

Программа повышения конкурентоспособности

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Уральский федеральный университет имени

первого Президента России Б. Н. Ельцина»

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Лекция № 4

Разбиение временных рядов на компоненты

Екатеринбург

2017

Содержание

Цель изучения материала	3
Перечень компетенций, формирующихся или получающих приращение в результате прослушивания лекции	3
План лекции	4
Список литературы	4
Часть 1. Понятие разделимости временных рядов	5
Часть 2. Выделение тренда из временных рядов	8
2.1. Задача выделения трендовой составляющей «подгонкой»	9
2.2. Задача выделения трендовой составляющей сглаживанием	15
Часть 3. Выделение сезонных и периодических составляющих	17

Цель изучения материала

Целью данной лекции является знакомство с традиционными методами разделения временных рядов на составляющие их компоненты, изучение особенностей методик использования этих методов, а также формирование знаний и умений по декомпозиции временных рядов.

Перечень компетенций, формирующихся или получающих приращение в результате прослушивания лекции

Способность анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями.

Способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности.

Способность осуществлять сбор, анализ научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по тематике исследования.

Способность разрабатывать методы решения нестандартных задач и новые методы решения традиционных задач.

План лекции

1. Определение понятия разделимости рядов
2. Понятие декомпозиции стационарных временных рядов
3. Выделение тренда с помощью регрессии
4. Выделение тренда с помощью сглаживания
5. Поиск тригонометрических компонент временных рядов

Список литературы

1. David R. Brillinger. Time Series: Data Analysis and Theory. — SIAM, 2001. — 540 с.
2. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. — М.: Дело, 2007. — 504 с.
3. Садовникова Н.А., Шмойлова Р.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. — М.: «Футурис», 2009. — 261 с.
4. Мишулина О.А. Статистический анализ и обработка временных рядов. — М.: МИФИ, 2008. — 180 с.
5. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. — СПб. — 2004. — 76 с.

Часть 1. Понятие разделимости временных рядов

В самой первой лекции мы определили класс моделей, который нас будет больше всего интересовать на практике. К таковым относится аддитивная модель, состоящая из нескольких **компонент**:

$$x(t) = w_\tau \cdot \tau(t) + w_s \cdot \sum_j s_j(t) + w_p \cdot \sum_k p_k(t) + \xi(t), t \in [0; T], \quad (4.1)$$

где $\tau(t)$ – **тренд** (или тенденция); $s_j(t)$ – j -я **сезонная компонента** (месячные, квартальные, годовые, и т.д.); $p_k(t)$ – k -я **периодическая (циклическая) компонента**; w_τ, w_s, w_p – **коэффициенты наличия или отсутствия** составляющих (равны **0** или **1**); $\xi(t)$ – случайная составляющая.

Под **компонентой** мы будем понимать два разных вида частей, составляющих основу ВР $x(t)$. По первому алгоритму нас интересует разбиение ряда на **детерминированную** и **случайную** компоненты. Изначально нас интересует, есть ли обе эти части в исследуемом ВР, или же одна из них отсутствует. В этом нам помогут проверки статистических гипотез, перечисленные в третьей лекции. Если в ряде присутствует **детерминированная** составляющая, то по второму алгоритму нас уже больше интересуют типы компонент, такие как **тренд, сезоны и циклы**.

Возможность декомпозиции исходного ВР на вот эти составляющие его основные компоненты описывается понятием **разделимости** ВР. Пусть временной ряд $F = x(t)$ является аддитивной суммой m нескольких компонент и нашей задачей является нахождение **ровно** m этих слагаемых. Возникает вопрос: можем ли применением некоторого алгоритма в принципе восстановить из исходного ВР именно эти m компонент? Этим вопросом и занимается теория **разделимости** рядов.

Пусть F_1 и F_2 – ряды длины N и $F = F_1 + F_2$. Каждый из этих рядов при декомпозиции самыми разными методами будет порождать (например, на основе *сингулярного разложения*) линейные пространства \mathfrak{Z}_1 и \mathfrak{Z}_2 .

