

# Teoría de Colas.

*José Pedro García Sabater*

*Grupo ROGLE*

*Departamento de Organización de Empresas*

*Universidad Politécnica de Valencia.*

*Curso 2010 / 2011*

---

*Parte de estos apuntes está basado en la fundamental obra “Fundamentals of Queueing Theory” por Donald Gross y Carl Harris. Pero también Factory Physics (Hopps and Spearman) y Manufacturing Systems Modelling and Analysis (Curry y Feldman) junto con un pequeño aporte del que firma como autor han contribuido.*

## Contenido

1.	Introducción .....	5
2.	Descripción de un sistema de colas.....	5
2.1	Características de los sistemas de colas .....	6
2.1.1	PATRÓN DE LLEGADA DE LOS CLIENTES .....	6
2.1.2	PATRONES DE SERVICIO DE LOS SERVIDORES .....	6
2.1.3	DISCIPLINA DE COLA .....	7
2.1.4	CAPACIDAD DEL SISTEMA.....	7
2.1.5	NÚMERO DE CANALES DEL SERVICIO.....	7
2.1.6	ETAPAS DE SERVICIO.....	8
2.1.7	RESUMEN.....	8
2.2	Notación básica .....	8
2.2.1	NOMENCLATURA.....	8
2.3	Como medir el rendimiento de un sistema .....	10
2.4	Algunos resultados generales .....	11
2.4.1	RESULTADOS Y RELACIONES.....	11
2.5	Como recoger datos en un sistema de colas .....	12
2.6	Los procesos de Poisson y la distribución exponencial.....	14
2.6.1	PROPIEDADES DEL PATRÓN DE LLEGADAS (O SERVICIO) POISSON- EXPONENCIAL .....	14
2.6.2	GENERALIZACIONES AL PROCESO POISSON-EXPONENCIAL	15
2.7	Procesos de nacimiento y muerte en el estado estacionario .....	16
2.8	Otras distribuciones.....	17
2.8.1	PRINCIPALES DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DE TIPO DISCRETO. 18	
2.8.2	PRINCIPALES DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DE TIPO CONTINUO. 18	
3.	Modelos de colas simples.....	20
3.1	El sistema M/M/1 .....	20
3.2	Colas con servidores en paralelo M/M/C.....	21
3.3	Colas con servidores en paralelo y limite de capacidad M/M/c/K.....	23
3.4	La fórmula de Erlang (M/M/C/C).....	25
3.5	Colas sin límites de servidores (M/M/ $\infty$ ) .....	26

3.6	Colas con límite en la fuente .....	26
3.7	Cuando el servicio depende del número de clientes .....	27
3.8	Colas con impaciencia .....	28
3.8.1	LOS QUE NO SE UNEN A LA COLA .....	28
3.8.2	LOS QUE ABANDONAN .....	28
3.9	Aproximación a los Problemas G/G/c.....	30
3.9.1	M/G/1.....	30
3.9.2	G/G/1 .....	30
3.9.3	G/G/C.....	31
3.10	Otras fuentes de variabilidad en el tiempo de servicio.....	31
3.10.1	FALLOS (AVERÍAS) Y REPARACIONES.....	32
3.10.2	INTERACCIÓN HOMBRE MÁQUINA. ....	32
4.	Series y Redes.....	33
4.1	Introducción .....	33
4.2	Colas en serie .....	35
4.3	“Redes de Jackson abiertas”.....	36
4.3.1	“REDES DE JACKSON ABIERTAS CON MÚLTIPLES TIPOS DE CLIENTES” 37	
4.4	“Redes de Jackson cerradas” .....	37
4.4.1	EL ANÁLISIS DEL VALOR MEDIO .....	38
5.	Simulación.....	41
5.1	Elementos de un Modelo de Simulación.....	41
5.2	Modelización de las Entradas.....	42
5.3	Análisis de Resultados .....	42
5.4	Validación del Modelo.....	43
6.	Problemas.....	44
6.1	Encargado de Bibliotecas .....	44
6.2	Mantenimiento de Coches.....	44
6.3	Comidas Rápidas.....	44
6.4	Coordinación de transmisiones.....	45
6.5	Sucursal Bancaria .....	45

---

6.6	Mantenimiento de Maquinaria .....	46
6.7	Alquiler de Ordenadores .....	46
6.8	Lavadero de Coches.....	46
6.9	Dimensionando el Puerto .....	47
6.10	Central Telefónica .....	47
6.11	Cursos OnLine.....	48
6.12	Mantenimiento Dispensadores .....	48
6.13	Peluquería Maripuri.....	48
6.14	Dispensario Gratuito.....	48
6.15	Estación ITV .....	49
6.16	Mantenimiento de Robots .....	49
6.17	Puliendo motores .....	49
6.18	Nuevo concepto de supermercado .....	50
6.19	Centralita Telefónica .....	50
6.20	Mantemiento .....	51
6.21	Reparaciones Electrónicas .....	51
6.22	Restaurante Chino Gran Muralla.....	51
6.23	Aglomerados JPK.....	52
6.24	Ascensores PKJu .....	56
6.25	Juguetes KP.....	58
6.26	Mejora de Un Servicio de Atención Telefónico .....	62
6.27	Colas en el parque de atracciones .....	64
6.28	Automatismos JCP.....	66

## 1. Introducción

Todos hemos experimentado en alguna ocasión la sensación de estar perdiendo el tiempo al esperar en una cola. El fenómeno de las colas nos parece natural: esperamos en el coche al estar en un tapón, o un semáforo mal regulado, o en un peaje; esperamos en el teléfono a que nos atienda un operador y en la cola de un supermercado para pagar....

Generalmente como clientes no queremos esperar, los gestores de los citados servicios no quieren que esperemos.... ¿Por qué hay que esperar?

La respuesta es casi siempre simple, en algún momento la capacidad de servicio ha sido (o es) menor que la capacidad demandada. Esta limitación se puede eliminar invirtiendo en elementos que aumenten la capacidad. En estos casos la pregunta es: ¿Compensa invertir?

La teoría de colas intenta responder a estas preguntas utilizando métodos matemáticos analíticos.

## 2. Descripción de un sistema de colas

Un sistema de colas se puede describir como: “clientes” que llegan buscando un servicio, esperan si este no es inmediato, y abandonan el sistema una vez han sido atendidos. En algunos casos se puede admitir que los clientes abandonan el sistema si se cansan de esperar.

El término “cliente” se usa con un sentido general y no implica que sea un ser humano, puede significar piezas esperando su turno para ser procesadas o una lista de trabajo esperando para imprimir en una impresora en red.

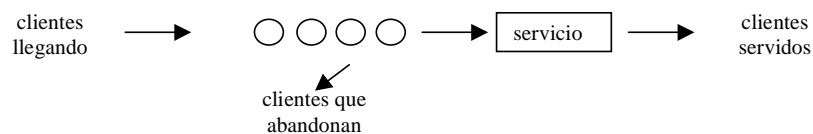


Figura 1 Un sistema de cola básico

Aunque la mayor parte de los sistemas se puedan representar como en la figura 1, debe quedar claro que una representación detallada exige definir un número elevado de parámetros y funciones.

La teoría de colas fue originariamente un trabajo práctico. La primera aplicación de la que se tiene noticia es del matemático danés Erlang sobre conversaciones telefónicas en 1909, para el cálculo de tamaño de centralitas. Después se convirtió en un concepto teórico que consiguió un gran desarrollo, y desde hace unos años se vuelve a hablar de un concepto aplicado aunque exige un importante trabajo de análisis para convertir las fórmulas en realidades, o viceversa.

## **2.1 Características de los sistemas de colas**

Seis son las características básicas que se deben utilizar para describir adecuadamente un sistema de colas:

- a) Patrón de llegada de los clientes
- b) Patrón de servicio de los servidores
- c) Disciplina de cola
- d) Capacidad del sistema
- e) Número de canales de servicio
- f) Número de etapas de servicio

Algunos autores incluyen una séptima característica que es la población de posibles clientes.

### **2.1.1 Patrón de llegada de los clientes**

En situaciones de cola habituales, la llegada es estocástica, es decir la llegada depende de una cierta variable aleatoria, en este caso es necesario conocer la distribución probabilística entre dos llegadas de cliente sucesivas. Además habría que tener en cuenta si los clientes llegan independiente o simultáneamente. En este segundo caso (es decir, si llegan lotes) habría que definir la distribución probabilística de éstos.

También es posible que los clientes sean “impacientes”. Es decir, que lleguen a la cola y si es demasiado larga se vayan, o que tras esperar mucho rato en la cola decidan abandonar.

Por último es posible que el patrón de llegada varíe con el tiempo. Si se mantiene constante le llamamos estacionario, si por ejemplo varía con las horas del día es no-estacionario.

### **2.1.2 Patrones de servicio de los servidores**

Los servidores pueden tener un tiempo de servicio variable, en cuyo caso hay que asociarle, para definirlo, una función de probabilidad. También pueden atender en lotes o de modo individual.

El tiempo de servicio también puede variar con el número de clientes en la cola, trabajando más rápido o más lento, y en este caso se llama patrones de servicio dependientes. Al igual que el

patrón de llegadas el patrón de servicio puede ser no-estacionario, variando con el tiempo transcurrido.

### 2.1.3 Disciplina de cola

La disciplina de cola es la manera en que los clientes se ordenan en el momento de ser servidos de entre los de la cola. Cuando se piensa en colas se admite que la disciplina de cola normal es FIFO (atender primero a quien llegó primero) Sin embargo en muchas colas es habitual el uso de la disciplina LIFO (atender primero al último). También es posible encontrar reglas de secuencia con prioridades, como por ejemplo secuenciar primero las tareas con menor duración o según tipos de clientes.

En cualquier caso dos son las situaciones generales en las que trabajar. En la primera, llamada en inglés “preemptive”, si un cliente llega a la cola con una orden de prioridad superior al cliente que está siendo atendido, este se retira dando paso al más importante. Dos nuevos subcasos aparecen: el cliente retirado ha de volver a empezar, o el cliente retorna donde se había quedado. La segunda situación es la denominada “no-preemptive” donde el cliente con mayor prioridad espera a que acabe el que está siendo atendido.

### 2.1.4 Capacidad del sistema

En algunos sistemas existe una limitación respecto al número de clientes que pueden esperar en la cola. A estos casos se les denomina situaciones de cola finitas. Esta limitación puede ser considerada como una simplificación en la modelización de la impaciencia de los clientes.

### 2.1.5 Número de canales del servicio

Es evidente que es preferible utilizar sistemas multiservidos con una única línea de espera para todos que con una cola por servidor. Por tanto, cuando se habla de canales de servicio paralelos, se habla generalmente de una cola que alimenta a varios servidores mientras que el caso de colas independientes se asemeja a múltiples sistemas con sólo un servidor.

En la figura 1 se dibujó un sistema mono-canal, en la figura 2 se presenta dos variantes de sistema multicanal. El primero tiene una sólo cola de espera, mientras que el segundo tiene una sola cola para cada canal.



Fig. 2 Sistemas de cola multicanal

Se asume que en cualquiera de los dos casos, los mecanismos de servicio operan de manera independiente.

### 2.1.6 Etapas de servicio

Un sistema de colas puede ser unietapa o multietapa. En los sistemas multietapa el cliente puede pasar por un número de etapas mayor que uno. Una peluquería es un sistema unietapa, salvo que haya diferentes servicios (manicura, maquillaje) y cada uno de estos servicios sea desarrollado por un servidor diferente.

En algunos sistemas multietapa se puede admitir la vuelta atrás o “reciclado”, esto es habitual en sistemas productivos como controles de calidad y reprocesos.

Un sistema multietapa se ilustra en la figura.3

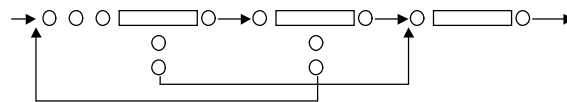


Figura 3: Sistema Multietapa con retroalimentación.

### 2.1.7 Resumen

Las anteriores características bastan, de modo general, para describir cualquier proceso. Evidentemente se puede encontrar una gran cantidad de problemas distintos y, por tanto, antes de comenzar cualquier análisis matemático se debería describir adecuadamente el proceso atendiendo a las anteriores características.

Una elección equivocada del modelo lleva a unos resultados erróneos, y en muchos casos no analizar adecuadamente nos puede llevar a pensar que el sistema no es posible de modelar.

## 2.2 Notación básica

### 2.2.1 Nomenclatura

$\lambda$ = Número de llegadas por unidad de tiempo

$\mu$ = Número de servicios por unidad de tiempo si el servidor está ocupado



$c$  = Número de servidores en paralelo

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} : \text{Congestión de un sistema con parámetros: } (\lambda, \mu, c)$$

$N(t)$ : Número de clientes en el sistema en el instante  $t$

$N_q(t)$ : Número de clientes en la cola en el instante  $t$

$N_s(t)$ : Número de clientes en servicio en el instante  $t$

$P_n(t)$ : Probabilidad que haya  $n$  clientes en el sistema en el instante  $t = \Pr\{N(t)=n\}$

$N$ : Número de clientes en el sistema en el estado estable

$P_n$ : Probabilidad de que haya  $n$  clientes en estado estable  $P_n = \Pr\{N=n\}$

$L$ : Número medio de clientes en el sistema

$L_q$ : Número medio de clientes en la cola

$T_q$ : Representa el tiempo que un cliente invierte en la cola

$S$ : Representa el tiempo de servicio

$T = T_q + S$ : Representa el tiempo total que un cliente invierte en el sistema

$W_q = E[T_q]$ : Tiempo medio de espera de los clientes en la cola

$W = E[T]$ : Tiempo medio de estancia de los clientes en el sistema

$r$ : número medio de clientes que se atienden por término medio

$P_b$ : probabilidad de que cualquier servidor esté ocupado

Tabla 2: Nomenclatura básica

Con el paso del tiempo se ha implantado una notación para representar los problemas de colas que consta de 5 símbolos separados por barras.

$$A / B / X / Y / Z$$

A: indica la distribución de tiempo entre llegadas consecutivas

B: alude al patrón de servicio de servidores

X: es el número de canales de servicio

Y: es la restricción en la capacidad del sistema

Z: es la disciplina de cola

En la tabla 1 se presenta un resumen de los símbolos más utilizados.

Característica	Símbolo	Explicación
Distribución de tiempos de llegada (A)	M	Exponencial
Distribución de tiempos de servicio (B)	D	Determinista
	Ek	Erlang tipo-k ( $k=1,2,\dots$ )
	Hk	Mezcla de k exponenciales
	PH	Tipo fase
	G	General
Número de servidores	1,2,..., $\infty$	
Disciplina de cola	FIFO	Servir al primero que llega
	LIFO	El último que llega se sirve primero
	RSS	Selección aleatoria de servicio
	PR	Prioridad
	GD	Disciplina general

Tabla 1 Simbología de la notación

El símbolo G representa una distribución general de probabilidad, es decir, que el modelo presentado y sus resultados son aplicables a cualquier distribución estadística (siempre que sean Variables IID- Independientes e Idénticamente Distribuidas).

Si no existe restricción de capacidad ( $Y = \infty$ ) y la política de servicio es FIFO, no se suelen incorporar dichos símbolos en la notación así:

M/D/3 es equivalente a M/D/3/ $\infty$ /FIFO

y significa que los clientes entran según una distribución exponencial, se sirven de manera determinista con tres servidores sin limitación de capacidad en el sistema y siguiendo una estrategia FIFO de servicio.

La notación anteriormente representada, por general, deja demasiados casos por resolver, pero es suficiente para los casos más importantes.

## 2.3 Como medir el rendimiento de un sistema

La tarea de un analista de colas puede ser de dos tipo: a) establecer mecanismos para medir la efectividad del sistema o b) diseñar un sistema “óptimo” (de acuerdo a algún criterio).

