Chương 1. Logic

1.1 Mệnh đề :

- Những câu đúng hay sai (nhưng không vừa đúng vừa sai) được gọi là các mệnh đề.
- Một mệnh đề ĐÚNG ta nói rằng *mệnh đề có chân trị đúng*, một mệnh đề SAI ta nói rằng *mệnh đề có chân trị sai*.

➢ Ký hiệu 1 là ĐÚNG và 0 là SAI.

Ví dụ :

a) 3 là số lẻ. $\rightarrow$ chân trị đúng.

b) 4 không chia hết cho 2. $\rightarrow$ chân trị sai.

c) 5 là số nguyên tố. $\rightarrow$ chân trị đúng.

d) Hôm nay trời đẹp quá **!**

Câu cảm thán trên không là mệnh đề vì không có chân trị nhất định.

e) n là số chẵn.

Không là mệnh đề vì giá trị n chưa biết nên cũng không biết chân trị của nó.

1.2 Các phép toán trên mệnh đề:

p và q là các mệnh đề có chân trị là 1 hay 0.

a) Nối liền:

Bảng chân trị của $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$ và
1	**1**	1
1	**0**	0
0	**1**	0
0	**0**	0

- **$p \wedge q$ cũng là mệnh đề.**

Ví dụ :

1) $p : 1 + 2 = 3$,

   q : 3 là số lẻ,

   $\Rightarrow p \wedge q$ có chân trị đúng.

   ($p \wedge q \equiv 1+2 = 3$ **và** 3 là số lẻ.)

2) p : 7 là số nguyên tố,

   q : 4 là số lẻ,

   $\Rightarrow p \wedge q$ có chân trị sai.

b) Nối rời:

p	q	$p \vee q$ hay, hoặc
1	**1**	1
1	**0**	1
0	**1**	1
0	**0**	0

c) Nối rời loại trừ:

p	q	$p \oplus q$
1	**1**	0
1	**0**	1
0	**1**	1
0	**0**	0

d) Phủ định :

p	$\neg$p
1	0
0	1

- Ta cũng viết $\bar{p}$ thay cho $\neg$p.

Ví dụ :

1) $p : 1 + 2 = 3$,

   $\neg p : 1 + 2 \neq 3$.

   $\Rightarrow$ p có chân trị đúng.

   $\Rightarrow \neg p$ có chân trị sai.

2) p : 7 là số nguyên tố,

   $\neg$ p : 7 **không** là số nguyên tố.

d) kéo theo :

p	**q**	**$p \to q$**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- $p \to q \equiv$ Nếu p thì q.
- $p \to q \equiv$ p kéo theo q.
- p là điều kiện đủ của q.
- q là điều kiện cần của p.

Ví dụ :

1) p : 1 + 2 = 3,

 q : 3 là số lẻ,

 $\Rightarrow$ p $\rightarrow$ q có chân trị đúng.

2) p : 7 là số nguyên tố,

 q : 4 là số lẻ,

 $\Rightarrow$ p $\rightarrow$ q có chân trị sai.

 $\Rightarrow$ q $\rightarrow$ p có chân trị **?**.

e) kéo theo hai chiều:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- $p \leftrightarrow q \equiv$ p khi và chỉ khi q.
- $p \leftrightarrow q \equiv$ p nếu và chỉ nếu q.

Ví dụ :

1) p : 1 + 2 = 3,

   q : 3 là số lẻ,

   $\Rightarrow p \leftrightarrow q$ có chân trị đúng.

2) p : 7 là số nguyên tố,

   q : 4 là số lẻ,

   $\Rightarrow p \leftrightarrow q$ có chân trị sai.

Bài tập tại lớp :

1) Lập bảng chân trị của $(p \rightarrow q) \wedge r$:

p	**q**	**r**	**$p \rightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge r$**
1	1	1		
1	1	0	1	0
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

2) Lập bảng chân trị của $\neg p \rightarrow (\neg q \vee r)$.

