Буй Дык Туан ПРИ-191

Лекция 7

Электрические поля в системах с высокой симметрией

Электрический диполь.

① Применение теоремы Гаусса к телам с высокой симметрией

$$\Phi_E = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$$

1. Равномерно заряженная сфера

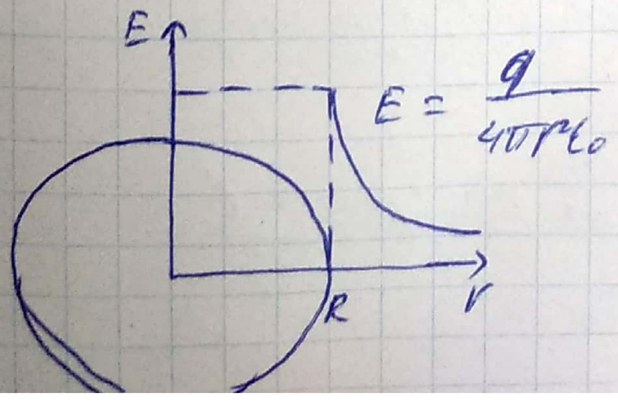
- На сфере радиуса R равномерно распределен заряд q, то есть поверхностная плотность заряда $\sigma = const$. По теореме Гаусса:

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Получаем выражение для напряженности электрического поля заряженной сферы

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

–

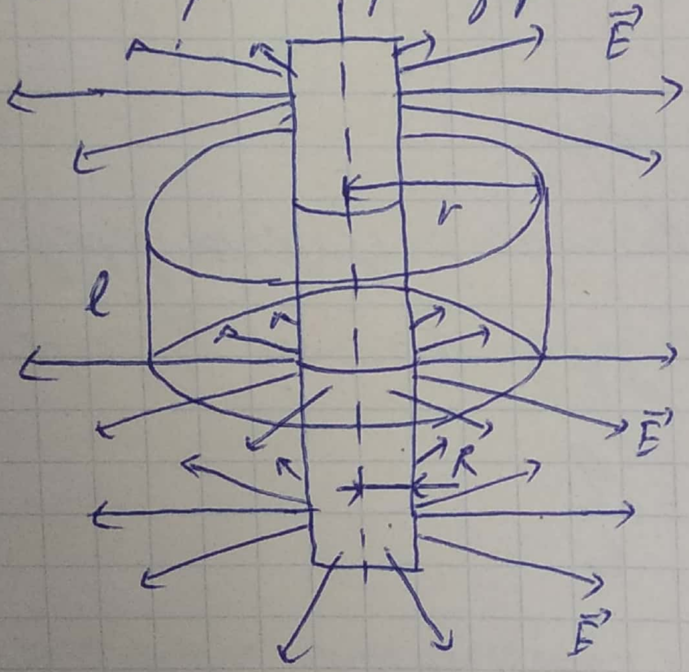


- За пределами сферы напряженность поля уменьшается как квадрат расстояния r

- Таким образом, при взаимодействии с внешними телами заряженная сфера проявляет себя так же, как точечный заряд.

- Внутри заряженной сферы напряженность поля равна нулю

2, Бесконечная равномерно заряженная нить



- Имеем бесконечную нить (или цилиндр малого диаметра) по которой равномерно распределен заряд q. Линейная плотность заряда $\tau = const$

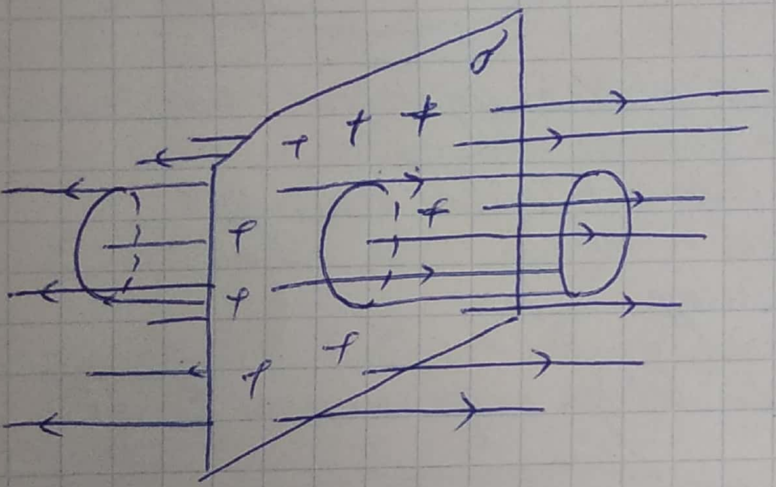
- Поток вектора E сквозь боковую поверхность цилиндра радиуса r по теореме Гаусса

$$E 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

Для напряженности электрического поля заряженной нити получаем

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}}$$

3. Бесконечная заряженная плоскость



– Имеем бесконечную плоскость, по которой равномерно распределен заряд q. Поверхностная плотность заряда $\sigma = const$