Diseñar eficientemente consiste, básicamente, en definir un sistema cuyo coste (de diseño y de operación) se justifique por el servicio que da. Dicho servicio se puede evaluar mediante el coste de “no darlo”. De este modo al diseñar se pretende minimizar unos supuestos costes totales.

A partir de los datos que nos suministra la teoría de colas se puede obtener la información necesaria para definir el número de asientos necesarios en una sala de espera, o la estructura de etapas de un proceso de atención al cliente.

En cualquier caso, para poder tomar decisiones hacen falta datos que la teoría de colas puede dar en alguno de los siguientes tres aspectos:

- a) tiempo de espera (en el total del sistema o en la cola)
- b) cantidad de clientes esperando (en el sistema o en las colas)
- c) tiempo ocioso de los servidores (total o particular de cada servicio)

## **2.4 Algunos resultados generales**

Se presentan en este apartado algunos resultados y relaciones para problemas G/G/1 o G/G/c.

Estos resultados son válidos para cualquier problema de colas y por tanto serán utilizados en el resto de desarrollo.

### **2.4.1 Resultados y relaciones**

Si  $\rho \geq 1$  el sistema tenderá a crecer inexorablemente.

El número de clientes en el instante  $t$ ,  $n(t)$ , es el número de llegadas que han ocurrido hasta  $t$  menos el número de servicios completados hasta  $t$ .

El número medio de clientes en el sistema y en la cola se puede calcular de diferentes maneras:

$$L = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n$$

$$L_q = E[n_q] = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) \cdot P_n$$

Little, en su famosa fórmula, establece una relación entre la longitud de la cola y el tiempo de espera:

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

El tiempo de estancia de un cliente en el sistema se relaciona con el tiempo de espera de un cliente en la cola,

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

El número de clientes que por término medio se están atendiendo en cualquier momento es:

$$r = L - L_q = \lambda \cdot (W - W_q) = \frac{\lambda}{\mu}$$

En un sistema de un único servidor:

$$L - L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0$$

La probabilidad de que un sistema de un único servidor esté vacío es  $p_0 = 1 - \rho$

La probabilidad de que un servidor (de un sistema de  $c$  servidores en paralelo) esté ocupado en el estado estable es:

$$p_b = \rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$$

El tiempo de estancia del cliente  $(i+1)$  en la cola es:

$$W_q^{i+1} = \begin{cases} W_q^{(i)} + S^{(i)} - T^{(i)} & \text{si } W_q^{(i)} + S^{(i)} - T^{(i)} > 0 \\ 0 & \text{si } W_q^{(i)} + S^{(i)} - T^{(i)} \leq 0 \end{cases}$$

donde  $S^{(i)}$  es el tiempo de servicio del cliente  $i$ , y  $T^{(i)}$  es el tiempo que transcurre desde la llegada del cliente  $i$  hasta la llegada del cliente  $(i+1)$

## 2.5 Como recoger datos en un sistema de colas

A priori se puede pensar que el método más adecuado para recoger datos al analizar un sistema es establecer una plantilla y recoger los datos sobre el sistema cada cierto tiempo. Esta técnica es “orientada al tiempo”

Es mejor, sin embargo, utilizar una técnica de recogida de información asociada a eventos.

*“La información se recoge cuando algo ocurre”*

En una cola convencional los únicos datos a recoger son:

- a) cada cuánto llega un cliente
- b) cuánto se tarda en servir a cada cliente

No es necesario recoger más información para, a partir de las relaciones expuestas en el apartado anterior, definir cualquier medida de efectividad.

### Ejemplo

Sea un sistema G/G/1. Sean los siguientes datos de entrada:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tiempo entre llegadas entre i+1 e i	2	1	3	1	1	4	2	5	1	2	2	-
Tiempo de servicio al cliente	1	3	6	2	1	1	4	2	5	1	1	3

De la tabla anterior se puede extraer la siguiente información:

Reloj (t)	Entrada/salida del cliente i	Tiempo en que el cliente i entra en servicio	Tiempo en que el cliente i sale del servicio	Tiempo en la cola	Tiempo en el sistema	Tamaño de colas después de t	Clientes en el sistema después de t
0	1-E	0	1	0	1	0	1
1	1-S					0	0
2	2-E	2	5	0	3	0	1
3	3-E	5	11	2	8	1	2
5	2-S					0	1
6	4-E	11	13	5	7	1	2
7	5-E	13	14	6	7	2	3
8	6-A	14	15	6	7	3	4
11	3-D					2	3
12	7-A	15	19	3	7	3	4
13	4-D					2	3
14	8-A;5-D	19	21	5	7	2	3
15	6-D					1	2
19	P-A;7-D	21	26	2	7	1	2
20	10-A	26	27	6	7	2	3
21	8-D					1	2
24	11-A	27	28	3	4	2	3
26	12-A;9-D	28	31	2	5	2	3
27	10-D					1	2
28	11-D					0	1
31	12-D					0	0

A partir de la anterior información obtenida se puede decir que:

$$\lambda = \frac{12}{31} \text{ clientes por unidad de tiempo}$$

$$\mu = \frac{12}{30} \text{ clientes por unidad de tiempo}$$

El tiempo medio de estancia en la cola es de  $\frac{40}{12}$

El tiempo medio de estancia en el sistema es de  $\frac{70}{12}$

De aquí y a partir de la fórmula de Little

$$L = \lambda \cdot W = \frac{12}{31} \cdot \frac{70}{12} = \frac{70}{31}$$
$$L_q = \lambda \cdot W_q = \frac{12}{31} \cdot \frac{40}{12} = \frac{40}{31}$$

## **2.6 Los procesos de Poisson y la distribución exponencial**

La mayor parte de los modelos de colas estocásticas asumen que el tiempo entre diferentes llegadas de clientes siguen una distribución exponencial. O lo que es lo mismo que el ritmo de llegada sigue una distribución de Poisson\*.

En esta sección se verán las características de una distribución de Poisson y como se relacionan con la distribución exponencial. Posteriormente se analizan las más importantes propiedades y algunas generalizaciones al adoptar tal patrón de llegadas. Se cierra el apartado con argumentos que apoyan el uso de la distribución de Poisson. Adoptar la distribución de Poisson implica que la probabilidad de que lleguen  $n$  clientes en un intervalo de tiempo  $t$  es:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

El tiempo entre llegadas se define, de este modo, como la probabilidad de que no llegue ningún cliente:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

siendo por tanto una distribución exponencial.

### **2.6.1 Propiedades del Patrón de llegadas (o servicio) Poisson-Exponencial**

El uso de este patrón de llegada (o de servicio) tiene, entre otras las siguientes propiedades:

P1 El número de llegadas en intervalos de tiempo no superpuestos es estadísticamente independiente

---

\* Es habitual también admitir que el ritmo de atención de cliente cuando el servidor está ocupado tiene una distribución de Poisson y la duración de la atención al cliente una distribución exponencial.

P2 La probabilidad de que una llegada ocurra entre el tiempo  $t$  y  $t+\Delta t$  es  $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ , donde  $\lambda$

es la tasa de llegada y  $o(\Delta t)$  cumple  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ . De hecho  $o(\Delta t)$  se podría entender como la probabilidad de que llegue más de uno.

P3 La distribución estadística del número de llegadas en intervalos de tiempo iguales es estadísticamente equivalente

$$P_n(t-s) = \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \quad \forall t, s \geq 0, \quad t > s$$

P4 Si el número de llegadas sigue una distribución de Poisson el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de media  $(1/\lambda)$  y al contrario

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \Leftrightarrow P_o(t) = e^{-\lambda t}$$

P5 Si el proceso de llegada es Poisson, los tiempos de llegada son completamente aleatorios con una función de probabilidad uniforme sobre el periodo analizado.

$$f_\tau(t_1, t_2, \dots, t_k / k \text{ llegadas en } [0, T]) = \frac{k!}{T^k}$$

P6 Para conocer los datos que definen un proceso de Poisson solo es necesario conocer el número medio de llegadas

P7 Amnesia de la Distribución exponencial: La probabilidad de que falten  $t$  unidades para que llegue el siguiente cliente es independiente de cuanto tiempo llevamos sin que llegue ningún cliente.

$$P_r\{T \leq 1/T \leq t_0\} = P_r\{0 \leq T \leq t_1 - t_0\}$$

### 2.6.2 Generalizaciones al Proceso Poisson-Exponencial

#### a) Variabilidad de $\lambda$

Se puede admitir que  $\lambda$  varíe con el tiempo. En este caso

$$P_n(t) = e^{-m(t)} \cdot \frac{(m(t))^n}{n!}, \quad m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

#### b) Llegadas múltiples

Se puede admitir que en cada evento de llegada aparezcan  $i$  clientes, donde:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$$

En este caso la probabilidad de que en el instante  $t$  hayan aparecido  $m$  clientes es:

$$P_r \{N(t) = m\} = \sum e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} c_m^{(k)}$$

donde  $c_m^{(k)}$  es la probabilidad de que  $k$  ocurrencias den un resultado total de  $m$  clientes.

## 2.7 Procesos de nacimiento y muerte en el estado estacionario

Un proceso estocástico es la abstracción matemática de un proceso empírico, cuyo desarrollo está gobernado por alguna ley de probabilidad.

Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, un proceso estocástico se define como una familia de variables aleatorias  $\{X(t), t \in T\}$  definidas sobre un horizonte  $T$ .  $X(t)$  es el estado del sistema.

Se dice que un proceso estocástico  $\{X(t), t=0,1,\dots\}$  es un proceso de Markov si, para cualquier conjunto de  $n$  instantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , la distribución de  $X(t)$  depende únicamente del valor de  $X(t_{n-1})$ . Es decir:

“Dada la situación presente, el futuro es independiente del pasado y el proceso carece de memoria”

Una cola, con proceso de llegada Poisson-Exponencial de media  $\lambda$ , y con proceso de servicio Poisson-Exponencial de media  $\mu$ , se puede modelizar como una cadena de Markov continua, donde en cada intervalo infinitesimal de tiempo puede ocurrir un nacimiento (llegada) o una muerte (salida)

$$\begin{aligned} P_r \{n \rightarrow n+1 \text{ en } (t, t+\Delta t)\} &= \lambda_n \Delta t + o(t) & n \geq 0 \\ P_r \{n \rightarrow n-1 \text{ en } (t, t+\Delta t)\} &= \mu_n \Delta t + o(t) & n \geq 1 \end{aligned}$$

Al representar las anteriores probabilidades se ha considerado que las tasas de llegada y de servicio ( $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente) dependen del número de elementos en el sistema.

Una representación gráfica de un fragmento de la cadena de Markov generada es la representada en la siguiente figura:



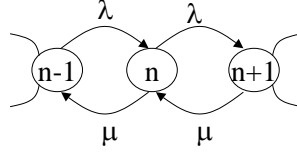


Figura 4: Fragmento de cadena de Markov

Es interesante conocer las probabilidades en el estado estacionario de que haya  $n$  elementos en el sistema.  $n$  elementos en el sistema se refleja porque la cadena de Markov está en el estado  $n$ .

En situación estacionaria, se puede decir que el “balance de flujo” alrededor del estado  $n$  debe ser 0 (sino no sería estable). Así las probabilidades de entrada en el estado  $n$ , deben ser iguales a la probabilidad de las salidas:

$$\lambda_n P_n + \mu_n P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} \quad \forall n > 0$$

En el origen

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

De las anteriores ecuaciones se puede extraer que:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

y dado que

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1$$

se puede calcular

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

Aunque la resolución de las anteriores ecuaciones parece complicada, no es estrictamente necesario conocer cómo se puede resolver para poderlas aplicar. Sólo en el caso de que nuestra realidad no sea aplicable a un problema ya resuelto deberíamos profundizar en los diferentes métodos que permiten resolver nuestro problema.

## 2.8 Otras distribuciones.

No todas las llegadas ni todos los servicios se pueden simular mediante una poisson/exponencial. Existen otras distribuciones que se ajustan mejor a otros procesos reales.

En la práctica se puede considerar que son necesarios tres elementos:

- a) Conocer todas las distribuciones para tener un conocimiento claro de las posibilidades de caracterización una determinada distribución.
- b) Conocer un procedimiento para establecer, vía inferencia estadística, cual es la distribución de una determinada muestra.
- c) Ser capaz de calcular la media y la desviación típica de un proceso en función de una muestra.

### 2.8.1 Principales distribuciones estadísticas de tipo Discreto.

Las distribuciones estadísticas de tipo discreto toman valores de un conjunto finito de posibilidades. En teoría de colas son relevantes porque permiten representar el número de clientes en un intervalo de tiempo.

Si las posibles ocurrencias son un conjunto finito y uniforme de valores (e.g. el lanzamiento de un dado perfecto) se conoce como variable **Uniforme Discreta**. Si la variable se da entre los valores  $a$  y  $b$  enteros, la media de la distribución es  $(a+b)/2$  y la varianza es  $((b-a+1)^2-1)/12$

Si la probabilidad de cada ocurrencia es diferente, la más sencilla de todas las distribuciones de **Bernouilli** donde la variable puede sólo tomar dos valores (e.g. chico o chica, A o B) con una cierta probabilidad  $p$  para el primero miembro del par, que suele denominarse éxito. La media es  $p$  y la varianza es  $p(1-p)$

La distribución **Binomial** representa la probabilidad de obtener  $k$  sucesos A con probabilidad  $p$ , a partir de  $n$  intentos. Es por tanto la suma de  $n$  Bernouilli de probabilidad  $p$ . La media es  $np$  y la varianza es  $np(1-p)$

La distribución **Geométrica** representa la probabilidad de obtener la primera ocurrencia A en el lanzamiento  $n$ . Esta variable tiene un rango infinito aunque sigue siendo discreta. La media es  $1/p$  y la varianza es  $(1-p)/p^2$

También tiene un rango infinito la conocida como **Poisson** en la que se representan ocurrencias para un conjunto grande e independiente de eventos distribuidos a lo largo del espacio o del tiempo. La distribución tiene propiedades matemáticas interesantes que la hacen muy utilizada. La media es  $\lambda$  y la varianza es también  $\lambda$ .

### 2.8.2 Principales distribuciones estadísticas de tipo Continuo.

Cuando las ocurrencias pueden tomar valores dentro de un rango continuo las distribuciones son de tipo continuo. En teoría de colas son especialmente adecuadas para representar intervalos de tiempo.

La **Continua Uniforme** toma valores equiprobables en un determinado rango  $[a,b]$ . La media de esa función es  $(a+b)/2$  y la varianza es  $(b-a)^2/12$

La **exponencial** (o negativa exponencial) es la complementaria de la distribución de Poisson. Su media es  $1/\lambda$  y la varianza es  $1/\lambda^2$

La **Erlang $[k,\beta]$**  es una distribución que es la suma de  $k$  exponenciales de media  $\beta/k$ . La media de dicha distribución es  $\beta$  y la varianza es  $\beta^2/k$ .

De hecho la distribución Erlang es una parte de una clase más amplia que son las distribuciones **gamma**. Cada función gamma es definida por dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . La media es  $\beta\alpha$  y la varianza es  $\alpha\beta^2$

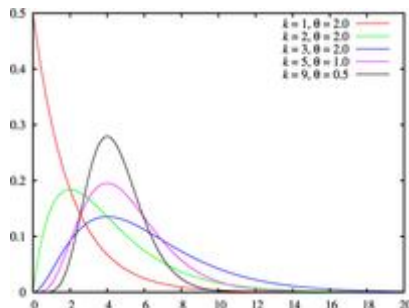
La distribución Weibull permite describir la rutprua de

La distribución Normal

La distribución logNormal

- Continua-Uniforme
- Exponencial
- Erlang

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$$



- Gamma
- Weibull
- Normal
- LogNormal
- 

Comentar las ventajas y los inconvenientes de las otras.

