметим, что при уменьшении шага в 2 раза,  $\varepsilon_{\text{усл}}$  в формуле трапеций уменьшается в 4 раза, а в формуле Симпсона в 16 раз.

Поэтому поступим следующим образом: вычислим интеграл на  $(a,b)$  дважды – с шагом  $h$  и  $h/2$ .



(рис.1)

если  $|I_h - I_{h/2}| < 3\varepsilon$ , то  $|I_{h/2} - I_{\text{точное}}| < \varepsilon$ . И поэтому в начале точное значение интеграла можно взять  $I_{h/2}$  (оно будет найдено с заданной точностью).

Итак, при вычислении интеграла с помощью двойного пересчёта поступаем следующим образом:  $I_h - I_{h/2} < 3\varepsilon$ ,  $I_{\text{точное}} = I_{h/2}$

если точность не достигнута, то шаг  $h$  уменьшаем в 2 раза, находим  $\int I_h, I_{h/2}$  и так далее, пока точность не будет достигнута.

### Замечание:

Формула трапеции имеет 2-ой порядок точности, т.к. в оценке  $\varepsilon_{\text{усл}}$  для глобальных формул трапеции (имеется в виду глобальный вариант формулы (т.е. применяем формулу на одном и том же интервале))  $h^2$  и поэтому при уменьшении шага в  $k$  раз –  $\varepsilon_{\text{усл}}$  уменьшается в  $k^2$  раз.

Формула Симпсона имеет 4-ый порядок точности, т.к.  $h^4$ .

## 6.7. Метод коррекции в двойном пересчёте.

Как видно из графика (рис.1), при двойном пересчёте в качестве  $I_{\text{точного}}$  выгодно использовать не  $I_{h/2}$ , а:

$$I = I_{h/2} + 1/3(I_{h/2} - I_h) = I_{\text{кор}}$$

После коррекции по этой формуле точность метода возрастает на порядок, т.е. метод трапеции будет не второго, а третьего; а Симпсона – пятого порядка точности.

При использовании формулы Симпсона в методе двойного пересчета вместо  $3\varepsilon$  будет  $15\varepsilon$ .

Если  $|I_h - I_{h/2}| < 15\varepsilon$ , то  $I_{h/2}$  – значение интеграла с погрешностью, не больше  $\varepsilon$ .

## Тема 5: Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений (ДУ и СДУ).

### П.1. Постановка задачи.

Необходимо решить ДУ и СДУ на некотором наперёд заданном интервале с наперёд заданной точностью, либо оценить погрешность, которая найдена решением.

В ЧМ мы ищем только частные решения ДУ.

### П.2. Простейший вариант задачи.

Простейший метод её решения – метод Эйлера.

Имеем ДУ 1-го порядка, а вместе с ним одно начальное условие:

$$\begin{cases} f(x, y, y') = 0 & - \text{ДУ} \\ y(x_0) = y_0 & - \text{начальное условие} \end{cases} \quad (\text{Задача Коши})$$

В дальнейшем всегда будем рассматривать ДУ, разрешенное относительно старшей производной, т.е. вида:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

#### Общая идея всех методов численного решения ДУ и СДУ:

Фиксируем шаг  $h$  и будем находить по некоторым специальным формулам

$y(x_0)$  - задан,  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ , где  $x_i$  - равностоящие точки, а  $x_0, x_n$  - границы интервала  $[a, b]$ , на котором нам необходимо найти решение ДУ.

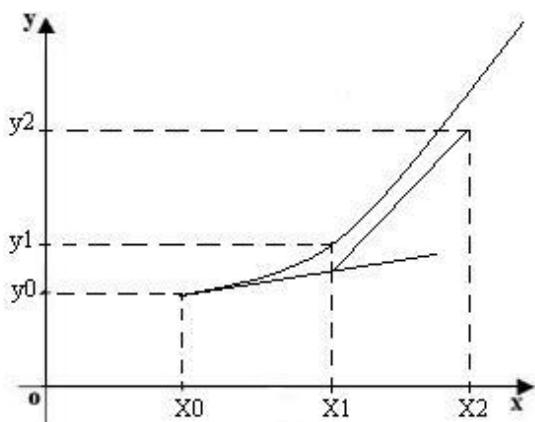
При этом, необходимо брать шаг  $h$  достаточно малым, с тем, чтобы погрешность была невелика.

#### Простейший метод решения ДУ – метод Эйлера:

Заметим, что  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$  - величина нам известная. Заменим неизвестное нам решение ДУ на касательную, а именно:  $y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)h = y_0 + f(x_0, y_0)h$

В общем виде:  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$  (формула Эйлера).

#### Геометрическая интерпретация метода Эйлера:



Локальная погрешность метода Эйлера:  $c \text{const} \cdot h^2$

## **Метод Эйлера (ДЗ)**

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y & f(x; y) = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 & x_0 = 1 \quad y_0 = 3 \end{cases}$$

$$h = 0,2$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i; y_i) \cdot h$$

Шаг 1:

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0) \cdot h = 3 + (-1) \cdot 0,2 = 2,8$$

Шаг 2:

$$f(x_1; y_1) = 2 \cdot 1,2 - 2,8 = -0,4$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1) \cdot h = 2,8 + (-0,4) \cdot 0,2 = 2,72$$

Шаг 3:

$$f(x_2; y_2) = 2 \cdot 1,4 - 2,72 = 0,08$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2; y_2) \cdot h = 2,72 + 0,08 \cdot 0,2 = 2,736$$

### П.3.Простейшая модификация метода Эйлера – метод Рунге-Кутта 2-го порядка.

Заменим приращение функции на первом шаге  $y(x_1) - y(x_0)$  не на  $y'(x_0) \cdot h$ , как делали в методе Эйлера, а на более точное значение - на значение производной в середине интервала  $h \cdot y'(x_0 + \frac{h}{2})$ .