Bài tập tại lớp :

3) Trong các khẳng định sau , cho biết khẳng định nào là mệnh đề :

a) n + 2 là số chẵn, với n là một số tự nhiên (N).
b) 3 là số nguyên tố.
c) Hãy học toán rời rạc đi.
d) Nếu 3 chia hết cho 2 thì 4 < 3.
e) 3 chia hết cho 2 nếu và chỉ nếu 4 < 3.

Bài tập tại lớp : BT 1, 2, 3, 4, 8, 9 Tr 31, 32

1.3 Dạng mệnh đề :

Dạng mệnh đề là một biểu thức cho giá trị là đúng (1) hay sai (0) được xây dựng từ :

- các giá trị đúng (1) , sai (0).
- các biến p, q, . . . lấy giá trị đúng (1) , sai (0).
- các phép nối.

Ví dụ :

$$E(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge r.$$

Nếu cho

p : 3 là số lẻ,

q : 4 chia hết cho 2,

r : 3 > 7,

thì E(p, q, r) có chân trị sai.

1.4 Hằng đúng, hằng sai:

1.4.1 Định nghĩa:

- Hằng đúng là dạng mệnh đề luôn cho chân trị đúng.
- Hằng sai (mâu thuẫn) là dạng mệnh đề luôn cho chân trị sai.

Ví dụ :

a) $E(p, q) = [(p \to q) \wedge p] \to q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	E(p, q)
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

b) $E(p) = p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	E(p)
1	0	**0**
0	1	**0**

Ví dụ :

c) $E(p, q) = p \rightarrow q$

p	q	E(p, q)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- E(p, q) không là hằng đúng.
- E(p, q) không là hằng sai.

1.4.2 Định nghĩa: Cho E và F là hai dạng mệnh đề có các biến là $p_1, \ldots, p_n$.

E và F là **tương đương logic**, nếu E và F cùng ĐÚNG hay cùng SAI với mọi bộ chân trị của $(p_1, \ldots, p_n)$.

- E và F có cùng bảng chân trị.
- Ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.
- Trong phép tính mệnh đề thường không phân biệt các dạng mệnh đề tương đương logic.

Ví dụ:

- $E(p, q) = p \rightarrow q$
- $F(p, q) = \neg p \vee q$.

Ta có $E \Leftrightarrow F$.

1.4.3 Mệnh đề: E và F là tương đương logic khi và chỉ khi E $\leftrightarrow$ F là hằng đúng.

Bài tập : lập bảng chân trị của

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

1.4.4 Định nghĩa: Cho F và E là hai dạng mệnh có các biến là $p_1, \ldots, p_n$.

- F là hệ quả logic của E nếu $E \rightarrow F$ là hằng đúng.

- Ký hiệu $E \Rightarrow F$.
- Ta cũng nói E có hệ quả logic là F.

Ví dụ :

$E(p, q) = (p \to q) \land p$,

$F(p, q) = q$,

Ta có $E \to F$ là hằng đúng. $E \Rightarrow F$.

Bài tập tại lớp : 9, 11, 12, 13, 15, 16 . Tr 32, 33, 34

1.5 Qui tắc thay thế:

1.5.1 Qui tắc 1:

Cho E là dạng mệnh và F là dạng mệnh đề con của E.

Nếu thay F bởi F’ tương đương logic thì mệnh đề thu được E’ tương đương logic với E.

Ví dụ : $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$.

$F = q \rightarrow r$,

$F' = \neg q \vee r$.

1.5.2 Qui tắc 2: Cho E(p, q, r, . . .) là hằng đúng.

Nếu thay những nơi p xuất hiện trong E bởi một dạng mệnh đề tùy ý F(p', q', r', . . .) thì mệnh đề thu được E' vẫn còn là hằng đúng.

Ví dụ : $E(p,q) = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Thay p bởi $F(s, t) = s \vee t$.

Thay p bởi $F(p, q) = p \vee q$ (**?**).

Bài tập : lập bảng chân trị cho E'.