### 3. Modelos de colas simples

El propósito de este apartado es exponer diferentes modelos de colas. No es excesivamente complicado conocer el origen de las fórmulas, y puede ser un ejercicio interesante cuando las condiciones de partida no son exactamente las aquí consideradas. Sin embargo se ha optado por la exposición de los resultados directos ya que se pretende la aplicación de éstos y no su consecución. Todos los resultados se obtienen para el estado estable.

#### 3.1 El sistema M/M/1

Una cola M/M/1 tiene un único servidor y las tasas de llegada y de servicio siguen una distribución de Poisson, siendo por tanto:

La tasa de llegada es  $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

La tasa de salida es  $a(t) = \mu e^{-\mu t}$

La probabilidad de que haya  $n$  clientes es:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad \text{con} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

El número medio de clientes en la cola es:

$$L = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} = \frac{\partial (\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n)}{\partial \rho} = \frac{\partial (\frac{1}{1-\rho})}{\partial \rho} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

De donde

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Y aplicando las relaciones fundamentales del apartado 1.5

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

La cola media cuando el sistema no está vacío es:

$$L'_q = E\left[\frac{N_q}{N_q \neq 0}\right] = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

Otro resultado interesante es conocer cual es la probabilidad de que haya X o más elementos en el sistema.

$$P(n \geq X) = \rho^X$$

### 3.2 Colas con servidores en paralelo M/M/C

Un sistema con servidores en paralelo se caracteriza porque hay más de un servidor que ejecuta la misma función con la misma eficiencia.

Se define  $r = \frac{\lambda}{\mu}$  mientras que la tasa de ocupación del sistema es  $\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$

Cuando se consideran c servidores en paralelo, las tasas de llegada y de servicio pasan a ser:

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \\ b(t) &= \mu_n e^{-\mu_n t} \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n < c \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

La probabilidad de que haga n clientes en un sistema de este tipo es:

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 & 1 \leq n < c \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} P_0 & n \geq c \end{cases}$$

Siendo la probabilidad de que el sistema esté vacío:

$$P_0 = \left( \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)} \right)^{-1} \quad \frac{r}{c} = \rho < 1$$

La longitud de la cola medida es:

$$L_q = \frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0$$

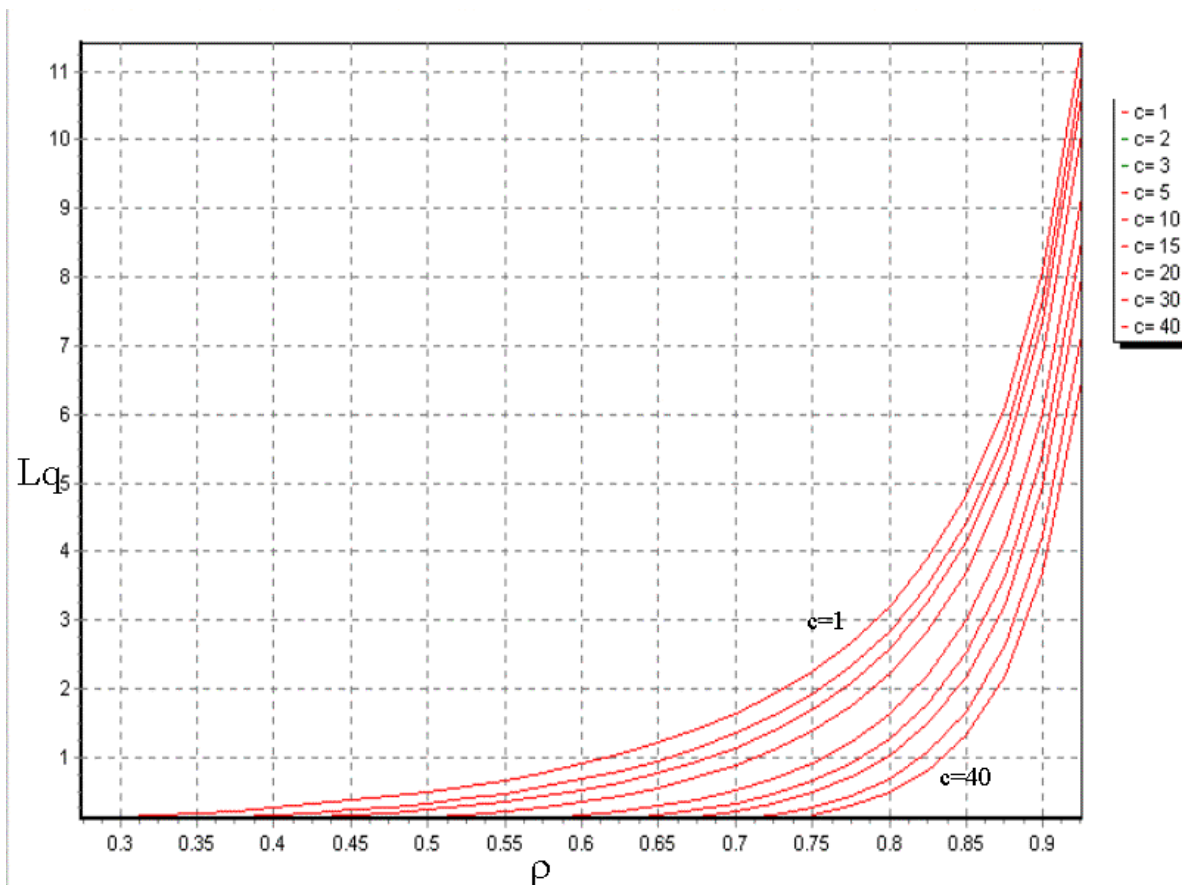
El tiempo medio de espera en la cola:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left( \frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$

Y por tanto,

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \left( \frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0 \quad L = r + \left( \frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right) P_0$$

Para facilitar el cálculo de  $L_q$  se ha considerado interesante incluir el siguiente ábaco que relaciona



el valor de  $\rho$  con  $L_q$  para distintos valores de  $c$ .

Ábaco para el cálculo de la longitud de la cola ( $L_q$ )

### 3.3 Colas con servidores en paralelo y limite de capacidad M/M/c/K

En algunos sistemas la cola no puede albergar a un número indefinido de clientes. En este caso se dice que el sistema es de capacidad limitada. El límite lo fija el parámetro K que incluye a los servidores. Las probabilidades de cada estado del sistema

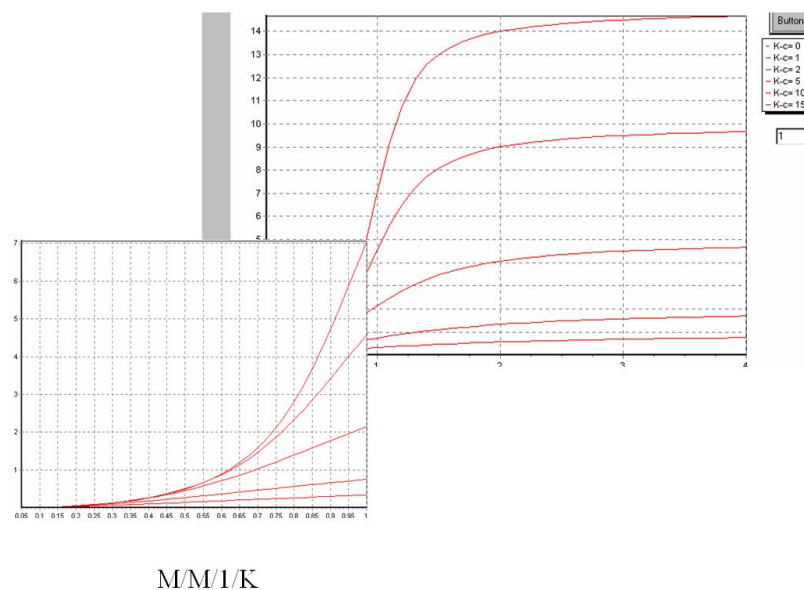
$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 & 1 \leq n < c \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} P_0 & c \leq n \leq K \end{cases} \quad P_0 = \begin{cases} \left( \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} \frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} \right)^{-1} & \rho \neq 1 \\ \left( \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} (K-c+1) \right)^{-1} & \rho = 1 \end{cases}$$

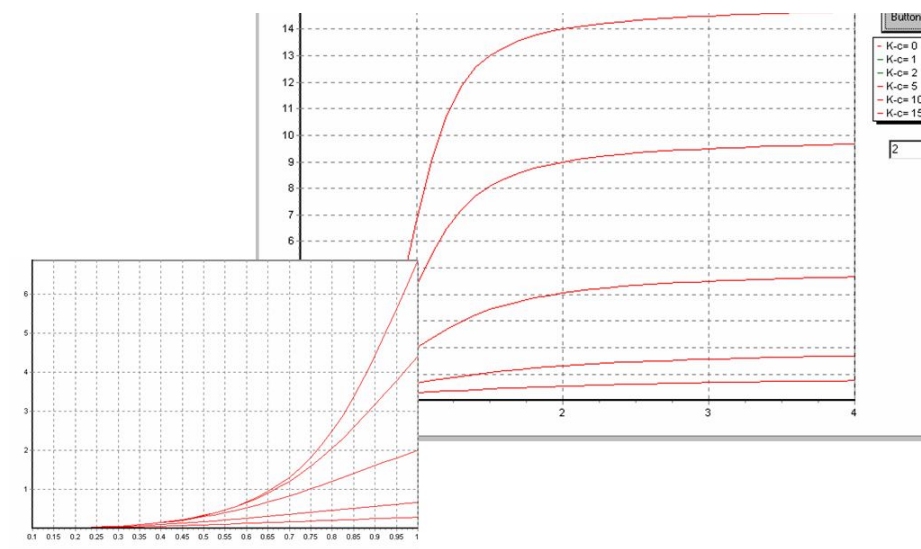
La longitud media de la cola es:

$$L_q = \frac{P_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \left[ 1 - \rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c} \right]$$

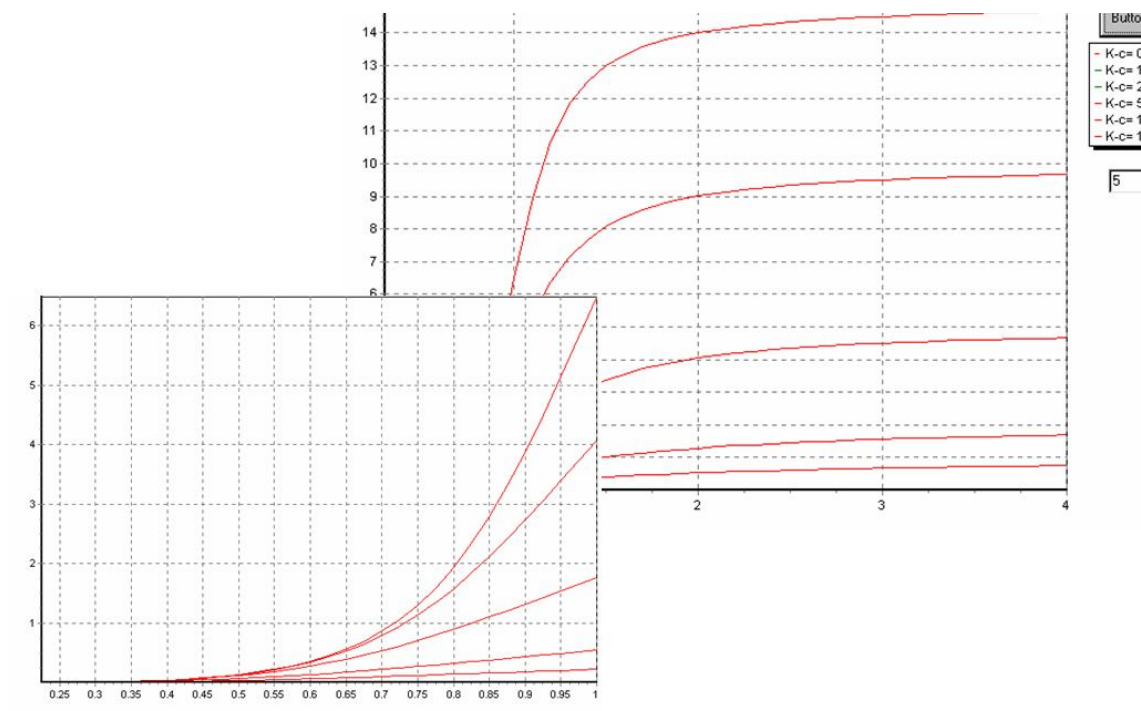
$$L = L_q + r(1 - P_K) \quad W = \frac{L}{\lambda(1 - P_K)} \quad W_q = \frac{L}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu}$$

Para facilitar el cálculo de Lq se ha considerado interesante incluir los siguientes ábacos que relacionan el valor de  $\rho$  con Lq para distintos valores de K-c.



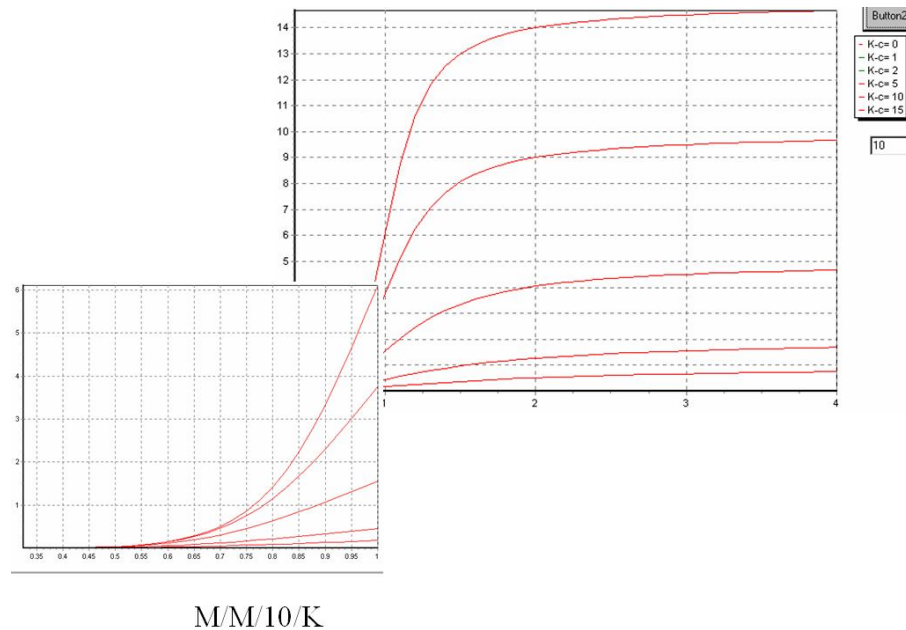


M/M/2/K



M/M/5/K





### 3.4 La fórmula de Erlang (M/M/C/C)

Existe un caso especial de la cola con límite de capacidad y es cuando este límite coincide con el número de servidores. Es decir, no se puede generar cola.

Esta situación da lugar a la distribución de probabilidad conocida como Erlang.

La probabilidad de que haya  $n$  elementos en el sistema.

$$P_n = \frac{\frac{(\lambda / \mu)^n}{n!}}{\sum_{i=0}^c \frac{(\lambda / \mu)^i}{i!}}$$

La probabilidad de que el sistema esté lleno es:

$$P_c = \frac{r^c / c!}{\sum_{i=0}^c \frac{r^i}{i!}}, r = \lambda / \mu$$

Lo sorprendente de esta fórmula es que es válida, independientemente del tipo de distribución del servicio y por tanto es válida para M/G/C/C

Los valores más relevantes son:

$$L = r \cdot (1 - P_C) \quad W = \frac{L}{\lambda(1 - P_C)}$$

### 3.5 Colas sin límites de servidores ( $M/M/\infty$ )

En ocasiones se puede estar diseñando un sistema donde el número de servidores simultáneos no sea un límite (por ejemplo acceso a un servidor de red).