А для того, чтобы найти  $y'(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2})$ :

Заменим  $y(y_0 + \frac{h}{2}) \approx y(x_0) + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$

Окончательно получаем следующую формулу:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; \overline{y}_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \text{где } \overline{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i) \end{cases} \quad (6.3) \text{ Формула Рунге-Кутта 2го порядка с усреднением по времени.}$$

### Метод Рунге-Кутта 2го порядка с усреднением по производной.

Заменим приращение:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} y'(x) dx \approx \frac{h}{2} (y'(x_1) + y'(x_0))$$

$$y'(x_1) = f(x_1, y_1) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Окончательно получим следующую формулу:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_{i+1}^*)) \\ \text{где } y_{i+1}^* = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (6.4) \text{ Метод Рунге-Кутта 2го порядка с усреднением по производной.}$$

Локальная погрешность методов (6.3) и (6.4)  $counst \cdot h^3$

## Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по времени (ДЗ)

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x, y) &= 2 \cdot x - y \\ x_0 &= 1 \quad y_0 = 3 \end{aligned}$$

$$h = 0,2$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; \overline{y}_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\overline{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i)$$

Шаг 1:

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\overline{y}_{0,5} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0) = 0,1 * (-1) = 2,9$$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{0,5}\right) = 2 \cdot 1,1 - 2,9 = -0,7$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{0,5}\right) = 3 + 0,2 \cdot (-0,7) = 2,86$$

Шаг 2:

$$f(x_1; y_1) = 2 \cdot 1,2 - 2,86 = -0,46$$

$$\overline{y}_{1,5} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1; y_1) = 2,86 + 0,1 * -0,46 = 2,814$$

$$f\left(x_1 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{1,5}\right) = 2 \cdot 1,3 - 2,814 = -0,216$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{1,5}\right) = 2,86 + 0,2 \cdot (-0,216) = 2,8168$$

Шаг 3:

$$f(x_2; y_2) = 2 \cdot 1,4 - 2,8138 = -0,0138$$

$$\overline{y}_{2,5} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2; y_2) = 2,8138 + 0,1 * (-0,0138) = 2,8124$$

$$f\left(x_2 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{2,5}\right) = 2 \cdot 1,5 - 2,8124 = 0,1876$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}; \overline{y}_{2,5}\right) = 2,8138 + 0,2 \cdot 0,1876 = 2,8513$$

## Метод Рунге-Кутта 2-го порядка: с усреднением по производной (ДЗ)

$$\begin{cases} y' = 2 \cdot x - y & f(x, y) = 2 \cdot x - y \\ y(1) = 3 & x_0 = 1 \quad y_0 = 3 \end{cases}$$

$$h = 0,2$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i; y_i) + f(x_i + h; \overline{y_{i+1}})) \\ \overline{y_{i+1}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i) \end{aligned}}$$

Шаг 1:

$$f(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\overline{y_1} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0) = 3 + 0,1 * (-1) = 2,9$$

$$f(x_0 + h; \overline{y_1}) = 2 \cdot 1,2 - 2,9 = -0,5$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0; y_0) + f(x_0 + h; \overline{y_1})) = 3 + 0,1 \cdot (-1 + (-0,5)) = 2,85$$

Шаг 2:

$$f(x_1; y_1) = 2 \cdot 1,2 - 2,85 = -0,45$$

$$\overline{y_2} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1; y_1) = 2,85 + 0,1 * (-0,45) = 2,805$$

$$f(x_1 + h; \overline{y_2}) = 2 \cdot 1,4 - 2,805 = -0,005$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_1; y_1) + f(x_1 + h; \overline{y_2})) = 2,85 + 0,1 \cdot (-0,45 + (-0,005)) = 2,8045$$

Шаг 3:

$$f(x_2; y_2) = 2 \cdot 1,4 - 2,8045 = -0,0045$$

$$\overline{y_3} = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2; y_2) = 2,8045 + 0,1 * (-0,0045) = 2,80405$$

$$f(x_2 + h; \overline{y_3}) = 2 \cdot 1,6 - 2,80405 = 0,39595$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_2; y_2) + f(x_2 + h; \overline{y_3})) = 2,8045 + 0,1 \cdot (-0,0045 + 0,39595) = 2,84365$$

#### П.4. Сведение дифференциальных уравнений высших порядков к системе дифференциальных уравнений и её решение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $n^{\text{ого}}$  порядка, разрешенное относительно старшей производной и Задачу Коши для данного уравнения:

$$\begin{array}{l} \text{Задача Коши (6.5)} \\ \left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad - \text{ДУ} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{array} \right. \end{array} \quad - \text{начальные условия.}$$

Чтобы свести З.К. (6.5) для ДУ  $n^{\text{ого}}$  порядка к СДУ 1 $^{\text{ого}}$  порядка, поступаем следующим образом:

введём вектор-функцию  $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ , тогда З.К. (6.5) для ДУ  $n^{\text{ого}}$  порядка сводится к

СДУ 1 $^{\text{ого}}$  порядка:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(X, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\text{где } F(X, Y(x)) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \dots \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix}; \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Итак, вместо З.К. (6.5) для ДУ  $n^{\text{ого}}$  порядка мы получили З.К. (6.6) для СДУ 1 $^{\text{ого}}$  порядка, а её мы можем решить любым известным нам методом (Эйлера, Рунге-Кутта, ...) с заменой в этих формулах скалярных величин  $y, f$  на векторные  $Y, F$ .

Пример сведения ДУ n<sup>ого</sup> порядка к СДУ 1<sup>ого</sup> порядка и нахождение решения по методу Эйлера:

$$\begin{cases} y''x - y' = y - x^2 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -4 \end{cases}$$

Имеем ДУ 2го порядка, сводим к СДУ 1го порядка для 2х уравнений:

Вводим  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$$Y' = F(x, Y(x)) = \begin{pmatrix} y' \\ \frac{y + y' + x^2}{x} \end{pmatrix}$$

фиксируем шаг:  $h=0,1$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = Y_0 + hF(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{2 - 4 + 1^2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -4,1 \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом находим  $Y_2$

$$Y_2 = Y_1 + hF(x_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -4,1 \end{pmatrix} + 0,1 \cdot \begin{pmatrix} -4,1 \\ \frac{1,6 - 4,1 + (1,1)^2}{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -4,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,41 \\ -0,1722 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,19 \\ -4,2722 \end{pmatrix}$$

## ДУ Высших порядков

### Метод Эйлера (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad h = 0.2$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Начальное условие

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.8 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} -0.8 \\ 1.2 \cdot -0.8 + 1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.64 \\ -0.632 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.64 \\ -0.632 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} -0.632 \\ 1.4 \cdot -0.632 + 1.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5136 \\ -0.48096 \end{pmatrix}$$

## Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по времени (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad h = 0.2$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2})$$

$$\bar{y}_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

*Начальное условие*

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Шаг первый

$$\bar{y}_{0.5} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \cdot -0.9 + 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$\bar{y}_{1.5} = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.818 \\ 1.2 \cdot -0.818 + 1.82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7382 \\ -0.73416 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.82 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.73416 \\ 1.3 \cdot -0.73416 + 1.7382 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix}$$

Шаг третий

$$\bar{y}_{2.5} = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \begin{pmatrix} -0.66124 \\ 1.4 \cdot -0.66124 + 1.6732 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6071 \\ -0.58649 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.6732 \\ -0.66124 \end{pmatrix} + 0.2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58649 \\ 1.5 \cdot -0.58649 + 1.6071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5559 \\ -0.51577 \end{pmatrix}$$

## Метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по производной (ДЗ)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad h = 0.2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \bar{y}_{i+1}))$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

*Начальное условие*

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Шаг первый

$$\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.2 \cdot -0.9 + 1.9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.81 \\ -0.818 \end{pmatrix}$$

Шаг второй

$$\bar{y}_2 = \begin{pmatrix} 1.81 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -0.818 \\ 1.2 \cdot -0.818 + 1.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7282 \\ -0.73516 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.81 \\ -0.818 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left( \begin{pmatrix} -0.818 \\ 1.2 \cdot -0.818 + 1.81 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.73516 \\ 1.4 \cdot -0.73516 + 1.7282 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.6547 \\ -0.66526 \end{pmatrix}$$

Шаг третий

$$\bar{y}_3 = \begin{pmatrix} 1.6547 \\ -0.66526 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -0.66526 \\ 1.4 \cdot -0.66526 + 1.6547 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5882 \\ -0.59293 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.6547 \\ -0.66526 \end{pmatrix} + 0.1 \cdot \left( \begin{pmatrix} -0.66526 \\ 1.4 \cdot -0.66526 + 1.6547 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.59293 \\ 1.6 \cdot -0.59293 + 1.5882 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.5289 \\ -0.52898 \end{pmatrix}$$

## **Метод Рунге-Кутта 4го порядка.**

Наиболее применяемым методом решения ДУ и СДУ является метод Рунге-Кутта 4го порядка.

**Формулы метода Рунге-Кутта 4го порядка:**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{6.7}$$

в векторной форме данной формулы, величины  $y$ ,  $f$ ,  $k$  заменяют на  $Y$ ,  $F$ ,  $K$ .

## Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (Д3)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad h=0.2$$

*Начальное условие*

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

### Шаг первый

---

$$k_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \cdot -1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1.1 \cdot -0.9 + 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.91 \\ -0.909 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.909 \\ 1.1 \cdot -0.909 + 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.8182 \\ -0.81798 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 1.2 \cdot -0.81798 + 1.8182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix}$$

### Шаг второй

---

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 1.2 \cdot -0.81744 + 1.8188 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.7371 \\ -0.73365 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 1.3 \cdot -0.73365 + 1.7371 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.7454 \\ -0.7391 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 1.3 \cdot -0.7391 + 1.7454 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.671 \\ -0.66053 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 1.4 \cdot -0.66053 + 1.671 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ -0.66011 \end{pmatrix}$$

### Шаг третий

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4 \cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 0.74725 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.6054 \\ -0.58538 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 1.5 \cdot -0.58538 + 1.6054 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 0.72733 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.6129 \\ -0.58738 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 1.5 \cdot -0.58738 + 1.6129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 0.73183 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.5539 \\ -0.51374 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 1.6 \cdot -0.51374 + 1.5539 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 0.73192 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ -0.66011 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 0.74725 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 0.72733 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 0.73183 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 0.73192 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.5541 \\ -0.51352 \end{pmatrix}$$

## П.5. Локальные и глобальные погрешности одношаговых методов решения ДУ (метода Эйлера и методов Рунге-Кутта 2го, 4го порядка).

### Теорема 6.1:

Если локальная погрешность метода  $counst \cdot h^{p+1}$ , то глобальная  $counst \cdot h^p$ .

### Комментарии:

как и при численном интегрировании, при переходе от локальной погрешности к глобальной, точность метода уменьшается на порядок. (6.8):

Методы	Локальная	Глобальная
Эйлер	$const \cdot h^2$	$const \cdot h$
Р.-К. 2-го порядка по времени	$const \cdot h^3$	$const \cdot h^2$
Р.-К. 2-го порядка по производной	$const \cdot h^3$	$const \cdot h^2$
Р.-К. 4-го порядка	$const \cdot h^5$	$const \cdot h^4$

Как и при численном интегрировании, порядок метода – степень  $h$  в глобальной погрешности.

## П.6. Многошаговые методы решения ДУ и СДУ.

Все рассмотренные ранее методы – одношаговые, т.к. для нахождения  $y_{i+1}$  мы использовали только лишь значения  $y_i$  с предыдущего шага. В многошаговых методах для нахождения  $y_{i+1}$  используется не только лишь одно  $y_i$ , но и предыдущие значения.

В  $k$ -шаговом методе используются значения с  $k$  предыдущих шагов.

Многошаговые методы, как правило, дают лучший результат, чем одношаговые, в силу того, что более устойчивы к вычислительным погрешностям. Многошаговых методов много, самый распространенный среди них – метод Милна.

Формулы метода Милна:

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_i, y_i)) \\ y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)) \end{cases} \quad (6.9)$$

Метод Милна – 4х шаговый (т.к. использует 4 предыдущих значения) и имеет 4-ый порядок точности. Перед применением метода Милна нам надо знать 4y, следовательно, необходимо сделать хотя бы 3 шага каким-нибудь одношаговым методом.