1.6 Qui luật logic: Cho p, q, r là các *biến mệnh đề*, **1** là một **hằng đúng** và **0** là một **hằng sai**. Ta có các tương đương logic :

i) Phủ định của phủ định:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

ii) Qui tắc De Morgan :

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

iii) Luật giao hoán:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p,$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

iv) Luật kết hợp :

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),$$

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

v) Luật phân bố:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

vi) Luật lũy đẳng:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

vii) Luật trung hòa:

$$p \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow p$$

$$p \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow p$$

viii) Luật về phần tử bù :

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

ix) Luật thống trị :

$$p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

$$p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

x) Luật hấp thụ:

$$p \wedge (q \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$p \vee (q \wedge p) \Leftrightarrow p$$

Ví dụ: dùng các qui luật logic chứng minh

$$[(p \to q) \land p] \to q$$

là **hằng đúng** (cm $[(p \to q) \land p] \to q \Leftrightarrow \mathbf{1}$).

Giải:

1. $[(p \to q) \land p] \to q \quad \Leftrightarrow$ (qui tắc thay thế 1)
2. $[(\neg p \lor q) \land p] \to q \quad \Leftrightarrow$ phân bố
3. $[(\neg p \land p) \lor (q \land p)] \to q \Leftrightarrow$ phần tử bù
4. $[\mathbf{0} \lor (q \land p)] \to q \quad \Leftrightarrow$ trung hòa
5. $(q \land p) \to q \quad \Leftrightarrow$ (qui tắc thay thế 1)
6. $\neg(q \land p) \lor q \quad \Leftrightarrow$?

. . . $\quad \Leftrightarrow$?

n. **1**

1.7 Suy luận : Một suy luận (suy diễn) là một dạng mệnh đề có dạng

$$(\mathbf{P_1} \land \mathbf{P_2} \land . . . \land \mathbf{P_n}) \rightarrow \mathbf{Q}$$

- P_i là dạng mệnh đề, được gọi là các *tiền đề*.
- Q là dạng mệnh đề, được gọi là *kết luận*.

Định nghĩa : Suy luận

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

được nói là **đúng** nếu nó là hằng đúng.

Khi đó ta viết :

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

Hay

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Ví dụ : Xét suy luận

$E(p, q) = \mathbf{[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q}$.

$\mathbf{P_1}$ = ? , $\mathbf{P_2}$ = ?, **P_3 = ?, . . . ,Q** = ?.

E(p, q) là suy luận đúng ?

Ví dụ : giả sử ta có suy luận:

P_1 : Nếu Dũng đi học đều thì Dũng đạt môn toán rời rạc.

P_2 : Dũng đi học đều.

Kết luận Q : Dũng đạt môn toán rời rạc.

Muốn biết suy diễn trên đúng hay không ta thực hiện các bước :

Bước 1: trừu tượng hóa các mệnh đề trong tiền đề.

- p : Dũng đi học đều,
- q : Dũng đạt môn toán rời rạc,
- P1 : $p \to q$,
- P2 : p,
- Q : q.

➢ Mệnh đề được trừu tượng hóa không là mệnh đề phức hợp.

Bước 2: viết suy diễn đã cho dưới dạng suy diễn hình thức.

$$[(p \to q) \land p] \to q$$

$$([P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n] \to Q)$$

Bước 3: kiểm tra dạng mệnh đề này có là hằng đúng không. Nếu là hằng đúng thì suy diễn đã cho là suy diễn đúng. Ngược lại là suy diễn sai.

Theo ví dụ ta cần kiểm tra

$$[(p \to q) \land p] \to q$$

là hằng đúng.

Hay cần kiểm tra

$$p \to q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

Ví dụ : giả sử ta có suy luận:

P_1 : Nếu Dũng đi học đều thì Dũng đạt môn toán rời rạc.

P_2 : Dũng không đạt TRR .

Kết luận Q : Dũng không đi học đều.

Bước 2 :

$$[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p.$$

P_1 = ? , P_2 = ?, Q = ?.

Ví dụ : Kiểm tra suy luận:

P_1 : Nếu Dũng đi học đều thì Dũng đạt môn toán rời rạc.

P_2 : Dũng đạt TRR .

Kết luận Q : Dũng đi học đều.

Một số qui tắc suy diễn thường dùng.