– В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр (См рис)

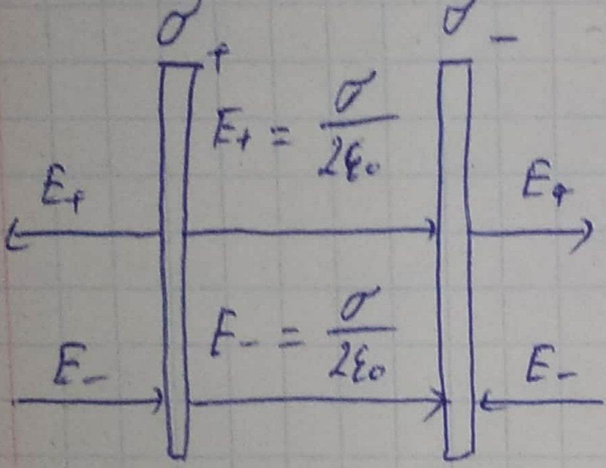
Поток вектора E сквозь торцевую поверхность площадью S

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

– Тогда напряженность электрического поля заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

4, Две параллельные заряженные плоскости



– Две бесконечные параллельные плоскости заряжены с постоянной поверхностной плотностью $+\sigma$ и $-\sigma$. В качестве замкнутой поверхности опять выберем цилиндр

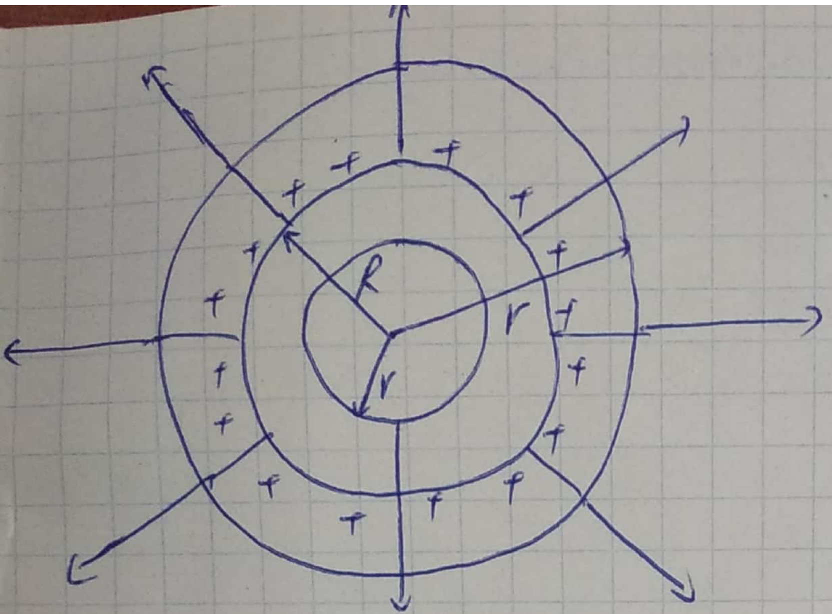
– Слева и справа от плоскостей вектора напряженности E_+ и E_- направлены навстречу друг к другу, поэтому напряженность здесь равна нулю.

– В области между пластинами вектора E_+ и E_- сонаправлены.

Получаем

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

5, Заряженный шар



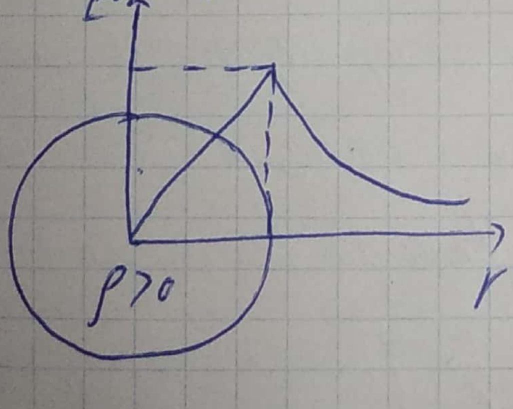
— Заряд q равномерно распределен по объему шара радиусом R. Рассчитаем поток вектора E через поверхность сферы радиуса r

А, Если $r > R$, то внутр сферы ~~шара~~ попадает весь заряд q целиком

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}} \qquad (r > R)$$

При взаимодействии с внешними телами равномерно заряженный шар проявляет себя так же, как заряженная сфера или точечный заряд