## Метод Рунге-Кутта 4-го порядка. 5 шагов. Метод Милна (Д3)

$$\begin{cases} y'' = xy' + y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \quad h=0.2$$

*Начальное условие*

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

### Шаг первый

$$k_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.91 \\ -0.909 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix}$$

$$y_0 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.8182 \\ -0.81798 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.9 \\ 0.91 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.909 \\ 0.9101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.81798 \\ 0.83662 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix}$$

### Шаг второй

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.7371 \\ -0.73365 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.7454 \\ -0.7391 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.671 \\ -0.66053 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 0.83787 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.73365 \\ 0.78336 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.7391 \\ 0.78457 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.66053 \\ 0.74626 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ -0.66011 \end{pmatrix}$$

### Шаг третий

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4 \cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 0.74725 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.6054 \\ -0.58538 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 1.5 \cdot -0.58538 + 1.6054 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 0.72733 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.6129 \\ -0.58738 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 1.5 \cdot -0.58738 + 1.6129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 0.73183 \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.5539 \\ -0.51374 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 1.6 \cdot -0.51374 + 1.5539 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 0.73192 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ -0.66011 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 0.74725 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58538 \\ 0.72733 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.58738 \\ 0.73183 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.51374 \\ 0.73192 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.5541 \\ -0.51352 \end{pmatrix}$$

## Метод Рунге-Кутта 4 порядка: 4 и 5 шаг (ДЗ)

### Шаг четвёртый

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6 \cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 0.73247 \end{pmatrix}$$

$$y_3 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.5027 \\ -0.44027 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.44027 \\ 1.7 \cdot -0.44027 + 1.5027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.44027 \\ 0.75424 \end{pmatrix}$$

$$y_3 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.5101 \\ -0.4381 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.4381 \\ 1.7 \cdot -0.4381 + 1.5101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4381 \\ 0.76533 \end{pmatrix}$$

$$y_3 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.4665 \\ -0.36045 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.36045 \\ 1.8 \cdot -0.36045 + 1.4665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.36045 \\ 0.81769 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1.5541 \\ -0.51352 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 0.73247 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.44027 \\ 0.75424 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.4381 \\ 0.76533 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.36045 \\ 0.81769 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.4664 \\ -0.36054 \end{pmatrix}$$

### Шаг пятый

$$k_1 = \begin{pmatrix} -0.36054 \\ 1.8 \cdot -0.36054 + 1.4664 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.36054 \\ 0.81743 \end{pmatrix}$$

$$y_4 + 0.1 k_1 = \begin{pmatrix} 1.4303 \\ -0.2788 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -0.2788 \\ 1.9 \cdot -0.2788 + 1.4303 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2788 \\ 0.90058 \end{pmatrix}$$

$$y_4 + 0.1 k_2 = \begin{pmatrix} 1.4385 \\ -0.27048 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -0.27048 \\ 1.9 \cdot -0.27048 + 1.4385 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.27048 \\ 0.92459 \end{pmatrix}$$

$$y_4 + 0.2 k_3 = \begin{pmatrix} 1.4123 \\ -0.17562 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -0.17562 \\ 2 \cdot -0.17562 + 1.4123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.17562 \\ 1.0611 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = \begin{pmatrix} 1.4664 \\ -0.36054 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{6} \left( \begin{pmatrix} -0.36054 \\ 0.81743 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.2788 \\ 0.90058 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.27048 \\ 0.92459 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.17562 \\ 1.0611 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1.4119 \\ -0.17625 \end{pmatrix}$$

## Метод Милна. 2 шага (ДЗ)

(4 и 5 шаги метода Рунге-Кутта 4 порядка)

---

$$\boxed{y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2 \cdot f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2 \cdot f(x_i, y_i))}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4 \cdot f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

### Шаг первый

$$\bar{y}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4 \cdot 0.2}{3} \left( 2 \begin{pmatrix} -0.81744 \\ 1.2 \cdot -0.81744 + 1.8188 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4 \cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6 \cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4662 \\ -0.36175 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1.6714 \\ 0.66011 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{3} \left( \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4 \cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6 \cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.36175 \\ 1.8 \cdot -0.36175 + 1.4662 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4664 \\ -0.36064 \end{pmatrix}$$

### Шаг второй

$$\bar{y}_5 = \begin{pmatrix} 1.8188 \\ -0.81744 \end{pmatrix} + \frac{4 \cdot 0.2}{3} \left( 2 \begin{pmatrix} -0.66011 \\ 1.4 \cdot -0.66011 + 1.6714 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6 \cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -0.36064 \\ 1.8 \cdot -0.36064 + 1.4664 \end{pmatrix} \right) =$$

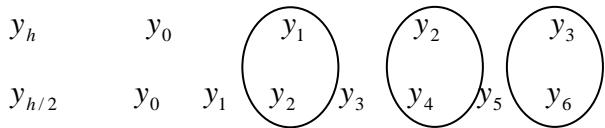
$$= \begin{pmatrix} 1.4114 \\ -0.17826 \end{pmatrix}$$

$$y_5 = \begin{pmatrix} 1.5541 \\ -0.51352 \end{pmatrix} + \frac{0.2}{3} \left( \begin{pmatrix} -0.51352 \\ 1.6 \cdot -0.51352 + 1.5541 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -0.36064 \\ 1.8 \cdot -0.36064 + 1.4664 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.17826 \\ 2 \cdot -0.17826 + 1.4114 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4118 \\ -0.17637 \end{pmatrix}$$

## П.7. Оценка погрешности решения ДУ и СДУ методом двойного пересчета. Коррекция решения.

Используя такую же идею, как и в численном интегрировании, находим решение ДУ на  $[a,b]$  дважды с шагом  $h$  и с шагом  $h/2$ . Получим следующую картину:



Сравниваем попарно, если расхождение между  $|y_{h(k)} - y_{h/2(k)}| < 3\epsilon$  для метода 2го порядка,

$|y_{h(k)} - y_{h/2(k)}| < 15\epsilon$  для метода 4го порядка, то в качестве точного решения берём  $y_{h/2}$ . Если же точность не достигнута, то шаг  $h$  уменьшаем вдвое и т.д., пока она не будет достигнута.

Метод двойного пересчёта при решении ДУ и СДУ практически единственный имеет возможность для оценки погрешностей, так как иные формулы очень сложны и требуют оценок различных производных.

Как и при ЧИ, при решении ДУ и СДУ после 2го пересчёта в качестве точного решения выгодно брать не  $y_{h/2}$ , а  $Y_{\text{кор}}$ .

$$Y_{\text{кор}} = Y_{h/2} + \frac{1}{3}(Y_{h/2} + Y_h) \text{ - для второго порядка}$$

Метод двойного пересчёта применим не только лишь при ЧИ, при решении ДУ и СДУ, но и при решении других численных методов.