<u>Phương pháp khẳng định (Modus Ponens)</u>

$$[\,(p \rightarrow q) \land p\,] \rightarrow q \text{ là hằng đúng}$$

Hay

$$[\,(p \rightarrow q) \land p\,] \Rightarrow q$$

Một số qui tắc suy diễn thường dùng.

Phương pháp tam đoạn luận (Syllogism)

$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$ là hằng đúng

Hay

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$$

Hay

$$p \to q$$

$$q \to r$$

$$\therefore p \to r$$

Ví dụ :

Nếu Bình đi chơi thì Bình không học toán rời rạc

Nếu Bình không học toán rời rạc thì Bình trượt toán rời rạc

Vậy nếu Bình đi chơi thì Bình trượt toán rời rạc.

Đặt :

p: Bình đi chơi

q: Bình không học toán rời rạc

r : Bình trượt toán rời rạc

Ta có suy luận trên là dạng tam đoạn luận.

Ví dụ : Suy luận sau có phải là suy luận đúng không ?

Nếu Bình đi chơi thì Bình không học toán rời rạc

Nếu Bình không học toán rời rạc thì Bình trượt toán rời rạc

Mà Bình *thích* đi chơi

Vậy Bình trượt toán rời rạc.

Cần kiểm tra

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Ví dụ :

Nếu Bình đi chơi thì Bình không học toán rời rạc

Nếu Bình không học toán rời rạc thì Bình trượt toán rời rạc

Vậy nếu Bình đi chơi thì Bình trượt toán rời rạc.

Mà Bình *thích* đi chơi

Vậy Bình trượt toán rời rạc.

$$
\begin{array}{l}
\quad p \rightarrow q \\
\quad q \rightarrow r \\
\hline
\therefore p \rightarrow r \\
\quad p \\
\hline
\therefore r
\end{array}
$$

Một số qui tắc suy diễn thường dùng.

Phương pháp phủ định (Modus Tollens)

$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ là hằng đúng

Ví dụ : Kiểm tra suy luận:

Nếu Dũng đi học đều thì Dũng đạt môn toán rời rạc.

Mà Dũng không đạt TRR .

Vậy Dũng không đi học đều.

Bài tập tại lớp : 17, 20, 22, 27, 28, 30, Tr 34, 35, 36

1.8 Vị từ và lượng từ:

1.8.1 Định nghĩa: vị từ P(x, y, . . .), $x \in A$, $y \in B$, . . .

- P chưa phải là mệnh đề (chưa xác định được chân trị),

- Khi thay $x = a \in A$, $y = b \in B$, . . . thì ta có **mệnh đề** P(a,b, . . .) (Xác định được chân trị).

Ví dụ : P(x, y) : " x+y=2", x, $y \in Z$.

- P(x, y) chưa là mệnh đề,
- P(4, 2) : " 4+2=2" là mệnh đề có chân trị SAI.

1.8.2 Định nghĩa 1: Cho $p(x)$, $q(x)$, $x \in A$ là các vị từ. Khi ấy:

i) $\neg p(x)$ là vị từ, khi thay $x=a$ có chân trị là $\neg(p(a))$.

ii) $(p \wedge q)(x)$, $(p \vee q)(x)$ là hai vị từ , khi thay $x=a$ có chân trị là $p(a) \wedge q(a)$, $p(a) \vee q(a)$.

iii) $(p \to q)(x)$, $(p \leftrightarrow q)(x)$ là hai vị từ, khi thay $x=a$ có chân trị là $p(a) \to q(a)$, $p(a) \leftrightarrow q(a)$.

1.8.2 Định nghĩa 2 : Cho $p(x, y)$, $q(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$ là các vị từ. Khi ấy:

i) $\neg p(x,y)$ là vị từ, khi thay $x=a$, $y=b$ có chân trị là $\neg(p(a, b))$.

ii) $(p \wedge q)(x, y)$, $(p \vee q)(x, y)$ là hai vị từ , khi thay $x=a$, $y=b$ có chân trị là $p(a,b) \wedge q(a, b)$, $p(a,b) \vee q(a, b)$.

iii) $(p \rightarrow q)(x, y)$, $(p \leftrightarrow q)(x, y)$ là hai vị từ, khi thay $x=a$, $y=b$ có chân trị là $p(a,b) \rightarrow q(a, b)$, $p(a,b) \leftrightarrow q(a, b)$.