Будем говорить, что ряды F_1 и F_2 **слабо разделимы**, если $\mathfrak{Z}_1 \perp \mathfrak{Z}_2$, то есть базисы этих пространств будут ортогональны. Если ряды F_1 и F_2 слабо разделимы, и при этом еще и базисы линейных пространств \mathfrak{Z}_1 и \mathfrak{Z}_2 не пересекаются (то есть не имеют равных собственных чисел), то такие ряды будут уже **сильно разделимы**. Аддитивно увеличивая число компонент F_1 , F_2 , F_3 и т.д. до желаемого числа m , можно аналогично определить сильную разделимость m временных рядов.

Оказывается, что если ряды сильно разделимы, то существует метод, который позволит однозначно из исходного ВР получить вот эти желаемые компоненты в их исходном виде, то есть модель (4.1) будет точной. Поэтому часто такой вид разделимости называют **точной разделимостью**.

Такие теоретические определения хорошо звучат и обнадеживают в том, что ВР можно будет **разбить, разделить** или **декомпозировать** на составные компоненты. На практике все оказывается несколько печальней. Оказывается, точная разделимость не достижима даже для комбинации некоторых видов рядов при полном отсутствии шума. То есть сильная разделимость оказывается настолько «строгой», что даже не всякие аддитивные суммы детерминированных компонент без шума могут быть декомпозированы на компоненты. В связи с этим, вместо точной разделимости рядов (теоретического предела), используют **приближенную** и **асимптотическую** разделимости. Напомним, что условие разделимости отталкивается от ортогональности порожденных линейных пространств $\mathfrak{Z}_1 \perp \mathfrak{Z}_2$. Показателем меры этой ортогональности, или, говоря языком теории вероятностей, *независимости* двух рядов F_1 и F_2 , может служить

коэффициент корреляции $\rho_{1,2}$ двух этих выборок. Чем ближе $\rho_{1,2}$ к нулю, тем более независимы ряды F_1 и F_2 . Этот факт и используют для определения приближенной и асимптотической разделимости.

Ряды F_1 и F_2 будут **приближенно разделимыми**, если $0 < \rho_{1,2} < \varepsilon$ при малом заданном ε . Если при этом число отсчетов ВР устремить к бесконечности $N \rightarrow \infty$, то при выполнении условия $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho = 0$, ряды F_1 и F_2 будут **асимптотически разделимы**.

Асимптотическая разделимость на практике встречается редко, а вот приближенная разделимость позволяет применять ее уже на практике. Наиболее широко с понятием разделимости рядов мы будем встречаться при описании метода *сингулярного спектрального анализа*, который во много построен как раз на теории сильной и слабой разделимости временных рядов.

Часть 2. Выделение тренда из временных рядов

Для стационарных ВР, как уже было показано ранее, очень важна задача разбиения ряда на детерминированную и случайную составляющие, при этом детерминированная часть при анализе практических ВР, чаще всего, разбивается на части в виде аддитивной модели:

$$q(t) = w_\tau \cdot \tau(t) + w_s \cdot \sum_j s_j(t) + w_p \cdot \sum_k p_k(t) \quad (4.2)$$

Напомним, что по этой модели (4.2), неслучайная составляющая может содержать (а может, и нет) тренд/тенденцию, сезонные компоненты и циклические компоненты. Если сконцентрировать внимание на получении именно детерминированной части ВР, то, так как базовая модель является аддитивной, случайную составляющую ряда можно будет получить просто как разность исходного ВР и его найденной детерминированной части, то есть в виде **ряда остатков**. По этой причине задача декомпозиции стационарных временных рядов всегда сводится к задаче выделения детерминированной составляющей ВР и разделения ее на составные компоненты согласно (4.2) или некоторой другой модели.

Среди всех частей аддитивной модели (4.2) наиболее простым по своим характеристикам выглядит тренд, поэтому в большинстве методов (но не во всех) сначала стараются выделить именно трендовую составляющую ряда.