## П.8. Краевые задачи для дифференциальных уравнений.

Выше рассматривалось решение ДУ и СДУ с начальными условиями, заданными в одной точке, так называемую задачу Коши, но для ДУ высших порядков часто бывает необходимо решить не з. Коши, а так называемую краевую задачу, т.е. начальные условия, которые заданы в разных точках.

Рассмотрим простейшую краевую задачу для ДУ 2го порядка:

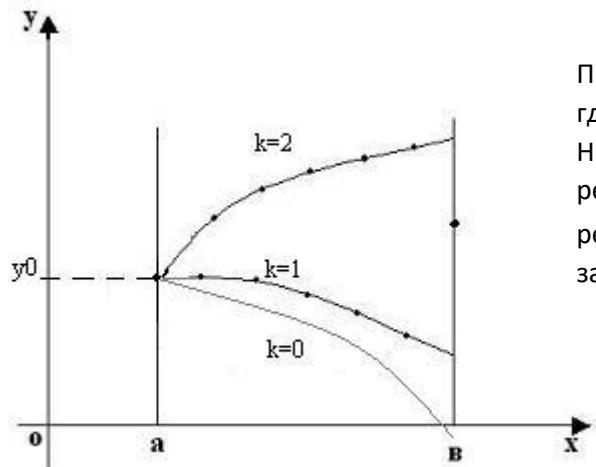
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases} \quad (6.10)$$

А мы умеем решать:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y_0 \\ y'(a) = y'_0 = k \end{cases}, \quad (6.11),$$

В (6.11) нам известно  $y'(a)$ , поэтому для решения задачи (6.10) мы будем подбирать  $y'(a)$  в (6.11), с тем, чтобы  $y(b) = y_1$

## Метод стрельб



После пристрелки и определения интервала  $[a,b]$ , где идёт смена знака, запускаем МПД или МХ. На практике это выглядит так, как будто мы решаем уравнение  $q(k) = y_1$ , где  $q(k)$  возвращает решение задачи Коши (6.11) в точке  $b$  при заданном  $k$ .

### П.9. Что делать, если ДУ не может быть разрешено относительно старшей производной?

Так как ДУ не может быть решено относительно старшей производной, то тогда на каждом шаге решаем нелинейное уравнение относительно  $y^{(n)}$  (все остальные неизвестные  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ -к этому моменту уже известны).

Решать уравнение относительно старшей производной любым методом (Хорд, МПД, Ньютона).

**Замечание:**

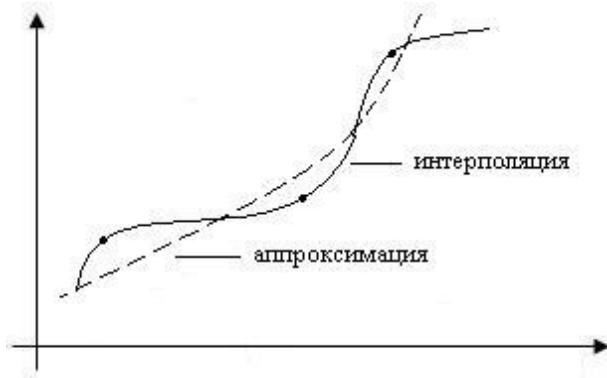
Таким образом, если ДУ не разрешается относительно старшей производной, то у нас возникает дополнительный цикл (самый внутренний) при написании программы.

# Тема 6: Аппроксимация

## П.1. Постановка задачи аппроксимации.

Пусть некоторая функция  $y=f(x)$  задана в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Фиксируем некоторый класс функций  $G$ .

Задача аппроксимации: выбрать среди функций  $g \in G$  некоторую функцию  $g'$ , которая лучше всего приближает функцию  $f$  в узлах  $x_i$ . В отличие от интерполяции при аппроксимации не требуется, чтобы  $g(x_i)=y_i$ , а требуется лишь  $g(x_i) \approx y_i$ . Обычно аппроксимацию применяют, когда значения функции  $f$  были известны не точно, а с некоторой погрешностью.



### Конкретизация задачи аппроксимации.

Для оценки близости функции  $g$  и  $f$  составляется вектор невязок (погрешности)

$$R = (g(x_0) - f(x_0), g(x_1) - f(x_1), \dots, g(x_n) - f(x_n)).$$

Очевидно, что мы будем идти к тому, чтобы норма  $R$  была намного меньше, при этом можно работать либо:

1.  $\| \cdot \|_{\infty}$  - минимизируется максимальное отклонение.
2.  $\| \cdot \|_1$  - минимизируем сумму отклонений.
3.  $\| \cdot \|_2$  - минимизируем сумму квадратов отклонений.

Легко реализуются вычисления именно для 2ой нормы.

В качестве класса аппроксимирующей функции  $G$ , рассмотрим всевозможные линейные комбинации базисных функций  $g_0, g_1, \dots, g_n$ .

$$G(x) = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i y_i(x) \quad (a_i \in R) \right\} \text{ базисные функции фиксированы.}$$

## П.2. Метод наименьших квадратов.

Фиксирован набор функций:  $g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x)$  даны  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

$$g(x) = \sum_{j=0}^k a_j g_j(x) \text{ - линейная комбинация функции } g_j, \quad y_i = f(x_i) \quad 0, \dots, n;$$

фиксируем набор:

$$R = (y_0 - g(x_0), \dots, y_n - g(x_0))$$

$$S(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=0}^n (y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=0}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^k a_j g_j(x_i) \right)^2 \rightarrow \min .$$

Для нахождения минимума функции  $S$  от  $(k+1)$  переменной, нам необходимо все её частные производные приравнять к 0. При этом получаем систему:  $(k+1)$  уравнения для  $(k+1)$  переменной  $(a_0, \dots, a_k)$ .

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a_p} = \sum_{i=0}^n 2 \left( y_i - \sum_{j=0}^k a_j g_j(x_i) g_p(x_i) \right)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k a_j g_j(x_i) g_p(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i g_p(x_i)$$

$$\sum_{j=0}^k a_j \sum_{i=0}^n g_j(x_i) g_p(x_i) = \sum_{i=0}^n y_i g_p(x_i) \quad , p = \overline{0, k} \quad (7.1)$$

Получили СЛАУ (7.1). Эту систему можно решить методом Гаусса – она всегда имеет единственное решение в случае, если набор базисных функций был линейно независим в узлах  $x_i$ , то матрица СЛАУ (7.1) невырожденная, поэтому решение будет существовать и единственное.