Si el tiempo de servicio tiene igual distribución con el número de servidores ( $\mu_n = n\mu$ ).

La probabilidad de que haya  $n$  clientes simultáneamente es:

$$P_n = \frac{r^n e^{-r}}{n!} \quad n \geq 0 \quad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \quad W = \frac{1}{\mu}$$

### 3.6 Colas con límite en la fuente

Hasta ahora se ha asumido que la población que alimenta a la cola es infinita. También se puede trabajar con la suposición de colas finitas. Éstas están compuestas de un número  $M$  limitado de clientes, que en caso de entrar en el sistema tendría un tiempo de servicio medio de  $\mu$ .

Y la probabilidad de que un cliente fuera del sistema entre en el periodo  $t$  y  $t+\Delta t$  es:

$$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$

Con las anteriores suposiciones

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda & 0 \leq n < M \\ 0 & n \geq M \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 0 \leq n < c \\ c\mu & n \geq c \end{cases}$$

Usando los mismos conceptos que siempre

$$P_n = \begin{cases} \binom{M}{n} r^n P_0 & 1 \leq n < c \\ \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} c!} r^n P_0 & c \leq n \leq M \end{cases}$$

$$\sum P_n = 1 \Rightarrow 1 = P_0 \left( \sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n} r^n + \sum_{n=c}^M \frac{n!}{c^{n-c} c!} r^n \right)$$

De aquí puede salir  $P_0$

El número medio de clientes en el sistema y el resto de relaciones es:

$$L = \sum_{n=1}^M n P_n \quad L_q = L - r(M - L)$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M - L)} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M - L)}$$

### 3.7 Cuando el servicio depende del número de clientes

En ocasiones el tiempo de atención a los clientes puede variar dependiendo del tamaño de la cola

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 1 \leq n < k \\ \mu & n \geq k \end{cases}$$

Asumiendo que la llegada de clientes sigue una distribución de Poisson de media  $\lambda$ , se puede decir que:

$$P_n = \begin{cases} \rho_1^n P_0 & 0 \leq n < k \\ \rho_1^{k-1} \rho^{n-k+1} P_0 & n \geq k \end{cases} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left( \frac{1 - \rho_1^k}{1 - \rho_1} + \frac{\rho \rho_1^{k-1}}{1 - \rho} \right)^{-1} & \rho_1 \neq 1, \rho < 1 \\ \left( k + \frac{\rho}{\rho - 1} \right)^{-1} & \rho_1 = 1, \rho < 1 \end{cases}$$

El tamaño de cola media es:

$$L = P_0 \left( \frac{\rho_1 [1 + (k-1)\rho_1^k - k\rho_1^{k-1}]}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{k-1} [k - (k-1)\rho]}{(1-\rho)^2} \right)$$

$$L_q = L - (1 - P_0) \quad W = \frac{L}{\lambda} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

### 3.8 Colas con impaciencia

Se dice que los clientes son impacientes si tienden a unirse a la cola sólo si no es demasiado larga, o si el tiempo que creen que les queda por esperar es suficientemente corto. Un tercer tipo de impaciente es el que va cambiando de cola entre colas paralelas.

La literatura únicamente considera los dos primeros tipos de clientes impacientes: los que no se unen a la cola o las que la abandonan antes de tiempo

#### 3.8.1 Los que no se unen a la cola

El cliente que no se une a la cola lo hace porque ya hay demasiados clientes antes. Si para todos los clientes “demasiados” fuera la misma cantidad ( $k$ ) el problema sería M/M/c/K. Sin embargo lo normal es que  $k$  no sea constante para cada cliente. Por tanto la modelización es un poco diferente. Se puede asumir para ello que el ratio de llegada  $\lambda$ , se ve afectado por una serie monótona decreciente tal que

$$\lambda_n = b_n \lambda \quad 0 \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$$

En este caso

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \prod_{i=1}^n b_{i-1}$$

#### 3.8.2 Los que abandonan

Se puede asumir que este tipo de clientes tiene una cierta probabilidad de irse si hay  $n$  clientes en la cola  $r(n)$ , donde

$$r(0)=r(1)=0$$

Este nuevo proceso tiene un ratio de salida  $\mu_n = \mu + r(n)$

Por tanto

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \lambda^n \prod_{i=1}^n \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)}$$

donde

$$P_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \prod_{i=1}^n \frac{b_{i-1}}{\mu + r(i)}$$

### 3.9 Aproximación a los Problemas G/G/c

Todos los desarrollos anteriores se basan en que las entradas y el servicio se distribuyen mediante procesos que siguen una distribución de Poisson/Exponencial.

Pero, ¿y si no siguen dichos procesos?

#### 3.9.1 M/G/1

Los clientes, en este modelo, siguen llegando con una distribución de Poisson de media  $\lambda$ , pero asumimos que son atendidos por un proceso más general de duración media  $1/\mu$  y de desviación típica  $\sigma$ .

En 1932 Pollaczek y Khintchine desarrollaron la fórmula denominada “P-K” que permite evaluar la longitud de la cola media.

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

De la anterior relación se extrae directamente el tiempo de estancia en cola.

$$W_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

(Curry y Feldman, 2010) proponen una modificación de la fórmula que es bastante interesante (además de exacta) pues proporciona una relación directa entre las colas M/M/1 y las colas M/G/1 permitiendo utilizar tablas ya conocidas.

$$W_q(M \text{ / } G \text{ / } 1) = \left(\frac{1 + \mu^2 \sigma^2}{2}\right) W_q(M \text{ / } M \text{ / } 1)$$

Es de destacar que  $\mu^2 \sigma^2$  es el coeficiente de variación al cuadrado de los tiempos de servicio.

#### 3.9.2 G/G/1

Cuando la entrada tampoco sigue una distribución exponencial se puede utilizar la aproximación de difusión Kingman para calcular el valor del tiempo de espera en cola en función de los coeficientes

de variación al cuadrado de la entrada y de la salida. De hecho esta es una aproximación que además es siempre una cota superior.

$$Wq(G / G / 1) \approx \left( \frac{\lambda^2 \sigma_e^2 + \mu^2 \sigma_s^2}{2} \right) Wq(M / M / 1)$$

U otra forma de escribirla sería la siguiente.

$$Wq(G / G / 1) \approx \left( \frac{\lambda^2 \sigma_e^2 + \mu^2 \sigma_s^2}{2} \right) \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) \frac{1}{\mu}$$

Existen otras aproximaciones como la de Kraemer y Langenbach que mejoran la calidad del resultado. En cualquier caso es interesante notar el efecto que tiene la variabilidad (ya sea a la entrada o a la salida) en el tiempo de estancia en cola.

### 3.9.3 G/G/c

Si el caso G/G/1 ya es una generalización no exacta, menos exacta aún es la generalización G/G/c. En cualquier caso dado que el error es pequeño es interesante la siguiente fórmula que permite calcular el tiempo de estancia medio en cola para un sistema cualquiera..

$$Wq(G / G / c) \approx \left( \frac{\lambda^2 \sigma_e^2 + \mu^2 \sigma_s^2}{2} \right) \frac{\rho^{\sqrt{2c+2}-1}}{c(1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

## 3.10 Otras fuentes de variabilidad en el tiempo de servicio.

A partir de los resultados anteriores se puede derivar que reducir la variabilidad en el tiempo de servicio tiene el mismo efecto que aumentar la capacidad de la máquina.

Las fuentes principales de variabilidad en el tiempo que un elemento ha de estar en el sistema son las siguientes:

- a) Variabilidad del tiempo de proceso natural (lo analizado hasta ahora).
- b) Paradas y reparaciones aleatorias.
- c) Disponibilidad de operarios.
- d) Tiempos de preparación y descarga de máquinas. Este tipo de variabilidad se debe analizar desde la consideración de lotes, y por tanto se tratará **más adelante.**

### 3.10.1 Fallos (averías) y Reparaciones.

Las averías o Fallos (y su correspondiente tiempo de reparación) reducen la disponibilidad de la máquina, incrementando su saturación, pero también incrementan la duración del tiempo de servicio de aquel producto que tiene la “mala suerte” de quedarse atascado durante la avería.

La disponibilidad (*availability*) de la máquina sujeta a Fallos y Reparación se calcula del siguiente modo:

$$a = \frac{E[F_i]}{E[F_i] + E[R_i]}$$

A partir de esta definición *Hopp and Spearman* desarrollan la expresión para el tiempo de servicio efectivo y su coeficiente de variación asociado

$$E[T_e] = \frac{E[T_a]}{a}$$

$$C_e^2 = C^2[T_e] = C_s^2 + \frac{(1 + C^2[R_i])a(1-a)E[R_i]}{E[T_s]}$$

A partir de estos valores es posible calcular los tiempos de espera utilizando la aproximación al problema M/G/1 ya expresada anteriormente con la siguiente formulación.

$$W_q = \frac{C_a^2 + C_e^2}{2} \left( \frac{\rho_e}{1 - \rho_e} \right) E[T_e]$$

En esta fórmula hay que destacar que la tasa de utilización efectiva viene afectada por la disponibilidad del recurso tras eliminar el tiempo que está parado.

$$\rho_e = \frac{\rho}{a}$$

### 3.10.2 Interacción hombre máquina.

Hasta este momento siempre se ha considerado que sólo un recurso (o conjunto de los mismos) era limitador de la capacidad de la máquina. Podría ser que tuviéramos que considerar que hay dos recursos asociados a la utilización de la máquina: por ejemplo la máquina misma y un operario que le haga la preparación antes de empezar a ejecutar.

Desafortunadamente para este caso tan habitual no hay una solución general y habría que recurrir a diagramas de estado para calcular todos los parámetros básicos.



En ese caso la codificación de cada uno de los estados es básica para obtener e interpretar algún resultado.

La propuesta de Curry y Feldman para un sistema con dos máquinas idénticas y un operador es que cada estado lo representa una tripleta  $(n,i,j)$  donde  $n$  es el número de trabajos en el sistema,  $i$  y  $j$  son el estado de cada una de las máquinas, pudiendo ser 0;s;p. 0 indica que la máquina está vacía y parada,  $s$  indica que la máquina está sometida a un setup y  $p$  indica que la máquina está en producción.

## 4. Series y Redes

### 4.1 Introducción

En este capítulo se realiza una introducción al tema de las redes de colas. Esta es un área de gran interés investigador y de aplicación, con problemas muy complicados de plantear y de resolver. Por este motivo se presenta únicamente una introducción de los conceptos básicos aunque su aplicabilidad en el modelado de sistemas de fabricación es más que evidente.

Las Redes de Colas se pueden describir como un grupo de nodos (sean  $k$ ), en el que cada nodo representa una instalación de servicio.

Dicha instalación puede constar de  $c_i$  servidores ( $i=1\dots k$ ) En el caso más general los clientes pueden entrar en cualquier nodo y, después de moverse por la red, pueden salir en cualquier nodo.

Dentro de las Redes de Colas, se pondrá especial interés en las denominadas “Redes de Jackson”. Estas tienen las siguientes características:

1. Las llegadas desde el exterior al nodo  $i$  siguen un proceso de Poisson de media  $\gamma_i$
2. Los tiempos de servicio en cada nodo  $i$  son independientes y siguen una distribución negativa exponencial con parámetro  $\mu_i$ , que podría ser dependiente del estado
3. La probabilidad de que un cliente que haya completado su servicio en el nodo  $i$  vaya al nodo  $j$  es  $r_{ij}$  con  $i=1,2,\dots,k$ ,  $j=0,1,\dots,k$ .
4.  $r_{i,0}$  indica la probabilidad de que un cliente abandone desde el nodo  $i$

Si añadimos las características  $\gamma_i$  y  $r_{i,0}$  para todo  $i$  estamos en el caso de las “Redes de Jackson cerradas” Si no se da el caso anterior el problema se denomina de “Redes de Jackson abiertas”

Se consideran tres tipo de redes de Jackson:

- a) Las redes de Jackson “en serie”

- b) Las redes de Jackson “en general”
- c) Las redes de Jackson “cerradas”

En cualquier caso las primeras son una variante reducida de las segundas.

## 4.2 Colas en serie

Se dice que un sistema de colas es “en serie” si

$$r_i = \begin{cases} \lambda & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

y

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i + 1 \quad 1 \leq i \leq k - 1 \\ 1 & i = k \quad j = 0 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

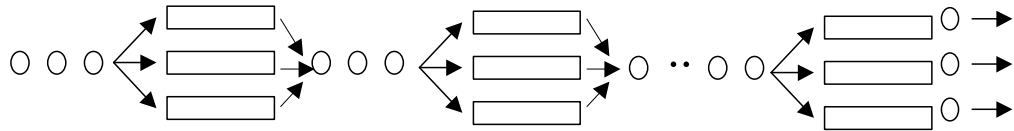


Figura 6: Sistema en serie.

Los clientes entran en el nodo 1 y salen en el nodo k, después de pasar por cada uno de los nodos.

Consideraremos únicamente el caso de capacidad infinita de almacén entre cada etapa de la serie. Dado que no existe limitación en la capacidad, cada estación puede analizarse de modo separado.

Por tanto es necesario entender como salen los clientes de la primera etapa dada las características de la entrada y de la etapa de servicio ( $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $c_i$ )

Se puede demostrar que la salida de los clientes de un sistema  $M/M/c/\infty$  tienen una distribución idéntica a la de la entrada, es decir Poisson con media  $\lambda$ . Por tanto una serie se compone de k  $M/M/c_i/\infty$  colas independientes, siempre que la entrada sea Poisson, el servicio sea exponencial y no haya restricciones de capacidad.

La probabilidad de que en un instante dado haya  $n_1$  clientes en la etapa 1,  $n_2$  en la etapa 2...  $n_k$  en la etapa k es simplemente

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_k}$$

### 4.3 “Redes de Jackson abiertas”

Se considera que son redes de Jackson abiertas cuando:

- La llegada externa a cualquier nodo es Poisson  $\gamma_i$
- Todos los servidores de cada etapa tiene un servicio exponencial de media  $\mu_i$
- De cada etapa  $i$  un cliente se mueve a otra etapa con probabilidad  $r_{ij}$ , y al exterior con probabilidad  $r_{i,0}$

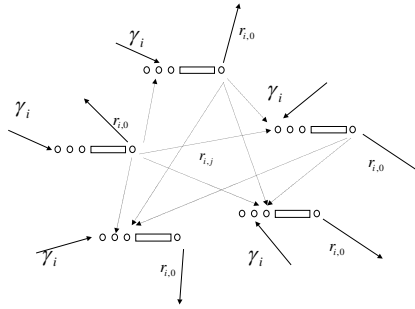


Figura 7: Ejemplo de una Red Abierta de Jackson

El ratio de llegada  $\lambda_i$  a cada etapa se obtiene mediante las denominadas “ecuaciones de tráfico”

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j r_{ji}$$

de donde  $\vec{\lambda} = \vec{\gamma} + \vec{\lambda}R$

y por tanto  $\vec{\lambda} = \vec{\gamma} + (I - R)^{-1}$

Definiendo  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i}$  La probabilidad de que en el estado estacionario haya  $n_i$  clientes en el

nodo 1,  $n_2$  en el nodo 2, etcétera:

$$P_{n_1 n_2 n_3 \dots n_k} = \prod \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)} P_{oi}$$

donde

$$r_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad a(n_i) = \begin{cases} n_i! & n_i < c_i \\ c_i^{n_i - c_i} c_i! & n_i \geq c_i \end{cases} \quad P_{oi} / \sum P_{oi} \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)} = 1$$

concretamente si  $c_i=1 \forall i$

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = (1 - \rho_1) \rho_1^{n_1} (1 - \rho_2) \rho_2^{n_2} \dots (1 - \rho_k) \rho_k^{n_k}$$

Cada etapa se comporta de modo independiente. Esto no significa que se comporte como Poisson, aunque el comportamiento del valor medio permite considerar cada cola como una M/M/1 independiente. Así pues:

$$L_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

La espera total esperada en el sistema es:

$$W = \frac{\sum L_i}{\sum \lambda_i}$$

#### 4.3.1 “Redes de Jackson abiertas con múltiples tipos de clientes”

Es una generalización bastante evidente que cada cliente tenga una matriz de ruta  $R^{(t)}$ , siendo  $t=1 \dots n$  el tipo de cliente.