2.1. Задача выделения трендовой составляющей «подгонкой»

Тренд $\tau(t)$ из (4.2) отражает влияние долговременных факторов и соответствует долговременной и устойчивой тенденции изменения ВР. По этой причине, тренд зачастую также используют в качестве долгосрочного и среднесрочного прогноза.

Задача выделения тренда сводится к задаче оценки (или «подгонки» = *fitting*) $\tau(t)$ для базовой функции $\tau_b(t)$ по заданной временной выборке $y_i = y(t_i)$ ряда. Для упрощения задачи, предполагается, что остальных составляющих ряда (4.2) либо нет, либо их влияние в ВР несущественно, либо выполняется условие о **приближенной разделимости** составляющих ряда. Для трендовой составляющей в плане понятия разделимости все оказывается достаточно хорошо – даже при наличии шума большинство видов $\tau_b(t)$ тренда оказывается выделяемо на условиях **точной разделимости**, за исключением формы трендов высокой степени полинома.

Итак, ВР по статистическим тестам был определен, как стационарный, анализ автокорреляционной функции (или статистические тесты) показывает наличие тренда в выборке, можно приступить к выделению тренда. Существует **две группы** методов выделения тренда из ВР: методы **регрессионного анализа** (не путать с методами авторегрессии!) и методы **сглаживания**. Из-за широкой распространенности второй группы методов, очень часто задачу выделения тренда называют задачей **сглаживания временного ряда**.

Начнем с **регрессионных методов** выделения тренда. В этой группе методов модель (4.2) сводится к упрощенной форме

$$y(t) = \tau(t) + \varepsilon(t), \quad (4.3)$$

где $y(t)$ – исходный ВР, $\tau(t)$ – тренд, $\varepsilon(t)$ – случайная величина вместе с остальными сезонами и периодиками.

При этом у случайной величины предполагается мат. ожидание равное нулю и значение дисперсии равное σ^2 . Из этого свойства вытекает важно следствие – **все, что имеет мат. ожидание, отличное от нуля, должно быть отнесено к тренду**. Такое утверждение здесь не случайно – как мы увидим в дальнейшем, для разделимости сезонных и циклических компонент будет очень важно иметь нулевой средний уровень. Даже для моделей АРПСС зачастую приходится приводить ряда к некоторому около-нулевому уровню.

Зная искомую форму тренда $\tau_b(t)$, искомый тренд $\tau(t)$ аппроксимируется или подгоняется (*fitting*) на основе отсчетов из выборки $y(t)$ методами парной регрессии. Теория этих методов очень обширна и подробно рассматривается на других курсах данной дисциплины, здесь же нас будут интересовать только некоторые частные случаи из нее для решения конкретных поставленных задач.

В зависимости от вида тренда, будут использоваться разные функции подгонки. Тренды бывают нескольких видов:

1) Линейные

$$\tau(t) = \beta_0 + \beta_1 t \quad (4.4)$$

2) Квадратичные

$$\tau(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \quad (4.5)$$

3) Полиномиальные

$$\tau(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_p t^p \quad (4.6)$$

4) Экспоненциальные

$$\tau(t) = \beta_0 e^{\beta_1 t} \quad (4.7)$$

5) Логистические

$$\tau(t) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_1 e^{-\beta_2 t}} \quad (4.8)$$

6) Нелинейной формы (все остальные).

Выбор формы тренда, как ни странно, зачастую производится *визуально*. Если же визуальное определение затруднено, строят полиномиальные тренды, постепенно повышая их степень p до тех пор, пока не будет получен удовлетворительный результат.

При использовании (4.6) очень важно узнать наиболее близкую к искомой степень полинома p . Для ее начальной оценки используется метод последовательных разностей:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= y_i - y_{i-1} \\ \Delta_i^2 &= \Delta_i - \Delta_{i-1} \\ &\dots \\ \Delta_i^k &= \Delta_i^{k-1} - \Delta_{i-1}^{k-1}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Для каждой такой строки разностей вычисляется

$$d_k = \frac{1}{N-k} \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (\Delta_i^k)^2}{C_{2k}^k}, \quad C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2},\tag{4.10}$$

Эта величина (4.10) первоначально убывает с ростом k , а затем, начиная с некоторого k_0 , стабилизируется на одном уровне. Тогда степень полинома выбирается равной $p = k_0 - 1$.

