

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский федеральный университет имени  
первого Президента России Б. Н. Ельцина»

**ПОСТРОЕНИЕ ТИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ АРПСС (ARIMA)**

**Методические указания к выполнению  
лабораторной работы № 4**

Екатеринбург

2019

## Содержание

Введение.....	3
1. Задание на лабораторную работу .....	3
2. Требования к оформлению отчета.....	11

## Введение

Напомним, что в общем виде модель авторегрессии – скользящего среднего порядка  $(p, q)$  АРПСС (ARIMA) выглядит как:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

Эта модель временных рядов имеет целый ряд преимуществ в сравнении с другими моделями, одно из которых – это возможность их оперативного прогноза по построенной модели. В связи с этим ни одна методика анализа и изучения временных рядов не может обойтись без рассмотрения подобного класса задач.

### 1. Задание на лабораторную работу

Результатом выполнения лабораторной работы является оформленный отчет в виде *Jupyter*-тетради, в котором должны быть представлены и отражены все нижеперечисленные пункты:

- 1) Сначала импортируйте в свой код нужные библиотеки, функции и т.д.

```
import numpy as np  
import numpy.random as rand  
import matplotlib.pyplot as plt  
import h5py  
from statsmodels.tsa import api as tsa  
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf  
from statsmodels.tsa.arima_model import ARIMA  
%matplotlib inline
```

- 2) Для начала попробуем создать собственные АРПСС ряды первого и второго порядков и изучить их автокорреляционные функции.
- 3) Создадим два АР(1) процесса первого порядка:

$$z_t = 0.8z_{t-1} + a_t \quad \text{и} \quad z_t = -0.8z_{t-1} + a_t$$

где  $a_t$  – случайная нормально распределенная величина малой амплитуды (порядка 0.2),  $z_0 = 1$ .

```
z1 = np.zeros(100)  
z2 = np.zeros(100)  
z1[0] = 1  
z2[0] = 1  
for i in range(1,100):  
    z1[i] = 0.8 * z1[i - 1] + 0.2 * np.random.randn()  
    z2[i] = -0.8 * z2[i - 1] + 0.2 * np.random.randn()  
plt.figure(figsize = (10, 5))  
plt.plot(z1, 'b')  
plt.plot(z2, 'r')  
plt.show()
```

- 4) Постройте для этих рядов функции автокорреляции с помощью функции `plot_acf`:

```
plt.figure(figsize = (10, 5))  
plot_acf(z1, lags=50)  
plot_acf(z2, lags=50)  
plt.show()
```

- 5) Сравните эти графики между собой: найдите их сходства и различия, а также характерные особенности, которые позволяют отнести их к модели АР первого порядка.

- 6) Оцените весовой параметр этих процессов (как если бы Вы не знали о них) с помощью формулы  $\phi = \rho_1$ , на основе функции автокорреляции. Также удостоверьтесь, что для модели AR(1) коэффициенты автокорреляции изменяются по степенному закону  $\rho(l) = \phi^l$ .

- 7) Аналогичным образом постройте два СС(1) процесса среднего-скользящего первого порядка:

$$z_t = a_t - 0.8a_{t-1} \quad \text{и} \quad z_t = a_t - (-0.8)a_{t-1}$$

где  $a_t$  – случайная нормально распределенная величина

```
z3 = np.zeros(100)
z4 = np.zeros(100)
ar = 0.2 * np.random.randn(100)
for i in range(1, 100):
    z3[i] = ar[i] - 0.8 * ar[i - 1]
    z4[i] = ar[i] + 0.8 * ar[i - 1]
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(z3, 'b')
plt.plot(z4, 'r')
plt.show()
```

- 8) Постройте для этих рядов функции автокорреляции, достаточно взять 25 лагов (четверть от длины ряда).
- 9) Сравните эти графики между собой: найдите их сходства и различия, а также характерные особенности, которые позволяют отнести их к модели СС первого порядка.

- 10) Оцените весовой параметр этих процессов (как если бы Вы не знали о них) с помощью формулы ниже, на основе функции автокорреляции.

$$\theta_1^2 + \theta_1 / \rho_1 + 1 = 0, \quad |\theta_1| < 1$$

- 11) Также удостоверьтесь, что для модели СС(1) коэффициенты автокорреляции соответствуют формуле

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

- 12) Наконец, создайте временной ряд процесса АРСС(1, 1):

$$z_t = 0.8z_{t-1} + a_t - 0.3a_{t-1} \quad \text{и} \quad z_t = -0.8z_{t-1} + a_t - 0.3a_{t-1}$$

где  $a_t$  – случайная нормально распределенная величина,  $z_0 = 1$ .

Напишите код *Python* самостоятельно на основе комбинации предыдущих примеров.

