



建立如上图所示的平面直角坐标系，根据假设，货车可抽象为一铰链。设车头，车厢长度分别为 L_1, L_2 ，铰接点大小忽略不计。记 $t=0$ 时刻车头轴线，车厢轴线与 y 轴正方向的夹角分别为 α_1 ， β_1 ，在货车转向过程中，前车轮轴线与车头轴线成一恒定夹角 α ，并设车头轴线与车厢轴线夹角为 β 。考虑到实际情况，在转向过程中，我们可近似认为 v_1 大小恒定不变。为了方便研究，我们认为驾驶员在转弯开始就将方向打到 α 位置，并在车头转到预计方向（如右转弯通过路口取 90° ）时立即将方向回正。这时， β 将不再是恒定不变，而是先增后减。

分别记车头，铰接点，车尾为 A, B, C 点，由于车头，车尾均为刚体，可以用 A, B, C 三点的速度代表车头，铰接点和车厢的速度。

对于车头，在 B 点处固连平动坐标系，则 v_1 相对于 AB 的法向分量始终垂直于 AB ，所以 A 点相对于平动坐标系的角速度

$$\omega_1 = \frac{v_1 \sin \alpha}{L_1}$$

/*平动坐标系下， AB 绕 B 点做定轴运动的周期

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi L_1}{v_1 \sin \alpha}$$

则 A 点在绝对坐标系下的运动半径

$$R_A = \frac{v_1 T_1}{2\pi} = \frac{L_1}{\sin \alpha}$$

B 点在绝对坐标系下的运动半径

$$R_{B_1} = \frac{v_2 T_1}{2\pi} = \frac{v_2 L_1}{v_1 \sin \alpha}$$

*/

根据速度投影定理，有

$$v_1 \cos \alpha = v_2$$

因此 v_2 在稳定状态下也可以认为是大小恒定不变的

在车头转到指定位置前，有

$$\alpha_1 = \omega_1 t = \frac{v_1 \sin \alpha}{L_1} t$$

对于车厢， v_2 沿 BC 的法向速度可以找到一瞬心，在稳定状态下，该点与车厢的相对位置不变，可取为平动坐标系原点，则车厢相对平动坐标系角速度

$$\omega_2 = \frac{v_2 \sin \beta}{L_2}$$

可以知道， β 为一关于时间 t 的函数，且其大小满足

$$\beta'(t) = \omega_1 - \omega_2$$

$$\text{即 } \beta'(t) = \frac{v_1 \sin \alpha}{L_1} - \frac{v_2 \sin(\beta(t))}{L_2}$$

解这个微分方程，求得 $\beta = \beta(t) = ?$

$$\text{车头转过 } \theta \text{ 角，用时 } t_1 = \frac{\theta L_1}{2v_1 \sin \alpha}$$

之后， $\alpha = 0 \text{ rad}$ ，则 $\omega_1 = 0 \text{ rad/s}$ ，关于 β 的微分方程变为

$$\beta'(t) = -\frac{v_2 \sin \beta(t)}{L_2}$$

求解这个微分方程，得到 $\beta = \beta(t) = ?$

综上所述，在转弯全过程中， β 的函数为：？