После выбора вида функции (4.4) – (4.8) строят уравнение регрессии, зависящее от коэффициентов b_i , являющихся оценками коэффициентов β_i . Чтобы как можно меньше оперировать всевозможными частными случаями, для построения *линейной* регрессии используем **обобщенный метод наименьших квадратов**.

Центральным условием этого метода является условие минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^N (\tau(t_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.\tag{4.11}$$

В случае использования нелинейных функций, либо заменяют сами переменные регрессии соответствующими функционалами, либо производят

замену переменной через преобразования, линеаризующие уравнения регрессии. Например, модель тренда предполагается мультипликативной:

$$\tau(t) = \beta_0 t^{\beta_1} . \quad (4.12)$$

Тогда, производя логарифмирование ВР и модели получаем

$$\ln \tau(t) = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln t , \quad (4.13)$$

и, затем, заменой переменных вводим новые величины для построения линейной регрессии:

$$\tau'(t) = \beta_0' + \beta_1 t' . \quad (4.14)$$

Но вернемся к обобщенной линейной модели множественной регрессии. Пусть модель тренда имеет вид (где x могут быть заменены функциями от t):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (4.15)$$

В матричном виде она записывается, как:

$$y = X\beta + \varepsilon , \quad (4.15a)$$

где

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nk} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} . \quad (4.16)$$

При этом предполагаем, что матрица X – неслучайна, вектор ε имеет нулевое среднее и является некоррелированной случайной величиной, ранг матрицы X равен $rank(X) = p + 1 \leq N$. Такую регрессию (4.15) тогда называют **обобщенной линейной моделью множественной регрессии**.

Решая это матричное уравнение относительно вектора b , наилучшей оценкой среди всего множества решений будет являться следующее выражение:

$$b = (X^T V_{\varepsilon}^{-1} X)^{-1} X^T V_{\varepsilon}^{-1} y. \quad (4.17)$$

где V_{ε} – ковариационная матрица ошибок.

Проблема состоит в том, что такой матрицы на практике на руках у нас нет. Если ее нет, то ее можно оценить. Есть два способа это сделать.

Первый способ опирается на статистические оценки случайной составляющей и на условия приближенной разделимости временных рядов. Не вдаваясь в глубины теоретических выкладок, сразу приведем выражение для оценки обратной ковариационной матрицы ошибок:

$$V_{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mu & 1 + \mu^2 & -\mu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 1 + \mu^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \mu^2 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu & \mu \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где μ – оценка мат. ожидания АР модели, σ^2 – оценка дисперсии АР модели. Для окончательной формулы нам не хватает еще этих двух оценок.

Эти параметры оценивают с помощью следующего итерационного алгоритма:

- 0) Вычисляем оценку $b^{(0)} = (X^T X)^{-1} X^T y$ на шаге итерации $l = 0$.
- 1) Вычисляем вектор невязки $e^{(l)} = y - Xb^{(l)}$.
- 2) Находим $\mu^{(l)}$ по формуле

$$\mu^{(l)} = \frac{\frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})(e_{i+1} - \bar{e})}{\sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2} \quad (4.19)$$

и из него определяем оценку $\left(V^{(l)}\right)^{-1}$ по формуле (4.18), полагая в ней пока что $\sigma^2 = (1 - \mu^2)$.

3) Вычисляем вектор

$$b^{(l+1)} = \left(X^T \left(V^{(l)} \right)^{-1} X \right)^{-1} X^T \left(V^{(l)} \right)^{-1} y \quad (4.20)$$

и увеличиваем шаг итерации на один: $l = l + 1$.

4) Повторяем шаги 1-3, пока разница между $\mu^{(l+1)}$ и $\mu^{(l)}$ не будет мала.