- 13) Постройте графики этих рядов и графики их автокорреляционных функций.
- 14) Есть и другой, более высокоуровневый способ генерации рядов АРПСС. Используем следующую функцию для создания АРСС (2, 2):

```
from statsmodels.tsa.arima_process import arma_generate_sample
ar = np.array([0.75, -0.25]) # задаем коэффициенты АР
ma = np.array([0.65, 0.35]) # задаем коэффициенты СС
y = arma_generate_sample(np.r_[1, -ar], np.r_[1, ma], 100)
# создаем ВР для АРСС (2, 2) = АРПСС (2, 0, 2) из 100 отсчетов
```

- 15) Теперь проведем анализ неизвестного ряда на типовом примере, а затем каждый из студентов проводит анализ собственного ВР по вариантам (номер варианта = последние две цифры студенческого билета).
- 16) Значения исходного ряда (всего их 24) приведены ниже:
- TEST = [0.00, 9.99, 12.89, 10.70, 5.12, -1.21, -6.50, -7.96, -4.30, 0.42, 3.41, 4.50, 3.57, 2.24, 1.78, 0.89, -1.20, -3.43, -2.35, -0.85, -0.21, -0.08, 0.95, 0.45]**
- 17) Постройте график ВР и его автокорреляционную функцию.
- 18) По ним можно судить, что ВР, в достаточной степени, **стационарен**, а, так как, эта функция является **знакопеременной**, то один из членов АР модели имеет отрицательный вес.
- 19) Создадим три пробные модели АРПСС для проверки ряда на  $AP(1) = AP(1, 0, 0)$ ,  $AP(2)$ ,  $AP(3)$ , без тренда ( $trend = 'nc'$ ):

```
arima1 = ARIMA(TEST, order = (1, 0, 0))          # создаем модель
model_fit1 = arima1.fit(dispatch = False, trend='nc') # подгоняем под ВР
print(model_fit1.summary())                       # выводим таблицу результатов
arima2 = ARIMA(TEST, order = (2, 0, 0))
model_fit2 = arima2.fit(dispatch = False, trend='nc')
print(model_fit2.summary())
arima3 = ARIMA(TEST, order = (3, 0, 0))
model_fit3 = arima3.fit(dispatch = False, trend='nc')
print(model_fit3.summary())
```

- 20) Будут выведены три таблицы со всевозможной информацией, например, как ниже:

ARMA Model Results						
Dep. Variable:	y	No. Observations:	24			
Model:	ARMA(2, 0)	Log Likelihood	-41.543			
Method:	css-mle	S.D. of innovations	1.201			
Date:	Sun, 10 Mar 2019	AIC	89.086			
Time:	23:50:38	BIC	92.620			
Sample:	0	HQIC	90.024			
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]
ar.L1.y	1.5108	0.056	27.117	0.000	1.402	1.620
ar.L2.y	-0.9641	0.035	-27.509	0.000	-1.033	-0.895
Roots						
	Real	Imaginary	Modulus	Frequency		
AR.1	0.7836	-0.6506j	1.0185	-0.1103		
AR.2	0.7836	+0.6506j	1.0185	0.1103		

- 21) В этой таблице значения коэффициентов модели авторегрессии AP(2) написаны в столбце **coef**. СКВО их расчета – в следующем столбце.
- 22) **Как по этим таблицам выбрать наилучшую модель?** Во-первых, стоит обратить внимание на значение **AIC** – информационный критерий Акаике, который показывает максимальное правдоподобие модели при штрафовании за избыточные параметры системы. Считается, что наилучшей будет модель с **наименьшим** значением критерия AIC.
- 23) Аналогично есть **BIC** – Байесовский информационный критерий, модификация AIC. Данный критерий налагает больший штраф на увеличение количества параметров по сравнению с AIC.
- 24) Аналогично есть **HQIC** – информационный критерий Ханнана-Куинна (Hannan-Quinn), который асимптотически более точный метод чем BIC для дискретных параметров.