Пример аппроксимации полиномами:

$$y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

базисные функции:

$$g_0(x) = 1$$

$$g_1(x) = x$$

$$g_2(x) = x^2$$

X	Y
0	0
1	1
2	4
3	9

для аппроксимации функциями такого вида, нам необходимо решить СЛАУ 3 на 3:

$$\begin{cases} C_{00}a + C_{01}b + C_{02}c = \sum_{i=1}^n y_i g_0(x_i) \\ C_{10}a + C_{11}b + C_{12}c = \sum_{i=1}^n y_i g_1(x_i) \\ C_{20}a + C_{21}b + C_{22}c = \sum_{i=1}^n y_i g_2(x_i) \end{cases}$$

Найдём все  $C_{ij}$ :

$$\begin{array}{lll} C_{00} = \sum_{i=1}^n g_0(x_i)g_0(x_i) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot 1 & C_{11} = \sum_{i=1}^n g_1(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 & C_{20} = \sum_{i=1}^n g_2(x_i)g_0(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ C_{01} = \sum_{i=1}^n g_0(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i & C_{10} = \sum_{i=1}^n g_1(x_i)g_0(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i & C_{21} = \sum_{i=1}^n g_2(x_i)g_1(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ C_{02} = \sum_{i=1}^n g_0(x_i)g_2(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 & C_{12} = \sum_{i=1}^n g_1(x_i)g_2(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^3 & C_{22} = \sum_{i=1}^n g_2(x_i)g_2(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{array}$$

Подставим найденные  $C_{ij}$  в нашу СЛАУ:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n 1 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Для определения коэффициентов этой системы составим расчетную таблицу

n	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	4	8	16	8	16
4	3	9	9	27	81	27	81
<b>Сумма</b>	6	14	14	36	98	36	98

В результате получим систему:

$$\begin{cases} 4a + 6b + 14c = 14 \\ 6a + 14b + 36c = 36 \\ 14a + 36b + 98c = 98 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты в исходную формулу:

$$y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

**Ответ:**

$$y(x) = x^2$$

Примечание:

Т.к среди базисов функции аппроксимации была оригинальная функция - получилась функция аппроксимации, полностью совпадающая с оригинальной.

МНК работает, что и требовалось доказать.

Пример аппроксимации через частные производные:

$$y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

X	Y
0	0
1	1
2	4
3	9

Базисные функции:

$$g_0(x) = 1$$

$$g_1(x) = x$$

$$g_2(x) = x^2$$

Находим квадраты:

$$\begin{aligned} 1) ((g_0(x_0) \cdot a + g_1(x_0) \cdot b + g_2(x_0) \cdot c) - y_0)^2 &= ((1 \cdot a + x_0 \cdot b + x^2 \cdot c) - y_0)^2 \\ &= ((1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c) - 0)^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) ((g_0(x_1) \cdot a + g_1(x_1) \cdot b + g_2(x_1) \cdot c) - y_1)^2 &= ((1 \cdot a + x_1 \cdot b + x^2 \cdot c) - y_1)^2 \\ &= (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c - 1)^2 = (a + b + c - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) ((g_0(x_2) \cdot a + g_1(x_2) \cdot b + g_2(x_2) \cdot c) - y_2)^2 &= ((1 \cdot a + x_2 \cdot b + x^2 \cdot c) - y_2)^2 \\ &= (1 \cdot a + 2 \cdot b + 4 \cdot c - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) ((g_0(x_3) \cdot a + g_1(x_3) \cdot b + g_2(x_3) \cdot c) - y_3)^2 &= ((1 \cdot a + x_3 \cdot b + x^2 \cdot c) - y_3)^2 \\ &= (1 \cdot a + 3 \cdot b + 9 \cdot c - 9)^2 \end{aligned}$$

Выпишем сумму квадратов:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a^2 + (a + b + c - 1)^2 + (a + 2 \cdot b + 4 \cdot c - 4)^2 + (a + 3 \cdot b + 9 \cdot c - 9)^2 \\ &= 4a^2 + 12ab + 28ac - 28a + 14b^2 + 72bc - 72b + 98c^2 - 196c + 98 \end{aligned}$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = 4a + 6b + 14c - 14$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b} = 6a + 14b + 36c - 36$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial c} = 14a + 36b + 98c - 98$$

Составим и решим систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 14 \\ 6 & 14 & 36 & 36 \\ 14 & 36 & 98 & 98 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты в исходную формулу:

$$y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

**Ответ:**

$$y(x) = x^2$$

Примечание:

Т.к среди базисов функции аппроксимации была оригинальная функция - получилась функция аппроксимации, полностью совпадающая с оригинальной.

МНК работает, что и требовалось доказать.

### Метод наименьших квадратов (ДЗ)

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Проаппроксимировать функцию,  
заданную в точках (x, y)  
функциями вида  $a + bx + c\sqrt{x}$   
(базисные функции 1, x,  $\sqrt{x}$ )

Выпишем сумму квадратов:

$$(a+0 \cdot b + \sqrt{0} \cdot c - 0)^2 + (a+1 \cdot b + \sqrt{1} \cdot c - 1)^2 + (a+2 \cdot b + \sqrt{2} \cdot c - 4)^2 + (a+3 \cdot b + \sqrt{3} \cdot c - 9)^2$$

После возвведения в квадрат, упрощения выражения, получаем следующее:

$$\begin{aligned}\lambda = & 4a^2 + 12ab + 2ac + 2\sqrt{2}ac + 2\sqrt{3}ac + 14b^2 + 2bc + 4\sqrt{2}bc \\ & + 6\sqrt{3}bc + 6c^2 - 28a - 72b - 2c - 8\sqrt{2}c - 18\sqrt{3}c + 98\end{aligned}$$

Найдём частные производные и составим систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda}{da} = 8a + 12b + 2c + 2\sqrt{2}c + 2\sqrt{3}c - 28 = 8a + 12b + 8.292529c - 28 \\ \frac{d\lambda}{db} = 12a + 28b + 6\sqrt{3}c + 4\sqrt{2}c + 2c - 72 = 12a + 28b + 18.049159c - 72 \\ \frac{d\lambda}{dc} = 2\sqrt{3}a + 2\sqrt{2}a + 2a + 6\sqrt{3}b + 4\sqrt{2}b + 2b + 12c - 18\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2 = \\ = 8.292529a + 18.049159b + 12c - 44.490623 \end{array} \right.$$