- Ta cũng viết

- $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$ thay cho $(p \wedge q)(x)$, $(p \vee q)(x)$.
- $p(x) \rightarrow q(x)$, $p(x) \leftrightarrow q(x)$ thay cho $(p \rightarrow q)(x)$, $(p \leftrightarrow q)(x)$.

- $p(x,y) \wedge q(x, y)$, $p(x,y) \vee q(x, y)$ thay cho $(p \wedge q)(x, y)$, $(p \vee q)(x, y)$.
- $p(x,y) \rightarrow q(x, y)$, $p(x,y) \leftrightarrow q(x, y)$ thay cho $(p \rightarrow q)(x, y)$, $(p \leftrightarrow q)(x, y)$.

Ví dụ :

p(x) : $x > 2, x \in Z$,

q(x) : x chia hết cho 2,

i) $\neg p(3)$ có chân trị của $\neg(p(3))$, chân trị sai.

ii) $(p \land q)(4)$ có chân trị $p(4) \land q(4)$, đúng.

iii) $(p \to q)(5)$ có chân trị $p(5) \to q(5)$, ???

iv) $(p \leftrightarrow q)(1)$ có chân trị $p(1) \leftrightarrow q(1)$, ???.

1.8.3 Định nghĩa: Cho P(x), $x \in A$ ($A \neq \emptyset$) là vị từ.
Lượng từ phổ dụng một biến là **mệnh đề**:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

cho chân trị :

- **ĐÚNG** : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** $a \in A$, P(a) có chân trị ĐÚNG.
- **SAI** : Nếu **có một** giá trị $a \in A$, P(a) có chân trị SAI.

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng :

Nếu $\forall$**x** $\in$ **A, P(x)** là mệnh đề đúng thì khi thay x bởi a $\in$ A ta có P(a) đúng.

Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng :

Nếu chứng minh được với mọi a $\in$ A, p(a) đúng thì mệnh đề $\forall$**x** $\in$ **A, P(x)** có chân trị đúng.

$\forall x \in A, P(x)$

- **ĐÚNG** : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** $a \in A$, P(a) có chân trị ĐÚNG.

Ví dụ 1: Xét chân trị $\forall x \in Z, x^2 \geq 0$.

Ta có P(x) : "$x^2 \geq 0$", $x \in Z$.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị ĐÚNG. Vì thay x bằng giá trị bất kỳ $a \in Z$ ta có $a^2 \geq 0$ có chân trị đúng (P(a) có chân trị ĐÚNG).

$\forall x \in A, P(x)$

cho chân trị :

- **SAI** : Nếu **có một** giá trị $a \in A$, P(a) có chân trị SAI.

Ví dụ 2: Xét chân trị $\forall x \in Z, x + 1 \geq 0$.

Ta có P(x) : "$x+1 \geq 0$", $x \in Z$.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị SAI. Vì có giá trị $-2 \in Z$ và $-2 +1 \geq 0$ có chân trị SAI (P(a) có chân trị SAI).

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Ví dụ 3: Cho vị từ q(x) : "$x^2 \geq 0$", r(x) : " $x + 1 \geq 0$", $x \in R$.

Xét chân trị của

$$\forall x \in R, q(x) \vee r(x) \quad (1)$$

Ta có **P(x)** : $q(x) \vee r(x)$, $x \in R$.

Chứng minh (1) đúng.

$$\forall x \in A, P(x)$$

Ví dụ 4: Cho vị từ

$$q(x) : \text{“}x^2 - 3x + 2 = 0\text{”},\ r(x) : \text{“ } x>0 \text{ ”},\ x \in R.$$

Xét chân trị của

$$\forall x \in R, q(x) \to r(x)$$

Ta có P(x) : ?.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị. . . . Vì . . .