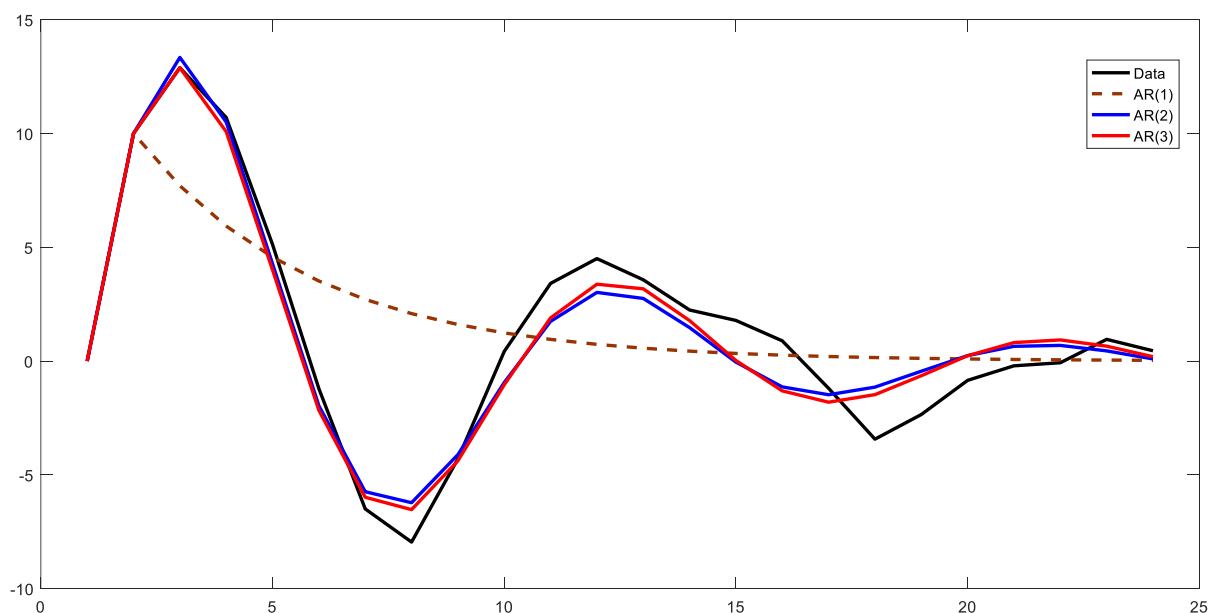


25) В любом случае, лучшей моделью будет та, что имеет наименьшее значение информационного критерия среди множества других. Рекомендуется, в первую очередь, выбирать по критерию **BIC**, так как он сильнее штрафует за переобучение модели и увеличение числа параметров по сравнению с другими. В нашем случае для тестового ВР, для любых информационных критериев, это модель  $AR(2)$ .

26) Другим методом выбора модели может служить построение моделей АРПСС выбранного порядка и с найденными коэффициентами на графиках совмещенно.

`plt.plot(model_fit.fittedvalues)`

27) Например, для приведенного примера:



Модель  $AR(1)$  совсем слабо подходит к ВР,  $AR(2)$  и  $AR(3)$  близки,  $AR(3)$  почти не отличается от  $AR(2)$ , но избыточен по числу параметров ( $3 > 2$ ), а значит  $AR(2)$  является наиболее оптимальной моделью ВР.

- 28) Теперь попробуйте найти весовые коэффициенты для АР моделей только **1 и 2 порядка** самостоятельно. Для этого Вам потребуется построить автокорреляционную функцию этого ряда.
- 29) Для нахождения весового коэффициента АР(1) используйте следующую формулу:

$$\phi = \rho_1.$$

где  $\rho_1 - r(1)$  оценка автокорреляционной функции.

- 30) Для АР(2) используйте следующие формулы аналогичным образом:

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}, \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}.$$

- 31) Убедитесь, что полученные веса будут близки к тем, что были получены с помощью функций *Python*.
- 32) Теперь в зависимости от своего варианта, который определяется по последним двум цифрам студ. билета, выберите из выданных преподавателей **mat-файлов** тот, который имеет номер Вашего варианта и загрузите из него временной ряд **Z**, например:
- ```
file = h5py.File('12.mat', 'r')
data = file.get('z12')
Z = np.array(data)
```
- 33) Постройте график ВР и его автокорреляционную функцию.

- 34) Оцените порядок АРСС модели с помощью класса ARIMA. Для упрощения задачи выбора модели используйте только чистые АР или СС модели, то есть класс ARIMA с  $\text{order} = (p, 0, 0)$  или  $\text{order} = (0, 0, q)$ .
- 35) Выберите модель с наиболее подходящей структурой и вычислите для нее коэффициенты. Предоставьте их для проверки Вашему преподавателю с пояснениями в выборе модели.
- 36) В дальнейшем попробуйте подобрать такую модель АРСС (ARIMA) со всевозможными параметрами  $\text{order} = (p, d, q)$ , которая будет наилучшей для данного ВР среди всех других по одному из информационных критериев.
- 37) Не забудьте в отчет-тетрадь добавить необходимые рисунки и таблицы результатов.

## 2. Требования к оформлению отчета

Отчет в Jupyter-тетради должен обязательно содержать: номер лабораторной работы, ФИО студента, номер варианта (либо студенческий номер), номер группы, результаты выполнения работы с комментариями студента (комментарии пишутся после #) и изображениями.