Б,



Если $r < R$, то внутрь сферы попадает лишь часть заряда q'

$$q' = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3$$

По теореме Гаусса

$$E 4\pi r'^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3}{\varepsilon_0}$$

Объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{4/3\,\pi R^3}$$

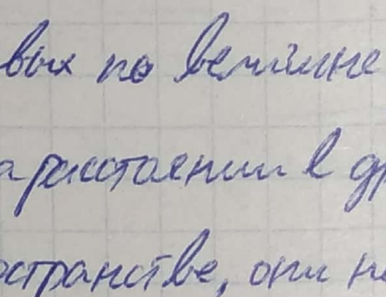
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \cdot r'} \qquad r' < R$$

4 Электрический диполь

– Электрический диполь – два одинаковых по величине разноименных точечных заряда q, находящихся на расстоянии l друг от друга. Так как заряды разнесены в пространстве, они не компенсируют друг друга и создают вокруг себя электрическое поле

– Электрический диполь характеризуется дипольным моментом: вектором, направленным от отрицательного к положительному заряду, и равный произведению величины заряда на плечо диполя

$$\boxed{\vec{q} = q\vec{l}}$$



⊛ Диполь во внешнем поле

— Диполь не только создает поле вокруг себя, но и реагирует на внешнее поле E, созданное другими источниками. Так как плечо l мало, напряженность внешнего поля в местах расположения +q и −q можно считать одинаковой. Тогда $F_+ = -F_- = qE$, т.е. суммарная сила, действующая на диполь, равна нулю.

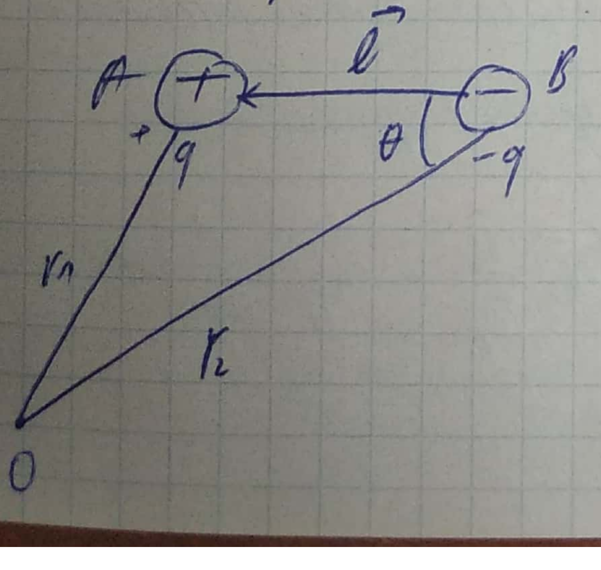
— Однако отличен от нуля момент сил M, что приводит к повороту диполя вокруг центра инерции во внешнем поле

$$\vec{M} = [\vec{r}_+, \vec{F}_+] + [\vec{r}_-, \vec{F}_-] = [\vec{r}_+, q\vec{E}] - [\vec{r}_-, q\vec{E}]$$

$$= [\vec{r}_+ - \vec{r}_-, q\vec{E}] = [\vec{l}, q\vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}]$$

Таким образом, электрическое поле напряженностью стремится повернуть диполь так, чтобы вектор P был сонаправлен вектор E

⊛ Потенциал и напряженность электрического поля диполя



С учетом суперпозиции

$$\varphi = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}$$

Из треугольника OAB находим

$$r_1^2 = r_2^2 + l^2 - 2r_2 l\cos\theta$$

Если ~~ле~~ плечо диполя мало по сравнению с расстоянием до точки O, то

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)\cdot(r_2 - r_1) = 2lr\cos\theta$$

$$r_2 - r_1 = \frac{2 \cdot l \cdot r \cdot \cos\theta}{2 \cdot r} = l \cdot \cos\theta$$

Для потенциала получаем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{p_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Напряженность поля электрического диполя рассчитаем через градиент потенциала в полярных координатах

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi$$

1, радиальная составляющая

Scanned by CamScanner

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = -\frac{P_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{2P_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

2, Азимутальная составляющая

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = -\frac{1}{r}\cdot\frac{P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta$$

$$= \frac{P_e \cdot \sin\theta}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0 r^3}$$

3, Модуль вектора

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{2P_e \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 + \left(\frac{P_e \cdot \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4P_e^2 \cdot \cos^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^6} + \frac{P_e^2 \cdot \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}}$$

$$= \frac{P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cdot\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cdot\cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta}$$

$$\boxed{E = \frac{P_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}$$

Напряженность поля электрического диполя.