Решаем систему линейных уравнений методом Гаусса, получаем коэффициенты:

$$\begin{cases} a = 0.037 \\ b = 5.98 \\ c = -5.32 \end{cases}$$

Подставляем коэффициенты в исходную функцию аппроксимации, получаем:

$$0.037 + 5.98x - 5.32\sqrt{x}$$

Теперь можно подставить любое допустимое значение x ( $x \geq 0$ ) и найти значение функции аппроксимации в точке

## Тема 7: Нелинейная оптимизация

**Метод градиента (метод наискорейшего спуска).**

### **П.1. Сведение системы линейных уравнений к задаче нелинейной оптимизации (ЗНО) и наоборот.**

Постановка задачи ЗНО:

Найти  $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$  (8.1) минимум или максимум в некоторой области D.

Как мы помним из мат. анализа, следует приравнять частные производные к нулю.

Таким образом, ЗНО (8.1) свели к СНУ (8.2)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = \overline{0, 1} \quad (8.2) \quad \text{п нелинейных уравнений.}$$

Обратное: пусть дана СНУ

$$\begin{cases} y_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \iff S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i^2(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

(S достигает своего минимума в точке, где все i-ые зануляются)

### **П.2. Метод градиента.**

Наша задача найти минимум функций n переменных без ограничений на X.

Общая идея метода:

Возьмём некоторую стартовую точку X (желательно, чтобы она была достаточно близка к минимуму функции).

Пусть  $g(x_1, \dots, x_n)$  - гладкая функция, тогда вектор градиента f в точке  $x_0$ :

$$gradf(X^{(0)}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{X^{(0)}} \text{ показывает направление наискорейшего роста функции.}$$

Соответственно вектор  $-gradf(X^{(0)})$  показывает направление наискорейшего спуска.

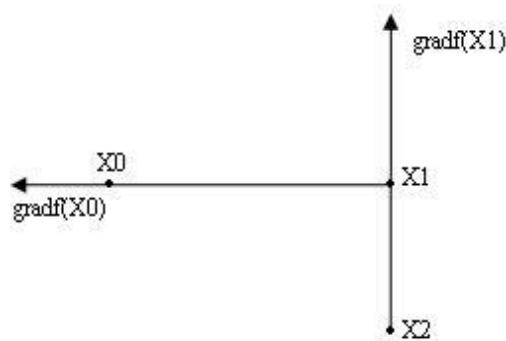
Пойдём вдоль этого вектора, рассмотрим функцию

$$h_0(t) = f(\underbrace{X^{(0)} - t gradf(X^{(0)})}_{\text{уравнение луча, исходящего из } X^{(0)} \text{ в направлении } -grad}), \quad t \geq 0$$

Идём вдоль этого луча до тех пор, пока  $h_0(t)$  не начнёт возрастать, т.е. не достигнет своего минимума. В этот момент (в точке  $X^{(1)}$ ) мы остановимся и повторим такую же процедуру (т.е. пойдём из точки  $X^{(1)}$  в направлении  $-grad$ , т.е. рассмотрим  $h_1(t) = f(X^{(1)} - t gradf(X^{(1)}))$  и т.д.)

Данную процедуру повторяем до тех пор, пока не достигнем заданной точности (применяем универсальный критерий прерывания  $|X^{(n+1)} - X^{(n)}| < \varepsilon$ )

Иллюстрация:



Итак, с помощью метода градиента нам удаётся многомерную ЗНО свести к одномерной ЗНО, т.е. нам необходимо научиться находить минимум функций одной переменной (на первом шаге минимум  $h_0(t)$ , на втором шаге  $h_1(t)$  и т.д.)

### П.3. Решение одномерной ЗНО.

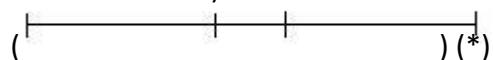
Нам необходимо найти минимум некоторой функции  $f$  (одной переменной) на интервале  $[a, b]$ . Будем считать, что  $f$  на данном интервале имеет ровно один минимум.

Простейший метод нахождения точки минимума – метод сечений:

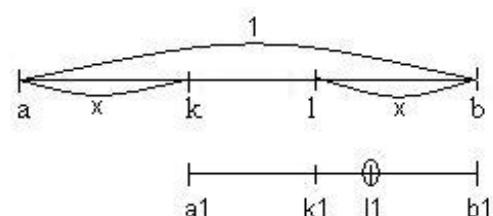


Рассмотрим вариант  $n=3$  (ежу понятно,  
что делить меньше чем на 3 интервала

бессмысленно).



На самом же деле выгоднее делить интервал не таким образом, а по методу золотого сечения.



Пропорции деления (они сохраняются) были подобраны таким образом, что при переходе к новому интервалу нам необходимо вычислять значения  $f$  не в 2х новых точках, а в 1-ой, хотя при этом

интервал поиска сокращается не в два раза (как было на предложенной схеме (\*)), а чуть меньше, следовательно, этот вариант оказывается выгоднее, т.к. для достижения заданной точности нам придётся меньше раз вычислять значение  $f$ . 4 точки на первом шаге и по 1-ой новой точке на каждом последующем шаге, а не в  $2x$ .

Найдём пропорции золотого сечения:

$$\frac{b-l}{b-k} = \frac{b-k}{b-a}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = 0,382$$

Итак, в алгебре метода золотого сечения заложены пропорции: **0,382 ; 0,236 ; 0,382**.