5) По найденному $\mu = \mu^{(l+1)}$ вычисляем

$$\sigma^2 = \frac{(1 - \mu^2)}{N} \sum_{i=1}^N (e_i - \bar{e})^2. \quad (4.21)$$

Нужные нам оценки μ и σ^2 получены.

Но мы говорили о двух способах оценки ковариационной матрицы ошибок. Второй способ даже не является оценкой, а скорее будет предположением о том, что ошибки не коррелированы между собой, а потому V_ε^{-1} будет **единичной диагональной матрицей** I . Отсюда по второму способу общий метод регрессионного построения сводится к простой оценке по методу наименьших квадратов:

$$b = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y. \quad (4.22)$$

Таким образом, по одной из двух методик, будут получены весовые коэффициенты $\beta_i = b_i$ линейной регрессии (4.15) и, вычисляя получившийся тренд на заданной временной сетке ВР, будет найден тренд исходного ВР.

2.2. Задача выделения трендовой составляющей сглаживанием

В отличие от регрессионных методов выделения тренда, эти методы оценивают составляющие временного ряда только в определенные моменты времени исходного ВР, задаваемые **окном сглаживания**.

Определим оценку тренда, как взвешенное среднее исходных значений ряда, находящихся внутри окна сглаживания:

$$\tau_j = \sum_{l=-L}^L c_l y_{j+l}, \quad j = L+1, L+2, \dots, N-L, \quad (4.23)$$

где c_l – весовые множители с условием $\sum_{l=-L}^L c_l = 1$.

Видно, что суммируются L значений слева и справа от точки y_i . Длина интервала суммирования является окном сглаживания, которое словно «скользит» по исходным данным. В зависимости от выбора весовых коэффициентов c_l будут меняться виды сглаживания.

Самым простым сглаживанием будет **скользящее среднее**, в котором множители фиксированы длиной окна $(2L + 1)$ и выбирают как:

$$c_l = \frac{1}{2L+1}, \quad l = -L, \dots, 0, \dots, L \quad (4.24)$$

Например, при $L = 1$, длина окна равна 3, а метод скользящего среднего примет вид $\tau_j = 1/3(y_{j-1} + y_j + y_{j+1})$.

Можно заметить, что выражение (4.23) соответствует **фильтрации** в частотной области выборки заданного процесса, поэтому зачастую подобные методы называют сглаживающими фильтрами, а также рассматривают некоторые их виды, в зависимости от применения соответствующих видов фильтров. В данном курсе подобная фильтрация не рассматривается, так как фильтрация сигналов в целом подробно изучается в курсе «Анализа и цифровой обработки сигналов».

Стоит отметить только еще один тип скользящего среднего, часто встречающегося на практике – **экспоненциальное сглаживание**. Для этого сглаживания используются уже все отсчеты исходного ВР, но с разными весовыми коэффициентами.

Общее выражение экспоненциального сглаживания выглядит так:

$$\tau_j = (1 - \alpha)\tau_{j-1} + \alpha y_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

где α – коэффициент экспоненциального сглаживания между 0 и 1, а в качестве первой точки берется среднее значение ВР (или первых двух точек).

Это сглаживание отличается от (4.23) тем, что веса здесь, по сути, убывают с удалением от точки начала сглаживания. Выражение (4.25) еще очень удобно тем, что оно строится рекурсивно (следующее значение зависит от предыдущего), а потому может легко использоваться для прогнозирования тренда ВР.

Часть 3. Выделение сезонных и периодических составляющих

Согласно модели (4.2) в любом ВР может быть несколько **сезонных** и периодических компонент (**циклов**). Напомним, что разница между сезонной компонентой и циклом является чисто формальной: одна из них предполагается *квазипериодической*, а другая *строго периодической*. На практике, как ни странно, используется еще более упрощенная версия отделения этих двух понятий: циклы имеют период значительно больше, чем сезонные компоненты. Такая трактовка исходного смысла компонент возникла из-за того, что на практике более долгопериодические компоненты меньше подвержены флуктуациям во времени (циклы), чем короткопериодические сезоны.