Para abordar este problema en primer lugar hay que resolver las “ecuaciones de tráfico” de modo separado

$$\bar{\lambda}^{(t)} = \bar{\gamma}^{(t)} + (I - R^{(t)})^{-1}$$

A partir del resultado anterior

$$\lambda = \sum_{t=1}^n \lambda^{(t)}$$

Todos los resultados anteriores son ahora aplicables. Además la presencia media de un cliente de tipo  $t$  se puede calcular como:

$$L_i^{(t)} = \frac{\lambda_i^{(t)}}{\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)} + \dots + \lambda_i^{(n)}} L_i$$

#### 4.4 “Redes de Jackson cerradas”

Si  $r_i=0$  y  $r_{i,0}=0$  para todo  $i$ , tenemos un sistema de colas cerradas lo que es equivalente a un sistema con  $N$  clientes continuamente viajando a través de la red.

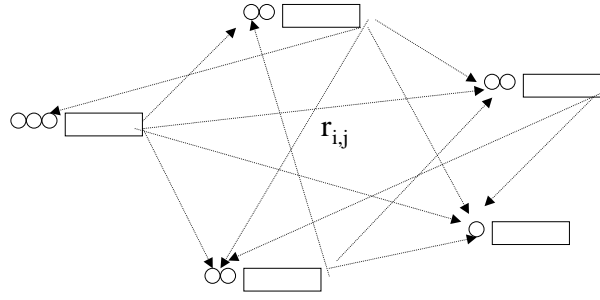


Figura 8: Ejemplo de Red Cerrada

Si  $c_i=1$  para todo  $i$ , las “ecuaciones de tráfico” son:

$$\lambda_i = \mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j r_{ji} = \sum_{j=1}^k \mu_j r_{ji} \rho_j$$

Como estas ecuaciones son redundantes es posible asignar un valor cualquiera a cualquier  $\rho_i$  (por ejemplo  $\rho_1=1$ ). Las probabilidades en el estado estacionario son:

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{1}{G(N)} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k}$$

$$\text{donde } G(N) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=N} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k}$$

En general, para cualquier valor de  $c_i$

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^k \frac{\rho_i^{n(i)}}{a_i(n_i)}$$

Donde

$$a_i(n_i) = \begin{cases} n_i! & n_i < c_i \\ c_i^{n_i-c_i} c_i! & n_i \geq c_i \end{cases}$$

$$G(N) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=N} \prod_{i=1}^k \frac{\rho_i^{n(i)}}{a_i(n_i)}$$

#### 4.4.1 El análisis del valor medio

El método anterior de analizar las redes de colas cerradas de Jackson tiene un coste computacional elevado. Fundamentalmente debido a la coste de calcular  $G(N)$

El método del Análisis del Valor Medio (MVA), que se explica en este apartado, no requiere calcular  $G(N)$  reduciendo de este modo el citado coste computacional. Este método se basa en que la fórmula de Little es aplicable a través de toda la red.

Sea

$$W_i(N) = \frac{1 + L_i(N-1)}{\mu_i}$$

donde

$W_i(N)$ = Tiempo medio de espera en el nodo  $i$  para una red con  $N$  clientes

$\mu_i$ = Ratio de servicio medio en el nodo  $i$

$L_i(N-1)$ = Número medio de clientes en el nodo  $i$  si hay  $N-1$  clientes en el sistema

Según la fórmula de Little:

$$L_i(N) = \lambda_i(N) W_i(N)$$

Si pudiéramos calcular  $\lambda_i(N)$ , podríamos evaluar  $W_i$  y  $L_i$  empezando desde  $N=0$  hasta  $N=n$  de modo recursivo.

Sea  $v_i = \mu_i \cdot \rho_i$ , entonces, por las ecuaciones de tráfico:

$$v_i = \sum_{j=0}^j v_j r_{ji} \quad \forall i$$

Dado que la anterior relación es redundante porque la red es cerrada, establecemos  $v_1=1$  y resolvemos para los otros nodos.

Definimos  $P_i(n,N)$  como la probabilidad marginal de que en el nodo  $i$  hayan  $n$  clientes si en la red cerrada hay  $N$  clientes

En general

$$P_i(n, N) = \frac{\lambda_i(N)}{\alpha_i(n) \mu_i} P_i(n-1, N-1)$$

donde

$$\alpha_i(n) = \frac{a_i(n)}{a_i(n-1)} = \begin{cases} j < c_i \\ j \geq c_i \end{cases}$$

El algoritmo MVA considerando múltiples servidores es el expresado a continuación siguiente:

Paso 1 Resolver las ecuaciones de tráfico

$$v_i = \sum_{j=1}^k v_j r_{ji} \text{ asumiendo } v_i=1$$

Paso 2 Inicializar  $L_i(0)$ ,  $p_i(0,0)=1$ ,  $p_i(j,0)=0 \quad \forall i=1..k, j \neq 0$

Paso 3 Para  $n=1$  hasta  $N$ , calcular

$$\text{Paso 3.1 } W_i(n) = \frac{1}{c_i \mu_i} (1 + L_i(n-1) + \sum_{j=0}^{c_i-2} (c_i - 1 - j) p_i(j, n-1)) \quad \forall i$$

$$\text{Paso 3.2 } \lambda_l(n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^k v_i W_i(n)} \quad \text{con } v_l = 1$$

$$\text{Paso 3.3 } \lambda_i(n) = \lambda_l(n) \cdot v_i \quad \forall i, i \neq l$$

$$\text{Paso 3.4 } L_i(n) = \lambda_i(n) W(n) \quad \forall i$$

$$\text{Paso 3.5 } P_i(j, n) = \frac{\lambda_i(n)}{\alpha_i(j) \mu_i} P_i(j-1, n-1) \quad \forall i = 1..k, j = 1..n$$



## 5. Simulación

Algunos problemas no se pueden resolver mediante métodos analíticos. Entre otras razones podrían citarse la existencia de patrones no normalizados de entrada y de servicio, una gran complejidad del sistema a modelar o la naturaleza de la disciplina de cola.

Además, en ocasiones, los resultados analíticos son para un estado estacionario que nunca se alcanza, porque el sistema se interrumpe antes de abandonar el estado transitorio.

En estos casos el análisis de las colas mediante simulación puede ser una buena técnica para encontrar el resultado.

Hay que destacar, en cualquier caso que, si existen los modelos analíticos, éstos se deberían utilizar. Aunque la simulación permite resolver, o aproximar la resolución, de muchos problemas intratables no es la panacea dado que resolver mediante simulación es equiparable a realizar una experimentación. Por tanto hay que utilizar todas las herramientas asociadas al diseño y análisis de experimentos: Recogida y Análisis de Datos, realización de la experimentación, análisis y consistencia de resultados, etc.

Otro de los defectos del uso de la simulación frente a los métodos analíticos, se presenta cuando el objetivo es el diseño de un sistema y no su evaluación. En ese caso el análisis por simulación no permite utilizar técnicas de optimización convencionales, aunque hay que admitir que algunas herramientas de simulación incorporan técnicas de optimización estocástica para resolver este tipo de problemas

### **5.1 Elementos de un Modelo de Simulación**

Cuatro son los elementos a tener en cuenta al abordar un modelo de simulación de teoría de colas, supuesto diseñado el modelo “físico”:

- a) Selección de los datos de entrada
- b) Simulación.
- c) Análisis de los resultados
- d) Validación del modelo.

Dado que estamos interesados en modelizar sistemas estocásticos, los datos de entrada deben representar del modo más fiable posible la realidad. En ocasiones se usan datos extraídos de la misma para reconocer la estructura de los datos de entrada. La ejecución de la simulación actualmente se realiza mediante paquetes informáticos avanzados (los denominados VIMS). El análisis de resultados tiene que ver con el cálculo de la efectividad del sistema mediante las técnicas estadísticas apropiadas.

Además la validación del modelo es una exigencia que muchas veces se olvida al realizar modelos, q consiste en comprobar que el sistema reacciona como lo hace la realidad.

## **5.2 Modelización de las Entradas**

La Modelización de las Entradas es un requerimiento no sólo de la simulación, sino de cualquier tipo de análisis probabilístico y numérico.

Los dos mayores problemas en la modelización de los datos de entrada son la selección de la familia de distribuciones estadísticas y una vez estimada la familia estimar los parámetros que definen la función de los diferentes entradas.

El primero de los dos problemas es evidentemente el más complicado mientras que el segundo sólo es abordable una vez se ha resuelto la selección de la familia de distribuciones estadísticas.

En muchos casos los paquetes de simulación suelen llevar una herramienta de ajuste estadístico. Cuando esto no ocurra deberemos recurrir a las diferentes técnicas estadísticas para definir tanto las familias como los parámetros.

## **5.3 Análisis de Resultados**

Alcanzar conclusiones válidas a partir de los resultados requiere un gran y cuidadoso esfuerzo. Cuando se simulan sistemas estocásticos, no es posible extraer conclusiones a partir de una única simulación que por naturaleza es estadística.

Por tanto para obtener conclusiones es necesario diseñar y ejecutar experimentos de una manera lógica y comprehensiva.

Existen dos tipos de modelos de simulación: continuos o interrumpidos. Un modelo interrumpido simularía por ejemplo un banco que abre a las 8:00 y cierra a las 14:00, vaciando la cola al final del servicio. Sin embargo un modelo continuo se podría asociar a un sistema productivo donde el trabajo con el que se acaba un día, es con el que se comienza al día siguiente. En este último caso es cuando interesan los resultados en el estado estacionario.

En los sistemas que conducen a modelos interrumpidos el estado estacionario es generalmente irrelevante. Lo que importa es el valor medio calculable al recoger un cierto número de resultados, admitiendo siempre que lo que se obtiene es un valor medio estimado en un intervalo de confianza.

En los sistemas que conducen a modelos continuos el problema es un poco más complicado, porque hay que eliminar de las muestras el estado transitorio, aunque la definición de estado transitorio exigiría el reconocimiento del estado estable y por tanto del estado transitorio.

Los más importantes paquetes de simulación llevan incorporado herramientas que realizan estos ejercicios mediante los cuales se pueden calcular los anteriormente citados intervalos de confianza.

## **5.4 Validación del Modelo**

La validación de los modelos es probablemente el paso más importante, y probablemente también el paso más obviado por aquellos que modelizan.

Antes de iniciar el proceso de realizar un modelo de simulación es necesario que el modelizador se familiarice con el sistema que tiene que estudiar. Para ello es necesario involucrar a todos los niveles de personal implicados en el proceso que va a ser simulado. En ese caso uno de los problemas que aparece es el exceso de detalles en el modelo que lo convierten en improductivo.

El primer y fundamental paso en la validación es verificar que el programa hace lo que está previsto que haga. Otro paso es definir el grado de credibilidad, es decir hasta que punto los que van a usar el modelo consideran que el mismo tiene una utilidad y representa la realidad en la medida que nos interesa. Para ello es necesario que los objetivos del estudio, las medidas de rendimiento y el nivel de detalle debe pactarse y mantenerse en el nivel más simple posible.

Cuando sea posible, los resultados de las simulaciones se deben comprobar con la realidad. Si esta no estuviera disponible habría que intentar reproducir modelos teóricos con soluciones conocidas mediante métodos analíticos.

## 6. Problemas

### 6.1 Encargado de Bibliotecas

Un estudiante trabaja como encargado de una biblioteca por las noches y es el único en el mostrador durante todo su turno de trabajo. Las llegadas al mostrador siguen una distribución de Poisson con una media de 8 por hora. Cada usuario de la biblioteca es atendido de uno en uno, y el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con una media de 5 minutos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se forme cola?
- b) ¿Cuál es la longitud media de la cola?
- c) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en la biblioteca hasta que le han atendido?
- d) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en la cola esperando a que le atiendan?
- e) El estudiante pasa su tiempo en que no hay clientes clasificando artículos de revistas. Si puede clasificar 22 fichas por hora como media cuando trabaja continuamente, ¿cuántas fichas puede ordenar durante su trabajo?

### 6.2 Mantenimiento de Coches

Una compañía de alquiler de coches tiene un servicio de mantenimiento de coches (revisión del aceite, frenos, lavado...) que sólo es capaz de atender los coches de uno en uno y que trabaja 24 horas al día. Los coches llegan con una media de 3 coches por día. El tiempo que dura el servicio de mantenimiento de un coche sigue una distribución exponencial de media 7 horas. El servicio de mantenimiento cuesta a la compañía 375 euros por día. La compañía estima en 25 euros/día el coste de tener el coche parado sin poderse alquilar. La compañía se plantea la posibilidad de cambiar el servicio de mantenimiento por uno más rápido que puede bajar el tiempo de mantenimiento a una media de horas, pero esto también supone un incremento del coste. ¿Hasta que valor puede aumentar el coste para que la compañía contrate los nuevos servicios de mantenimiento?

### 6.3 Comidas Rápidas

Nuestro local de comida rápida, “Panis”, tiene mucho que aprender sobre teoría de colas. Insta a los clientes a que formen 3 colas en las que se distribuyen de forma aleatoria delante de los empleados durante el periodo de comidas diario. Además han instalado entre las tres colas barreras para que los clientes no se pasen a otras colas para prevenir que la gente se “cambie de cola”. Llegan los clientes

según una distribución de Poisson con una media de 60 por hora y el tiempo en que un cliente es servido varía según una distribución exponencial de media 150 segundos. Asumiendo el estado permanente del sistema, ¿cuál es el tiempo medio de estancia del cliente en el restaurante hasta que ha sido atendido? El gerente de “Panis” ha creído ahora que es preferible una única cola para distribuir finalmente a los tres servidores y por tanto las barreras son eliminadas. ¿cuál es el tiempo de espera de este modo?

## **6.4 Coordinación de transmisiones**

Una organización está actualmente envuelta en el establecimiento de un centro de telecomunicaciones para tener una mejor capacidad de las mismas. El centro deberá ser el responsable de la salida de los mensajes así como de la entrada y distribución dentro de la organización. El encargado del centro es el responsable de determinar los operadores que deben trabajar en él. Los operarios encargados de la salida de mensajes son responsables de hacer pequeñas correcciones a los mensajes, mantener un índice de códigos y un fichero con los mensajes salientes en los últimos 30 días, y por supuesto, transmitir el mensaje. Se ha establecido que este proceso es exponencial y requiere una media de 28 min/mensaje. Los operarios de transmisión trabajarán en el centro 7 horas al día y cinco días a la semana. Todos los mensajes salientes serán procesados según el orden en que se vayan recibiendo y siguen una distribución de Poisson con una media de 21 por cada 7 horas diarias. Los mensajes deben ser atendidos en 2 horas como máximo. Determina el número mínimo de personal que se necesita para cumplir este criterio de servicio.