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

Giải : Cho vị từ

$$q(x) : \text{“}x^2 - 3x + 2 = 0\text{”}, \; r(x) : \text{“ } x>0 \text{ ”}, \; x \in R.$$

Xét chân trị của

$$\forall x \in R, q(x) \rightarrow r(x)$$

Ta có $P(x) : q(x) \rightarrow r(x)$.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị ĐÚNG . Vì

- $x=1$ ta có $q(1) \rightarrow r(1)$ ĐÚNG.
- $x=2$ ta có $q(2) \rightarrow r(2)$ ĐÚNG.
- $x \neq 1 , 2$ ta có $q(x) \rightarrow r(x)$ ĐÚNG (do $q(x)$ SAI).

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

Ví dụ 5: Cho vị từ

$q(x)$: "x^2 -x - 2 = 0", $r(x)$: " x>0 ", $x \in R$.

Xét chân trị của

$$\forall x \in R, q(x) \rightarrow r(x)$$

Ta có P(x) : ?.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

Giải : Cho vị từ

$$q(x) : \text{“}x^2 - x - 2 = 0\text{”}, \; r(x) : \text{“} x>0 \text{”}, \; x \in R.$$

Xét chân trị của

$$\forall x \in R, q(x) \rightarrow r(x)$$

Ta có P(x) : $q(x) \rightarrow r(x)$.

Lượng từ phổ dụng đã cho có chân trị SAI . Vì có $-1 \in R$ và q(-1) ĐÚNG, r(-1) SAI, nên

$$q(-1) \rightarrow r(-1) \text{ SAI.}$$

(P(-1) có chân trị SAI)

1.8.4 Định nghĩa: Cho P(x) là vị từ. Lượng từ tồn tại một biến là **mệnh đề**:

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

cho chân trị :

- ĐÚNG : Nếu **có một** giá trị $a \in A$, P(a) có chân trị ĐÚNG.

- SAI : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** $a \in A$, P(a) có chân trị SAI.

$\exists x \in A, P(x)$

- **ĐÚNG** : Nếu **có một** giá trị $a \in A$, P(a) có chân trị ĐÚNG.

Ví dụ 6: $\exists\, x \in Z, x - 1 \geq 0$.

Ta có P(x) : "$x - 1 \geq 0$", $x \in Z$.

Lượng từ tồn tại đã cho có chân trị ĐÚNG. Vì có giá trị $2 \in Z$ và $2-1 \geq 0$ (P(a) có chân trị ĐÚNG).

$\exists x \in A, P(x)$

cho chân trị :

SAI : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** $a \in A$, P(a) có chân trị SAI.

Ví dụ 7: $\exists\, x \in Z, x^2 < 0$.

Ta có P(x) : "$x^2 < 0$", $x \in Z$.

Lượng từ tồn tại đã cho có chân trị SAI. Vì thay x bằng giá trị bất kỳ $a \in Z$ ta có $a^2 < 0$ có chân trị SAI (P(a) có chân trị SAI).

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

Ví dụ 8: Cho vị từ q(x) : "x^2 - 1≥ 0", r(x) : " x + 1 ≥ 0", $x \in R$.

Xét chân trị của

$$\exists\, x \in R, q(x) \wedge r(x) \quad (1)$$

Ta có P(x) : $q(x) \wedge r(x)$, $x \in R$.

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$$

Ví dụ 9: Cho vị từ q(x) : "$x^2 \geq 0$", r(x) : " sinx > 1 ", $x \in R$.

Xét chân trị của

$$\exists\, x \in R,\ q(x) \to r(x)$$

Ta có P(x) : $q(x) \to r(x)$, $x \in R$.

1.8.5 Mệnh đề:

i) Phủ định của mệnh đề $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$ là mệnh đề

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \neg \mathbf{P(x)}$$

ii) Phủ định của mệnh đề $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{P(x)}$ là mệnh đề

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \neg \mathbf{P(x)}$$

1.8.6 Định nghĩa: Cho P(x, y) là vị từ. Lượng từ hai biến là **mệnh đề** :

Dạng 1 : $\forall$**x** $\in$ **A,** $\forall$**y** $\in$ **B, P(x, y)**

cho chân trị :

- **ĐÚNG** : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** a $\in$ A , thay y bằng giá trị **bất kỳ** b $\in$ B, ta có P(a, b) có chân trị ĐÚNG.
- **SAI** : Nếu **có một** giá trị a $\in$ A , **có một** giá trị b $\in$ B mà P(a, b) có chân trị SAI.