Так как различие между этими составляющими минимально (особенно с точки зрения математической статистики), то мы будем называть их общим понятием **тригонометрической компоненты**, и пытаться выделить из исходного ВР.

Прежде, чем искать эти компоненты, исходный ВР анализируют с помощью автокорреляционных и спектральных методов, чтобы понять, есть ли тригонометрические компоненты в ряде вообще. Затем из исходного ряда убирают «среднюю тенденцию», в роли которой выступает тренд, методы выделения которого были описаны выше. При возможности, также стараются убрать из анализируемого ряда шум. Тогда, согласно аддитивной модели (4.2) у нас останется часть ВР, содержащая только тригонометрические компоненты.

Тогда тригонометрические составляющие можно попытаться выделить с помощью **спектрального гармонического анализа**. Сразу оговорим, что на практике этот метод будет применим очень редко, так как дальше мы приведем целый список требований, выдвигаемых к исходному ВР, чтобы данная методика заработала.

Предположим, что периодическая функция $\varphi(t)$ является непрерывной функцией с периодом T . Тогда эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right\}. \quad (4.26)$$

С увеличением номера гармоники, период функций \cos и \sin будет убывать. Коэффициенты разложения могут быть оценены по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{y}, \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N y_t \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right), \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N y_t \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Если теперь соотнести выражение (4.26) с определением периодограммы, то можно обнаружить, что энергетический вклад k -ой гармоники можно определить как $S_k = a_k^2 + b_k^2$. Периодограмма как раз и строит оценку зависимости $S_k = S(k)$, поэтому по ней можно определить те частоты, энергетический вклад которых в исходный ряд будет наибольшим.

Для выделения соответствующей тригонометрической компоненты, ряд Фурье (4.26) строится не целиком, а частично, только для тех гармонических составляющих, что будут присутствовать в выделяемой компоненте:

$$\hat{\varphi}(t) = a_0 + \sum_{k \in K} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right\} \quad (4.28)$$

Затем из ВР устраняется каждая периодика, начиная с той, у которой энергетический вклад наибольший, до тех пор, пока не останется некоторый остаточный ряд без периодик.

В целом такой алгоритм поиска и выделения тригонометрических компонент выглядит хорошо и просто. На практике же применимость этой методики оказывается существенно ограниченной, в силу требований к исходному ВР.

Итак, перечислим требования к свойствам исходного временного ряда, которыми он должен обладать, чтобы его тригонометрические компоненты было возможно выделить через ряд Фурье.

Во-первых, ВР должен быть стационарным, что уже не раз упоминалось. Во-вторых, должны выполняться условия теоремы Котельникова применительно к периодам компонент и частоте временной выборки. В-третьих, из-за ограниченной длины временного интервала, в спектральной области ряда будут возникать спектральные утечки, поэтому вместо ожидаемых «пигов» гармоник буду их sinc-приближения, то есть точные значения гармоник будут размыты. В-четвертых, преобразование Фурье имеет фиксированное частотное разрешение, поэтому тригонометрические компоненты с плавающим периодом будут **плохо разделимы** от ВР, либо не выделяемы вообще. В-пятых, если частота компоненты не кратна номеру гармоники Фурье, то такая компонента тоже считается **плохо разделимой**. Ну и, наконец, если тригонометрическая компонента ряда является частотно-модулированной, то есть ее период является функцией от времени, то такая компонента не определяется разложением Фурье и, следовательно, не выделяема из исходного ВР.

Таким образом, получается, что вид тригонометрических компонент, которые можно выделить через спектральный анализ, существенно ограничен. Как же тогда поступают в этом случае. Как мы увидим в дальнейшем, существует ряд **адаптивных методов** анализа и декомпозиции временных рядов, не выдвигающих к ряду и компонентам никаких особых требований, что позволяет декомпозировать исходный ВР на гармонические компоненты без каких-либо ограничений.