## **6.5 Sucursal Bancaria**

Una pequeña sucursal de un banco tiene dos empleados, uno para los pagos y otro para los cobros. Los clientes llegan a cada caja siguiendo una distribución de Poisson con una media de 20/hora. (el total de llegada al banco es de 40/hora). El tiempo de servicio de cada empleado es una exponencial de media 2 minutos. El encargado de la sección está pensando hacer un cambio en que los dos operarios puedan hacer tanto pagos como cobros para evitar situaciones en que una cola está llena y la otra parada. Sin embargo, se estima que cuando los empleados se encarguen de las dos cosas el tiempo de servicio aumentará a una media de 2,4 minutos. Compara el sistema que se emplea ahora con el propuesto, calculando el total de gente en el banco, el tiempo medio que pasaría un cliente en el banco hasta que es atendido, la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos y el tiempo medio que están parados los empleados.

## **6.6 Mantenimiento de Maquinaria**

La empresa “Refrigeración Hermanos Pérez” debe elegir entre dos tipos de sistema para el mantenimiento de sus camiones. Se estima que los camiones llegarán al puesto de mantenimiento de acuerdo con una distribución de Poisson de uno cada 40 minutos y se cree que este ratio de llegada es independiente del sistema que haya. El primer tipo de sistema puede atender a dos camiones en paralelo, y cada camión se le haría todo el servicio en una media de 30 minutos (el tiempo sigue una distribución exponencial). En el segundo sistema sólo se podría atender a un camión pero el tiempo medio en que se realiza el mantenimiento de un camión es de 15 minutos (distribución exponencial). Para ayudar al encargado de la decisión responda las siguientes cuestiones:

- a) ¿cuántos camiones habrá por término medio habrá en cualquiera de los dos sistemas?
- b) ¿Cuánto tiempo pasará cada camión en el taller en cualquiera de los dos sistemas?
- c) El encargado estima que cada minuto que un camión pasa en el taller reduce los beneficios en 2 euros. Se sabe que el sistema de dos camiones en paralelo tiene un coste de un euro por minuto. ¿Qué debería costar el segundo sistema para que no haya diferencia económica entre los dos?

## **6.7 Alquiler de Ordenadores**

La empresa “Computadoras Reunidas”, que alquila ordenadores, considera necesario revisarlos una vez al año. La primera alternativa, con un coste de 750.000 € es hacer un mantenimiento manual en el que cada ordenador necesitaría un tiempo que sigue una distribución exponencial con una media de 6 horas. La segunda opción sería un mantenimiento con máquinas, con un coste de un millón de euros, en este caso el tiempo de mantenimiento es de 3 horas con una distribución exponencial. Para ambas alternativas los ordenadores llegan siguiendo una distribución de Poisson de media 8 horas. El tiempo en que está parado un ordenador tiene un coste de 150 € por hora. ¿Qué alternativa debe elegir la empresa? Se asume que la empresa trabaja 24 horas, 365 días al año.

## **6.8 Lavadero de Coches**

Un pequeño autoservicio de lavado en el que el coche que entra no puede hacerlo hasta que el otro haya salido completamente, tiene una capacidad de aparcamiento de 10 coches, incluyendo el que está siendo lavado. La empresa ha estimado que los coches llegan siguiendo una distribución de Poisson con una media de 20 coches/hora, el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial de 12 minutos. La empresa abre durante 10 horas al día. ¿Cuál es la media de coches perdidos cada día debido a las limitaciones de espacio?

## 6.9 Dimensionando el Puerto

La compañía “Gasolinas y Aceites SA” trabaja con petróleo, como no podía ser de otra manera, que descarga del puerto y lleva a la refinería. En el puerto tiene 6 muelles de descarga y 4 equipos para la descarga del barco. Cuando los muelles están llenos, los barcos se desvía a muelles de espera hasta que les toca su turno. Los barcos llegan según una distribución de poisson con una media de uno cada 2 horas. Para descargar el barco se necesita una media de 10 horas, siguiendo una distribución exponencial. La compañía desea saber los siguientes datos

- a) Por término medio, ¿cuántos barcos hay en el puerto?
- b) Por término medio, ¿cuánto tiempo pasa un barco en el puerto?
- c) ¿cuál es la media de llegada de los barcos a los muelles de espera?
- d) La compañía estudia la posibilidad de construir otro muelle de descarga. La construcción y mantenimiento del puerto costaría  $X$  € al año. La compañía estima que desviar un barco hacia los muelles de espera cuando los muelles de descarga están llenos tiene un coste de  $Y$  €. ¿Cuál es la relación entre  $X$  e  $Y$  para que la compañía construya otro puerto de descarga?

## 6.10 Central Telefónica

La compañía aérea “Siberia” tiene una centralita de teléfonos con 3 líneas. La empresa tiene un pico de llamadas durante 3 horas, en las que algunos clientes no pueden ponerse en contacto con la empresa debido al intenso tráfico de llamadas (se sabe que si las tres líneas están siendo utilizadas al cliente no se le puede retener). La compañía estima que, debido a la fuerte competencia, el 60% de las llamadas no respondidas utiliza otra compañía. Durante las horas punta las llamadas siguen una distribución de Poisson con una media de 20 llamadas hora y cada telefonista emplea 6 minutos por cada llamada (distribución exponencial). El beneficio medio de un viaje es de 210 euros, ¿cuánto dinero se pierde diariamente debido a llamadas no contestadas? Se supone que durante las horas que no son críticas se cogen todas las llamadas. Si cada empleado cuesta a la compañía 24 euros/hora y un empleado debe trabajar 8 horas al día, ¿cuál es el número óptimo de empleados? Las horas punta siempre son a la misma hora. La centralita no se cierra nunca y la puede atender un solo empleado cuando no hay hora punta. Se asume que el coste de añadir una línea es despreciable.

### **6.11 Cursos OnLine**

La academia “Grandes Escritores” ofrece un curso por correspondencia para aprender a escribir. Las solicitudes son aceptadas en cualquier momento y el curso empieza inmediatamente. La llegada de nuevas solicitudes sigue una distribución de Poisson con una media de 8 cada mes. Se estima que el tiempo medio en que se acaba el curso es de 10 semanas (distribución exponencial). Por término medio, ¿cuántos alumnos hay matriculados en la academia en cualquier momento?

### **6.12 Mantenimiento Dispensadores**

Las máquinas que dispensan billetes para el metro en la compañía “RNFV” se suelen estropear cada 45 horas. Se supone que el único reparador de la estación tarda 4 horas en reparar la máquina. Se asume que los dos tiempos son la media de una distribución exponencial. ¿Cuál es el mínimo número de máquinas que debe haber para asegurarse que haya al menos 5 máquinas en servicio con una probabilidad mayor que 0.95?

### **6.13 Peluquería Maripuri**

La peluquería maripuri está dirigida y gestionada únicamente por su propietaria. Atiende según el principio de que el primero que entra es el primero que sale. La peluquería, dado su carácter cibernético está muy ocupada los sábados por la mañana y la propietaria se plantea la posibilidad de contratar a una ayudante. Así pues, hace un estudio y se da cuenta de que los clientes llegan con una distribución de Poisson de media 5 clientes por hora. Debido a su excelente reputación los clientes están dispuestos a esperar lo que haga falta. La propietaria, señora Purificación, sigue con sus estudios y estima que el tiempo medio en el que atiende un cliente es de 10 minutos según una distribución exponencial. Decide primero calcular el número medio de clientes en el salón y el número medio de clientes esperando un corte de pelo. Sólo tiene 4 sillas además del sillón de peluquera, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente y no encuentre sitio?, ¿cuál es la probabilidad de que alguien espere más de 45 minutos?

### **6.14 Dispensario Gratuito**

Uno de los hospitales de la ciudad de Valencia ofrece todos los miércoles por la noche revisiones gratis de vista. Un test necesita, por término medio, 20 minutos distribuyéndose según una exponencial. Los clientes llegan según una distribución de Poisson de media 6/hora, y los pacientes se atienden según norma FIFO. Los encargados del hospital desean saber que cantidad de personal sanitario deben disponer. Para ello habría que calcular para diferentes cantidades de doctores: 1) ¿cuál es el número medio de gente esperando? 2) el tiempo medio que un cliente pasa en la clínica y 3) el tiempo medio que los doctores están parados



### **6.15 Estación ITV**

Una estación de ITV cuenta con tres puestos para inspección y en cada uno sólo puede ser atendido un coche. Cuando un coche sale de un puesto la vacante es ocupada por otro que está en cola. La llegada de coches sigue una distribución de Poisson con una media de un coche por minuto en sus horas punta, que duran tres horas. En el parking sólo caben 4 vehículos. El tiempo de inspección sigue una distribución exponencial de media 6 minutos. El inspector jefe desea saber el número medio de coches en la estación, el tiempo medio (incluida la inspección) de espera, y el número medio de coches en cola debido a que los puestos están ocupados. ¿Cuántos coches tendrán que volver en otro momento?

### **6.16 Mantenimiento de Robots**

Una fábrica de semiconductores usa cinco robots para la fabricación de sus placas de circuitos. Los robots se estropean periódicamente, y la compañía tiene dos reparadores para las reparaciones. Cuando un robot es arreglado, el tiempo hasta que el siguiente se rompe se cree que es una exponencial distribuida con una media de 30 horas. La empresa tiene suficiente trabajo en cola para asegurarse que todos los robots en condiciones de trabajar estarán funcionando. El tiempo de reparación se distribuye según una exponencial de media 3 horas. Al encargado le gustaría saber el número medio de robots operativos en cualquier momento, el tiempo que un robot tarda en ser reparado, el porcentaje de tiempo en que algún operario está parado.

### **6.17 Puliendo motores**

Pepe y Juan han patentado un invento para pulir automóviles y han montado su propia empresa, para ello han alquilado un viejo local. El local solo se abre los sábados. Los clientes son atendidos según norma FIFO. Se supone que su local está situado en una zona donde pueden aparcar y esperar los clientes sin problemas. La máquina de pulir puede funcionar a dos velocidades, a mínima velocidad tarda una media de 40 minutos y la máxima tarda una media de 20 minutos, se pueden asumir los tiempos distribuidos de forma exponencial. Los clientes llegan según una distribución de Poisson de media 30 minutos. Juan tiene un curso de teoría de colas y ha decidido estudiar el efecto de dos políticas: 1) poner la máquina a máxima velocidad si hay alguien esperando y 2) poner a máxima velocidad solo si hay más de uno esperando (3 o más en el sistema). La velocidad se puede cambiar en cualquier momento, incluso si la máquina está trabajando. Se quiere saber el tiempo medio de espera bajo estas dos políticas.

### **6.18 Nuevo concepto de supermercado**

Jon Ros, presidente de Mercanona, está experimentando un nuevo tipo de tiendas y para ello ha remodelado una de ellas como sigue. En vez de las típicas colas en el cajero ha puesto una sala donde esperar tu turno para pagar. Conforme van llegando los clientes, una vez hecha la compra, pasan a la sala, si todos los cajeros están ocupados entonces cogen número y esperan sentados. Tan pronto como una caja esté libre el siguiente número será llamada para que pase por ella. En la sala no hay límite de clientes que puedan estar esperando. El ingeniero estima que durante las horas punta los clientes llegan de acuerdo a una distribución de Poisson de media 40 por hora, tardan por término medio  $\frac{3}{4}$  de hora para llenar sus carros (distribución exponencial). El tiempo que tarda un cajero en pasar toda la compra tiene de media 4 minutos (exponencial), independientemente de la cantidad de compra (cada caja tiene un cajero y un embolsador). Ros quiere saber lo siguiente:

- a) ¿Cuál es el número mínimo de cajas durante las horas punta?
- b) Si se pone una caja más que el mínimo requerido, ¿cuál es el tiempo medio de espera en la cola? ¿Cuánta gente habrá en cajas? ¿cuánta gente habrá en todo el supermercado?

### **6.19 Centralita Telefónica**

La compañía de seguros “La Otra Vida” tiene una centralita telefónica. Las llamadas llegan según una distribución de media 35 cada hora. Los clientes llaman para dos cosas: para reclamaciones o para solicitar información, para ello deben apretar el botón 1 o el 2. Se cree que el tiempo que tarda un cliente en tomar la decisión y apretar el botón tiene una media de tiempo de 30 segundos según una distribución exponencial. Las llamadas realizadas solo pueden ser procesadas por este contestador de una en una, si alguien llama mientras tanto se le pone una bonita música, se le dice que espere y se le pone en cola. Aproximadamente el 55% de las llamadas son para reclamaciones, el resto para demanda de servicios. El nodo de reclamaciones tiene 3 servidores en paralelo y se estima que el tiempo medio en que atiende un cliente es de 6 minutos (exponencial). El nodo de solicitud de información tiene 7 servidores en paralelo con un tiempo de servicio medio de 20 minutos (exponencial). Se asume que puede haber todos los clientes que se quieran esperando en los nodos. Alrededor del 2% de llamadas que van al nodo de reclamaciones acaban en el de demanda de información, y el 1% que llama al nodo de demanda de información se va al nodo de reclamaciones. Se desea saber por término medio el tamaño de las colas en cada nodo y el tiempo medio que un cliente pasa en el sistema.

## 6.20 *Mantenimiento*

Se desea que dos máquinas estén operativas el máximo tiempo posible. La máquina se rompe de acuerdo con una exponencial de media  $\lambda$ . Una vez rota, una máquina tiene una probabilidad  $r_{12}$  de ser reparada localmente por un responsable de mantenimiento que trabaja con una media de tiempo de  $\mu_2$ . Con probabilidad  $1 - r_{12}$  la máquina debe ser reparada por un especialista, que también trabaja según una exponencial de media  $\mu_3$ . Después de una reparación local, existe una probabilidad  $r_{23}$  de que la máquina requiera un servicio especial. Después del servicio con el especialista la máquina siempre se pone a trabajar. Se desea saber cómo se distribuyen los tiempos de estancia de las máquinas en reparación.

## 6.21 *Reparaciones Electrónicas*

Una empresa de reparación de electrónica sirve a la mayoría de los minoristas de electrodomésticos de la región. Recibe aparatos para arreglar según una distribución de Poisson de media 9 a la hora. Todos los aparatos nada más llegar son inspeccionados por un especialista que determina a que sección debe ir dependiendo del tipo de reparación si es básica, si la debe ver un especialista, si debe enviar el aparato al fabricante y por tanto mandados a un almacén para ser enviado. Alrededor del 17% es enviado a fábrica. De los restantes, el 57% va a reparaciones generales y el 43% es enviado a un experto. Todos los aparatos reparados van al almacén para ser enviados, sin embargo el 5% que va a reparaciones generales vuelve al inicio para ser nuevamente clasificado. Debido a la variedad de los aparatos enviados y la variedad de problemas la distribución exponencial es una adecuada representación para la clasificación, reparación y envío. Solo hay una persona en la selección y tarda una media de 6 minutos por aparato. Hay tres personas en reparaciones generales y tardan por término medio 35 minutos por aparato (incluidos los que son devueltos a clasificación). Hay cuatro expertos y tardan por término medio 65 minutos en reparar un aparato (estos aparatos siempre salen arreglados). Hay dos muelles de embarque, cada uno de ellos tarda una media de 12,5 minutos en embalar un aparato. El ingeniero de la empresa se pregunta cuantos aparatos hay por término medio en cada nodo, el tiempo que pasa en cada nodo y el tiempo medio que está un aparato en la empresa desde que es recibido y clasificado hasta que es empaquetado.