Ví dụ 1: $\forall x \in Z, \forall y \in Z, x^2 + y^2 \geq 0$. Ta có P(x, y) : "$x^2 + y^2 \geq 0$", x, y $\in$ Z.

Lượng từ đã cho có chân trị ĐÚNG. Vì thay x bằng giá trị **bất kỳ** a $\in$ Z , thay y bằng giá trị **bất kỳ** b $\in$ Z ta có $a^2 + b^2 \geq 0$ có chân trị ĐÚNG (P(a, b) có chân trị ĐÚNG).

Ví dụ 2: $\forall x \in Z, \forall y \in Z, x + y = 0$. Ta có $P(x, y)$: "$x+y = 0$", $x, y \in Z$.

Lượng từ đã cho có chân trị SAI. Vì có $1 \in Z$, có $2 \in Z$ và $1 + 2 = 0$ có chân trị SAI.(P(1, 2) có chân trị SAI).

Ví dụ 3:

$\forall x \in Z, \forall y \in Z, (x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow x + y > 0.$

Ta có

$P(x, y)$: “$(x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow x + y > 0$”, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Ví dụ 4:

$\forall x \in Z, \forall y \in Z, (x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow x + y = 0.$

Ta có

$P(x, y)$: "$(x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow x + y = 0$", $x, y \in \mathbb{Z}$.

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Ví dụ 5: Cho X= {1, 2, 3},

$$R = \{(1,2), (2, 1)\} \subseteq X \times X.$$

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in R \to (y, x) \in R.$$

Ta có

$P(x, y)$: "$(x, y) \in R \to (y, x) \in R$", $x, y \in X$

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Ví dụ 6: Cho X= {1, 2, 3},

$$R = \{(1,2), (2, 1), (1, 3)\} \subseteq X \times X.$$

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R.$$

Ta có

$P(x, y)$: “$(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$”, $x, y \in X$

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Dạng 2: $\forall$**x** $\in$ **A,** $\exists$**y** $\in$ **B, P(x, y)**

cho chân trị :

- **ĐÚNG** : Nếu thay x bằng giá trị **bất kỳ** a $\in$ A , **có một** giá trị b $\in$ B, ta có P(a, b) có chân trị ĐÚNG.
- **SAI** : Nếu **có một** giá trị a $\in$ A , thay y bằng giá trị **bất kỳ** b $\in$ B mà P(a, b) có chân trị SAI.

Ví dụ 7: $\forall x \in Z, \exists y \in Z, x^2 + y \geq 0$.

Ta có P(x, y) : "$x^2 + y \geq 0$", $x, y \in Z$.

Lượng từ đã cho có chân trị ĐÚNG. Vì thay x bằng giá trị **bất kỳ** $a \in Z$, có y bằng $0 \in Z$, $a^2 + 0 \geq 0$ có chân trị ĐÚNG (P(a, b) có chân trị ĐÚNG).

Ví dụ 8: $\forall x \in Z, \exists y \in Z, x - y^2 \geq 0$.

Ta có P(x, y) : "$x - y^2 \geq 0$", $x, y \in Z$.

Lượng từ đã cho có chân trị SAI . Vì có x bằng -1 $\in Z$, thay y bằng giá trị bất kỳ b $\in Z$, $-1 - b^2 \geq 0$ có chân trị SAI (P(a, b) có chân trị SAI).

Dạng 3: $\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)$

cho chân trị :

- **ĐÚNG** : Nếu có một giá trị a $\in$ A , thay y bằng giá trị bất kỳ b $\in$ B, ta có P(a, b) có chân trị ĐÚNG.
- **SAI** : Nếu thay x bằng giá trị bất kỳ a $\in$ A , có một giá trị b $\in$ B mà P(a, b) có chân trị SAI.

Ví dụ 9: $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x + y^2 \geq 0$.

Ta có $P(x, y)$: "$x + y^2 \geq 0$", $x, y \in Z$.