## Методы Золотого сечения (ДЗ)

$f(x) = x^2 - 6x$   
интервал [0,5]  
сделать 4 шага

$\lambda_1 = a + 0.382(b-a)$   
 $\lambda_2 = a + 0.618(b-a)$   
Если  $f(\lambda_1) > f(\lambda_2)$ , то  $a = \lambda_1$   
Иначе,  $b = \lambda_2$

*Итерация 1*  
 $\lambda_1 = 0 + 0.382(5-0) = 1.91$   
 $\lambda_2 = 0 + 0.618(5-0) = 3.09$   
 $f(\lambda_1) = -7.8119$   
 $f(\lambda_2) = -8.9919$   
 $f(\lambda_1) > f(\lambda_2)$ , значит  $a = \lambda_1$

*Итерация 2*  
 $\lambda_1 = 1.91 + 0.382(5-1.91) = 3.09038$   
 $\lambda_2 = 1.91 + 0.618(5-1.91) = 3.81962$   
 $f(\lambda_1) = -8.991831$   
 $f(\lambda_2) = -8.328223$   
 $f(\lambda_1) < f(\lambda_2)$ , значит  $b = \lambda_2$

*Итерация 3*  
 $\lambda_1 = 1.91 + 0.382(3.81962 - 1.91) = 2.639475$   
 $\lambda_2 = 1.91 + 0.618(3.81962 - 1.91) = 3.090145$   
 $f(\lambda_1) = -8.870022$   
 $f(\lambda_2) = -8.991874$   
 $f(\lambda_1) > f(\lambda_2)$ , значит  $a = \lambda_1$

*Итерация 4*  
 $\lambda_1 = 2.639475 + 0.382(3.81962 - 2.639475) = 3.090290$   
 $\lambda_2 = 2.639475 + 0.618(3.81962 - 2.639475) = 3.368805$   
 $f(\lambda_1) = -8.991848$   
 $f(\lambda_2) = -8.863983$   
 $f(\lambda_1) < f(\lambda_2)$ , значит  $b = \lambda_2$

*Результат вычислений*  
 $x = \frac{(a+b)}{2} = \frac{(2.639475+3.368805)}{2} = 3.00414$   
 $f(x) = x^2 - 6x = 9.024857 - 18.02484 = -8.999983$

## Тема 8: Метод Монте-Карло

### **П.1. Особенности метода Монте-Карло.**

Главная особенностью метода Монте-Карло – то, что он в отличие от всех остальных методов вероятностный. Т.е., если во всех остальных методах мы знали, с вероятностью равной 1, что достигли заданной точности, то в методе Монте-Карло мы можем только лишь утверждать, что  $P$  – близка к единице, т.е. вероятность ошибиться, мала, но есть.

Причём, всякий раз при новом запуске метода, результат будет другим, т.к. он носит вероятностный характер. Наша основная цель научиться оценить вероятность того, что найденное значение  $X$ , отличается от точного не более чем на  $\varepsilon$  ( $P(|X - X_{\text{точн.}}| < \varepsilon)$ ).

Методом Монте-Карло можно решать многие задачи вычислительной математики: СЛАУ, ДУ, ЧИ и т.д.

Мы рассмотрим простейший пример применения метода Монте-Карло.

### **П.2. Метод Монте-Карло в ЧИ.**

Обычные (не вероятностные) методы ЧИ хорошо работают только лишь при интегрировании функций небольшого количества переменных. При росте количества переменных, число узлов интегрирования стремительно растёт (экспоненциально).

Например, пусть необходимо найти интеграл 10-ти переменных с шагом  $h=0,1$  по каждому измерению:

$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  итого  $11^{10}$  измерений – в подобном случае применяют метод Монте-Карло.

Рассмотрим первый вариант метода Монте-Карло:

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \left\{ \text{среднему значению на кубе } [0,1]^n, \text{ как известно из мат. анализа} \right. \\ \left. \int_a^b f(x) dx \right.$$

среднее значение функции равно  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$ , следовательно, для функций многих переменных

$$\frac{\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n}{V([0,1]^n)} \}.$$

В то же время, как известно из теории вероятности, среднее эмпирическое значение при увеличении количества испытаний стремится к точному значению.

В нашем случае эмпирическое среднее (для N испытаний)

$f_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}) = I_{\text{прибл.}}$ , таким образом, для нахождения  $I_{\text{прибл.}}$  мы N раз находим значение функции f в N точках  $X^{(i)}$ , каждая из которых имеет n координат, при этом, каждая координата – случайное число на отрезке [0,1]. Итак, random нам потребуется вызвать n\*N раз.

При каждом запуске метода Монте-Карло мы будем получать новые значения  $I_{\text{прибл.}}$ , но все они  $\approx I_{\text{точн.}}$ .

## П.2. Второй вариант метода Монте-Карло(интегрирование не по n-мерному кубу, а по некоторой произвольной n-мерной области D).

Необходимо найти:

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Pi} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

где  $\Pi$  – прямоугольный параллелепипед, ограничивающий область  $D$ .

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \dots \cdot [a_n, b_n] & g(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0 & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin D \end{cases} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n & &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \end{aligned} \right\}$$

Чтобы получить равномерное распределение на  $[a_i, b_i]$ , берем  $\text{random}^*(b_i - a_i) + a_i$  – все остальные вычисления аналогичны случаю n-мерного куба.

### Недостатки:

Основная проблема, что в предложенном выше методе мы не можем достоверно оценить вероятность отклонения  $I_{\text{прибл.}}$  от  $I_{\text{точн.}}$ , мы знаем только лишь, что  $M(I_{\text{прибл.}}) = I_{\text{точн.}}$ , т.е. при бесконечном количестве испытаний  $I_{\text{прибл.}} = I_{\text{точн.}}$ . А оценить разброс  $I_{\text{прибл.}}$  от  $I_{\text{точн.}}$  мы не можем, т.к. не знаем дисперсию.

Оценить вероятность отклонения случайной величины от её мат. ожидания, можно с помощью неравенства Чебышева  $P(|I - I_{\text{прибл.}}| > \varepsilon) < \frac{D(I_{\text{прибл.}})}{\varepsilon^2}$  (9.1)

С ростом числа испытаний N,  $D(I_{\text{прибл.}}) \rightarrow 0$ , а именно, если мы проведём N испытаний, то

$$D(I_{\text{прибл.}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X^{(i)}) = \frac{D(\eta)}{N} \quad (9.2)$$

Если в (9.1) подставить формулу (9.2), то получим  $P(|I - I_{\text{прибл.}}| > \varepsilon) < \frac{D(\eta)}{N\varepsilon^2}$

$\eta$ -не зависит от N и  $\varepsilon$ , зависит от g и области интегрирования D.

$\eta$  можно оценить, используя различные способы, например, найти эмпирическое значение дисперсии.