## 6.22 *Restaurante Chino Gran Muralla*

El restaurante chino “Gran Muralla” sirve dos tipos de platos para llevar, los rollitos de primavera y el pollo frito. Hay dos ventanas separadas, una para cada menú. Los clientes llegan según una distribución de Poisson de media 20 /hora. El 60% va a por rollitos y el resto a por el pollo. El 20% de los que van a por los rollitos pasan luego a por pollo y el resto abandona el restaurante. El 10% de los que primero se han puesto en la ventana del pollo pasan luego a por rollitos de primavera y el resto

abandona el restaurante. Se tarda 4 minutos en servir los rollitos y 5 minutos en servir el pollo frito, el tiempo de servicio es exponencial. ¿Cuánta gente hay por término medio en el restaurante? ¿Cuál es el tiempo medio de espera en cada ventanilla? Si alguien quiere los dos menús ¿Cuánto tiempo pasa en el restaurante?

## **6.23 Aglomerados JPK**

Una empresa de fabricación de puertas de madera tiene una unidad de negocio que fabrica puertas de muebles de cocina. Dichas puertas, de dimensiones diferentes según pedidos, reciben un tratamiento en 3 etapas. El número de puertas que la unidad de negocio fabrica son alrededor de 50000 puertas al año. La primera etapa es capaz de procesar 220 puertas al día. La segunda etapa consta de dos máquinas que procesan cada una 140 puertas al día. La tercera etapa es una etapa manual, para la que se dispone de 3 trabajadores que tardan aproximadamente 5 minutos por puerta. Los días tienen 480 minutos y los años 240 días. Se pueden suponer tiempos distribuidos según una negativa exponencial tanto para las llegadas de pedidos como para los ritmos de producción.

- a) *¿Cuál es el número de puertas que habrá en cada etapa, incluyendo las puertas en las máquinas y las que están siendo procesadas por los operarios?*
- b) *¿En qué afectaría al sistema anterior que en la etapa segunda se colocara un limitador de capacidad, mediante el cual no se aceptaran al almacén previo a dicha etapa más de 5 puertas?*
- c) *Suponga que en el sistema original la demanda de puertas asciende a 70000 puertas/año. Si se opta por no comprar una máquina nueva en la primera etapa, ¿Cuántas horas extra al día debe trabajar la primera máquina? ¿En qué afectaría dicho cambio a los plazos de entrega? ¿Cómo se comportarían los almacenes?*
- d) *Suponga que en el sistema original la demanda de puertas asciende a 70000 puertas/año. Si se opta por no comprar una máquina nueva en la primera etapa, ¿Cuántas horas extra al día debe trabajar la primera máquina? ¿En qué afectaría dicho cambio a los plazos de entrega? ¿Cómo se comportarían los almacenes?*
- e) *Suponga que en la segunda etapa, no hay dos si no tres máquinas. Dichas máquinas tardan en estropearse 3 días desde que se arreglan y un mecánico tarda de media 5 horas en arreglarlas cada vez. Sólo se dispone de un mecánico. ¿Tiene este sistema suficiente capacidad para hacer frente a la demanda?*
- f) *Sobre el caso anterior ¿Qué porcentaje de tiempo sólo hay una máquina trabajando? ¿Y ninguna? ¿Qué ocurre con los almacenes durante este tiempo que hay menos de dos máquinas trabajando?*

- g) Sobre el caso anterior ¿Qué opinión le merece que vaya uno de los trabajadores de la tercera sección a ayudar al mecánico cuando haya dos o más máquinas estropeadas? *Debe sustentar la opinión con datos, suponga para ello que el trabajador de la tercera sección se comporta como un mecánico más, cuando trabaja como tal.*
- h) (1 punto) ¿Cuál sería en el caso anterior la probabilidad de que hubiera más de una máquina estropeada?

**Resolución**

- a) *¿Cuál es el número de puertas que habrá en cada etapa, incluyendo las puertas en las máquinas y las que están siendo procesadas por los operarios?*

En la primera etapa se tiene un problema M/M/1 ( $\lambda=208,33$  puertas/día;  $\mu=220$  puertas/día)  $L_1=17,85$  puertas.

En la segunda etapa se tiene un problema M/M/2 ( $\lambda=208,33$  puertas/día;  $\mu=140$  puertas/día)  $L_1=3,33$  puertas.

En la tercera etapa se tiene un problema M/M/3 ( $\lambda=208,33$  puertas/día;  $1/\mu=5$  minutos/puerta)  $L_1=3,55$  puertas.

- b) *¿En que afectaría al sistema anterior que en la etapa segunda se colocara un limitador de capacidad, mediante el cual no se aceptaran al almacén previo a dicha etapa más de 5 puertas?*

En primer lugar el sistema dejaría de ser una serie de colas convencional porque se limita la capacidad de una de ellas. Esta sería una cola M/M2/7 Pero para saber cómo afectaría lo mejor es saber el porcentaje de veces que el almacén estaría lleno  $P(n=7)=4,1\%$ . Por tanto durante un 3,8% de las ocasiones la primera etapa no podría trabajar al estar bloqueado el sistema posterior, dado que la primera etapa trabaja al 95%, la probabilidad de que el bloqueo del sistema afecte a la producción total es alta.

- c) *Si en el sistema original el tiempo medio de entrega de una puerta es de 5 días. ¿Cuántas puertas hay?*

El número de puertas en el sistema el  $L=\lambda \cdot W=1041,7$  puertas

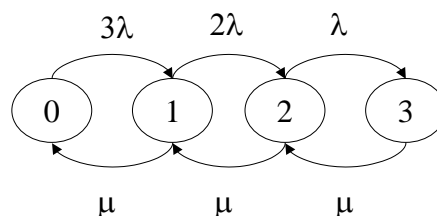
- d) *Suponga que en el sistema original la demanda de puertas asciende a 70000 puertas/año. Si se opta por no comprar una máquina nueva en la primera etapa, ¿Cuántas horas extra al día debe trabajar la primera máquina? ¿En qué afectaría dicho cambio a los plazos de entrega? ¿Cómo se comportarían los almacenes?*

70000 puertas al año son 291,67 puertas al día. Por tanto habría que trabajar 2,6 horas más al día. El almacén anterior a la primera etapa aumentaría en 71 puertas cada día, y se reduciría en la misma cantidad cada noche(o cuando se hagan las horas extra), pasando a

aumentar el almacén en la siguiente etapa. Los siguientes almacenes prácticamente no lo notarían. La cola media, dependería de cuantas horas extra se trabajaran cada noche, puesto que si sólo se trabajara lo estrictamente imprescindible la cola sería infinita.

- e) *Suponga que en la segunda etapa, no hay dos si no tres máquinas. Dichas máquinas tardan en estropearse 3 días desde que se arreglan y un mecánico tarda de media 5 horas en arreglarlas cada vez. Sólo se dispone de un mecánico. ¿Tiene este sistema suficiente capacidad para hacer frente a la demanda?*

Este es un sistema con fuente finita. El número de máquinas que estarán siendo reparadas por término medio es de 0,67. Por tanto se tienen 2,33 máquinas trabajando, y por tanto es más que suficiente ya que  $2,33 \cdot 140 > 208$ .



- f) (1 punto) Sobre el caso anterior ¿Qué porcentaje de tiempo sólo hay una máquina trabajando? ¿Y ninguna? ¿Qué ocurre con los almacenes durante este tiempo que hay menos de dos máquinas trabajando?

Sólo hay una máquina trabajando cuando hay dos estropeadas  $P_2 = 13,4\%$

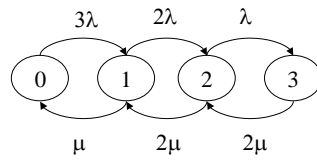
No hay ninguna trabajando si todas están estropeadas  $P_3 = 2,7\%$

Cuando hay menos de dos máquinas trabajando el nivel de almacén antes de la segunda etapa crece. Y por tanto aumenta el plazo total de entrega.

- g) (2 puntos) Sobre el caso anterior ¿Qué opinión le merece que vaya uno de los trabajadores de la tercera sección a ayudar al mecánico cuando haya dos o más máquinas estropeadas? *Debe sustentar la opinión con datos, suponga para ello que el trabajador de la tercera sección se comporta como un mecánico más, cuando trabaja como tal.*

A priori, si hay dos máquinas estropeadas, el ritmo al cual pasan puertas a la tercera etapa es de 140 puertas/día. Con dos operarios es posible abastecer 192 puertas al día, con lo que no pasaría nada. Además el porcentaje de veces que hay dos máquinas estropeadas es muy bajo en el nuevo sistema.

- h) (1 punto) ¿Cuál sería en el caso anterior la probabilidad de que hubiera más de una máquina estropeada?



	0,56536
P0	409
	0,35335
P1	256
	0,07361
P2	512
	0,00766
P3	824

La probabilidad de que hubiera más de una máquina estropeada sería 8%

## 6.24 Ascensores PKJu

Una sección de una empresa fabrica puertas metálicas para ascensores. Las puertas para ascensores pueden tener una gran variedad de formatos, colores y huecos para vidrios variables.

Se puede admitir que el proceso de producción se compone de 4 etapas consecutivas pero independientes. La empresa trabaja alrededor de 220 días al año. Cada día tiene 7 horas y 30 minutos de trabajo efectivo. Durante el pasado año se recibieron pedidos por una cantidad de 8.500 puertas. Los pedidos tienen una cantidad variable de unidades, y los ajustes de cambio de partida, aunque importantes en ocasiones, no parecen repercutir en los ritmos de producción promedio de las diferentes etapas de trabajo.

La primera etapa se realiza simultáneamente por dos equipos de trabajo, con un ritmo promedio cada uno de ellos de una puerta cada 20 minutos. La segunda etapa la realiza un equipo de trabajo con un tiempo de ciclo promedio de 11 minutos por puerta. La tercera etapa requiere del uso de otra máquina con un tiempo de ciclo promedio de 10 minutos por puerta.

Por último la cuarta etapa es de preparación final. Como es un trabajo principalmente manual, que realiza un único operario, tiene un tiempo de ciclo de 18 minutos por unidad, y se dispone de tantos trabajadores como se requieran, pues irán viniendo de otras secciones siempre que haya una puerta por preparar.

- a) Modele el problema según teoría de colas, estableciendo los parámetros básicos, asumiendo tiempos promedio exponenciales.
- b) ¿Cuál será el número medio de puertas que habrá en el sistema?.
- c) ¿Cuántos trabajadores serán necesarios normalmente en la cuarta etapa?.
- d) Si un pedido tiene 30 puertas ¿Cuánto tiempo tardará en promedio en ser servido?
- e) ¿Cuál es el tiempo promedio previsto de entrega de una puerta? Si le dicen que el tiempo de entrega promedio es de 5 días. ¿A qué puede ser debido?. Proponga un mecanismo de corrección.
- f) Cual será el efecto sobre la cantidad de puertas en la primera etapa si en lugar de dos equipos de trabajo con tiempos de ciclo como los citados se establece un único equipo más eficiente con un tiempo de ciclo de 9 minutos por unidad.

Al exponer el funcionamiento de la tercera etapa se ha simplificado el proceso. Realmente existen tres máquinas que pueden realizar la misma función, aunque en realidad nunca hay más de una fabricando. Las citadas máquina se estropean cada 5 horas en promedio (distribución negativa



exponencial). Disponemos de 2 equipos de mantenimiento en nuestra empresa, que pueden poner en funcionamiento la máquina de nuevo en un tiempo promedio de 1 hora.

- g) Modele la situación de la 3ª etapa según cadenas de Markov, para el caso expuesto.
- h) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna máquina disponible?

**Solución:**

El problema propuesto es una serie de colas con una entrada  $\lambda=38'6$  puertas/día.

- a) La primera etapa es una cola M/M/2 con  $\lambda=38'6$  puertas/día. y  $\mu=22,5$  puertas/día  
La segunda etapa es una cola M/M/1 con  $\lambda=38'6$  puertas/día. y  $\mu=40,9$  puertas/día  
La tercera etapa es una cola M/M/1 con  $\lambda=38'6$  puertas/día. y  $\mu=45$  puertas/día  
La cuarta etapa es una cola M/M/ $\infty$  con  $\lambda=38'6$  puertas/día. y  $\mu=25$  puertas/día
- b)  $L_1= 6,53$      $L_2= 17$      $L_3=6,07$      $L_4= 1,54$          $L_T=31,14$  puertas
- c)  $L=\lambda W$                        $W_T= 0,806$  días = 6,05 horas
- d) Habrá 1,54 trabajadores por término medio.
- e) El tiempo que tardará será el de salir la primera 0,806 días más el que tardan en salir las 29 restantes.  $0,806 + 29/\lambda = 0,806+0,751=1,557$  días = 11,68 horas
- f) Si en realidad tardan 5 días en salir, es porque en el sistema hay puertas de más. La cantidad de puertas que hay es  $L=\lambda \cdot (W-29/\lambda)=162$  puertas de más.

## 6.25 Juguetes KP

Una empresa de transformados plásticos tiene 4 secciones (A,B,C,D). Los productos que fabrica se pueden clasificar en 5 categorías, con demandas anuales diferentes.

Los productos de categoría 1 tienen una demanda anual de alrededor de 500 unidades, y sus especificaciones los harán circular por la sección A, luego la sección B y por último la sección C.

Los productos de categoría 2 tienen una demanda anual de alrededor de 3000 unidades, y sus especificaciones los harán circular por la sección A, luego la sección B y por último la sección D.

Los productos de categoría 3 tienen una demanda anual de alrededor de 2000 unidades, y sus especificaciones los harán circular por la sección B y la sección D.

Los productos de categoría 4 tienen una demanda anual de alrededor de 2000 unidades, y sus especificaciones los harán circular por la sección A y la sección C.

Los productos de categoría 5 tienen una demanda anual de alrededor de 1000 unidades, y sus especificaciones los harán circular por la sección B y la sección C.

Sabiendo que el ritmo de producción por hora en una máquina de tipo A es de 2 unidades, el de B es de 2 unidades, el de C es de 4 unidades y el de D es de 2 unidades por hora. Sabiendo que el año tiene 220 días laborables de 8 horas cada uno y asumiendo tiempos de servicio exponenciales.

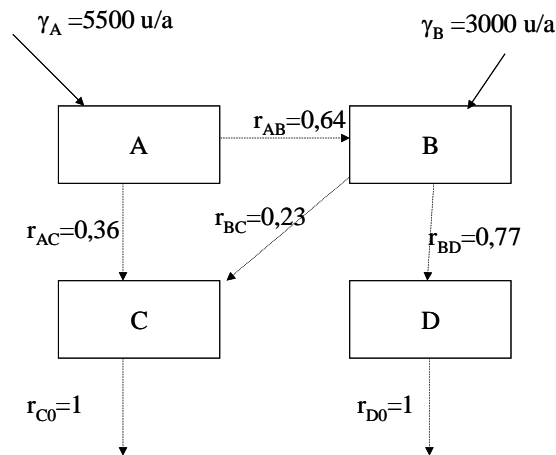
### Preguntas

- a) Modele el problema definiendo los parámetros básicos para cada sección ( $\lambda$ ,  $\mu$ ).
- b) Defina el número de máquinas imprescindibles en cada sección.
- c) Asumiendo que los niveles de inventario se mantendrán en los mínimos imprescindibles, ¿Cuál es el tiempo medio esperado de producción de un producto en el sistema?
- d) Si el tiempo medio de entrega de un producto es de 10 días laborables ¿Cuál es el nivel medio de inventario en el sistema?
- e) Suponga que en la sección B hacen falta dos máquinas. La experiencia con esas máquinas indica que requieren un cierto mantenimiento con distribución exponencial con media cada 5 días y que el tiempo que dura dicho mantenimiento se distribuye exponencialmente con media de 1 día. ¿Cuántas máquinas hacen falta para que haya al menos dos máquinas funcionando el 90% del tiempo?.
- f) En el caso anterior, ¿cuántas máquinas habrá en funcionamiento por término medio?