Lượng từ đã cho có chân trị ĐÚNG. Vì có x bằng $0 \in Z$, thay y bằng giá trị bất kỳ $b \in Z$, $0 + b^2 \geq 0$ có chân trị ĐÚNG ($P(a, b)$ có chân trị ĐÚNG).

Ví dụ 10: $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x^2 + y \geq 0$.

Ta có P(x, y) : "$x^2 + y \geq 0$", $x, y \in Z$.

Lượng từ đã cho có chân trị SAI. Vì thay x bằng giá trị bất kỳ $a \in Z$, có y bằng $-a^2 - 1 \in Z$, $x^2 + y \geq 0$ có chân trị SAI (P(a, b) có chân trị SAI).

Dạng 4 : $\exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$

cho chân trị :

- **ĐÚNG** : Nếu có một giá trị $a \in A$, có một giá trị $b \in B$, ta có P(a, b) có chân trị ĐÚNG.
- **SAI** : Nếu thay x bằng giá trị bất kỳ $a \in A$, thay y bằng giá trị bất kỳ $b \in B$ mà P(a, b) có chân trị SAI.

Ba biến :

1. $\forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, P(x, y, z)$
2. $\forall x \in A, \exists y \in B, \forall z \in C, P(x, y, z)$
3. $\exists x \in A, \exists y \in B, \forall z \in C, P(x, y, z)$

Ví dụ 11: Cho X= {1, 2, 3, 4},

$R = \{(1,2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$.

$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R.$$

Ta có

$P(x, y, z)$: "$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$",

$x, y, z \in X$.

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Giải : Cho X= {1, 2, 3, 4}, R = {(1,2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)}.

$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R.$$

Ta có

$P(x, y, z)$: "$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$"

Lượng từ đã cho có chân trị ĐÚNG . Vì

- $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ta có $P(x, y, z)$ có chân trị đúng.

- $(x, y, z) \neq (1, 2, 3)$ ta có $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ có chân trị sai. Do đó $P(x, y, z)$ có chân trịn đúng (những x, y, z nào?)

Ví dụ 12: Cho X= {1, 2, 3, 4}, R = {(1,2), (2, 3), (1, 4)}.

$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R.$$

Ta có

$P(x, y)$: "$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$", $x, y \in X$

Lượng từ đã cho có chân trị . . . . Vì . . .

Giải : Cho X= {1, 2, 3, 4}, R = {(1,2), (2, 3), (1, 4)}.

$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R.$$

Ta có

P(x, y) : "$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$", $x, y \in X$

Lượng từ đã cho có chân trị SAI . Vì

có x=1, y=2, z=3 và $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ có chân trị đúng nhưng $(x, z) = (1, 3) \in R$ có chân trị SAI.

1.8.7 Định lý: Cho P(x, y) là vị từ. Ta có các mệnh đề sau là đúng:

i) $[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)]$

ii) $[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$

iii) $[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$

iii) $[\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \to [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$

Ví dụ: $p(x, y) : x+y=1$, $x, y \in R$.

Xét mệnh đề

$$\forall y \in R, \exists x \in R, p(x,y). \qquad (1)$$

Ta có khi thay y bởi b bất kỳ $\in R$ ta luôn tìm được $x = 1-b \in R$ để cho $x+y=1$. Vậy (1) có chân trị đúng.

Xét mệnh đề

$$\exists x \in R, \forall y \in R, p(x,y). \qquad (2)$$

Ta có thay x bởi a bất kỳ $\in R$ luôn có $y = -a$ mà $x+y=1$ là sai. Vậy (2) có chân trị sai.

1.8.8 Nguyên lý qui nạp:

Mệnh đề $\forall n \in N$, p(n) là hệ quả của

$$p(0) \wedge [\forall n \in N ,\ p(n) \rightarrow p(n+1)].$$

Bài tập tại lớp : 31, 32, 34, 36, 37, 38, 41, 42, Tr 39→42

Tài liệu tham khảo:

1) Toán rời rạc, GS. Nguyễn Hữu Anh, Ph. D

2) Discrete Mathematics, Richard Johnsonbaugh

3) Discrete Mathematics, Seymour Lipschutz, Marc Lipson