### Resolución

El problema es una red de Jackson abierta con 4 nodos.

$$\gamma_A=5500 \text{ u/a} \quad \gamma_B=3000 \text{ u/a} \quad \gamma_C=0 \text{ u/a} \quad \gamma_D=0 \text{ u/a}$$



$$r_{AB} = \frac{3500}{5500} = 0,64 \quad r_{AC} = \frac{2000}{5500} = 0,36 \quad r_{BC} = \frac{1500}{6500} = 0,23 \quad r_{BD} = \frac{5000}{6500} = 0,77$$

Las características de cada nodo son:

Nodo	$\gamma$	$\lambda$	$\mu$
A	5500	5500	3520
B	3000	6500	3520
C	0	3500	7040
D	0	5000	3520

El número de máquinas a ubicar en cada nodo son:

Nodo	Número de Máquinas
A	2
B	2
C	1
D	2

Para calcular el tiempo esperado medio en el sistema es necesario conocer la cola en cada nodo:

Nodo	$\gamma$	$\lambda$	$\mu$	Núm Máq	$\rho$	L
A	5500	5500	3520	2	0.781	4.01

---

B	3000	6500	3520	2	0.923	12.51
C	0	3500	7040	1	0.497	0.988
D	0	5000	3520	2	0.710	2.86

El tiempo esperado medio en el sistema es:

$$\frac{\sum_i L_i}{\sum_i \gamma_i} = \frac{4.01 + 12.51 + 0.99 + 2.86}{5500 + 6500 + 0 + 0} = 0,0017 \text{ años} = 2,99 \text{ horas}$$

Si el tiempo real de un pedido en el sistema son 10 días, significa que hay

$$\sum_i L_i = \frac{10}{220} \sum_i \lambda_i = 931.8 \text{ piezas de media en el sistema.}$$

El problema de las máquinas y su mantenimiento es un problema de límite en la fuente.  $\lambda=0.2$  maq/día y  $\mu=1$  maq/día y un único servidor. Se trata de calcular el valor de M tal que la probabilidad de  $P(n \leq M-2) > 0.9$

Parece evidente que se debe comenzar calculando con 3 máquinas, porque cada máquina está un 20% del tiempo en reparación lo que hace imposible que  $M=2$  sea una respuesta válida.

Con  $M=3$  la probabilidad de que haya 0 ó 1 máquina siendo reparadas, de acuerdo con las fórmulas, es

$$P_n = \begin{cases} \binom{M}{n} r^n P_0 & 1 \leq n < c \\ \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} c!} r^n P_0 & c \leq n \leq M \end{cases}$$

$$\sum P_n = 1 \Rightarrow 1 = P_0 \left( \sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n} r^n + \sum_{n=c}^M \frac{n!}{c^{n-c} c!} r^n \right)$$

con  $M=3$

p0	0.530
p1	0.318
p2	0.127
p3	0.025

Lo que indica que la probabilidad de que haya 0 ó 1 máquina siendo reparada es 0.848

Haciendo los cálculos para  $M=4$

Con  $M=4$

P0	0.398
P1	0.319
P2	0.191
P3	0.076
P4	0.015

Lo que indica que sólo en el 9.1% de los casos 3 ó 4 máquinas estarán reparándose y por tanto se cumplirá la restricción impuesta.

El número de máquinas que habrá en funcionamiento en un sistema con 4 máquinas es de

$$M - \sum_n n \cdot p_n = 4 - 0.99 = 3 \text{ máquinas}$$

## 6.26 Mejora de Un Servicio de Atención Telefónico

Trabaja en una empresa que da servicio de distribución de aguas. Concretamente se le ha encargado que preste su atención del departamento de atención telefónica.

Actualmente se reconocen 3 tipos de llamadas que se reciben en tres teléfonos distintos. De tipo 1 se reciben 40 llamadas a la hora, de tipo 2 se reciben también 40 llamadas a la hora y de tipo 3 se reciben en condiciones normales 20 llamadas a la hora.

El tiempo que se tarda en atender una llamada de tipo 1 es de 3 minutos igual que las llamadas de tipo 2. Las llamadas de tipo 3 requieren una atención en promedio de 5 minutos cada una.

Usted está diseñando un nuevo sistema de atención telefónica, que atendería a todos los clientes con un único número de teléfono. Un sistema informático discrimina el destino de la llamada mediante una operación que dura aproximadamente 20 segundos en promedio.

Una vez el sistema informático decide el destino, tiene una probabilidad del 5% de equivocarse. En ese caso el operador que recibe la llamada, envía ésta al centro adecuado para que sea atendido.

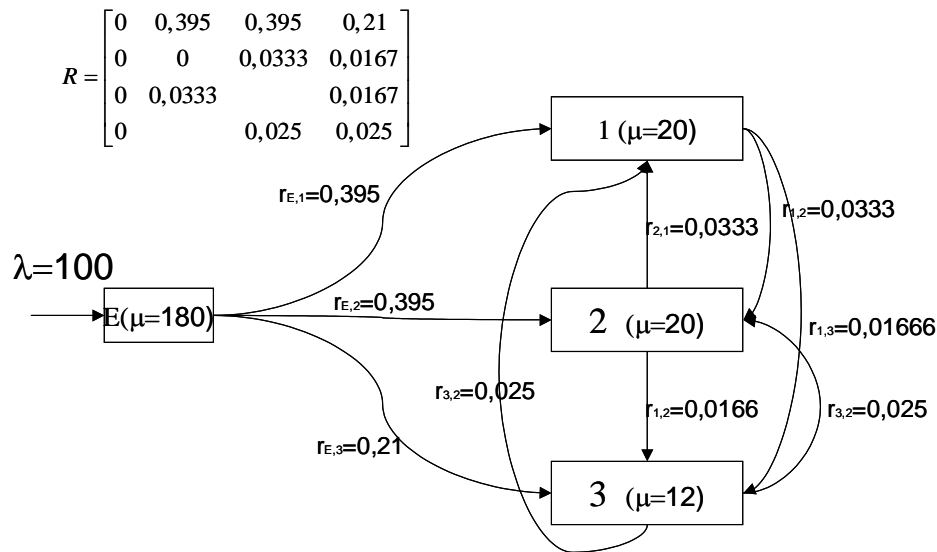
### Preguntas

- ¿Cuántos operadores pondría en la sección que atiende llamadas de tipo 1?
- ¿Cuántos operadores pondría en la sección que atiende llamadas de tipo 3?
- ¿Cuántas llamadas habría en promedio en la sección que atiende llamadas de tipo 3 si pusieran los operadores estrictamente necesarios?
- ¿Cuántas llamadas habría en promedio en la sección que atiende llamadas de tipo 3 si pusieran uno más de los operadores estrictamente necesarios?
- ¿Cuál es tiempo medio que un cliente estaría en el sistema si pusiera los operadores estrictamente necesarios?
- ¿Cuál es tiempo medio que un cliente estaría en el sistema si pusiera en cada sección uno más de los operadores estrictamente necesarios?
- Se le plantea una nueva alternativa. Consiste en hacer que todos los operadores atiendan todas las llamadas, aunque en ese caso el tiempo de atención de cada llamada es el doble del indicado más arriba para cada tipo. En este caso no hace falta discriminador. ¿Cuántos operadores hacen falta?
- En el caso anterior, ¿Cuál es el tiempo medio de estancia en el sistema?

Si disponemos 12 operadores el tiempo medio de estancia en el sistema es de 0,25 horas.

### Resolución

- ¿Cuántos operadores pondría en la sección que atiende llamadas de tipo 1?  
El sistema es una red abierta de Jackson con las siguientes transiciones.  
El Modelo representado es el siguiente.



Tanto en la sección 1 como en la 2 es necesario poner 3 operadores para que  $\rho < 1$

- b) ¿Cuántos operadores pondría en la sección que atiende llamadas de tipo 3?

En la sección 3 es suficiente con 2 operadores, aunque  $\rho = 93,27$

- c) ¿Cuántas llamadas habría en promedio en la sección que atiende llamadas de tipo 3 si pusieran los operadores estrictamente necesarios?

El valor de  $L_q = 12,46$  y el valor de  $L = 14,33$

- d) ¿Cuántas llamadas habría en promedio en la sección que atiende llamadas de tipo 3 si pusieran uno más de los operadores estrictamente necesarios?

Con 3 operadores  $L = 2,5$

- e) ¿Cuál es tiempo medio que un cliente estaría en el sistema si pusiera los operadores estrictamente necesarios?

$$W = \frac{L_E + L_1 + L_2 + L_3}{\gamma_E + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} = \frac{1,25 + 3,14 + 3,14 + 14,33}{100 + 0 + 0 + 0} = 0,21 \text{ horas}$$

- f) ¿Cuál es tiempo medio que un cliente estaría en el sistema si pusiera en cada sección uno más de los operadores estrictamente necesarios?

$$W = \frac{L_E + L_1 + L_2 + L_3}{\gamma_E + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} = \frac{1,25 + 2,28 + 2,28 + 2,5}{100 + 0 + 0 + 0} = 0,08 \text{ horas}$$

- g) Se le plantea una nueva alternativa. Consiste en hacer que todos los operadores atiendan todas las llamadas, aunque en ese caso el tiempo de atención de cada llamada es el doble del indicado más arriba para cada tipo. En este caso no hace falta discriminador. ¿Cuántos operadores hacen falta?

Si se considera que todas las llamadas se atienden del mismo modo, hay que calcular el nuevo tiempo medio de atención al cliente. De este modo queda

$$\frac{40 \cdot 6 + 40 \cdot 6 + 20 \cdot 10}{100} = 6,8 \text{ minutos}$$

Recibiendo las mismas 100 llamadas a la hora pero teniendo éstas un tiempo de atención promedio de 6,8 minutos hacen falta 12 operadores

h) En el caso anterior, ¿Cuál es el tiempo medio de estancia en el sistema?

Si disponemos 12 operadores el tiempo medio de estancia en el sistema es de 0,25 horas.

## ***6.27 Colas en el parque de atracciones.***

Acaba usted de llegar a la cola del aparcamiento de un parque temático. Por lo que le han comentado las colas empiezan con los cajeros a los que paga 6 Euros por coche que entra en el aparcamiento. La segunda cola empieza mientras espera que le asignen una plaza del aparcamiento. La tercera es la cola para pagar la entrada ( a 8 euros más por persona), y por último una cola para que comprueben que no pretende entrar comida en el parque temático. Una vez dentro del Parque comenzará una serie de colas que acabará con su paciencia y sus piernas, pero eso será después de haber conseguido traspasar esa última barrera.

No todo el mundo que entra en el Parque sigue el mismo camino, pero su interés radica en saber cuánto tardará usted en alcanzar el interior del Parque.

Un breve análisis de la situación le indica los siguientes datos.

Entran aproximadamente 2400 coches por hora, para ser atendidos por 20 cajas en paralelo que tardan en cobrar aproximadamente 29 segundos por cliente.

De todos los coches que entran un 18% van al aparcamiento VIP (al que usted no va ni irá y por eso no sabe cómo funciona). El 82% restante va al aparcamiento convencional que, de un modo muy eficiente es capaz de aparcar los coches, de uno en uno, con un tiempo de ciclo promedio de 3,5 segundos por coche.

Mediante otros medios (trenes y autobuses) se acercan junto con los clientes en coche particular nuevos grupos de clientes.

Se calcula que en el parque que hemos elegido para depositar (y perder) nuestros ahorros, entran aproximadamente 25.000 personas al día en 6000 grupos (los grupos son importantes porque compran las entradas de modo conjunto). De los 6000 grupos sólo 3500 grupos compran las entradas en taquilla (los otros ya las compraron por agencia o llevan un pase de varios días comprado anteriormente). Todos los clientes llegan aproximadamente en las 3 primeras horas de apertura del parque.



Los que han de pagar tendrán que hacer 6 colas para pagar en 30 cajas (cada cola alimenta a 5 cajas). En cada caja tardarán en promedio 92 segundos en atenderles.

Tras pagar queda la última cola donde cada cliente pasa de modo individual, y pasan todos: los que acaban de comprar y los que venían con ticket precomprado, por el detector de comidas y bebidas. Estos son 12 carriles en paralelo, cada uno con su propia cola, que tardan 5 segundos en dejar pasar a cada cliente.

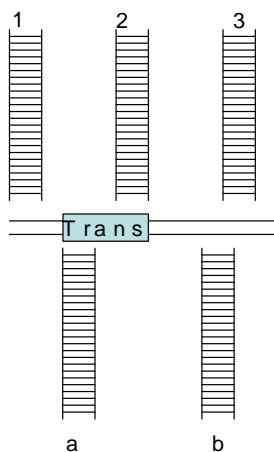
- a) Si cada coche mide 4 metros, cuantos metros de carretera hacen falta para que quepan en promedio todos los coches que se pondrán en cola delante de las cajas de aparcamiento.
- b) ¿Cuánto tiempo se tarda en hacer la cola para aparcar el coche, una vez haya pagado el aparcamiento?
- c) ¿Cuánto tiempo tardaremos en conseguir nuestra entrada desde que hemos aparcado el coche, considerando que tarda 5 minutos desde que aparca hasta que llega a la cola?
- d) ¿Cuánta gente habrá como usted haciendo cola para pagar?
- e) ¿Cuánto tiempo tardaremos en entrar en el parque desde que aparcamos?.
- f) ¿qué ocurrirá en el sistema de cajas si el tiempo de atención en la caja de compra de entradas el tiempo medio de atención es de 100 segundos?
- g) ¿qué repercusión tendría en la cola posterior dicha alteración?
- h) Con las condiciones de e, ¿cuál es la repercusión de añadir un carril adicional de venta de entradas?

## 6.28 Automatismos JCP.

JCP Automatismos es una empresa que diseña, fabrica e instala sistemas de manutención automáticos. Actualmente se encuentran diseñando un sistema que pretenden dimensionar apoyándose en sus conocimientos. Dicho sistema recoge, en una de sus partes, tres tipos de productos paletizados a través de sendas mesas transportadoras de rodillos. Dichas mesas transportadoras desembocan en un carro. El carro recoge las paletas que las mesas le suministran y las envía a otras dos mesas de rodillos que alimentan sendas máquinas.

El ritmo de entrada de productos 1 en su mesa es de 20 paletas/hora. El de productos de tipo 2 es 40 paletas/hora. El de productos de tipo 3 es 60 paletas/hora.

El tiempo que en promedio tarda el transportador en cubrir un ciclo entero es de 25 segundos por paleta transportada. Es decir en promedio se tarda 25 segundos en moverse a la mesa de rodillos en la



que hay que recoger el producto, coger la paleta, desplazarse a la mesa de destino y descargar la paleta. El transportador elige el producto a transportar sin seguir ningún criterio específico.

El 80% de los productos que entran por **1** va a la mesa **a**.

El 40% de los productos que entran por **2** van a la mesa **a**.

El 50% de los productos que entran por **3** van a la mesa **a**.

La máquina que consume elementos de la mesa **a** lo hace a un ritmo de 50 segundos por paleta. La máquina que consume elementos de la mesa **b** lo hace también a 50 segundos por paleta

Se trata de definir la capacidad mínima que han de tener las 5 mesas de rodillos, para que el sistema no se bloquee. Para ello

- Definir el problema según una red de colas de varios productos (suponer que las colas inicialmente no tienen límite en la capacidad). Definir la matriz de transición para cada producto.
- Calcular los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  para cada una de los servidores.
- ¿Cuál será la cola promedio en cada una de las mesas suponiendo que no tienen límite de capacidad?
- ¿Cómo afectaría al sistema que el transportador eligiera para extraer, en cada ocasión, el producto en cabecera de la mesa de rodillos con más productos?
- ¿Cómo cree que afectará a la máquina que alimenta a la mesa 3 que ésta tuviera una limitación de 10 unidades?. ¿Y si fuera de 5 unidades?